



저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원 저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)



2012년 2월
석사(수학)학위논문

어떤 비선형 미분방정식과 변환

조선대학교 대학원

수학과

김 영 천

어떤 비선형 미분방정식과 변환

Certain nonlinear differential equation
and transformation

2011년 11월

조선대학교 대학원

수학과

김영천

어떤 비선형 미분방정식과 변환

지도교수 김 남 권

이 논문을 수학석사학위 논문으로 제출함

2011년 11월

조선대학교 대학원

수학과

김 영 천

김영천의 석사학위논문을 인준함

심사위원장 조선대학교 교수 정 윤 태 인

심사위원 조선대학교 교수 홍 성 금 인

심사위원 조선대학교 교수 김 남 권 인

2011년 11월

조선대학교 대학원

ABSTRACT

Certain nonlinear differential equation and transformation

Kim Young-Cheon

Advisor : Prof. Kim Namkwon

Department of Mathematics,

Graduate School of Chosun University

We consider analytical solutions to some ordinary differential equations via certain transformation in this paper. We concretely present a generalized Hopf-Cole transformation and use it to get an analytical solution to a certain family of second order ordinary differential equations with an exponential term. We also present an exact solution to a certain ordinary differential equation with an exponential term, which is similar to the reduced equation in the Maxwell sigma model.

목 차

ABSTRACT

I. 소개 및 기본정리들	1
II. 변형된 Liouville형의 미분방정식	13
III. 기타 지수형 미분방정식의 해	23
참 고 문 헌	28

I. 소개 및 기본정리들

상미분방정식은 하나의 독립변수에 관하여 하나 또는 그 이상의 종속변수의 미분 혹은 도함수를 포함하는 방정식을 뜻한다. 일반적인 형태로는 적당한 함수 $F: R^{m(n+1)+1} \rightarrow R^m$ 에 대하여

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}, x) = 0$$

으로 주어진다. 여기서 $y: D \subset R^m \rightarrow R^m$ 이다.

이러한 미분방정식의 해법에 관한 연구는 사회 및 자연현상을 예측, 분석하는 등의 많은 응용이 있다.

일반적으로 위의 미분방정식의 모든 해를 구하는 것은 쉬운 일이 아니지만, 적당한 조건하에서 상미분방정식의 초기값 문제의 해의 존재와 유일성에 관하여는 이미 알려져 있다. [1]

이 장에서는 알려진 기본적인 미분방정식의 해석적 해법을 정리해 보도록 하겠다.

정리1. 만약, $f(x, y)$ 가 공간 \mathbb{R}^{m+1} 안의 직사각형 영역

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : a \leq x \leq b, c_j \leq y_j \leq d_j, 1 \leq j \leq m\}$ 상에서 정의된 연속이고 Lipschitz condition를 만족하는 함수라면, R 상의 내점 (x_0, y_0) 을 포함하는 어떤 사각영역에서 $y' = f(x, y)$ 의 유일한 해가 존재한다.

증명) 함수 f 가 Lipschitz condition을 만족하므로

$$\sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{m+1}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|} < C$$

이다. 여기서 R 의 내부의 점 (x_0, y_0) 에 대해 사각영역

$R' = \{|x - x_0| \leq c, |y - y_0| \leq d\}$ 가 R 에 놓여 있다 하자.

만약 M 이 R 상에 $|f(x, y)|$ 의 최대치라면, $c, \frac{d}{M}$ 를 좀 더 작은것을 α 라 하

고 $|x - x_0| \leq \alpha$ 에 대해 $y(x_0) = y_0, y' = f(x, y)$ 를 만족하는 유일한 해를 가짐을 다음과 같이 증명할 수 있다. 즉, α 를 적절히 선택하여 $y(x_0) = y_0$ 를

만족하는 해 $y(x)$ 가 $|x - x_0| \leq \alpha$ 에 대해

R' 라는 영역에서 반드시 존재하게 되는 것을 보일 것이다.

$|y'(x)| \leq M$ 이므로 $|y(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$ 를 얻게 되고, $|x - x_0| \leq \frac{d}{M}$ 이므로

$|x - x_0| \leq \alpha$ 에 대해 $|y(x) - y_0| \leq d$ 를 보장하게 된다.

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

라하자. 이 초기치 문제는 $x \geq x_0$ 을 가정하는 것이 편리하다.

$x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ 에 대해 $|y_n(x) - y_0| \leq d$ 를 보이려면 $n=0$ 일 때에는 자명하고 (1.1)과 Lipschitz condition 으로 부터

$$|y_n(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t))| dt \leq (x - x_0)M \leq \alpha M \leq d$$

이 된다. 그러므로 모든 n 에 대해 $|y_n(x) - y_0| \leq d$ 를 알 수가 있다.

이렇게 하여 $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ 위에서 모든 n 에 대해 $(x, y_n) \in R'$ 보장되어 진다.

이제 (1.1)을 만족하는 연속함수 $y(x)$ 에 수열 $y_n(x)$ 가 균등수렴함을 보이기 위해서 다음의 무한급수를 생각해보면

$$y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots \quad (1.2)$$

이 급수의 n 번째까지의 부분합은 $y_n(x)$ 이다.

그리고 이 급수에 대해

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq C \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \\ &\leq CM \int_{x_0}^x (t - x_0) dt \leq \frac{MC(x - x_0)^2}{2!} \leq \frac{MC\alpha^2}{2!} \end{aligned}$$

귀납적으로 추론해보면,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MC^{n-1}\alpha^n}{n!} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

임을 알 수가 있다.

Weierstrass M test에 의해 (1.2)급수는 어떤 연속함수 $f(x)$ 에 균등수렴함으로 y_n 은 $0 \leq x - x_0 \leq \alpha$ 에서 y 로 균등수렴한다.

(1.1)식의 양변 극한을 취하게 되면,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(t)) dt \\
&= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt
\end{aligned}$$

그러므로 해의 존재성을 보이게 된 것이다. 또한, $f(x, y)$ 는 연속이기 때문에 그 해는 연속인 도함수를 갖는다.

이제 해의 유일성을 보이자.

만약 $z(x)$ 가 $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ 에서 또 다른 해라면

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \text{ 이고}$$

$$|y_n(x) - z(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, z(t))| dt$$

존재성증명 과정처럼 하면

$$|y_n(x) - z(x)| \leq \frac{MC^n \alpha^{n+1}}{(n+1)!} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha \quad (1.4)$$

$n \rightarrow \infty$ 로 하면 $|y(x) - z(x)| \leq 0$ 이 된다.

그러므로 $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ 에 대해 $y(x) = z(x)$ 가 된다.

즉 그 해는 유일하다. \square

위의 정리는 주어진 미분방정식의 초기값문제에 대한 존재성과 유일성에 해답을 주지만 해의 구체적인 값을 구하는 방법에 대해서는 도움을 주지 않는다. 이런 이유로 주어진 미분방정식의 정확한 해를 구하는 것은 전혀 다른 접근방법을 필요로 하며 본 논문의 연구주제이다.

