creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000241859

2011년 8월
석사학위논문

GARCH(1,1)모형에 관한 베이지안 연구

조선대학교 대학원

전산통계학과

김 형 민

GARCH(1,1)모형에 관한 베이지안 연구

조선대학교 대학원

전산통계학과

김 형 민

GARCH(1,1)모형에 관한 베이지안 연구

A Study of Bayesian GARCH(1,1) Models

2011년 8월 25일

조선대학교 대학원

전산통계학과

김 형 민

GARCH(1,1)모형에 관한 베이지안 연구

지도교수 장 인 홍

이 논문을 이학 석사학위신청 논문으로 제출함

2011년 4월

조선대학교 대학원

전산통계학과

김 형 민

김형민의 석사학위논문을 인준함

위 원 장 조선대학교 교수 배상현 (인)

위 원 조선대학교 교수 권용만 (인)

위 원 조선대학교 교수 장인홍 (인)

2011 년 5 월

조선대학교 대학원

목 차

ABSTRACT ····· v

제 1 장 서 론 ····· 1
제 1 절 연구 배경 및 목적 ····· 1
제 2 절 선행 연구 ····· 3
제 2 장 이분산성 시계열 모형 ····· 5
제 1 절 ARCH 모형 ····· 6
제 2 절 GARCH 모형 ····· 7
제 3 절 EGARCH 모형 ····· 10
제 4 절 TGARCH 모형 ····· 11
제 5 절 IGARCH 모형 ····· 12
제 6 절 GARCH-M 모형 ····· 13
제 7 절 VaR ····· 14
2.7.1. Delta Normal 방법 ····· 15
2.7.2. 역사적 시뮬레이션 방법 ····· 16
2.7.3. 몬테칼로 방법 ····· 16
2.7.4. 위기분석 방법 ····· 17
제 8 절 VaR의 장점 및 단점 ····· 18
2.8.1. VaR의 장점 및 활용 ····· 18
2.8.2. VaR의 단점 및 고려 사항 ····· 18
제 3 장 베이지안의 이론적 배경 ····· 20
제 1 절 베이지안 추론 ····· 20
3.1.1. 전통적 방법과 베이지안 접근방법 ····· 20
3.1.2. 베이지안 방법 ····· 21

3.1.2.1. 사전확률분포 ····· 22
3.1.2.2. 사후확률분포 ····· 22
3.1.2.3. 베이지안 계산 ····· 23
3.1.3. 베이지안 장점 ····· 24
제 2 절 MCMC 알고리즘 ····· 25
3.2.1. 깁스샘플링 알고리즘 ····· 26
3.2.2. 메트로폴리스-해스팅스 알고리즘 ····· 27
제 4 장 실증 분석 ····· 30
제 5 장 결론 ····· 39

참고문헌 ····· 40

표 목 차

<표 1> 보유기간 10일 기준 VaR ····· 36
<표 2> 보유기간 한달 기준 VaR ····· 36
<표 3> 평균수익률과 VaR비교(보유기간 10일기준) ····· 37
<표 4> 평균수익률과 VaR비교(보유기간 한달기준) ····· 38

그 림 목 차

<그림 1> Trace of alpha ····· 32
<그림 2> Trace of beta ····· 32
<그림 3> kernel density of alpha and kernal density of beta ····· 33
<그림 4> history of alpha and history of beta ····· 33
<그림 5> KOSPI 시계열그래프 ····· 34
<그림 6> 변동성 시계열 그래프 ····· 34

Abstract

The study of Bayesian GARCH(1,1) Models Volatility Estimation Using KOSPI Index

Kim Hyoung-Min
Advisor : Prof. Chang, In-Hong, Ph.D.
Department of Computer Science and Statistics,
Graduate School of Chosun University

The purpose of this study was to estimate the fluctuation of anearning rate and risk management using the price index of Korea stocks. After an observation of conception of fluctuation, GARCH model which is presumed heteroscedasticity with the price index of stocks was used.

Based on Bayesian method, the Volatility clustering and fluctuation phenomenon was found to be lasted using GARCH model. In addition, the effects of fluctuation on the time-series was evaluated, which showed the heteroscedasticity. Winbugs, Bayesian software, and MCMC method were used for analysis.

The basic of risk management for finance theory, VaR, was presumed by monte carlo simulation with Simple Moving Average (SMA). SMA is one of the fluctuation methods that could be used operationally to predict the fluctuation and fluctuation on GARCH (1,1) model. In addition, VaR was compared with actual earning rate. With these methods, it can be concluded that GARCH (1,1) model could reflected the recent status of market and was more suitable to estimate the fluctuation of finance time-series data than SMA.

제 1 장 서 론

제 1 절 연구 배경 및 목적

증권 산업을 비롯한 국내 외 금융시장의 상황은 하루가 다르게 급격하게 변화해가고 있다. 이에 따라 금리, 환율, 주가, 유가, 부동산과 같은 시계열 자료들은 시간에 따라 변화가 커지고 있다. 사람들은 이런 시간적 자료들에 대해 분석을 하고 예측을 하고 싶어 한다. 그런데 이러한 자료의 예측을 한다는 것은 그리 쉬운 일은 아니다. 예를 들어 시계열 자료인 주가의 자료를 보면 자료의 변동성이 매우 크다는 것을 알 수가 있다. 즉, 경제시계열 자료들은 시간에 따라 상승이 지속되기도 하고 하락이 지속되기도 하며 갑작스레 큰 폭으로 변동하기도 한다. 이러한 상황하에서 사람들은 정확한 판단 없이 기대 수익률에만 관심을 둔 비합리적인 투자를 하고 있다. 보다 합리적인 투자를 위해 변동성(Volatility)을 추정하고 예측하는 합리적인 투자의사결정을 해야 한다.

여기서 나오는 변동성이라는 것은 통계학적으로 보면 분산을 의미한다. 이 변동성이라는 것은 Risk(위험)를 분석하는데 사용을 한다. 이러한 변동 현상이 나타나는 이유는 미래의 값의 분산이 현재의 상황에 관련이 있다는 것을 의미한다. 즉, 주가의 자료에서 보듯이 시계열자료는 변동성이 매우 크다는 것을 알 수 있다. 그래서 자료의 현시점에서 변동 폭인 분산이 최근의 자료에 영향을 많이 받는다는 것에 착안하여 이를 모형화하기 위해서 Engle(1982)은 조건부 이분산 자기회귀(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity : ARCH)모형을 제안하였다. 시간 가변적 분산을 측정할 수 있는 방법은 각 관찰치의 우도를 조건부 확률밀도로 분해하는 것이다. 즉, ARCH모형의 추정은 최우추정법을 사용해서 추정된다. 이렇게 함으로써 불확실성의 척도를 무조건부분산이 아닌 조건부분산으로 해석하여 우도함수가 용이하게 만들어 질 수 있다. ARCH모형은 자산수익률의 변동성의 특징을 표현하기 위해 GARCH, EGARCH, IGARCH, TGARCH 등과 같은 조건부분산모형으로 확대되었다. ARCH모형 이후 Bollerslev(1986)가 오차의 분산에 자료의 값과 전시점의 분산을 일반화시킨 GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)모형을 제시하였다. 현재 경제시계열자료를 분석하는 방법으로 GARCH모형은 중심위치에 있으며, 본 논문에서는 GARCH(1,1) 모형을 국내 시계열 자료

인 KOSPI를 이용하여 최우추정법이 아닌 Bayesian 접근을 해보고자 한다.

GARCH모형의 변동성에 대해 Bayesian 접근 후 최종적으로 추정된 변동성을 가지고 3가지 주식으로 구성된 포트폴리오를 구성 한 후, 변동성에 대한 여러 예측 방법 중에서 실무적으로 용이하게 사용될 수 있는 변동성 산출방법인 단순이동평균과 GARCH(1,1)모형의 변동성을 가지고 금융이론의 위험 관리(Risk Management)의 가장 기본이 되는 VaR를 산출하여 실제 수익률과 비교 분석해보기로 한다.

논문은 구성은 다음과 같다. 2장에서는 GARCH모형과 VaR의 개념을 설명하고, 3장에서는 베이지안 접근방법인 마르코프체인 몬테 칼로 방법(MCMC)을 소개하고, 4장 실증분석에서는 KOSPI지수를 가지고 베이지안 접근방법으로 GARCH모형의 변동성의 특성을 본 후 베이지안 접근방법으로 구한 GARCH모형의 변동성을 가지고 VaR을 구해 실제 수익률과 비교해보고자 한다. 5장에서는 본 연구에 대한 결론을 제시하는 것으로 논문을 마치고자 한다.

제 1 절 선행 연구

박순상(2003)은 마케팅 조사의 Bayesian 접근에 관한 연구에서 베이지안 접근방법을 회귀분석에 적용하여 전통적 접근방법의 회귀추정량과 사전정보가 없는 비정보적 사전분포를 부여한 경우에 얻어진 베이지안 회귀추정결과와의 차이가 존재하는지를 확인하였다.

채화연(2003)은 ARMA(p,q) - GARCH(r,s)모형에서 베이지안 방법을 이용한 평균과 분산에 대한 예측연구에서 변동성에 대한 모형으로 ARMA(p,q) - GARCH (r,s)모형을 따르는 회귀모형을 설정하고, 이모형의 모수에 대해 베이지안 추정법을 제시하였다.

김상용, 이용흔(2006)은 시계열 자료 분석에서 관측된 각 시점에서의 관측치의 분산을 서로 다른 분산을 따른다고 가정하고 이를 분석하는 모형들이 옵션가격분석이나 환율 변화 등 경제적 시계열 자료의 예측모형들의 성능을 비교하였다.

장원(2009)은 Bayesian UHF GARCH-M모형을 이용한 변동성 및 European Option 가격분로추정에서 이산적 시간 하에서의 기하브라운운동에 대한 자연스러운 확장인 Bayesian UHF GARCH-M모형을 이용해 기초자산 변동성의 분포를 경험적으로 추론하고, 이를 이용하여 European call option의 적정가격 분포를 구하는 방법에 대해 연구하였다.

신원재, 최문희, 이홍재(2009)는 계층적 베이즈 모형을 이용한 I-GARCH 모수와 VaR의 추정 및 결정 요인분석에서 2008년 6월 16일부터 2009년 6월 12일까지의 KOSPI200 개별주식의 일일수익률 데이터를 이용하여 I-GARCH(1,1)모형의 일종인 EWMA의 충격소멸계수의 사후분포와 VaR의 분포를 구하고 이러한 분포가 개별 기업의 특성과 관련이 있는지를 연구하였다.

권현아(2010)는 다변량 GARCH 모형을 이용한 자산상관계수에 대한 연구에서 1992년부터 2008년까지의 우리나라에 상장 거래 되는 각 산업별 우량주 9개의 일별 수익률을 사용하여 다변량 GARCH 모형인 DCC GARCH모형을 이용하여 각 포트폴리오의 공분산행렬을 추정하고, 이를 이용하영 최소분산 포트폴리오를 구성하였다. 그 결과, 안정적인 포트폴리오일수록 DCC GARCH 모형과 CCC GARCH 모형을 이용한 포트폴리오의 위험의 차이가 더 큰 것으로 나타났다.

VaR(Value at Risk)에 대한 선행연구로 이준행(2000)은 1985년부터 1999년까지 15년 동안의 일별 VaR를 연구하였다. 분석대상은 KOSPI지수와 10개의 종목으로 구성된 2개의 포트폴리오등 총3개의 포트폴리오를 가지고 분석방법은 델타-노

말 분석방법과 역사적 시뮬레이션 방법을 사용하였고, 델타-노말 분석에 있어서는 변동성 추정방법으로 단순이동 평균법과 지수가중 이동평균법을 사용하였다. 이러한 분석방법에 의해 12개의 모형을 수립하고 VaR을 추정 비교 하였다.

조담(2004)은 주식의 변동성 추정방법이 VaR에 미치는 영향에 대해서 연구하였다. 주식포트폴리오의 변동성을 역사적 표준편차, 지수가중이동평균 및 GARCH(1,1)에 의해 추정하여 1990년 1월부터 2004년 2월까지 총 3,894일의 KOSPI200 일별종가 자료를 사용하여 변동성 추정방법에 따라 VaR의 적절성이 어떻게 달라지는지를 검증하였다.