이제 몇가지 기본적인 미분방정식의 해석적 해법을 정리해 보도록 하겠다.

함수 $y: D \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 1계 미분방정식 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 가 $\frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$ 의 형태로 나타낼 때 이러한 미분방정식을 변수분리형이라고 한다. [4]

정리2. $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 이고 원시함수 H, G 가 존재하면 $\frac{dy}{dx} = g(x) \frac{1}{h(y)}$ 의 해는 $H(y) = G(x) + C$ 를 만족한다.

증명) $h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$ 를 풀기 위하여 양변을 적분하게 되면,

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx$$

이 되고 h 의 원시함수를 H , g 의 원시함수를 G 라고 한다면 $H(y) = G(x) + C$ 가 된다. 이 형태는 해를 음함수적으로 표현한 것이다.

예제1. $(x-1)dy - ydx = 0$ 를 변수분리형으로 풀기 위해서 양변을 $y(x-1)$ 으로 나누게 되면

$$\frac{1}{y} dy - \frac{1}{x-1} dx = 0$$

이 된다. 양변을 적분하면

$$\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{x-1} dx = c_1$$

이 되고,

$$\ln|y| - \ln|x-1| = c_1$$

이 된다.

식을 정리하면 $\ln \frac{y}{x-1} = c_1$ 이 된다. $y = c_2(x-1)$ 이 됨을 알 수가 있다.

정의1. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 에서 $M(x,y), N(x,y)$ 이 같은 차수(n)의 동차함수일 때, 이러한 미분방정식을 n 차의 동차형이라고 한다. [4]

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 이 n 차의 동차형 미분방정식일 때,

$y = ux$ 또는 $x = vy$ 로 치환하면, 항상 변수분리형 미분방정식으로 변환되어 변수분리형 미분방정식의 해법으로 구한다.

예제2. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ 에서 적당히 양변을 나누어서 변수분리가 불가능하므로, 차수를 확인해 보면 2차의 동차함수임을 알 수가 있다. 그러므로 치환을 이용한다. $y = ux$ 로 치환하여 주어진 식에 대입하면,

$$(x^2 + u^2x^2)dx - 2ux^2(du + udx) = 0$$

이 된다. dx 항끼리, du 항끼리 정리해보면

$$(x^2 - u^2x^2)dx - 2ux^3du = 0$$

이 된다.

그리고, 양변을 변수분리하기 위해서 양변을 $x^3 - u^2x^3$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x}dx - \frac{2u}{1-u^2}du = 0$$

이 된다. 양변을 적분해서, $\ln|x| + \ln|1-u^2| = c_1$ 식을 정리하면,

$$\ln|x(1-u^2)| = c_1$$

이 되고, $x(1-u^2) = c_2$ 로 표현할 수가 있다.

다시 이 식에 $u = \frac{y}{x}$ 를 다시 대입하면, $x^2 - y^2 = c_2x$ 라는 음함수적으로

표현된 해를 구할 수가 있다.

정의2. 함수 $F(x,y)$ 가 사각형 모양의 영역 R 에서 정의되고

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ 와 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ 를 만족할 때,

$M(x,y)dx + N(x,y)dy$ 를 R 에서의 완전미분형이라고 한다. [4]

위 정의는 다시 말하면 $F(x,y)$ 의 전미분이 $dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ 이

될 때를 말한다. 여기에서 $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ 가 완전미분형일 때

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 을 완전미분방정식이라고 한다.

완전미분방정식인가를 확인할 수 있는 판별법으로 $M(x,y)$ 와 $N(x,y)$ 가 사각형인 영역 R 에서 연속인 1계 편미분을 가질 때,

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 이 완전미분방정식이기 위한 필요충분조건은

$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ 를 만족하면 된다.

정리3. C^1 합수 F 가 $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ 와 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ 일 때

$M dx + N dy$ 는 $F(x,y) = C$ 로 주어진다.

증명) $F(x,y)$ 가 $M dx + N dy$ 해라면 $\frac{d}{dx}F(x,y) = F_x + F_y y' = 0$ 이다. 따라서 적당한 실수 C 에 대해 $F(x,y) = C$ 이다. 거꾸로 y 가 $F(x,y) = C$ 를 만족하면 $(F(x,y))' = 0$ 이므로 $F_x + F_y y' = M + N y' = 0$ 이 되어 $M dx + N dy$ 를 만족한다.

예제3. 방정식 $(2x+y-3)dx + (x-4y+1)dy = 0$ 에서

$M = 2x+y-3$, $N = x-4y+1$ 로 볼 수 있다. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$ 이 되므로 완전미분방정식임을 알 수가 있다.

일반해 $F(x,y) = \int (2x+y-3)dx + g(y) = x^2 + xy - 3x + g(y)$ 에서 주어진 $F(x,y)$ 를 y 로 편미분을 해보면 $F_y(x,y) = x + g'(y)$ 가 $x-4y+1$ 과 같아야 하므로 $x + g'(y) = x-4y+1$ 에서 $g'(y) = -4y+1$ 이 된다. 다시 양변을 적분하게 되면 $g(y) = -2y^2 + y + C$ 된다. 주어진 식에 대입하면, 즉 일반해는 $x^2 + xy - 3x - 2y^2 + y = C$ 된다.

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 이 주어진 미분방정식에 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 의 관계가 항상

성립한다는 보장이 없을 때, 적당한 함수를 곱하여 완전미분방정식으로 변형하여 일반해를 구하는 방법을 생각할 수 있다. 이 때 이용하는 적당한 함수를 적분인자라 한다.

먼저 적분인자를 $F = x^a \cdot y^b$ 로 가정하여 완전미분방정식이 아닌 미분방정식에 곱하여 동차별로 정리한 후, 계수비교법을 이용하여 지수 a, b 를 구한다. 그리고, 지수를 이용하여 적분인자 $F = e^{\int p(x)dx}$ 모양의 형태를 이용하여 문제를 품다.

예제 4. $2\sin(y^2)dx + xy \cdot \cos(y^2)dy = 0$ 를 풀어보면 변수분리형 미분방정식으로도 해결 가능하다. 하지만 여기에선 적분인자를 이용해서

$M = 2\sin(y^2)$, $N = xy\cos(y^2)$ 라고 하자.

$M_y = 4y\cos(y^2)$, $N_x = y\cos(y^2)$ 이므로 완전미분방정식이 아니다. 그러므로 적분인자를 이용한 해법을 이용한다.

$\frac{1}{N}(M_y - N_x)$ 의 결과가 x 만의 함수이므로 $e^{\int \frac{1}{N}(M_y - N_x)dx}$ 를 적분인자로 한다. $\frac{1}{N}(M_y - N_x) = \frac{1}{x y \cos(y^2)}(3y\cos(y^2)) = \frac{3}{x}$ 이다.