김용덕, 이근철(2004)은 VaR 기법을 이용한 VaR모형과 다중회귀분석모형을 토대로 한국의 손해보험 산업을 지배구조, 시장점유에 따른 분류, 생존형태에 따른 분류로 세분화하여 1994년 4월부터 2004년 3월까지의 기간에 대하여 시장리스크를 분석하였다. 또한 VaR모형에서 분산-공분산 방법을 적용하여 종속변수를 VaR측정치 및 시장리스크 비율로 정의된 값을 기준으로 비교 하여 추정방법에 관계없이 표본 내・외의 표본크기가 250일인 경우 실패율에 대한 표본외 예측이 상대적으로 정확하며 금융・외환위기의 영향으로 표본크기가 증가할수록 실패율의 평균값이 커짐을 연구하였다.

이근영(2006)은 VaR모형의 예측성과 비교에서 KOSPI와 회사채를 결합한 포트폴리오 수익률을 이용하여 VaR 모형의 표본외 성과를 비교분석하였다.

나상희(2009)는 변동성 변화에 따른 VaR 비교분석에서 증권거래소에서 제공하는 2006년 3월 31일부터 2008년 3월 31일까지의 POSCO, KCC, 현대중공업 각각 해당 주식 종가 일별자료를 이용하여 단순이동평균, 지수가중이동평균, GARCH(1, 1) 모형을 기준으로 변동성을 산출하고 각각의 변동성별로 VaR를 산출한 후 2008년 3월 31일 이후의 종가 데이터와 비교하였다.

제 2 장 이분산성 시계열 모형

시계열자료를 설명하기 위해 확률모형을 이용하는 것은 이미 잘 알려져 있다. 정상적인 확률모형의 하나로 자기회귀이동평균(Auto Regressive Moving Average : ARMA) 모형이 있다. ARMA모형은 과거의 정보가 주어졌을 때의 현재 관측값 Y_t 의 모형은 기댓값을 이용한다.

$$Y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, , ...) + \varepsilon_t$$

여기서 ε_t는 $V(\epsilon_t) = \sigma^2$인 백색잡음(white noise)이다. Y_{t+1}의 예측값은 다음과 같이 주어진다.

$$E(Y_{t-1} | Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, ...)$$

기본 가정들은 조건부 평균은 일정하지 않고, 조건부 분산은 일정하다. 그리고 조건부 분포는 정규분포이다. 그러나 어떤 자료들에서는 조건부 분산이 일정하다는 가정은 사실이 아니다. 예를 들어, 근래의 주가들은 일반적으로 변동성을 가지고 있다고 생각한다. 그러면 현재의 주가들도 높은 변동성을 가지고 있으리라 예측된다. 만약 주가 자료에 대한 모형을 ARMA모형을 이용한다면, 시간의 변화에 따라 변하는 조건부 분산에 대한 형태를 찾아내지 못할 것이다. 그 과정의 형태는 통상적으로 이분산성과 관련이 있다. 즉, 과거의 정보로부터 분산의 영향에 대해 부가적으로 생각해야 하며, 모형을 좀 더 일반화 할 필요가 있다.

Engle(1982)은 조건부 평균과 조건부 분산의 모형을 위해 다음의 정의를 이용하였다.

정의 : $Y_{t-1}, Y_{t-2}, ...$가 주어졌을 때 Y_t의 조건부 평균모형에서 조건부 분산은 일정하지 않으며, 조건부 표준편차의 항은 다항 백색잡음이다. 이것을 다음과

같이 표현할 수 있다.

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, ...) + \epsilon(Y_{t-1,} Y_{t-2}, ...)\varepsilon_t$$

Engle의 모형은 위의 원칙으로 인해 조건부 분산을 모형화 하였으며, 이 모형은 자기회귀 조건부 이분산(Autoregressive Conditional Heteroscedastic : ARCH) 모형으로 많이 알려져 있다.

ARCH 모형은 다양한 특성들을 가지고 있으며, 여러 분야에서 적용할 수 있어 관심을 많이 받아왔다.

제 1 절 ARCH 모형(Auto-Regressive Conditional Hetero skedasticity)

자산가격의 변동성에서 흔히 관찰되는 시계열 의존성(serially dependence)을 모형화한 것이 ARCH모형이다. 일반적으로 경제 시계열들의 종속구조는 분산값이 자신의 값(auto)에 조건부(conditional)로 의존하는 이분산(heteroscedasticity)현상이 발생하게 된다. 예를 들어, 현재의 분산과 조직적인 관계를 지니고 있는 '군집현상'은 이분산의 대표적인 예라 할 수 있다. 변동성 군집 또는 fat tail의 특성을 갖는 시계열을 조건부분산의 관점에서 모형화 하기 위하여 Engle(1982)은 다음과 같은 p-차 자기회귀형 조건부분산(autoregressive conditional heteroscedasticity) 또는 줄여서 ARCH(p)모형을 제안하였다.

$$Y_t = X_t\beta + \sigma_t\varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t\epsilon_t \ , \ \epsilon_t|\psi_{t-1}, \epsilon_t \sim N(0,\sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + a_2\varepsilon_{t-2}^2 + ... + a_p\varepsilon_{t-p}^2 \ (\text{단}, a_0 > 0 \ ; a_1, \cdots, a_p \geq 0)$$

Y_t은 보통의 다중회귀식이며, 다만 다른 점은 확률 오차 항이 ε_t에서 보는 것

처럼 조건부정규분포 한다는 것이다. 설명변수 벡터 X_t는 t시점에서 고정되어 있다고 가정하는 것도 일반 다중회귀식과 같다. 흔히 금융시계열 분석에 있어서 X_t는 종속변수 자신의 래그들과 σ_t^2 식에 정의된 조건부 분산이나 표준편차 또는 기타의 외생적 설명변수들을 포함할 수 있다. 이러한 모형을 ARCH모형이라고 하는 이유는 다음과 같다.

위의 식을 고쳐 쓰면

$$\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + v_t \qquad \text{단}(,\ v_t = \sigma_t^2(\epsilon_t^2 - 1))$$

가 되어 잔차항의 제곱이 AR(p) 과정을 따른다.

$\sigma_t^2 \equiv Var(y_t|\psi_{t-1}) = Var(\varepsilon_t|\psi_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2|\psi_{t-1})$로 정의되므로 위의 식의 양변에 (t-1)시점의 기댓값을 취하면 ,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \sigma_{t-p}^2$$

가 되어 보통의 p-차 자기회귀(autoregressive)모형을 따르는 것을 알 수 있다. 또한 이분산성을 갖게 되는 이유는 ε의 실현된 래그값에 따라 σ_t^2가 항상 변할 수 있기 때문이다. 일정한 조건하에서 y_t는 첨예분포를 가지며, ε_t^2(또는 y_t^2)는 안정적 자기회귀과정을 따르고 따라서 분산집중을 야기할 수 있다. 그러므로 ARCH(p) 모형은 꼬리가 두터운 특성을 가지는 금융시계열을 모형화 하는 데 유용할 수 있음을 알 수 있다.

제 2 절 GARCH 모형(Generalized ARCH Model)

ARCH(p) 모형을 추정하는 경우 래그 p를 크게 설정해야 하는 경향이 있다. 대안으로 Bollerslev(1986)는 ARCH 모형을 일반화하는 다음과 같은 GARCH(p,q)모형

(Generalized ARCH)을 제안하였다.

$$Y_t = X_t\beta + \sigma_t\varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t\epsilon_t \ , \ \epsilon_t|\psi_{t-1}, \epsilon_t \sim N(0,\sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + a_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + a_p\varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q\sigma_{t-q}^2$$

$$= \alpha_0 + A(L)\epsilon_t^2 + B(L)\sigma_t^2$$

단 $\alpha_0 > 0,\ \alpha_1, \cdots,\ \alpha_p,\ \beta_1, \cdots \beta_q,\ \ A(L) = \alpha_1 L + \cdots + \alpha_p\sigma^p,$

$B(L) = \beta_1 L + \cdots + \beta_q L^q,\ p = q = 1$

인 경우, 즉 가장 간단한 GARCH(1,1) 모형을 예로 들어보자.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

양변에 (t-1)시점 조건부 기대값을 취하면

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

가 되므로 이를

$$(1 - \alpha_0 L - \beta_1 L)\sigma_t^2 = \alpha_0$$

로 다시 쓰면 GARCH(1,1) 모형이 의미하는 비조건부분산은 다음과 같음을 쉽게

알 수 있다.

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1-\beta_1)}, \quad (\alpha_1+\beta_1) < 1\text{인 경우}$$

GARCH 모형을 도입하는 이유는 GARCH(1,1) 모형을 예로 들 때 이를 반복적 대입과정을 통하여 다음과 같은 ARCH(∞) 모형으로 다시 쓸 수 있기 때문이다.

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{(1-\beta_1)} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_1^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2$$

즉, 작은 수의 파라미터를 사용함에도 불구하고 긴 래그의 ARCH 모형을 추정하는 것과 유사한 효과를 가져오기 때문이다. 실제로 우리가 자주 접하는 금융시계열들의 변동성은 매우 지속적(persistent)인 것으로 보이며, 흔히 단순한 GARCH(1,1) 모형으로도 대부분 잘 모형화 할 수 있는 것으로 알려져 있다.

GARCH(p,q) 모형에 관해서는 다음의 두 정리를 기억할 필요가 있다.

(1) GARCH(p,q) 모형이 $E(\varepsilon_t)=0, Var(\varepsilon_t)=\alpha_0(1-A(1)-B(1))^{-1}$ 그리고 $Cov(\epsilon_t, \epsilon_s)=0(t \neq s)$를 갖는 약한 의미에서의 안정성을 갖기 위한 필요충분조건은

$$A(1)+B(1) < 1$$

따라서 $p=q=1$인 경우, GARCH 모형의 약안정성 조건은 $\alpha_1+\beta_1 < 1$이고 비조건부분산은 위에서 살펴본 바와 같이 $\sigma^2 = \alpha_0(1-\alpha_1-\beta_1)^{-1}$ 이다. 비조건부분산식을 보면 왜 α_0가 영(0)보다 커야 하는 이유를 알 수 있다.

(2) GARCH(1,1) 과정의 경우 만일 $3\alpha_1^2+2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2 < 1$이면 4차 모멘트가 존재한다. 즉,

$$E(\epsilon_t^4) = 3\alpha_0^2(1+\alpha_1+\beta_1)[(1-\alpha_1-\beta_1)(1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2)]^{-1}$$

따라서 초과첨도(excess kurtosis)는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} x &= [E(\varepsilon_t^4)-3E(\varepsilon_t^2)^2]E(\varepsilon_t^2)^{-2} \\ &= 6\alpha_1^2(1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2)^{-1} > 0 \end{aligned}$$

즉, GARCH(1,1)은 leptokurtic하고 fat tail을 갖는 시계열 자료를 모형화 하는 경우에 적합함을 알 수 있다.

대부분의 경우 GARCH모형은 금융시계열 자료를 분석하고 조건부 변동성을 추정하는데 합리적이고 좋은 모형이다. 그러나 특별한 자료의 다양한 특성을 잘 나타낼 수 있어 모형의 적합 도를 높일 수 있는 다양한 모형들이 있어 이들에 대해 간략히 살펴보겠다.

제 3 절 EGARCH모형 (Exponential GARCH Model)

GARCH모형의 경우 조건부 분산이 항상 양(positive)의 값을 갖기 위해 제약조건이 존재하는데 이 조건은 조건부 분산을 필요 이상으로 제약적으로 만들 가능성이 있으며, 원래의 GARCH모형은 현재의 수익률과 미래 수익률의 변동성사이의 음(negative)의 상관관계를 고려하지 않고 있다. 이는 시장이 참가자들의 기대 밖의 하락세에 있을 때 양의 충격에 비하여 음의 충격이 변동성에 더 큰 영향을 미친다는 정보효과인 레버리지 효과(leverage effect)를 고려하지 않은 것으로 해석할 수 있다. 반면에 일반적인 GARCH 모형은 현재수익률의 잔차항의 제곱이 미래의 수익률의 변동성에 영향을 미치게 되어 조건부 변동성에 대한 충격이 양인지 음인지 상관없이 대칭적인 효과를 미치기 때문에 이점을 고려하여 Nelson(1991)은 다음과

같은 EGARCH(Exponential GARCH)모형을 제안하였다.

$$\ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{q}\beta \ln\sigma_{t-j}^2$$

위의 식에서 $\varepsilon_{t-1} > 0$, 즉 좋은 정보(good news)이면 효과는 $(1+\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|$이고, 반대로 $\varepsilon_{t-1} < 0$, 즉 나쁜 정보(bad news)이면 효과는 $(1+\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|$이 된다. 여기서 γ_i가 통계적으로 유의한 음의 값을 갖는다면 레버리지 효과가 있는 것으로 나쁜 정보가 좋은 정보보다 변동성에 더 큰 영향을 미치게 된다는 것을 의미한다.