즉, 적분인자는 $e^{\int \frac{3}{x}dx}$ 에서 풀면 $F = x^3$ 이다. 그리고 적분인자를 원식의 양변에 곱해서 식을 다시 정리하면,

$P = 2x^3\sin(y^2)$, $Q = x^4y\cos(y^2)$ 이 된다. 다시 완전미분방정식인지 아닌지 확인해보면, $P_y = 2x^32y\cos(y^2)$, $Q_x = 4x^3y\cos(y^2)$ 에서

$P_y = Q_x$ 이므로 완전미분방정식임을 알 수가 있다.

완전미분방정식 해법을 이용해서

$$f(x,y) = \int 2x^3\sin(y^2)dx + g(y) = \frac{1}{2}x^4\sin(y^2) + g(y)$$

$f(x,y)$ 를 y 에 대해 편미분을 하면, $f_y = x^4y\cos(y^2) + g'(y)$ 은 $x^4y\cos(y^2)$ 와 같아야 하므로 $g'(y) = 0$ 이 된다. 다시 적분을 하게되면, $g(y) = C$ 가 된다. 즉 일반해는 $\frac{1}{2}x^4\sin(y^2) + C = 0$ 이다.

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ 형태의 방정식을 2계 선형미분방정식이라 한다. 여기에서 $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$ 는 어떤 구간 I 에서 정의된 연속함수이다. 그리고 a_0 , a_1 , a_2 가 상수일 때를 계수가 상수인 미분방정식이라고 한다.

$a_2(x) \neq 0$ 인 경우 양변을 나누면 식은 $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ 형태로 바꿀 수가 있다. 특징적으로 $g(x)$ 값에 따라서

$g(x) = 0$ 일 때의 방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 을 제차방정식이라 하고,

$g(x) \neq 0$ 일 때의 방정식을 비제차방정식이라 한다.

계수가 상수인 2계 제차 선형 방정식 $ay'' + by' + cy = 0$ 에서 이 방정식의 특징적인 모양을 보면, 해의 미분형태에 상수를 곱하여 더한 것이 0이 됨을 알 수가 있는데 $y = e^{mx}$ 은 미분이 e^{mx} 에 상수를 곱한 형태이므로 해의 모양으로 적합함을 알 수가 있다.

그러므로 해를 접근함에 있어서 $y = e^{mx}$ 를 해라 하고 주어진 방정식에 대입함으로써 2계 제차선형방정식을 풀어갈 수가 있다.

$ay'' + by' + cy = 0$ 에 $y = e^{mx}$ 를 대입하면 $am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$ 이 된다. 식을 정리하면 $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$ 이 된다.

여기에서 $e^{mx} \neq 0$ 이므로 $am^2 + bm + c = 0$ 이 된다.

즉, $y = e^{mx}$ 가 미분방정식의 해가 된다는 것은 m 이 방정식 $am^2 + bm + c = 0$ 을 만족하는 것과 같다. 이러한 방정식을 제차방정식에 대한 특성방정식이라 한다.

특성방정식의 근은 근의 공식에 의하여 $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 와

$m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 가 되는데 판별식 즉, $b^2 - 4ac$ 의 부호에 따라 서로 다른 실근과 중근 그리고 복소수근이 될 수 있다. 그러므로 판별식의 부호에 따라 특성방정식의 근이 달라진다.

정리해 보면, 이 특성방정식의 근에 따라 2계 제차선형방정식의 근이 달라지는 것이다.

예제5. $y'' - 5y' + 6y = 0$ 를 풀기 위해 $y = e^{mx}$ 이라고 하면,

$y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$ 가 되므로 주어진 식에 대입해서 정리해 보면 $m^2e^{mx} - 5me^{mx} + 6e^{mx} = 0$, $e^{mx}(m^2 - 5m + 6) = 0$ 가 된다.

$e^{mx} \neq 0$ 이므로 $m^2 - 5m + 6 = 0$ 이어야 한다.

즉, 특성방정식의 해를 구해보면 $m = 2, 3$ 가 됨을 알 수가 있다.

일반해는 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ 이 된다.

예제6. $y'' - 6y' + 9y = 0$ 를 풀기 위해 예제5번처럼 똑같은 절차에 따라 문제를 풀어가면,

특성방정식은 $m^2 - 6m + 9 = 0$, $m = 3$ (중근)을 갖게 된다.

그러므로 일반해 $y = C_1 e^{-3x} + x C_2 e^{-3x}$ 이 된다.

예제7. $y'' + 4y' + 7y = 0$ 를 풀기 위해 예제5번처럼 똑같은 절차에 따라 문제를 풀어가면, 특성방정식은

$$m^2 + 4m + 7 = 0, \quad m = -2 \pm \sqrt{3i}, \quad \alpha = -2, \quad \beta = \sqrt{3}$$

을 갖는다. 그러므로 일반해는

$$y = C_1 e^{-2x} \cos(\sqrt{3}x) + C_2 e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$$

형태로 답이 표현이 된다.

정리4. $y_p(x)$ 가 $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ 의 특수해이고, $y_1(x)$ 과 $y_2(x)$ 가 제차방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 의 1차독립인 해라 하면 비제차방정식의 일반해는 $y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 로 표현이 된다.

증명) $\Phi(x)$ 가 비제차방정식의 해일 때, $\Phi(x)$ 와 $y_p(x)$ 는 모두 비제차방정식의 해이므로 중첩법칙에 의해 $\Phi(x) - y_p(x)$ 는 제차방정식의 해가 된다.

그러므로 y_1 과 y_2 가 제차방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 의 해라면, 상수 C_1 과 C_2 에 대해서 y_1 과 y_2 의 1차결합인 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 도

제차방정식의 해가 되는 해의 1차결합의 성질에 의해 적당한 상수 C_1 과 C_2 에 대해서 $\Phi(x) - y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 이고 이것은 주어진 일반해와 동치이다.

예제8. $y_p(x) = x^2$ 가 비제차방정식 $y'' - y = 2 - x^2$ 의 특수해일 때, 방정식의 일반해는 먼저 비제차방정식에 상응하는 제차방정식의 해부터 먼저 구해보면, $y'' - y = 0$ 의 특성방정식은 $m^2 - 1 = 0$ 으로

$m = \pm 1$ 이 된다. 그러므로, 일반해는 $y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 이다.

주어진 방정식의 일반해는 $y(x) = x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 가 된다.

정의3. $y' + p(x)y = q(x)y^n$ 에서 $n \neq 0, 1$ 이 아닌 미분방정식을 *Bernoulli 미분방정식*이라고 말한다. *Bernoulli 미분방정식*의 미분방정식

은 다음과 같은 방법으로 그 해를 구할 수 있다.

우선 양변을 y^n 으로 나누면 $\frac{1}{y^n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$ 가 되는데

이 형태는 비선형 미분방정식이다. 변수변환을 하기 위해서, $y^{1-n} = u$ 라고 치환한 뒤 양변을 미분하면, $(1-n)y^{-n}y' = u'$ 이다. 식을 변형해서,

$\frac{y'}{y^n} = \frac{u'}{1-n}$ 임을 알 수가 있다. 다시 주어진 식에 대입해보면,

$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x)$ 이 된다. 식을 다시 정리해보면,

$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$ 이 된다. 이 식을 관찰해보면 1계 선형 미분방정식임을 알수 있다.

따라서, u 에 대한 1계 선형 미분방정식의 해법을 적용한 후, 다시

$u = y^{1-n}$ 으로 치환을 되돌리면 미분방정식의 해를 구할 수 있다.

즉 정리하자면, 우변을 x 만의 함수만 남도록 미분방정식을 정리한 뒤 y' 이 없는 항을 적당한 형태로 치환하면 1계 선형미분방정식의 해법을 적용할 수 있게 된다.

예제9. $x\frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$ 을 풀어보면 주어진 미분방정식의 양변을 x 로 나

누어 변형하면, $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = y^3$ 이 된다.

이 식은 $n=3$ 인 Bernoulli 미분방정식이다.

변형된 Bernoulli 미분방정식의 양변을 y^3 으로 나눈다.

$y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y^{-2} = 1$ 에서 $y^{-2} = u$ 로 치환한 후 양변을 x 에 대해서 미분하면,

$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ 이 된다. 주어진 식에 대입해보면,

$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 1$ 이 된다. 식을 정리해보면, $\frac{du}{dx} - \frac{4}{x}u = -2$ 이 된다.

정리한 식이 1계 선형 미분방정식이므로

$u = e^{\int \frac{4}{x} dx} \left[\int -2e^{-\int \frac{4}{x} dx} dx + C \right] = x^4 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{x^3} + C \right)$ 이 된다. $y^{-2} = u$ 에 다시 대입하

면 $y^{-2} = \frac{2}{3}x + Cx^4$ 이 된다.

$y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x)y^2 = 0$ 형태의 미분방정식을 Riccati 미분방정식이라 말한다. 즉, Bernoulli 미분방정식과 비교해보면 $n=2$ 이고 항이 하나 더 추가된 모양을 가지고 있다.

$p(x)=0$ 이면 $\Rightarrow y'' + q(x)y' + r(x)y^2 = 0 \Rightarrow$ Bernoulli 미분방정식

$r(x)=0$ 이면 $\Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \Rightarrow$ 1계 선형미분방정식이 된다.

우선 Riccati 미분방정식을 만족하는 한 해를 y_1 으로 가정한다.

일반해는 $y = y_1 + u$ 로 구할 수 있다. 여기에서 u 는 어떤 함수를 나타낸다. 주어진 Riccati 미분방정식에 $y = y_1 + u$ 를 대입하면

$$y'_1 + u' + p(x) + q(x)(y_1 + u) + r(x)(y_1 + u)^2 = 0$$

이 된다. 이 식을 정리하면

$$y'_1 + p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2 + u' + (q(x) + 2y_1r(x))u + r(x)u^2 = 0$$

가 된다.

위에서 $w = y'_1 + p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2$ 이라고 하면 $w = 0$ 이 되어야 한다.

($\because y_1$ 은 미분방정식의 해이므로)

그러므로, $u' + (q(x) + 2y_1r(x))u + r(x)u^2 = 0$ 이 된다. 따라서 u 에 대한 1계 선형미분방정식의 해법을 적용한 후, 치환 등의 방법에 의해서 미분방정식의 해를 구할 수 있게 된다.

다시 정리해보면, 우선 주어진 미분방정식을 만족하는 해(y_1)을 가정한다.

일반해를 $y = y_1 + u$ 로 가정하여 주어진 미분방정식에 대입해보면

모양이 Bernoulli 미분방정식 또는 1계 선형미분방정식의 모양을 갖추게 된다. 모양이 만들어지면, 각각에 맞는 해법에 의해 풀면 해를 구할 수 있게 된다.

예제 10. $y' = x^3(y-x)^2 + x^{-1}y$, $y=x$ 라고 주어질 때 이 문제를 풀기 위해서 주어진 미분방정식의 우변의 식을 정리하면

$$x^3(y^2 - 2xy + x^2) + x^{-1}y = x^5 + x^3y^2 - 2x^4y^2 + x^{-1}y$$

이 된다. 여기에서, 일반해를 $y = x + u$ 라고 하면, 양변을 x 에 대해서 미분하면 $y' = 1 + u'$ 이다.

$y' = 1 + u'$ 를 주어진 식에 대입하면

$$(1 + u') = x^3 u^2 + x^{-1} (x + u) = x^3 u^2 + 1 + x^{-1} u$$

이 된다. 식을 정리하면 $u' - \frac{1}{x} u = x^3 u^2$ 이 된다.

이 식은 u 에 대한 Bernoulli 미분방정식이므로 Bernoulli 미분방정식 해법

을 적용시켜보면 우선 양변을 u^2 으로 나누면 식은

$$\frac{1}{u^2} u' - \frac{1}{x} \frac{1}{u} = x^3 \text{이 된다.}$$

변수변환을 위해 $u^{-1} = w$ 로 치환하면 양변을 u 에 대해 미분하면

$$-u^{-2} du = dw \text{이고 더 정리하면, } -\frac{1}{u^2} u' = w' \text{이라고 할 수 있다.}$$

주어진 식에 대입해보면,

$$-w' - \frac{1}{x} w = x^3 \text{이 되고, 양변에 음수를 곱하면 } w' + \frac{1}{x} w = -x^3 \text{이다.}$$

$$w = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int -x^3 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = -\frac{1}{5} x^4 + C x^{-1}$$

이 된다.

$$u = \frac{1}{-\frac{1}{5} x^4 + C x^{-1}} \text{이므로}$$

$$y = x + \frac{1}{-\frac{1}{5} x^4 + C x^{-1}}$$

이 됨을 알 수가 있다.

II. 변형된 Liouville형의 미분방정식

Hopf-Cole 변환은 1950년대에 제시되어서 Burgers 방정식을 해석적으로 해결하는데 많은 도움을 주었다. [2]

Hopf-Cole 변환은 구체적으로 다음과 같이 주어진다.

$$v = c \frac{u_x}{u}, \quad c \in R$$

이 변환을 이용하면 Burgers 방정식 $v_t + v \cdot v_x = v_{xx}$ 은 다음과 같아 바뀐다.

$$v_t = c \frac{u_{xt}u - u_tu_x}{u^2}, \quad v \cdot v_x = c \frac{u_x}{u} \frac{u_{xx} - u_x^2}{u^2}, \quad v_{xx} = c \left(\frac{u_{xxx}}{u} - 3 \frac{u_{xx}u_x}{u^2} + 2 \frac{u_x^3}{u^3} \right)$$

를 방정식에 대입해서 정리해보면

$$c \frac{u_{xt}u - u_xu_t}{u^2} + \frac{c^2u_x}{u} \frac{u_{xx}u - u_x^2}{u^2} = c \left(\frac{u_{xxx}}{u} - 3 \frac{u_{xx}u_x}{u^2} + 2 \frac{u_x^3}{u^3} \right)$$

이다. 양변에 u^2 을 곱하면

$$cu_{xt}u - cu_xu_t + c^2 \frac{u_xu_{xx}u - u_x^3}{u} = cuu_{xxx} - 3cu_{xx}u_x + c \frac{2u_x^3}{u}$$

이다. 식을 정리하면

$$cu_{xt}u - cu_xu_t + c^2u_xu_{xx} - c^2 \frac{u_x^3}{u} = cuu_{xxx} - 3cu_{xx}u_x + c \frac{2u_x^3}{u}$$

이다.