EGARCH모형은 모수에 대한 제약조건이 없어도 조건부 분산이 항상 양이 되며, $|\beta| < 1$이면 $\ln\sigma_t^2$과정은 정상성을 만족하며, 선형 ARCH모형들과는 달리 원계열의 제곱(y_t^2)과정의 자기상관계수는 부호를 바꿔가는 사이클 형태를 보일 것이다.

EGARCH모형은 오차항 ε의 확률밀도함수를 가정하고 최우추정법으로 추정할 수 있는데 정규분포를 가정하는 경우 $\varepsilon_t = \sigma_t e_t$의 분산을 $\sigma_t^2 = \exp(\ln\sigma_t^2)$으로 변환하여 우도함수에 대입해야 한다. Nelson은 정규분포 대신 평균과 분산을 각각 0과 1로 정규화한 일반화오차분포(Generalized Error Distribution ; GED)를 제안하기도 하였다.

제 4 절 TGARCH 모형 (또는 GJR 모형)

레버리지 효과를 고려하는 또 다른 모형으로 Glosten, Janganathan과 Runkle(1993)은 다음과 같은 TGARCH(Threshold GACRH)모형을 제안하였다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\gamma_i S_{t-i}\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_i \sigma_{t-j}^2$$

$$S_{t-i} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-i} > 0 \\ 0, & \varepsilon_{t-i} < 0 \end{cases}$$

위의 식에서 ε_{t-1}가 0을 기준으로 크고 작음에 따라서 조건부 분산 σ_t^2에 다른 영향을 미치게 되는데, $\varepsilon_{t-1} < 0$이면 나쁜 정보로 효과는 $\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$이고, 반대로 $\varepsilon_{t-1} > 0$이면 좋은 정보로 효과는 $(\alpha_i + \gamma_i)\varepsilon_{t-i}^2$이 된다. 여기서 레버리지 효과가 있다면 γ_i는 통계적으로 유의한 양의 값을 갖는다.

제 5 절 IGARCH 모형(Integrated GARCH Model)

실증분석에 있어서 관측치의 빈도가 높을수록 $\lambda = \alpha_i + \beta_i$은 1에 매우 가까운 경우가 때때로 있는데 IGARCH (Integrated GARCH)모형은 $\lambda = 1$인 경우에 사용하는 모형으로 이때는 $1 = \alpha_i + \beta_i$이므로 α_i이나 β_i 중 하나만 추정하게 된다. 간단히 $p = q = 1$인 GARCH(1,1)모형의 경우 조건부 분산은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta_0)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \,,\ 0 \le \beta_1 \le 1$$

IGARCH모형은 위의 식에서 오른쪽의 σ_{t-i}^2을 반복적으로 대입하면 EWMA모형과 동일한 효과를 갖게 된다. 또한 IGARCH모형의 변동성 예측치는 정상성을 갖는 GARCH(1,1)모형과 달리 수렴하지 않으며 다음 식과 같다.

$$E_T[\sigma_{T+k}^2] = \sigma_T^2 + k \bullet \alpha_0$$

따라서 현재의 변동성은 무한한 미래의 변동성에 영향을 미친다.

IGARCH(1,1)모형은 표류항(drift)으로 α_0를 갖는 선형임의보행과정과 유사하게 보이지만 실제로는 일반적으로 ε_t의 비조건부 분포가 모든 t에 대해 항상 같아서 강한 의미의 정상성을 만족한다.

제 6 절 GARCH-M 모형

재무이론에서 위험이 높아지면 기대위험프리미엄도 커져서 높은 수익률을 기대할 수 있게 된다. 이런 이론에 기초하여 Engle. Lilimen과 Robins(1987)는 조건부 분산의 변동뿐만 아니라 이러한 변동이 조건부평균 즉 조건부 수익률에 미치는 영향(δ)을 고려하여 모형의 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 GARCH-M(GARCH-in-mean)모형을 제안하였다.

$$y_t = xb + \varepsilon_t + \delta\sigma_t^2$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_i\sigma_{t-j}^2$$

그동안 재무이론에서 위험프리미엄(risk premium)의 평가는 매우 중요한 문제였는데 이를 예측하거나 측정하기 위한 방법으로 단순회귀모형은 부적절한 것으로 알려져 왔으며 최근의 연구 성과에 의하면 자산수익률의 위험과 기대수익률이 시간이 지남에 따라 변하는 것으로 밝혀지고 있어 GARCH-M모형은 이러한 관계를 모형화한 것으로 볼 수 있다.

위 식을 보면 위험을 나타내는 σ_t^2가 수익률의 조건부 평균에 대한 설명변수이므로 이전에 조건부 평균과 조건부 분산이 일정하다고 가정하는 CAPM(Capital Asset Pricing Model)검증방법의 문제도 GARCH-M모형을 이용하여 검증할 수 있어 유용하다.

제 7 절 VaR(Value at Risk)

오늘날 금융기관은 주식, 채권, 외환, 선도, 선물, 옵션 등 다양한 자산들에 포지션을 취하고 있다. 그러나 금융위기, 시장의 불안 등에 의해서 금융기관의 막대한 손실을 안겨주는 경우도 있다. 미국의 Orange County 와 Daiwa 은행은 이자율 위험으로 인해 각각 16억 달러와 11억 달러의 투자 손실을 입었다. 또한 근래의 우리나라의 Sk증권도 모건사와 거래에서 대규모 손실을 입은 적이 있다. 이런 일련의 사건들은 금융기관의 위험관리가 얼마나 중요한지를 명확히 보여주고 있다.

이런 문제를 해결하기 위해 세계의 금융기관들은 시장위험을 계산하고 통제하기 쉬운 VaR(Value at Risk : 시장위험관리)에 관심을 기울이고 있다. VaR(Value at Risk)는 "정상적인 시장(normal market) 여건 하에서 주어진 신뢰수준(confidence level)하에 목표기간(target period)동안에 발생할 수 있는 최대손실금액(maximum loss)" 으로 정의된다. 이 정의에서 알 수 있듯이 VaR가 10억원일 때 다음과 같은 통계학적 표현이 가능하다. 포지션 가치에 영향을 미치는 어떤 위험요인의 변화로 인해 1주일 동안에 발생할 수 있는 최대 손실이 10억 원보다 적을 확률이 95%이다. (손실이 10억 원보다 작을 것을 95% 신뢰수준에서 확신한다.) 즉 포지션의 가치에 영향을 미치는 어떤 위험요인의 변화로 인해 1주일 동안에 발생할 수 있는 손실이 10억 원보다 클 확률이 5%이다. 여기서 5%는 허용수준(tolerance lever)이라고 한다. 일반적으로 VaR은 어떤 포트폴리오가 1일, 5일 또는 10일과 같이 단기의 시장위험에 어느 정도 노출되어 있는가를 측정하는 척도로 이용되고 있다. 여기서 포트폴리오란 투자자가 보유하는 유가증권의 묶음이란 뜻이다. 이러한 VaR모형은 금융자산의 확률 분포를 기본적으로 하고 있으며, 변동성에 의한 측정이 필수적이다. 즉 자산가격의 변동성이 증가하면 VaR도 커지게 되고 그만큼의 손실액이 커질 수도 있다. 그래서 변동성이 증가할 것으로 예상되는 자산을 보유하고 있는 포트폴리오를 조정하려고 시도 할 것이고 이러한 변동성에 대한 정확한 예측은 VaR 측정에 있어서 가장 핵심적이라고 할 수 있다.

여기서 신뢰수준은 자산가치 감소액의 특정 한 값, 즉 -VaR보다 클 확률로 정의되므로 신뢰수준이 높을수록 보수적인 리스크 측정으로 평가되어 VaR는 더 커지게 된다. 예를 들어 신뢰도 95%의 VaR보다 신뢰도 99%의 VaR가 더 큰 값을 가진다. 또 보유기간에 따라 자산가치의 수익률이 달라지므로 VaR 또한 자산의 보유기간에 달라진다. 즉, 보유기간이 길수록 자산가치의 분포가 넓어지므로 VaR도 커지게 된다. 보유기간은 통상적으로 금융자선 포트폴리오의 성격과 VaR의 사용목

적, 자산처분에 필요한 기간을 고려하여 정한다. 보유기간은 포트폴리오를 정상적으로 처분하는데 필요한 최대기간에 해당하므로 정상적인 매매에 필요한 기간으로 정의되는 보유기간은 유동성과 밀접한 관련이 있다. 바젤위원회의 내부모형(internal model)접근법은 10일의 보유기간을 대상으로 VaR를 계산하도록 하고 있으나 상업은행들은 VaR를 1일 보유기간 기준으로 보고 하고 있다.

VaR는 가치평가 접근방법에 따른 분류에 의해 두 가지로 나눌 수 있다. 포트폴리오의 가치평가 후 미분을 통해 가치의 변화를 추정하여 위험을 측정하는 부분가치 평가방법(local valuation)과 자산의 가격을 일정한 시나리오에 의해 포트폴리오를 재평가하여 위험을 측정하는 완전가치 평가방법(full valuation)이 있다. 부분가치 평가방법에는 Delta-Normal 방법이 대표적이고, 완전가치 평가법에서는 역사적 시뮬레이션(Historical Simulation Model), 몬테카를로 시뮬레이션 방법(Monte-Carlo Simulation Model), 위기분석(Stress Testing) 등이 있다. 또한, VaR를 측정하는 또 다른 방법인 확률분포의 종류에 따라 모수적방법과 비모수적 방법으로 나눌 수 있다. 모수적 방법은 수익률 분포의 표준편차와 정해진 신뢰수준을 이용하여 VaR를 구하는 방법이고 비모수적 방법은 분포에 대한 가정이 없이 자산의 수익률 분포가 주어질 때 이 분포로부터 직접 VaR를 구하는 방법이다. VaR 추정방법의 유용성을 비교하는 연구가 계속되고 있지만 각각의 방법들이 장, 단점을 모두 가지고 있으므로 어느 것이 적합한 것인가를 판단하기는 어렵다.

2.7.1. Delta Normal 방법

Delta-Normal 방법은 모수적 추정 방법으로 리스크 요소와 이에 따른 포트폴리오 손익이 정규분포를 가진다고 가정하여 VaR를 측정하는 방법으로 J. P. Morgan의 위험 관리 프로그램인 Riskmetrics를 포함한 대부분의 경우에 사용되는 방법이다.

자산의 수익률 분포가 정규분포를 따른다는 가정 하에 자산의 과거자료를 기초로 변동성과 상관계수를 추정하여 이를 신뢰수준을 반영하는 조정요수(multiplicative factor)와 포트폴리오의 변동성을 사용하여 VaR를 쉽게 구할 수 있다.

$$VaR_P = \alpha \times \sigma_p \times V_p$$

α : 신뢰수준에 따른 승수

σ_p : 포트폴리오수익률의 변동성(분산)

V : 포트폴리오의 가치

이 방법은 모든 자산 수익률이 정규분포를 따른다고 가정하므로 사용하기에는 편리하나 여러 가지 단점도 가지고 있다.

2.7.2. 역사적 시뮬레이션 방법

역사적 시뮬레이션이란 미래가격의 분포가 과거의 가격분포와 동일할 것이라는 가정을 하고 VaR를 구하는 방법이다. 즉, 과거의 N 개의 가격 변동성을 산출한 후 과거 변동성의 비율이 아닌 절대 가치변화량으로 그대로 옮겨 미래의 가격 변화를 예측한다. 또는 변동성의 변화량으로 활용하여 변동성을 예측한다. 이때, 과거N개의 가격 변동성 중 하나가 다음 기간 동안에 나타날 수 있다는 것을 가정의 기반으로 삼는다. 이제 미래의 가격 변동성 예측치가 나와 있으므로, 이를 오름차순으로 정렬하여 신뢰수준에 해당하는 값을 찾아내어 VaR를 측정한다. 이는 비모수적 추정방법이다. 따라서 채택한 과거 치안에 극단적인 일이 발생한 경우 이것이 시뮬레이션에 포함되므로 통계적으로 볼 때 위험치가 높게 나타날 수 있다.

역사적 시뮬레이션은 실제 가격을 이용하므로 비선형과 비정규분포를 수용할 수 있다. 이는 모수적 접근법과 달리 분포를 가정하지 않기 때문에 모수적 추정방법이 갖고 있는 분포의 가정이나 특정 모형으로부터 발생할 수 있는 오차를 줄일 수 있다는 장점이 있다. 하지만 모수적 추정방법에 비해 계산의 복잡성과 같은 추정과정이 어려움이 있다.

2.7.3. 몬테 칼로 방법

몬테칼로 시뮬레이션은 두 단계로 구성된다. 첫째, 재무변수의 확률과정(Stochastic process)과 과정계수(process parameter)를 규정한다. 여기서 위험과 상관관계 등의 계수는 과거자료로부터 구한다. 둘째, 가상적인 가격변화를 모든 변수에 대하여 시뮬레이션 한다. 주어진 목표기간 동안에 포트폴리오의 시장가치는 모형에 의해 결정된다. 이렇게 구한 가상적인 가격을 이용하여 수익률분포를 구한 후 이로부

터 VaR를 계산한다. 즉, 과거의 변동성으로부터 평균을 0으로 보았을 때, 분산을 추정한다.

$$\triangle S_t = S_{t-1}(\mu \triangle t + \sigma \varepsilon \sqrt{\triangle t}$$

ε는 평균이 0이고 분산은 1인 정규분포를 따르는 난수를 의미한다. 여기서, σ는 과거의 변동성으로부터 구한 분산의 추정치이다. 여기에서 과거의 통계치가 적용되어, 종목별 차이가 나타나게 된다. 계산을 원하는 기간을 N개로 쪼개어 $\sigma \varepsilon \sqrt{\triangle t}$ N개를 연속적으로 생성하고, 그 마지막 값의 분포에 대하여 신뢰수준에 해당하는 값을 구하여 VaR를 측정하는 방법이다.

몬테칼로 시뮬레이션은 가상적인 가격변화가 확률과정(Stochastic process)으로부터 구해진다는 것을 제외하면 역사적 시뮬레이션과 유사하다. 몬테칼로 시뮬레이션에 의한 VaR 값을 계산하는 과정에서 가장 중요한 것은 각 시나리오에서 포트폴리오의 가치를 구하는 것이다. 따라서 시뮬레이션을 시작하기 전에 가격의 움직임에 대한 통계적 특성을 가장 잘 나타내는 특정 확률모형(stochastic model)을 선택하여야 한다. 가격변화과정을 생성하기 위해 선택한 확률과정이 비현실적이면 VaR 추정치도 비현실적인 수치가 된다. 따라서 확률과정의 선택이 특히 중요하다.

2.7.4. 위기분석 방법

위기분석은 시나리오 분석이라고도 하는데 주요 변수의 극단적인 변화가 포트폴리오에 미치는 영향을 시뮬레이션 하는 기법이다. 즉 관심 있는 변수가 변할 수 있는 주관적인 시나리오를 결정한 후 이 변화가 포트폴리오의 가치에 미치는 영향을 분석하는 것이다.

이 방법은 과거에 일어나지 않았기 때문에 간과될 수 있는 예외적인 상황까지도 고려할 수 있어 민간 연구기관인 G-30은 민감도 분석을 보완적으로 사용하도록 추천하고 있다. 그러나 시나리오를 구성할 때 주관적인 판단의 오류를 범할 수 있으며 상관관계를 제대로 고려할 수 없기 때문에 크고 복잡한 포트폴리오에는 적합하지 않다는 단점이 있다.

제 8 절 VaR의 장점 및 단점

2.8.1. VaR의 장점 및 활용

VaR(Value at Risk)는 상품 및 리스크요소 별로 베타, 듀레이션, 델타, 감마, 베가 등 별도로 정의되는 민감도(Sensitivity)와 비교할 때 다음과 같은 장점이 있다.

a. VaR는 단일의 수치로 표현되어, 일반적으로 이해 및 의사소통이 용이하다.

b. VaR는 주가, 환율, 금리 등 상이한 리스크 요소들에 대한 리스크를 동일한 척도인 "금액"으로 표시하여 리스크 요소들 간의 비교가 가능하고, 따라서 전사적인 리스크 측정이 가능하도록 한다.

c. VaR는 각 리스크 요소에 대해 동일한 개념을 적용하므로, 리스크 조정 수익률 산출에 쉽게 이용될 수 있다.

d. VaR는 "최대손실" 개념을 이용하므로, 한정된 자원 즉, 자본금 배분에 이용될 수 있다.

e. VaR는 포트폴리오의 리스크량 산출에 있어 주가, 환율, 금리 등 각 리스크 요소 간의 상관관계를 감안한다.

f. VaR는 시장리스크 측정할 뿐만 아니라, 신용 및 운영리스크 등의 개념으로 확장이 가능한 개념으로 통합 리스크 측정 및 관리의 기반을 제공한다.

2.8.2. VaR의 단점 및 고려 사항

여러 가지 장점을 가진 반면 VaR는 다음과 같은 단점 및 이용 시 고려할 점들이 있다.

a. VaR는 기본적으로 과거 금융자산 수익률 자료를 기반으로 산출되는데 (backward-looking), 이러한 과거 자료가 미래에 대한 적절한 예측을 하지 못할 수 있다는 단점이 있다. 예를 들어, Parametric VaR와 Monte Carlo VaR는 금융자산 수익률의 변동성 및 상관관계를 추정하여 이러한 추정치가 미래에 적용될 것이라는 가정 하에 미래의 잠재 손실을 예측하는 방법이며, 이러한 가정들은 미래에 적용되지 않을 수 있다는 단점이 있다. 또한, Historical VaR의 경우에는 변동성이나 상관관계를 추정하지는 않지만 역시 과거 자료를 사용하기 때문에 과거자료가 미래에 대한 예측력이 떨어지는 경우 정확한 리스크를 산출할 수 없다는 문제가 생기기도 한다.

b. Parametric VaR나 Monte Carlo VaR의 경우, 일반적으로 금융자산 수익률이 정규분포를 따른다고 가정하는데, 실제로 금융자산 수익률은 정규분포보다 두터운 꼬리(fat tail)를 갖는 등 정확하게 정규분포를 따르지 않는 경우가 많다. 이 경우 정규분포 가정하의 VaR는 실제 VaR 즉, 실제의 리스크보다 작게 나온다는 문제가 있다.

c. VaR 산출시 보유기간(holding period)내 포지션의 청산 혹은 헷지가 가능한 것으로 가정하는데, 이러한 가정이 시장상황에 따라 적용되지 않을 수도 있다.

d. VaR는 VaR 산출에 이용되는 신뢰수준, 예를 들어 99% VaR의 경우, 나머지 1% 확률로 발생될 수 있는 손실에 대해서는 아무런 정보도 주지 않는다. 예를 들어 99% VaR가 10억인 경우에도 실제 손실이 11억 혹은 12억이 아니라 20억이 될 수도 있다.

e. VaR는 보유기간 동안 포트폴리오내의 포지션 변동이 없는 것을 가정하고 산출되는데, 예를 들어 트레이딩 포트폴리오가 보유기간 10일 동안 동일한 포지션을 유지한다고 가정하는 것은 비현실적일 수 있다.

f. VaR 수치가 위와 같은 여러 가지 불완전한 가정 하에 산출된다는 사실을 인식하지 못하면, 리스크관리에 대한 잘못된 자신감을 가질 수 있어 실질적인 리스크관리에 해가 될 수도 있다. 예를 들어 금융상품과 시장에 대한 이해는 없고, VaR 수치만 아는 경우가 이에 포함된다.

제 3 장 베이지안의 이론적 배경

제 1 절 베이지안 추론

“베이지안 통계학”이란 관심 있는 모든 것(모수, 결측치, 예측치 등)들에 대한 불확실성(uncertainty)을 확률분포로써 나타낸다는 가정에서 출발하는 것으로서 전통적인 통계학의 기본 가정인 “고정된 미지”라는 관점과는 근본적으로 출발점이 다르다. 따라서 베이지안 추론의 근간은 사후분포 또는 사후밀도함수이다. 사후밀도함수(posterior density function)는 우도함수(likelihood function)와 사전밀도함수(prior density function)의 곱에 비례하는 함수로서 우도함수에 따라 압축된 표본정보와 사전밀도함수에 함축된 사전정보를 베이지 정리에 의하여 합성한 것이다. 따라서 베이지안 패러다임은 개념적으로 간단하고, 직관적, 확률적 타당성을 지닌다고 볼 수 있다.

3.1.1. 전통적 방법과 베이지안 접근방법

전통적 접근방법은 우리가 흔히 통계적 접근이라고 명명하는 일반적인 추정과 검정의 절차에 사용하는 방법을 말한다. 그러므로 전통적 접근방법을 일반적 접근방법(the general approach to inference)라고 불러도 별무리는 없을 듯하다. 이러한 접근방법은 크게 두 가지의 상식적인 이론적 명제를 기반으로 하고 있다. 첫째는 전체사건(N)에서 임의의 사건(N_i/N)이 일어나 상대 도수(N_i/N)가 N을 무한히 증가시킬 경우 안정적이 되며 이때 이를 흔히 N_i가 발생할 확률이라고 애기한다는 것이다. 두 번째 명제는 첫 번째 명제를 확장시킨 것으로써 어떤 모집단에 대한 표본의 수가 무한히 증가할수록 그 표본의 모수(parameter)에 추정치는 안정적으로 주어진다는 것이다. 이렇게 도수나 표본의 수가 무한히 증가할 경우 안정적인 상태를 가정하는 것이 전통적 접근방법이다. 우리가 불편성이나 최소분산을 중요시하는 것도 이러한 안정성과 관련하여 이해할 수 있다. 결국 전통적인 접근방법은 확률과 모수추정치의 안정성을 전제로 오직 객관적인 유일해만을 상정한다. 이는 단순한 통계적 계산과정의 반복이며 인간의 선택이나 주관이 존재하지 않는다.

이러한 전통적 접근방법에 비해 베이지안적 접근방법은 자주 접할 수 있는 방

법은 아니었다. 또한 전통적인 통계학자들로부터 한때는 이단으로 취급받기도 하였다. 이 접근 방법도 역시 두 가지의 명제로 그 성격을 대변한다고 할 수 있다. 첫째는 확률을 어떤 사건이 일어나리라고 예상되는 각자의 주관적인 신념(subjective belief)이라고 정의하였다. 그러므로 하나의 사건에 대한 발생확률은 각자의 다 천차만별일 수밖에 없다. 둘째로 모수의 추정치는 모수에 대한 불확실성(uncertainty)에 입각하여 모수에 대한 각자의 모든 지식(knowledge)을 집약한 하나의 확률분포의 형태로 주어진다는 것이다. 결국 베이지안 접근방법은 확률과 모수가 각자 다른 주관적인 시각을 제시한다. 이는 단순히 통계적 계산만 하는 것이 아니라 각자의 선택과 주관이 개입된 것을 말한다.

3.1.2. 베이지안 방법

베이지안 분석 방법은 기존의 고전적인 분석 방법에 비해 유용한 사전정보의 사용을 가능하게 할 뿐 아니라 표본의 크기가 작을 때에 상대적으로 더 신뢰성 있는 분석을 할 수 있는 장점을 가지고 있다. 베이지안 추론의 주된 목적은 관심 있는 모수의 사후밀도함수(posterior density)를 사전밀도함수(prior density function)와 우도함수(likelihood function)로부터 구하는 것이다. 이 추론 과정은 대부분의 경우에 복잡한 적분계산을 요구하고 있기 때문에 베이지안 분석 방법은 우도함수와 사전밀도함수가 공액관계(conjugacy)가 성립하는 몇몇 경우에 대해서만 국한 적으로 사용되어 왔으며 실제 자료의 분석에는 많은 어려움이 있었다. 그러나 최근 들어 컴퓨터의 성능이 좋아짐으로써 사후밀도함수를 수치적으로 구할 수 있는 몬테칼로 방법이 널리 사용됨에 따라 베이지안 분석 방법은 여러 분야에서 사용되어지고 있는 추세이다.