여기에서 식을 더 정리하기 위해 $-c^2 = 2c$ 가 되는 $c = -2$ 를 잡으면 식은 더 정리가 된다.

$$cu_{xt}u - cu_xu_t + c^2u_xu_{xx} = cuu_{xxx} - 3cu_{xx}u_x$$

에서 공통부분으로 둑어보면

$$u(u_t - u_{xx})_x = u_x(u_t - u_{xx})$$

이 된다. u 가 0이 아니면,

$$\frac{(u_t - u_{xx})_x}{u} - \frac{u_x}{u^2}(u_t - u_{xx}) = 0$$

이 된다. 이 식은 다시 $\ln \left| \frac{u_t - u_{xx}}{u} \right| = c$ 가 된다. 양변에 지수를 취하게 되면 $u_t - u_{xx} = du \circ]$ 된다.

우리는 이 장에서 일반화된 **Hopf-Cole 변환**을 도입하고 이를 이용하여 변형된 Liouville 형태의 미분방정식의 해를 구해본다.

함수 $y: D \rightarrow R$ 에 의한 일반화된 **Hopf-Cole 변환**을 다음과 같이 정의한다.

$$w = f(y)y' , \quad \int w = z$$

보조정리1. $y'' = ay' + by + g(x)$ 의 해 y 에 대해 $w = f(y)y'$ 이라 하고 $\int w = z$ 이라고 하면, z 는

$$z'' = \frac{f'}{f^2} z'^2 + az' + byf + gf \quad (2.1)$$

를 만족한다.

증명) $w = f(y)y' = (F(y))'$ 으로 놓고 양변을 적분을 하고, $\int w = z \circ]$ 라고 하면, $z = F(y) + c$ 이 된다.

식을 정리하면, $z - c = F(y)$ 가 된다. 그리고 역함수 관계에 의해 $F^{-1}(z - c) = y$ 을 얻을 수 있다. y' 을 얻기 위해서 양변을 미분해주면, $y' = (F^{-1}(z - c))'$ 가 되므로 우변을 풀어주면,

$$y' = (F^{-1})'(z - c)z' = \frac{z'}{F'(F^{-1}(z - c))} = \frac{z'}{f(y)}$$

이 된다.

다시, y'' 을 구하기 위해 위에서 구한 y' 을 다시 미분해주면

$y'' = (\frac{z'}{f(y)})'$ 우변을 뭇미분법에 의해 $\frac{z''f(y) - z'f'(y)y'}{f^2(y)}$ 이 된다. 위에서 구한 y, y', y'' 을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{z''f(y) - z'f'(y)y'}{f^2(y)} = a\frac{z'}{f(y)} + by + g(x)$$

이 된다.

식을 정리하기 위해서 양변에 $f^2(y)$ 를 곱해주면,

$$z''f(y) - z'f'(y)y' = af(y)z' + byf^2(y) + g(x)f^2(y)$$

을 얻을 수가 있다.

z 에 대한 미분방정식으로 정리하기 위해 정리해주면,

$$f(y)z'' = f'(y)y'z' + af(y)z' + byf^2(y) + g(x)f^2(y)$$

가 된다. 양변에 $f(y)$ 를 곱해주면,

$$z'' = \frac{f'(y)}{f(y)}y'z' + az' + byf(y) + g(x)f(y)$$

가 되고,

여기에서 $y' = \frac{z'}{f(y)}$ 이므로 y' 대신 대입해주면, (2.1)을 얻을 수 있다.

정리 1. $y'' = dy'^2 + ay' + \frac{b}{d} - g(x)e^y$ 의 해는 $y = f(z)z' = -\frac{z'}{dz + c_1}$ 로 주어진다.

여기서, z 는 $z'' + az' + bz = g(x)$ 의 해이다.

증명) $\frac{f'(y)}{f^2(y)} = d(\text{상수})$ 라면 $\frac{f'}{f^2} = d$ 에서 양변을 적분하면, $-\frac{1}{f} = dy + c_1$ 이 되

고

식을 정리하면 $f = -\frac{1}{dy + c_1}$ 이 된다. 양변을 다시 y 에 대해 적분하면

$F = -\frac{1}{d} \ln dy + c_1$ 이 된다. 역함수 성질을 이용하면

$$F^{-1}(y) = \frac{e^{-dy} - c_1}{d}$$

의 모양으로 정리가 된다.

여기에서 y 대신 $z - c$ 를 대입하면,

$$F^{-1}(z - c) = \frac{e^{-d(z - c)} - c_1}{d}$$

이 된다.

구한 $F^{-1}(z - c)$ 를 y 대신 대입하면,

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(F^{-1}(z-c)) = f\left(\frac{e^{-d(z-c)} - c_1}{d}\right) \\
&= -\frac{1}{d\left(\frac{e^{-d(z-c)} - c_1}{d}\right) + c_1} = -\frac{1}{e^{-d(z-c)} - c_1 d + c_1}
\end{aligned}$$

이 된다.

(2.1)식에 위에서 나온 결과들을 대입하면

$$z'' = dz'^2 + az' + bF^{-1}(z-c)f(y) + g(x)f(y)$$

가 되고, 구한 식들을 다 대입하면,

$$z'' = dz'^2 + az' + b\frac{e^{-(z-c)} - c_1}{d}\left(-\frac{1}{e^{-(z-c)} - c_1 d + c_1}\right) + g(x)\left(-\frac{1}{e^{-(z-c)} - c_1 d + c_1}\right)$$

이 된다.

여기에서 만약에 c 와 c_1 을 0으로 한다면

$$z'' = dz'^2 + az' + \frac{b}{d} + g(x)(-e^z)$$

가 된다.

정리 2. 미분방정식

$$\begin{aligned}
y'' &= -\frac{y'^2}{(k-2)y} + ay' + \frac{b(k-2)^2}{k-1}y + \frac{c_1(k-2)}{k-1}b((1-k)y)^{-\frac{1}{k-2}} \\
&\quad + g(x)((1-k)y)^{-\frac{1}{k-2}}
\end{aligned}$$

의 해 y 는

$$y = f(z)z' = \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2}z + (k-1)c_1\right)^{-\frac{1}{k-1}}z'$$

로 주어진다.

여기서 z 는 $z'' + az' + bz = g(x)$ 의 해이다.

$$\text{특히, } y'' = -\frac{y'^2}{(k-2)y} + ay' + \frac{b(k-2)^2}{k-1}y \text{의 해는}$$

$$y = \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2}z\right)^{-\frac{1}{k-1}}z'$$

로 주어진다.

증명) $\frac{f'}{f^2} = \frac{k-1}{k-2} f^{k-2}$ ($k \neq 2$) 라면 양변을 f^{k-2} 으로 나누면 $\frac{f'}{f^k} = \frac{k-1}{k-2}$ 이 된다.

양변을 적분을 하면

$$-\frac{1}{k-1} f^{-(k-1)} = \frac{k-1}{k-2} y + c_1$$

이 된다.

구해진 식 양변에 $-(k-1)$ 을 곱하면

$$f^{-(k-1)} = -\frac{(k-1)^2}{k-2} y - (k-1)c_1$$

이 된다.

식을 정리하면

$$f^{k-1} = \frac{1}{-\frac{(k-1)^2}{k-2} y - (k-1)c_1}$$

이 되고, 양변에 $\frac{1}{k-1}$ 승을 해주면

$$f = \left(\frac{1}{-\frac{(k-1)^2}{k-2} y - (k-1)c_1} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

이 된다. 지수법칙에 의해 식을 정리하면

$$f = \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2} y + (k-1)c_1 \right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

을 얻을 수 있다.

이 식을 양변에 y 에 대해서 적분을 해주게 되면,

$$\begin{aligned} F &= -\frac{k-1}{k-2} \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2} y + (k-1)c_1 \right)^{\frac{k-2}{k-1}} \frac{k-2}{(k-1)^2} \\ &= -\frac{1}{k-1} \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2} y + (k-1)c_1 \right)^{\frac{k-2}{k-1}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

식의 양변에 $-(k-1)$ 를 곱하면

$$-(k-1)F = \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2} y + (k-1)c_1 \right)^{\frac{k-2}{k-1}}$$

이 되고

다시 양변에 $\frac{k-1}{k-2}$ 승을 해주면, 식은

$$(-(k-1)F)^{\frac{k-1}{k-2}} = -\frac{(k-1)^2}{k-2}y + (k-1)c_1$$

이 된다.

$-\frac{(k-1)^2}{k-2}y$ 이 대해서 정리하면,

$$\frac{(k-1)^2}{k-2}y = -((1-k)F)^{\frac{k-1}{k-2}} + (k-1)c_1$$

이 된다.

다시 양변을 $\frac{(k-1)^2}{k-2}$ 로 나눠주면,

$$y = \frac{-((1-k)F)^{\frac{k-1}{k-2}}}{\frac{(k-1)^2}{k-2}} + \frac{c_1}{\frac{k-1}{k-2}}$$

이 된다.

이렇게 해서 y 를 구했고, 이젠 $f(y)$ 를 구해보자.

위에서 구한 y 를 대입을 해보면,

$$f(y) = \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2} \left(-\frac{((1-k)f)^{\frac{k-1}{k-2}}}{\frac{(k-1)^2}{k-2}} + \frac{c_1}{\frac{k-1}{k-2}} \right) + (k-1)c_1 \right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

이 된다.

우변을 정리해주면,

$$f(y) = (((1-k)F)^{\frac{k-1}{k-2}} - (k-1)c_1 + (k-1)c_1)^{-\frac{1}{k-1}}$$

이고,

$$f(y) = ((1-k)F)^{-\frac{1}{k-2}}$$

이 된다. 여기에서, F 대신 $z-c$ 를 대입하면

$$f(y) = ((1-k)(z-c))^{-\frac{1}{k-2}}$$

이 된다. $f^2(y)$ 를 구하기 위해서 위에서 구한 $f(y)$ 를 제곱해주면

$$f^2(y) = ((1-k)(z-c))^{-\frac{2}{k-2}}$$

이 된다.

$f'(y)$ 를 구해보면,

$$f'(y) = \frac{1}{k-2}((1-k)(z-c))^{\frac{-k+1}{k-2}}(k-1)w = ((1-k)(z-c))^{\frac{-k+1}{k-2}}\frac{k-1}{k-2}w$$

이 된다.

$\frac{f'}{f^2} = \frac{k-1}{k-2}f^{k-2}$ 에 위에서 구한 것들을 대입해주면,

$$\frac{f'(y)}{f^2(y)} = -((1-k)(z-c))^{\frac{-k+3}{k-2}}\frac{k-1}{k-2}z$$

이 된다. 그리고,

$$yf(y) = \frac{1}{\frac{(k-1)^2}{k-2}}(k-1)(z-c) + \frac{c_1}{\frac{k-1}{k-2}}((1-k)(z-c))^{\frac{-1}{k-2}}$$

이 된다.

(2.1)식에 구한 것들을 다 대입해주면, 식은

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{k-1}{k-2}((1-k)(z-c))^{-1}z'^2 + az' + b\left(\frac{k-1}{k-2}(z-c)\right) \\ &\quad + \frac{c_1}{\frac{k-1}{k-2}}((1-k)(z-c))^{\frac{-1}{k-2}} + g(x)((1-k)(z-c))^{-\frac{1}{k-2}} \end{aligned}$$

구한 식을 모양을 더 간단히 하기 위해 $c=0$ 을 대입해주면,

$$\begin{aligned} z'' &= -\frac{z'^2}{(k-2)z} + az' + \frac{b(k-2)^2}{k-1}z + \frac{c_1(k-2)}{k-1}b((1-k)z)^{-\frac{1}{k-2}} \\ &\quad + g(x)((1-k)z)^{-\frac{1}{k-2}} \end{aligned}$$

이 된다. 조건을 더 제약해서 $c_1=0, g=0$ 이 라면

$$y'' = -\frac{y'^2}{(k-2)y} + ay' + \frac{b(k-2)^2}{k-1}y$$

의 해 y 는

$$y = f(z)z' = \left(-\frac{(k-1)^2}{k-2}z\right)^{-\frac{1}{k-1}}z'$$

로 주어진다.

여기서 z 는 $z'' + az' + bz = g(x)$ 의 해이다.

정리 3. 미분방정식

$$y'' = ay'(c_1^2 - y^2) - 2yy'^2 + \frac{b(c_1^2 - y^2)^2}{2c_1} \ln \frac{c_1 + y}{c_1 - y} + g(x)(c_1^2 - y^2)^2$$

이해는

$y = c_1 \tanh(c_1 w)$ 로 주어진다.

여기서 w 는 $w'' = aw' + bw + g(x)$ 의 해이다.

증명) $y'' = ay' + by + g(x)$ 에서 $w = c_1 \tanh(c_1 y)$ 이라면 양변을 c_1 으로 약분하면, 식은 $\tanh(c_1 y) = \frac{w}{c_1}$ 이다.

역함수 성질에 의해 $\tanh^{-1}\left(\frac{w}{c_1}\right) = c_1 y$ 이다. 여기서

$y = \frac{1}{c_1} \tanh^{-1}\left(\frac{w}{c_1}\right)$ 으로 변형이 가능하다.