몬테칼로 방법이란 사전에 모수(parameter)에 임의의 값을 설정하고 관측 안되는 변수(unobservable variables)의 값에 대해서는 일정한 밀도함수를 가정한 후 밀도함수로부터 관측값(random number)을 생성시킨 다음 이 값을 가지고 다시 거꾸로 모수를 추정하는 과정을 반복하여 모수에 대한 속성을 사후적으로 구하는 방법이다. 특히 이러한 몬테칼로 방법을 통해 모수에 대한 단편적인 추론에서 보다 나아가 모수의 사후밀도함수에 대한 전체적인 분포를 추정하는 것이 가능하게 되었다.

3.1.2.1. 사전확률분포(prior probability distribution)

Bayes(1763)이래, 특히 Fisher(1992)이래 베이지안 추론의 장점에 대한 논쟁이 매우 활발하였다. 이러한 논쟁의 초점은 사전분포함수들의 선택의 임의성이었다. 그러나 오늘날 베이지안 방법들이 통계학의 이론, 응용분야 모두에서 폭발적으로 대중화되어 가고 있다. 이는 사전정보가 거의 없다하더라도 신뢰할 수 있는 추론을 유도할 수 있는 것은 비정보적 사전분포를 이용할 수 있기 때문이다. 따라서 지난 수년간 매우 많은 범위의 비정보적 사전분포가 제안되고 연구되어 왔다.

사후분포를 결정하기 위해서는 사전분포를 선택하는 문제가 남아있다. 사전분포는 크게 자료적 접근법과 비자료적 접근법으로 나눌 수 있다. 자료적 접근법 중에서 우도함수와 사전분포가 공액(conjugate)을 이루게 하는 방법이 주로 쓰이는데, 이는 결과적으로 사전분포와 사후분포가 똑같은 모수분포형태를 갖게 하려는 것이다. 이러한 사전분포는 잘 알려진 표준형의 분포형태인 경우가 많은데 근사값을 구하기 쉽고 계산이 편리한 장점이 있다.

과거 자료가 없는 경우에는 주로 정보가 없는 사전분포를 사용하게 되는데 이것을 비정보적 사전분포(non-informative prior)라 부른다.

① 비정보적 사전확률밀도함수(noninformative prior = vague)

사전확률함수를 구하는 방법 중에 하나로 모수에 관한 정보에 확신이 없을 때 즉, 사전정보가 미흡할 때 비정보적 사전확률함수를 사용한다.

② 공액사전확률함수(conjugate prior)

모수의 분포는 존재하지만 그 분포의 형태를 모를 때, 널리 알려져 있는 분포족(distribution family)들로 사전확률함수를 이용하게 된다. 이때 사전확률분포와 사후확률분포가 같은 분포족일 때, 그때의 사전확률함수를 공액사전확률함수라고 한다.

3.1.2.2. 사후확률분포 (prior probability distribution)

사후확률분포는 현재 관측한 데이터로부터 얻은 새로운 표본정보와 사전정보에 의해 정해진다.

3.1.2.3. 베이지안 계산

베이지안 추론의 근간은 사후분포 또는 사후밀도함수이다. 사후밀도함수는 우도함수는 우도함수와 사전밀도함수의 곱에 비례하는 함수로서 우도함수에 압축된 표본정보와 사전밀도함수에 압축된 사전정보를 베이즈 정리에 의하여 합성한 것으므로 베이지안 패러다임은 개념적으로 간단하고 직관적, 확률적 타당성을 지닌다고 앞에서 언급하였다. 그러나 베이지안의 실제 적용은 단순하지 않는 경우가 종종 발생하는데 이는 근간이 되는 사후밀도함수가 수리적으로 주어지지 않고 단지 그 함수형태만 알 수 있는 경우가 많기 때문이다. 따라서 사후밀도함수와 나아가서는 사후추론을 위한 베이지안 계산기법이 요구된다.

$x_{1,\cdots,}x_n$이 분포$f(x|\theta)$(f는 알려진 분포형태, $\theta = (\theta_{1,\cdots,}\theta_p)$는 추론의 대상인 미지의 모수)에서 나온 관찰치(확률분포)일 때 θ에 대한 사전정보를 가지고 있으면 이를 관찰치와 함께 이용하여 θ를 추론하는 것이다.

다시 말하면 현재 자료인 $x_{1,\cdots,}x_n$이 관찰되기 이전의 θ에 대한 과거경험 또는 믿음 등에서 나온 θ의 정보를 나타내는 분포를 사전분포 $g(\theta)$라 하면 $g(\theta)$와 표본정보 $x_{1,\cdots,}x_n$을 합쳐서 θ를 추론하는 것이 베이지안 방법인데 이는 $g(\theta)$의 선택에 따라 추론결과가 달라지게 된다.

사후분포를 $g(x|\theta)$라 할 때 이 분포는 앞의 사전지식과 표본들의 지식을 모두 종합한 분포라 할 수 있다. 그러므로 사후분포에 더 많은 신뢰가 주어짐은 말할 것도 없다. 이제 이 두 분포는 베이즈(Bayes) 정리를 이용하여 그 관계를 알아 볼 수 있다.

$$h(\theta, x) = f(x|\theta) \bullet g(\theta)$$

$$= g(\theta|x) \bullet f(x)$$

여기서 함수 h는 확률변수 θ와 x의 결합함수(joint density function)이고 f와 g는 각각 개별변수의 확률분포(marginal distribution)와 조건부확률분포(conditional distribution)를 나타낸다. 식으로 나타내면

$$g(\theta|x) = \frac{f(x|\theta) \cdot g(\theta)}{f(x)}$$

와 같이 쓸 수 있다, 이때 $f(x)$를 하나의 상수로 간주하고 $f(x|\theta)$를 우도함수(likelihood function)형태인 $l(\theta|x)$로 쓴다면

$$g(\theta|x) \propto l(\theta|x) \cdot g(\theta)$$

의 형태가 된다. 결국 사후적 확률분포는 사전적 분포에 대한 정보와 표본으로부터 얻은 정보를 결합하여 얻어지는 것이다.

3.1.3. 베이지안 장점

베이지안 통계학의 첫 번째 장점은 결과의 해석이 전통적인 통계학보다 훨씬 쉽고 우리의 직관과도 잘 부합된다는 점을 들 수 있다. 통계학의 목표는 미지의 모수에 대한 정보를 추론하고 그 추론의 불확실성을 측량하는 것이다. 그런데 그 불확실성을 나타내는 가장 좋은 방법은 확률이며, 베이지안 통계학은 이 확률을 직접적으로 이용하는 유일무이한 통계적 기법이다.

베이지안 통계학의 두 번째 장점으로는 많은 실제 문제들에 대하여 모수의 사전 확률에 대한 정보를 쉽게 구할 수 있다는 것이다. 세 번째 장점은 베이지안 기법이 전통적인 통계학자의 관점에서도 좋은 추정방법을 제공한다는 점이다. 베이지안 기법으로 얻어진 통계량은 관측치의 수가 많아지면 최대우도함수추정량(maximum likelihood estimator)과 같은 뿐만 아니라 전통적인 통계학에서 많은 통계량들은 베이지안 추정량으로도 구할 수 있다.

베이지안 통계학의 네 번째 장점으로는 복잡한 문제에서 모수의 추론이 전통적인 통계학보다 쉽다는 점이다. 전통적인 통계학에서 많이 쓰이는 최대우도추정량은 우도함수가 복잡해지면 추정량의 계산이 어려워지지만 베이지안의 마코프 연쇄 몬테칼로(Markov Chain Monte Carlo)기법을 사용하면 모수의 사후본포를 쉽게 구할 수 있고, 사후분포를 통한 모수의 추론이 전통적인 방법을 이용한 추론보다 더 정

확하다.

단점으로는 전문가들의 주관이 포함되는 사전정보가 전문가들의 편견으로 인해 문제점을 야기 시킬 수도 있지만, 방법론을 실용적으로 적용하고 구사하는 측면에서 볼 때 표본정보 못지않게 전문가들의 의견도 굉장히 중요한 정보이므로 분석에 이용될 충분한 가치가 있다고 할 수 있다. 또 다른 단점으로는 전통적인 통계학에 비해서 구현과정이 어렵다는 점을 들 수 있다.

제 2 절 MCMC (Markov Chain Monte Carlo)알고리즘

사람의 요구가 점점 복잡해지고 커짐에 따라 그 욕구는 충족시키기 위해서는 더 정교하고 복잡한 모형이 필요하게 된다. 통계학에서도 그러한 문제는 예외가 아닐 것이다. 이런 이유로 그에 부응하는 새로운 계산방법과 이론이 절실히 필요하게 되었다. 이러한 것 중의 대표적인 것으로 모의실험(simulation)을 들 수 있을 것이다. 특히 마코프 연쇄(Markov Chain)를 이용한 모의실험, 즉 MCMC (Markov Chain Monte Carlo)가 그것이다. 다차원 또는 고차원의 적분계산과 같은 문제에 직면하게 되었을 때 모의실험이 다른 수치적 계산법보다 효과적이라는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 이러한 모의실험을 하기 위해서는 고차원 확률분포에서 표본을 추출해야하고 이것은 언제나 쉬운 것만은 아니며 노력이 요구되는 작업이기도 하다.

베이지안 분석에서 사후분포에 대한 추론은 사후분포에서 표본을 추출하여 이를 요약하고 시각화시켜야 한다. 그러나 일반적으로 특정형태가 아닌 복잡한 사후분포에서 표본을 추출한다는 것은 과거에는 매우 어려웠다. 하지만 현재는 마코프 연쇄를 이용한 모의실험 즉 MCMC라고 하는 상호 종속적인 확률변수를 생성하는 방법을 이용하면 이러한 문제를 해결할 수 있다. MCMC는 다변량이면서 직접적으로 사후분포에서 표본생성이 불가능하거나 생성가능해도 시간과 경비가 허락하지 않을 경우의 임의의 분포에서 생성해서 그것을 사후분포의 표본으로 사용할 수 있는 방법이다.

MCMC방법 중에 대표적인 방법으로는 Gibbs 표본추출 방법과 Metropolis - Hastings 알고리즘이 있는데 이 방법들의 공통점은 반복적으로 확률변수를 생성하며 생성된 변수들은 상호독립이 아니라 상관관계가 있고 종속적이라는 점이다. 따라서 결과 분석에는 많은 세심한 주의를 기울일 필요가 있고 또한 얼마나 많은 표본을 생성해야 하며, 어떻게 빨리 충분한 정보를 갖는 표본을 생성해야 하는가의

문제가 대두되고 있다.

그 밖의 몬테칼로 적분계산의 기법으로는 1960년 초반에 나타난 몬테칼로 적분법이 Hit와 Miss기법과 표본평균기법(Sample-mean method)이다. 그러나 이 두 가지 방법은 수치해석적 기법에 비하여 추정효율이 떨어지는 문제가 있어서 각광을 받지 못하였다. 그러나 이후 분산축소기법(Variance reduction technique)이 등장하고 또 종래의 수치해석적 기법들이 쉽게 적용되기 어려운 다차원적분값의 산출 문제에 몬테칼로 기법의 유용함이 밝혀지면서 주표본기법(Importance sampling method), 깁스샘플링기법(Gibbs-sampling-method), 메트로폴리스-헤스팅스알고리즘(Metropolis-Hastings등 많은 새로운 기법이 제안되고 있다.

3.2.1. 깁스샘플링 알고리즘(Gibbs Sampling Algorithm)

깁스 샘플링 알고리즘은 Gelman에 의해 연구가 되어 Hastings에 의해 발전되었다. 깁스 샘플링 알고리즘은 다차원 이상의 적분을 계산하기 위한 것으로 신경망, 전문가 시스템과 같은 척도가 크고 복잡한 모형에 적용되어 사용되어 왔다.

깁스 샘플링 알고리즘은 다차원의 결합 확률분포가 복잡하여 직접 랜덤표본을 생성하기 어려운 경우 각 변수의 조건부확률분포로부터 랜덤표본을 반복적으로 생성하면서 적절한 조건 하에서 이들의 극한분포가 결합 확률밀도함수가 된다는 사실에 근거하여 난수를 생성하는 알고리즘이다. 이때 개개의 조건부확률분포로부터의 난수 발생이 쉬워야 한다.

깁스 샘플링 알고리즘에서 각 변수의 조건부 확률분포로부터 반복적으로 생성된 난수들이 결합 확률밀도함수를 극한분포로 갖는 벡터 마코프 연쇄를 구성한다. 뿐만 아니라 각 변수의 조건부확률분포로부터 생성된 랜덤표본의 극한분포는 각 변수의 주변확률분포가 된다.

모수 θ에 대하여 $\theta=(\theta_1,\theta_2\cdots,\theta_p)^T$의 결합사후분포 $p(\theta|y)$로부터의 베이지안 추론을 위한 깁스 샘플링 알고리즘은 다음과 같다.

(1) 적절한 초기값 $\theta^{(0)}=(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\cdots,\theta_p^{(0)})^T$를 생각한다.

(2) $\theta_1^{(1)}\sim p[\theta_1|y,\theta_2^{(0)},\cdots,\theta_p^{(0)}]$

$\theta_2^{(1)}\sim p[\theta_2|y,\theta_1^{(1)},\theta_3^{(0)},\cdots,\theta_p^{(0)}]$

$$\theta_3^{(1)} \sim p[\theta_3|y, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \theta_4^{(0)}, \cdots, \theta_p^{(0)}]$$

$$\vdots$$

$$\theta_p^{(1)} \sim p[\theta_p|y, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \theta_3^{(1)}, \cdots, \theta_{p-1}^{(1)}]$$

(3) (1), (2)를 k번 반복한다.

위의 깁스 샘플링 과정을 통하여 나타나는 모수 θ에 대한 샘플링의 추정 결과는 다음과 같다.

$$\theta_1^{(k)} \sim p[\theta_1|y, \theta_2^{(k-1)}, \cdots, \theta_p^{(k-1)}]$$

$$\theta_2^{(k)} \sim p[\theta_2|y, \theta_1^{(k)}, \theta_3^{(k-1)}, \cdots, \theta_p^{(k-1)]}$$

$$\theta_3^{(k)} \sim p[\theta_3|y, \theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_4^{(k-1)}, \cdots, \theta_p^{(k-1)}]$$

$$\vdots$$

$$\theta_p^{(k)} \sim p[\theta_p|y, \theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)}, \cdots, \theta_{p-1}^{(k)}]$$

따라서 깁스 표본 $\theta^G = (\theta_1^{(k)}, \cdots, \theta_p^{(k)})$를 얻을 수 있으며, 이러한 과정을 전체 m번 반복하여 깁스 표본 $\theta_1^G, \cdots, \theta_m^G$를 얻을 수 있다. 이 깁스 표본을 사용하여 사후분포를 추정하며 사후평균과 사후분산을 계산할 수 있다.

3.2.2. 메트로폴리스-해스팅스 알고리즘 (Metropolis-Hastings Algorithm)

메트로폴리스-해스팅스 알고리즘은 볼츠만분포의 특별한 경우를 위해 이것을 발표한 Metropolis와 이것을 일반화한 Hastings의 이름을 따서 명명되었다. 깁스 샘플링 알고리즘은 메트로폴리스-해스팅스 알고리즘은 특별한 경우이며, 일반적인 적용에는 제약이 있지만 보통 더욱 빠르고 사용하가 쉽다.

메트로폴리스-해스팅스 알고리즘은 난수를 발생하고자 하는 목표 확률분포가 $f(\theta) \propto \pi(\theta)$ 혹은 $f(\theta) = c \cdot \pi(\theta)$와 같이 주어지고, 이 때 정규화 상수를 모르는 경우 $f(\theta)$로부터 난수를 발생시키는 알고리즘이다.

메트로폴리스-해스팅스 알고리즘을 사용하기 위해서 다음과 같은 과정이 필요하다.

(1) 초기값 θ^0를 선택한다.

(2) $k=1$로 놓는다.

(3) 적당한 조건부 확률밀도함수 $q(\theta^*|\theta^{k-1})$로부터 후보난수 θ^*를 생성한다.

(4) 균일분포 $U(0,1)$로부터 난수 u를 생성하여 $u \le a$이면 $\theta^k = \theta^*$으로 갱신하고 그렇지 않을 경우에는 $\theta^k = \theta^{k-1}$으로 한다. 이 때 α는 다음과 같다.

$$\alpha = \min\left\{1,\ \frac{\pi(\theta^*|y)}{\pi(\theta^{k-1}|y)} \frac{q(\theta^{k-1}|\theta)}{q(\theta^*|\theta^{k-1})}\right\}$$

(5) $k=k+1$을 적용하여 (3)으로 돌아간다.

다음의 결과로부터 얻은 $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \cdots$는 $f(\theta)$를 극한분포로 가지는 마코프 연쇄이며, 이 표본을 통하여 사후분포의 사후평균과 사후분산을 계산할 수 있다.

메트로폴리스-해스팅스 알고리즘에서 후보생성밀도함수 $q(\theta^*|\theta^{k-1})$를 어떻게 정하는가에 따라 난수를 생성하는 과정이 많은 영향을 받게 된다. 이 후보 생성 밀도 함수 $q(\theta^*|\theta^{k-1})$에 대해 주로 사용 되는 것은 확률보행연쇄와 $\pi(\theta^*)$의 알려지는 형태를 사용하는 방법이 있다.

첫 번째, 확률보행연쇄를 이용한 방법은 $q(\theta^*|\theta^{k-1}) = q_1(|\theta^* - \theta^{k-1}|)$로 주어진다. 여기서 q_1은 특정된 밀도함수 이다. 따라서 난수 $\theta^* = \theta^{k-1} + \theta^e$의 방법으로 생성된다. 여기서 θ^e는 증분 확률변수로서 $\theta^e \sim q_1(|\theta^e|)$를 따른다. 흔히 q_1의 대표적인 선택으로는 균일분포, 정규분포, 코쉬분포 등을 사용한다. 확률보행연쇄를 이용한 경우 이동확률 α는 다음과 같다.

$$\alpha = \min\left[\frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta^{k-1})}\right]$$

두 번째, 알려진 형태의 $\pi(\theta^*)$를 사용하는 방법은 만약 $\pi(\theta^*)$가 $\pi(\theta^*) \propto \psi(\theta^*) \cdot h(\theta^*)$와 같이 표현될 때 $h(\theta^*)$가 난수를 쉽게 발생할 수 있는 밀도 함수이고 $\psi(\theta^{k-1})$가 균일유계이면 $q(\theta^*|\theta^{k-1}) = h(\theta^*)$를 선택한다. 알려진 형태의 $\pi(\theta^*)$를 사용하는 경우 이동확률 α는 다음과 같다.

$$\alpha = \min\left[\frac{\psi(\theta^*)}{\psi(\theta^{k-1})}\right]$$

제 4 장 실증분석

본 연구는 2004년 10월 19일부터 2011년 04월 29일까지의 주가종합지수 일별 종가 데이터 (1628일)를 대상으로 주가수익률 모형을 추정하였다. GARCH모형에 베이지안 접근을 하여 변동성을 구해본 후 변동성의 특성을 알아본 후 VaR을 구해보기로 한다. GARCH모형의 변동성의 특성을 알아보기 위해 분석의 대상이 된 자료는 2004년 10월 19일부터 2011년 04월 29일까지의 1628일의 주가종합지수인 KOSPI 데이터를 사용하여 실증분석을 실시해보았으며, 또 VaR을 구해보기 위해 시장을 대표할 수 있고 활발히 거래되어 유동성이 높은 주식으로 편성된 KOSPI200 지수의 상장기업의 데이터를 선택하여 실증분석을 해보았다. 베이즈 추정을 하기 위해서는 먼저 관심 모수에 대한 우도함수와 사전분포 함수들을 정의해야 한다. GARCH모형의 우도함수는 다음과 같다.

$$l(y|\alpha,\beta) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

시점 t마다 조건부분산을 추정해야 하므로 위의 우도함수에서는 일정한 분산 σ^2 대신 σ_t^2이 사용되고 있다.

이제 모수 α,β에 대해 다음과 같은 사전분포를 가정한다.

$$P(\alpha, \beta) \propto N(\theta_\alpha, \phi_\alpha) \times N(\theta_\beta, \phi_\beta) \times I(\alpha, \beta)$$

여기서 $N(\theta,\phi)$는 평균이 θ이고, 분산이 ϕ인 정규확률밀도함수이고 $\theta_\alpha, \phi_\alpha, \theta_\beta, \phi_\beta$는 각 모수들의 사전평균과 사전분산을 나타낸다.

$I(\alpha,\beta)$는 모수들에 대한 제약조건을 만족하면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 지시함수인데, 여기서 제약조건은 일반적인 GARCH모형에 적용되는 다음 정상성 조건을 말한다.

$$C1 : \alpha_i > 0 \text{ for } 0 \leq i \leq p$$

$$C2 : \beta_l > 0 \text{ for } 1 \leq l \leq q$$

$$C3 : \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{l=1}^{q} \beta_l < 1$$

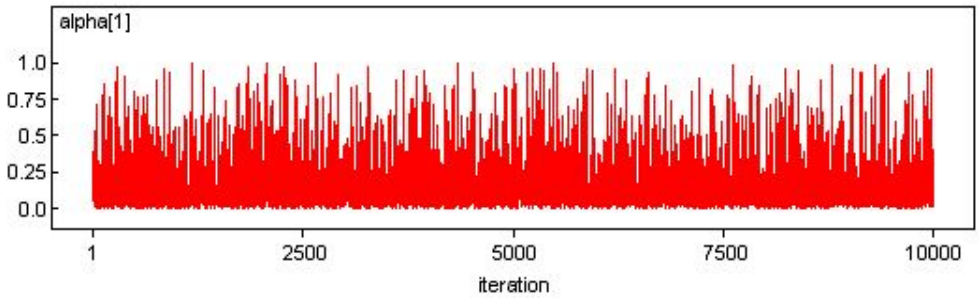
앞서 제시한 데이터 생성과정을 따르는 시계열자료 $y = [y_1,...,y_n]$들에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$l(y|\alpha, \beta) = \Pi_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

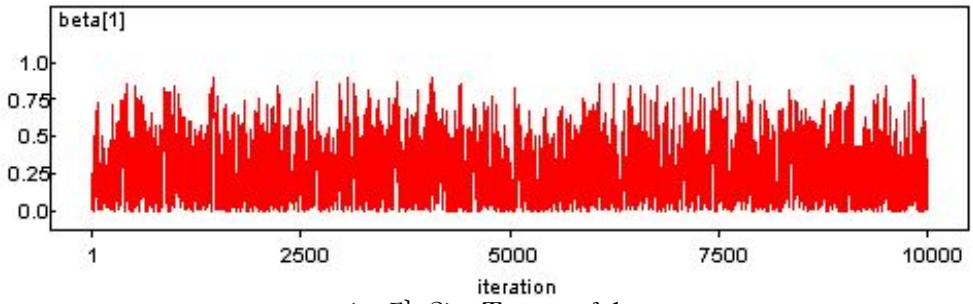
y가 주어졌을 때 모수 α,β에 대한 사후분포함수는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$P(\alpha, \beta|y) \propto l(y|\alpha, \beta) P(\alpha, \beta)$$

베이지안 MCMC 추정을 위해서 베이지안 소프트웨어인 Winbugs를 사용하였다. Winbugs는 MCMC 추정시 모수의 사후분포(posterior distribution) 추출과 관련된 알고리즘이 프로그램 내에서 자동적으로 선택되는 구조를 가지고 있다. 다만 알고리즘의 선택기준은 알 수 없는 “블랙박스”의 형태이다. 이는 MCMC 관련 컴퓨터 코딩을 다른 소프트웨어에 비해 월등히 쉽게 하는 장점이 있으나 이는 추정대상 모형에 따라 계산상의 효율성이 낮아져 추정시간이 길어지는 문제점이 발생하기도 한다. Mayer and Yu(2000)와 Yu(2005)는 Winbugs를 이용하여 로그 확률변동성 모형(log stochastic volatility model)을 추정하였고, Yun and Hong(2009)은 이를 참조하여 미국 S&P 500 주가수익률을 대상으로 제곱근 확률변동성 모형을 추정한 바 있다. MCMC 추정시 10,000회의 MCMC 순환을 수행하였으며, 이중 초기 2,000회의 순환결과를 MCMC 체인 (chain)의 수렴성 확보를 위해 폐기하였다.