그리고 $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \frac{c_1 + w}{c_1 - w}$ 를 이용한다. x 대신 $\frac{w}{c_1}$ 을 대입하면,

$$y = \frac{1}{c_1} \frac{1}{2} \ln \frac{c_1 + w}{c_1 - w}$$

이 된다.

y' 을 구하기 위해서 양변을 미분하게 되면,

$$y' = \frac{1}{2c_1} \frac{2c_1 w'}{(c_1 + w)(c_1 - w)} = \frac{w'}{(c_1 + w)(c_1 - w)}$$

이 된다. 다시, y' 을 양변 미분하게 되면,

$$y'' = \frac{w''(c_1^2 - w^2) + w'2ww'}{(c_1^2 - w^2)^2}$$

을 구하게 된다.

위에서 구한 y, y', y'' 를 $y'' = ay' + by + g(x)$ 에 대입하면,

$$\frac{w''(c_1^2 - w^2) + 2ww'^2}{(c_1^2 - w^2)^2} = a \frac{w'}{(c_1^2 - w^2)} + b \frac{1}{2c_1} \ln \frac{c_1 + w}{c_1 - w} + g(x)$$

이 된다.

식을 정리해 보면

$$\frac{1}{(c_1^2 - w^2)^2} w'' = a \frac{w'}{(c_1^2 - w^2)^2} - \frac{2w w'^2}{(c_1^2 - w^2)^2} + b \frac{1}{2c_1} \ln \frac{c_1 + w}{c_1 - w} + g(x)$$

이다.

주어진 식 양변에 $(c_1^2 - w^2)^2$ 을 곱해서 식을 더 정리하면,

$$w'' = aw' (c_1^2 - w^2) - 2w w'^2 + \frac{b(c_1^2 - w^2)^2}{2c_1} \ln \frac{c_1 + w}{c_1 - w} + g(x) (c_1^2 - w^2)^2$$

이 된다.

정리 4. 미분방정식

$$y'' = -\frac{2}{c_1} \tan\left(\frac{y}{c_1}\right) y'^2 + ay' + bc_1 \sin\left(\frac{y}{c_1}\right) \cos\left(\frac{y}{c_1}\right) + c_1^2 \cos^2\left(\frac{y}{c_1}\right) g(x)$$

이해는

$$y = c_1 \tan^{-1}(c_1 w)$$

로 주어진다.

여기서 w 는 $w'' = aw' + bw + g(x)$ 의 해이다.

증명) $y'' = ay' + by + g(x)$ 에서 $w = c_1 \tan^{-1}(c_1 y)$ 라면 양변을 c_1 으로 나누면

$$\tan^{-1}(c_1 y) = \frac{w}{c_1}$$
이 된다.

역함수의 성질에 의해 식을 정리하면, $c_1 y = \tan\left(\frac{w}{c_1}\right)$ 이 된다.

주어진 식에 양변을 c_1 로 나누면 $y = \frac{1}{c_1} \tan\left(\frac{w}{c_1}\right)$ 이 된다.

$$y = \frac{1}{c_1} \tan\left(\frac{w}{c_1}\right)$$
 양변을 미분하면

$$y' = \frac{1}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w'}{c_1}$$

을 알게 된다.

다시 양변을 미분하게 되면,

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{2}{c_1} \sec\left(\frac{w}{c_1}\right) (\sec\left(\frac{w}{c_1}\right))' \frac{w'}{c_1} + \frac{1}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w''}{c_1} \\
&= \frac{2}{c_1} \sec\left(\frac{w}{c_1}\right) \sec\left(\frac{w}{c_1}\right) \tan\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w'}{c_1} \frac{w'}{c_1} + \frac{1}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w''}{c_1} \\
&= \frac{2}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \tan\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w'^2}{c_1^2} + \frac{1}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w''}{c_1}
\end{aligned}$$

o] 된다.

위에서 구한 y, y', y'' 을 $y'' = ay' + by + g(x)$ 에 대입하면,

$$\frac{2}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \tan\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w'^2}{c_1^2} + \frac{1}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w''}{c_1} = a \frac{1}{c_1} \sec^2\left(\frac{w}{c_1}\right) \frac{w'}{c_1} + b \frac{1}{c_1} \tan\left(\frac{w}{c_1}\right) + g(x)$$

o] 되고,

o] 식을 w 에 대한 미분방정식으로 표현하면

$$w'' = -\frac{2}{c_1} \tan\left(\frac{w}{c_1}\right) w'^2 + aw' + bc_1 \sin\left(\frac{w}{c_1}\right) \cos\left(\frac{w}{c_1}\right) + c_1^2 \cos^2\left(\frac{w}{c_1}\right) g(x)$$

o] 된다.

III. 기타 지수형 미분방정식의 해

마지막으로 다음과 같은 미분방정식을 생각해보자.

$$\frac{1}{x}(xy')' = e^y \quad (x > 0) \quad (3.1)$$

이 미분방정식은 수리물리학에서 Sigma 모델이라고 불리는 모델에서 나타나는 미분방정식과 밀접한 관계가 있다. [3]

$\ln x = t$ 라고 하고 양변을 미분하면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 가 된다.

또한 $\ln x = t$ 에서 $x = e^t$ 이고 양변 제곱하면 $x^2 = e^{2t}$ 이다.

여기서 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ 이 데 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x}$ 이다.

식을 변형하면 $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ 되고, $xy' = \frac{dy}{dt}$ 로 표현할 수가 있다.

다시 $xy' = \frac{dy}{dt}$ 을 (3.1)식에 대입하면,

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) = e^y$$

이 된다.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \text{이므로,}$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = e^y$$

이 된다.

$x^2 = e^{2t}$ 이므로 대입해서 정리하면,

$$\frac{1}{e^{2t}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = e^y$$

가 되고, 양변에 e^{2t} 을 곱하면,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^{y+2t}$$

이 된다. 이 식에서 $y+2t = z$ 라고 치환하면,

$\frac{d}{dt^2}(z - 2t) = e^z$ 이다. 식을 정리하면, $\frac{d}{dt^2}z = e^z$ 된다.

양변에 z' 를 곱하면, $\frac{dz}{dt^2}z' = e^z z'$ 된다.

다시 이 식의 양변을 적분하게 되면, $\frac{1}{2}z'^2 = e^z + c_1$ 고 양변을 정리하면

$$z'^2 = 2e^z + 2c_1 = 2e^z + c_1 \text{이다.}$$

제곱을 풀면 $z' = \pm \sqrt{2e^z + c_1}$ 이고 양변을 $\sqrt{2e^z + c_1}$ 으로 나누면

$\frac{z'}{\sqrt{2e^z + c_1}} = \pm 1$ 가 되고 양변을 적분하게 되면

$$\int \frac{z'}{\sqrt{2e^z + c_1}} dz = \pm t + c_2 \quad (3.2)$$

을 얻는다. 이어서 $\sqrt{2e^z + c_1} = s$ 라고 하고 양변 미분하면

$$\frac{e^z}{\sqrt{2e^z + c_1}} dz = ds$$

가 된다. 양변에 e^{-z} 을 곱하면

$$\frac{dz}{\sqrt{2e^z + c_1}} = e^{-z} ds = \frac{1}{e^z} ds$$

이 된다. 여기에서 $\int \frac{1}{e^z} ds$ 를 구하려면 e^z 를 변형을 시켜야 하므로

$\sqrt{2e^z + c_1} = s$ 에서 양변을 제곱하면 $2e^z + c_1 = s^2$ 된다. $2e^z = s^2 - c_1$ 고

$$e^z = \frac{s^2 - c_1}{2}$$

$e^z = \frac{s^2 - c_1}{2}$ 를 대입해서 적분해보면

$$\int \frac{1}{e^z} ds = \int \frac{1}{\frac{s^2 - c_1}{2}} ds = \int \frac{2}{s^2 - c_1} ds$$

가 된다. 즉 (3.2)는 다음과 같아 된다.