<그림 1> Trace of alpha



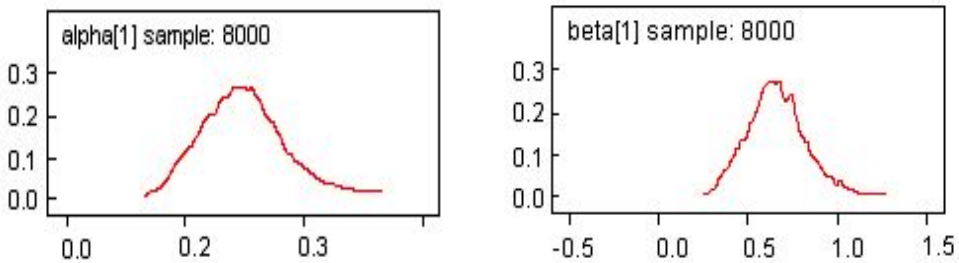
<그림 2> Trace of beta

위의 그림은 MCMC를 이용한 모의실험 결과의 α와β 값들을 나타낸 것으로 미지의 모수들에 대한 깁스샘플링을 하였을 때는 그 값들이 수렴하는지를 살펴볼 필요가 있다. 모의실험에서는 그래프를 통해 살펴본 후 안정적인 상태로 수렴하는 값들을 얻기 위하여, 수렴하는지를 살펴볼 필요가 있다. 모의실험에서는 그래프를 통해 살펴본 후 안정적인 상태로 수렴하는 값들을 얻기 위하여, 수렴하지 않는 초반의 값들은 제거하였다. 이 그림들은 표본들이 얼마나 잘 혼합(well-mixing)되어 추출되었는지를 보여준다. 만약 그림에서 반복(interation)하는 동안 값이 변하지 않고 일정하게 유지되는 부분이 존재한다면 이 표본은 잘 혼합되어 추출되었다고 볼 수 없다. 따라서 위의 2가지 생성표본 추이에 대한 그림을 살펴보면 어느 반복지점에서 값이 변하지 않고 일정하게 유지되는 부분을 찾아볼 수 없으므로 생성된 α와β값들이 잘 혼합되었다고 할 수 있다.

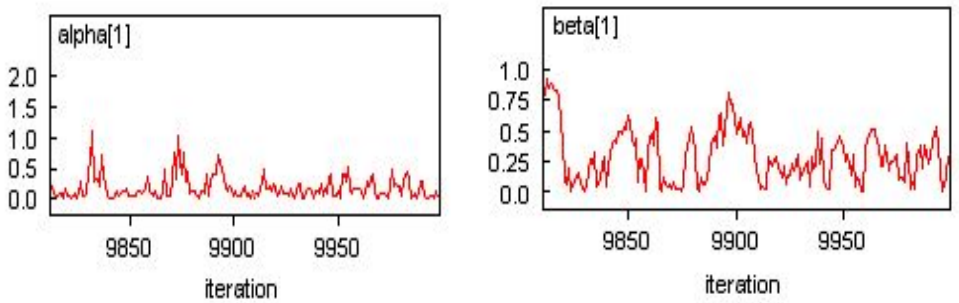
그리고 이 그림들은 모의실험으로 얻어진 α와β 값들이 수렴상태를 나타내주는 측도는 될 수 없지만 이 그림들은 보면 α와β 값들이 잘 혼합되어 추출되었으

므로 수렴하는데 특별한 문제가 없다는 것을 알 수 있다.

$\alpha+\beta$의 합은 변동성이 얼마나 지속적인가 또는 현재의 변동성이 미래에 어떤 속도로 소멸되어 갈 것인가를 측정하는 계수로 활용되고 있다. $\alpha+\beta$의 값이 1에 가까울수록 현재의 변동성이 유사한 수준에서 장래에도 지속될 가능성이 높다는 것이다. 일반적으로 실증분석에서 β의 값이 α값보다 큰 경우가 많고 1에 가까운 경향을 보인다. 아래의 그림에서도 보면 $\alpha+\beta=0.91$로 거의 1에 가까운 경향을 보이고 있다. 따라서 금융시계열에 있어서 많은 경우가 조건부 이분산에 대한 충격 효과가 사라지는데 소요되는 시간은 매우 긴 영향이 있다고 볼 수 있다.

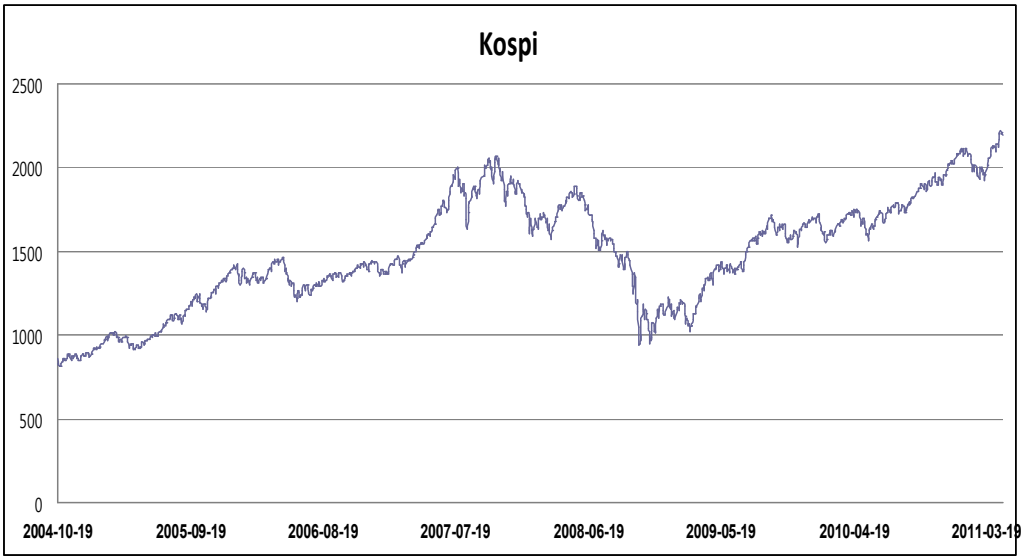


<그림 3> kernel density of alpha and kernal density of beta



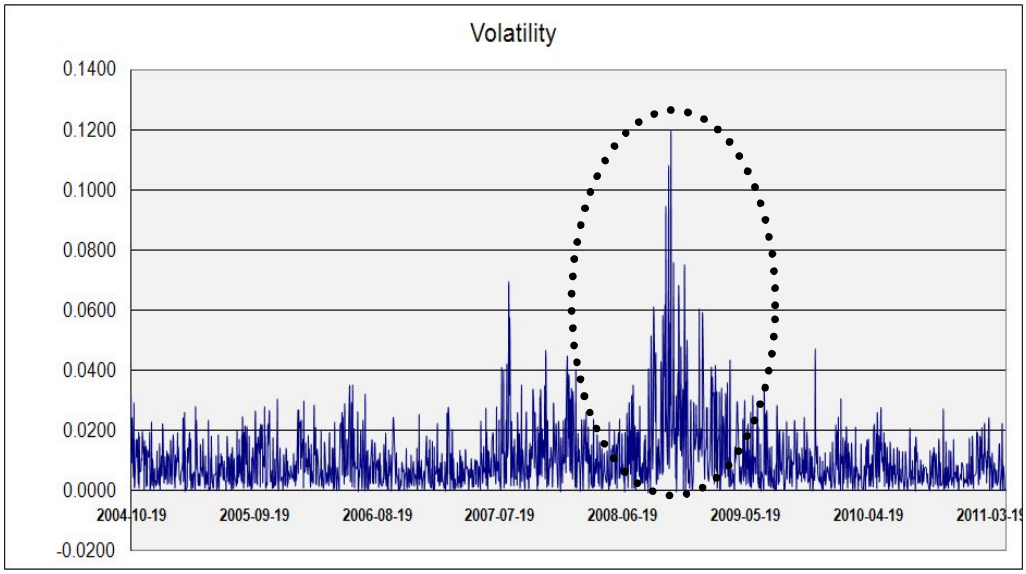
<그림 4> history of alpha and history of beta

이제 베이지안 MCMC방법으로 도출된 GARCH모형의 변동성의 성질을 알아본다. 2004년 10월 19일부터 2011년 04월 29일까지의 주가종합지수인 KOSPI의 시계열 그래프를 보면 아래와 같이 나타난다.



<그림 5> KOSPI 시계열그래프

그림5에서 주가종합지수는 분석기간 동안 2007년 말까지 전반적으로 상승세를 보이다가 2007년 이후 전반적으로 하락세를 보이고 있다.



<그림 6> 변동성 시계열 그래프

일일 수익률 자료의 변동성 추이를 살펴보면 타원형으로 표시되어 있는 부분에

서 수익률의 등락이 연속적으로 일어나는 변동성 군집현상(volatility clustering)을 발견할 수 있다. 여기서 변동성 군집현상이란 최근의 변동성이 미래의 변동성에 영향을 줄 수 있다는 확률적으로 검증된 현상이다. 즉, 변동성의 시계열이 서로 상관관계를 가지고 움직인다는 것으로 변동성이 한번 커지면 변동성이 커진 상황이 한동안 지속될 가능성이 높다는 이론이다.

이와 같은 변동성 군집현상을 설명하기 위해서 ARCH, GARCH 모형 등이 개발되었다. 이를 다시 한번 확인 해 볼 수 있었다.

위에서 산출한 GARCH모형의 변동성을 사용하여 비교적 시가총액이 크고 거래의 유동성이 큰 코스피 200 종목 중 3개의 그룹 삼성전자, 현대 자동차, 신세계 3개의 그룹의 기초데이터를 가지고 주식의 종가데이터를 취합한 후 각각 주식의 일일 수익률을 산출하였다. 산출된 수익률을 가지고 각각 3개의 종목의 VaR을 몬테칼로 시뮬레이션 방법으로 각각 개별 VaR 와 포트폴리오 VaR을 산출하였다. 변동성을 비교하기위해 단순이동평균과 VaR을 비교해 보았다.

또한 일일 수익률은 다음과 같은 식에 의하여 해당주식의 일일 종가에 로그값을 취한 후 차분하여 계산하였다.

주식의 일별 수익률 = LN(당일 주식 종가 / 직전일 주식 종가)

VaR 분석에 사용한 자료는 증권거래소에서 제공하는 2008년 1월 2일부터 2010년 12월 30일까지의 주식 삼성전자, 현대 자동차, 신세계의 종가 데이터를 사용하였다.

단순이동평균(SMA)와 GARCH(1,1)에서 과거 수익률에 대한 변동성을 가지고 각각 종목의 VaR 와 포트폴리오 VaR를 산출하였다. 산출 시 보유금액은 해당 주식 1주를 기준으로 산출하며 산출한 VaR는 보유기간을 10일로, 1달로 가정하여 2010년 12월 30일 기준으로 산출하였다. 2011년 1월 3일부터 영업일 기준으로 10일이 지난 2011년 1월 14일까지와 1달이 지난 2011년 1월 31일까지의 해당종목에 대한 수익률에 대한 VaR를 구해보았다. 산출한 VaR는 다음 표에 나와 있다.