$\int \frac{2}{s^2 - c_1} = \pm t + c_2$ 에서 c_1 의 부호에 따라 푸는 방법이 달라진다.

$$\textcircled{1} \quad c_1 > 0 \text{ 이 라면 } \frac{2}{s^2 - c_1} = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(-\frac{1}{s + \sqrt{c_1}} + \frac{1}{s - \sqrt{c_1}} \right) \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \int \left(\frac{1}{s - \sqrt{c_1}} - \frac{1}{s + \sqrt{c_1}} \right) ds = \frac{1}{\sqrt{c_1}} (\ln|s - \sqrt{c_1}| - \ln|s + \sqrt{c_1}|) = \pm t + c_2$$

양변을 정리하면

$$\ln \left| \frac{s - \sqrt{c_1}}{s + \sqrt{c_1}} \right| = \pm \sqrt{c_1} t + \sqrt{c_1} c_2$$

가 되고 식을 정리해보면,

$$\left| \frac{s - \sqrt{c_1}}{s + \sqrt{c_1}} \right| = e^{\pm \sqrt{c_1} t + \sqrt{c_1} c_2}$$

이 된다.

절댓값을 정리해보면,

$$\frac{s - \sqrt{c_1}}{s + \sqrt{c_1}} = c_2 e^{\pm \sqrt{c_1} t}$$

이 되고, s 로 정리해보면

$$s = \sqrt{c_1} \frac{c_2 e^{\pm \sqrt{c_1} t} + 1}{c_2 e^{\pm \sqrt{c_1} t} - 1}$$

이 다. $s = \sqrt{2e^z + c_1}$ 이고, $e^t = x$ 이므로

$$\sqrt{2e^z + c_1} = \sqrt{c_1} \frac{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} + 1}{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} - 1}$$

이 된다. 또한 $z = y + 2\ln x$ 이므로 식은

$$\sqrt{2e^{y+2\ln x} + c_1} = \sqrt{c_1} \frac{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} + 1}{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} - 1}$$

이 되고, 식을 더 정리해보면

$$2e^{y+2\ln x} + c_1 = c_1 \left(\frac{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} + 1}{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} - 1} \right)^2$$

이 되고 y 로 정리해보면

$$y = \ln \frac{c_1}{2} \left\{ \left(\frac{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} + 1}{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} - 1} \right)^2 - 1 \right\} - 2\ln x$$

식으로 정리된다.

② $c_1 < 0$ 이라면 $\int \frac{2}{s^2 - c_1} ds = \pm t + c_2$ 에서 $s = \sqrt{-c_1} \tan \theta$ 로 치환하면

양변 미분하면 $ds = \sqrt{-c_1} \sec^2 \theta d\theta$ 가 되므로 대입해서 정리하면

$$s^2 - c_1 = -c_1 \tan^2 \theta - c_1 = -c_1 (\tan^2 \theta + 1) = -c_1 \sec^2 \theta$$

가 된다.

$$\int \frac{2}{-c_1 \sec^2 \theta} \times \sqrt{-c_1} \sec^2 \theta d\theta = -\frac{2\sqrt{-c_1}}{c_1} \int d\theta = -\frac{2\sqrt{-c_1}}{c_1} \theta$$

이 되므로

$$-\frac{2\sqrt{-c_1}}{c_1} \theta = \pm t + c_2$$

이 된다. $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{s}{\sqrt{-c_1}} \right)$ 이므로 정리해보면

$$\frac{2}{\sqrt{-c_1}} \tan^{-1} \left(\frac{s}{\sqrt{-c_1}} \right) = \pm t + c_2$$

이 되고,

$$s = \left(\sqrt{-c_1} \tan \left(\frac{\sqrt{-c_1}}{2} (\pm t + c_2) \right) \right) \text{에서 } s = \sqrt{2e^z + c_1} \text{를 대입해서 정리하면}$$

$$e^z = \frac{\left(\sqrt{-c_1} \tan \left(\frac{\sqrt{-c_1}}{2} (\pm \ln x + c_2) \right) \right)^2 - c_1}{2}$$

이 된다. $z = y + 2\ln x$ 이므로

대입해서 y 로 정리해보면

$$y = \ln \frac{\left(\sqrt{-c_1} \tan \left(\frac{\sqrt{-c_1}}{2} (\pm \ln x + c_2) \right) \right)^2 - c_1}{2} - 2\ln x$$

식으로 정리된다.

③ $c_1 = 0$ 이라면 $z'^2 - 2e^z = 0$ 이다. 여기에서 $z' = \pm \sqrt{2e^z} = \pm \sqrt{2} e^{\frac{z}{2}}$

$e^{-\frac{z}{2}} z' = \pm \sqrt{2}$ 을 양변 적분하면 $-2e^{-\frac{z}{2}} = \pm \sqrt{2} t + d$ 이 고로그를 취하면

$$z = -2\ln(\pm \frac{t}{\sqrt{2}} + d)$$

이 된다. $t = \ln x$ 와 z 를 $y = z - 2t$ 에 대입하면

$$y = -2\ln(\pm \frac{t}{\sqrt{2}} + d) - 2\ln x$$

식으로 정리된다.

정리 5. $\frac{1}{x}(xy')' = e^y$ 의 해는

$$y = \ln \frac{c_1}{2} \left\{ \left(\frac{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} + 1}{c_2 x^{\pm \sqrt{c_1}} - 1} \right)^2 - 1 \right\} - 2\ln x \quad (c_1 > 0)$$

또는

$$y = \ln \frac{\left(\sqrt{-c_1} \tan \left(\frac{\sqrt{-c_1}}{2} (\pm \ln x + c_2) \right) \right)^2 - c_1}{2} - 2\ln x \quad (c_1 < 0)$$

또는

$$y = -2\ln(\pm \frac{t}{\sqrt{2}} + d) - 2\ln x \quad (c_1 = 0)$$

으로 나타난다.

【참고문헌】

- [1] Martin Braun, Differential Equations and Their Applications, Springer, 1993.
- [2] Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Willey, 1998.
- [3] Y. Yang, Solitons in field theory and Nonlinear analysis, Springer, New York, USA, 2001.
- [4] 안인경, 최정환. 〈미분방정식과 그 응용〉 경문사, 2007년.