<표 1> 보유기간 10일 기준

신뢰수준	구분	삼성전자	현대자동차	신세계	포트폴리오
-	보유금액	958,000	177,000	615,000	1,750,000
95%	SMA	33,550	8,300	19,250	59,700
	GARCH(1,1)	34,864	9,244	21,572	70,860
99%	SMA	37,950	10,600	24,380	72,450
	GARCH(1,1)	43,426	12,172	30,404	84,300

<표 2> 보유기간 1달 기준

신뢰수준	구분	삼성전자	현대자동차	신세계	포트폴리오
-	보유금액	958,000	177,000	615,000	1,750,000
95%	SMA	35,620	9,800	23,080	64,220
	GARCH(1,1)	38,470	11,250	28,320	75,780
99%	SMA	40,910	12,200	27,950	77,690
	GARCH(1,1)	45.150	16,780	39,470	94,560

위의 표에서 알 수 있듯이 산출된 변동성을 이용해 보유기간 10일, 1달을 기준으로 신뢰수준 95%, 99%에 해당하는 개별 종목의 VaR를 산출하고 포트폴리오 VaR을 산출하였다. 그 결과 보유기간 10일로 산출한 VaR보다 1달을 기준으로 산출한 VaR가 더 크게 나옴을 알 수 있었다. 즉, 보유기간이 길수록 자산가치의 분포가 넓어지므로 VaR도 커지게 됨을 볼 수가 있었고, 신뢰수준은 95%에서 산출한 VaR보다 99%에서 산출한 VaR가 더 크게 나오게 됨을 볼 수 있었다. 여기서 신뢰수준은 자산가치 감소액의 특정 한 값으로 신뢰수준이 높을수록 보수적인 리스크 측정으로 평가되어 VaR는 더 커지게 됨을 확인할 수가 있었다.

또한 개별종목의 VaR의 합보다 포트폴리오의 VaR가 더 작게 나오게 된 것을 알 수 가 있었다. 그 이유로는 포트폴리오의 분산 투자효과 때문이다. 즉 포트폴

리오 구성자산들에 대한 수익률이 각각 다르게 존재하므로 각각 수익률에 대한 상관관계를 반영하여 종목 VaR의 합보다 작게 산출이 되는 것을 의미한다.

VaR(Value at Risk)도 단순이동평균(SMA)으로 산출한 VaR보다 GARCH(1,1) 모형에서 더 크게 산출이 되었음을 알 수 가 있다. 이는 전시점에 동일한 가중치를 주는 단순이동평균보다는 현시점에 더 가중치는 주는 모형이 GARCH(1,1)모형이기 때문이다.

마지막으로 위에서 산출한 VaR 데이터를 실제 운용했을 시의 수익률과 비교해 본다. 산출한 VaR는 보유기간을 10일로, 1달로 가정하여 2010년 12월 30일 기준으로 산출하였다. 즉 10일, 1달간의 최대 손실이 산출된 VaR를 초과하지 않는다는 것을 뜻한다. 2011년 1월 3일부터 영업일 기준으로 10일이 지난 2011년 1월 14일까지와 1달이 지난 2011년 1월 31일까지의 해당종목에 대한 수익률과 실제 수익률을 비교해 보았다.

<표 3> 평균수익률과 VaR비교(보유기간 10일기준)

구분		삼성전자	현대차	신세계
평균 수익률		-0.29%	0.14%	-0.18%
매입금액		958,000	177,000	615,000
손실금액		-25,000	23,500	-11,000
95% VaR	SMA	33,550	8,300	19,250
	GARCH(1,1)	34,864	9,244	21,572
99% VaR	SMA	37,950	10,600	24,380
	GARCH(1,1)	49,426	12,172	30,404

2011년 1월 3일부터 2011년 1월 14일까지 10일 동안의 기간 중 주식의 수익률을 보면 현대차는 (+) 이므로 해당 기간 동안 이익을 보고 삼성과 신세계는 해당기간동안 (-) 손실금액만큼의 손실을 봤다

<표4> 평균수익률과 VaR비교(보유기간 한달기준)

구분		삼성전자	현대차	신세계
평균 수익률		0.13%	0.10%	-0.31%
매입금액		958,000	177,000	615,000
손실금액		23,000	2,000	-39,000
95% VaR	SMA	35,620	9,800	33,080
	GARCH(1,1)	38,470	11,250	38,320
99% VaR	SMA	40,910	12,200	37,950
	GARCH(1,1)	45,150	16,780	46,470

2011년 1월 3일부터 2011년 1월 31일까지 1달동안의 기간 중 주식의 수익률을 보면 삼성전자와 현대차는 (+) 이므로 해당 기간 동안 이익을 보고 신세계만 해당 기간동안 (-) 손실금액만큼의 손실을 봤다. 실제 손실본 금액이 산출된 VaR금액을 초과 하지 않는 것을 신세계를 보면 알 수 있다. 위에서 보면 SMA로 산출된 VaR이 최소수익률에 가장 근접하게 산출되었는데 이는 단순히 과거자료에 대한 가중치 없이 산출한 변동성이므로 산출하려는 시점 근래의 시장상황을 반영하기 힘들다. 만약 최근에 시장이 급락급등이 반복했을 경우 변동성이 크게 측정이 되어야 정상인데 SMA의 경우는 현재시장상황이나 이전 상황이나 동일한 가중치를 주고 있으며 GARCH(1,1)모형은 최근 시장상황에 대한 가중치를 주어 변동성을 산출하므로 SMA보다 더 적절한 방법이라고 할 수 있다. 결국 이분산성을 잘 표현하고 있다고 말할 수 있다.

제 5 장 결 론

최근 경제가 급변하면서 자산의 위험관리에서 변동성의 중요성이 더욱 커지고 있다. 이러한 변동성은 분산을 지칭하며, 위험(Risk)을 측정하는 수단이 되고 있다. 본 논문에서는 이분산성을 나타내는 GARCH모형을 이용하여 2004년 10월 19일부터 2010년 12월 30일까지의 주가종합지수 일별 종가 데이터 (1547일)를 대상으로 변동성을 베이즈 추정의 방법으로 Winbugs를 이용하여 MCMC 방법을 전개 하여 GARCH(1,1)모형의 변동성의 특성을 살펴보았다. 그 다음으로 3가지 주식 삼성전자, 현대차, 신세계의 포트폴리오를 구성하여 2008년 1월 2일부터 2010년 12월 30일까지의 일별 종가자료를 사용하여 변동성에 대한 여러 산출방법 중에서 단순이동평균(SMA), GARCH(1,1) 모형을 기준으로 변동성을 산출하여 비교하였다.

과거자료에 대한 가중치 없이 단순한 방식으로 산출하는 단순이동평균(SMA)으로 산출한 변동성과 최근 자료에 대한 일정한 가중치를 주어 산출하는 GARCH(1,1) 모형을 기준으로 변동성을 산출한 결과 최근의 시장상황을 반영하는 방식인 GARCH(1,1)모형으로 산출한 변동성이 더 크게 나오게 됨을 알 수 있었다.

산출된 변동성을 이용해 보유기간 10일과 1달을 기준으로 신뢰수준 95%, 99%에 해당하는 개별 종목의 VaR를 산출하였다. 그 결과 보유기간 10일보다 1달에서, 신뢰수준 95%보다 99%에서 더 크게 산출됨을 알 수 있었다. 또한 최근의 시장상황을 반영하는 GARCH(1,1) 모형에서 산출한 VaR가 단순이동평균(SMA)보다 더 크게 나옴을 알 수 있었다. 종합적으로 단순이동평균(SMA)보다 최근의 시장상황을 반영할 수 있는 GARCH(1,1)모형이 더 적정함을 알 수 있었다.

이로써 변동성만 가지고도 다음 기의 해당 자산에 대한 수익률을 유추할 수 있었고 변동성이 곧 VaR 산출에 영향을 미친다는 것을 알게 되었다. 더욱더 정밀한 VaR를 산출하기 위해선 좀 더 정밀하고 객관적인 변동성 산출 방법의 연구가 필요 할 것으로 보인다.

참 고 문 헌

[1] Albert, J. and S. Chib(1993). Bayesian inference for autoregressive time series with mean and variance subject to Markov jumps. Journal of Business and Economic Statics, 11 : 1-15

[2] Bollerslev, T(1986). Generalized autoregressive conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 31 : 307-327

[3] Bolstad, William M(2007). Introduction to Bayesian Statistics(Second Edition), John Willey & Sonslnc

[4] Chen, Ming-hui, Shao, Qi-Man, lbrahim, Joseph George(2000). Monte Carlo Methods in Bayesian Computation

[5] Carlin, Bradley, P(2007). Bayesian Methods for Data Analysis, CRC Pr LIc.

[6] Christian P. Robert, George Casella(2004). Monte Carlo Statistical Methods, Springer

[7] Engle, R. F(1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica, 55: 391-408.

[8] Engle, R. F. and T. Bollerslev (1986). Modeling the persistence of conditional variance. Econometric Reviews, 5 : 1-50.

[9] J. Albert(2007), Bayesian Computation with R, Springer

[10] So Young Sohn, Michael Lim(2007). Hierarchical forecasting based on AR-GARCH model in a coherent structure

[11] Manabu Asai (2006). Comparison of MCMC methods for estimating GARCH Models

[12] Hamilton, J. D. (1994). Time Series Analisis. Princeton University Press, Princeton, New York.

[13] Gelman, A. Carlin J. B., Stern, H. s, and Rubin, D. b. (1995). Bayesian Data Analysis. London : Chapman & Hall

[14] Kleibergen, F., van Dijk, H.K. (1993). Non-stationarity in GARCH model : A Bayesian analisis. Journal of Applied Econometrics, 8 : S41-S61

[15] Nakatsuma, T. (1998). A Markov-Chain Sampling Algorithm for GARCH models. Studies in Nonlinear Dynamics Econometrics, 3(2) : 107-117

[16] Peter M. LEE(2003). Bayesian Statistics An Introduction, Arnold Publication.

[17] T. G Andersen, R.A Davis, J.P Kreib, T.Mikosch(2009). Handbook of Financial Time Series, Springer.

[18] To Tran, Lam Giang(2010). GARCH Models in Forecasting Foreign Exchange Rate Volatility : GARCH 모형을 이용한 환율변동성 예측, 경북대 대학원 석사학위논문.

[19] 김명직, 장국현 공저(2000). 금융시계열분석, 경문사.

[20] 김달호(2005). 베이지안 통계학, 자유아카데미.

[21] 김병훈(2009). 옵션시장에서의 변동성 추정에 관한 비교분석연구, 건국대 대학원 석사학위논문.

[22] 김삼용, 이용흔(2006). 이분산성 시계열 모형들의 성능 비교, 한국 통계학회 Vol 19 No 1.

[23] 권현아(2010). 다변량 GARCH 모형을 이용한 자산상관계수에 대한 연구 : KOSPI 우량주를 중심으로, 서강대 대학원 석사학위논문.

[24] 나상희(2009). 변동성 변화에 따른 VaR 비교 분석, 건국대 대학원 석사학위논문.

[25] 박순상(2003). 마케팅 조사의 Bayesian 접근에 관한 연구 : Winbugs를 사용한 베이지안 회귀분석, 숭실대 대학원 석사학위논문.

[26] 신원재, 최문희, 이홍재(2009). 계층적 베이즈 모형을 이용한 I-GARCH 와 VaR의 추정 및 결정 요인 분석, 한국경영학회 Vol 2009 No-[2009].

[27] 이윤수(1999). GARCH 모형에 기초한 VaR(Value at Risk)모형의 적합성 검증 = Study on VaR(Value at Risk) Model based on GARCH Specification, 연세대 대학원 석사학위논문.

[28] 윤재호(2009). 최적필터(optimal filter)를 이용한 우리나라 주가지수의 확률변동성 및 점프추출 한국은행금융경제연구원.

[29] 장인식(2001). 베이즈 추론, 고려대학교 출판부

[30] 장원(2009). Bayesian UHF GARCH-M 모형을 이용한 변동성 및 European Option 가격분포 추정, 고려대 대학원 석사학위논문.

[31] 정수정(2010). GARCH(1,1)모형들의 베이지안 군집분석에 관한 연구, 동국대 대학원 석사학위논문.

[32] 전수창(2003). GARCH 모형을 중심으로 국채 선물 시장과 현물 시장의 정보

유입에 대한 반응에 관한 연구, 서강대 대학원 석사학위논문.
[33] 채화연(2004). ARMA(p,q)-GARCH(r,s) 모형에서 베이지안 방법을 이용한 평균과 분산에 대한 예측, 고려대 대학원 석사학위논문.
[34] 최광렬(2003). 조건부이분산성 모형의 비교 연구, 중앙대 대학원 석사학위논문.