creative commons
COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000239639

２０１０年 2月
博士學位論文

퍼지제어기의 멤버쉽 함수의 퍼지변수 변화에 따른 안정도 고찰

朝鮮大學校 大學院

制御計測工學科

李 京 雄

퍼지제어기의 멤버쉽 함수의 퍼지변수 변화에 따른 안정도 고찰

Consideration for Stability on Changing Fuzzy Variables of Membership Function in Fuzzy Logic Controller

2010年 2月 日

朝鮮大學校 大學院

制御計測工學科

李 京 雄

퍼지제어기의 멤버쉽 함수의 퍼지변수 변화에 따른 안정도 고찰

指導敎授 최 한 수

이 論文을 工學 博士學位申請 論文으로 提出함.

2009年 11 月 6日

朝鮮大學校 大學院

制御計測工學科

李 京 雄

李京雄의 博士學位論文을 認准함

委 員 長 朝鮮大學校 敎授 _____印

委　　員 全南大學校 敎授 _____印

委　　員 全北大學校 敎授 _____印

委　　員 朝鮮大學校 敎授 _____印

委　　員 朝鮮大學校 敎授 _____印

2009 年　12　月　　日

朝鮮大學校 大學院

목 차

ABSTRACT ····· VI

제 1 장 서 론 ····· 1

제 2 장 비선형 시스템 ····· 4
제 1 절 비선형 시스템 ····· 4
1. 비선형성 ····· 4
2. 비선형 시스템의 특성 ····· 5
제 2 절 비선형 시스템의 안정도 ····· 11
1. 선형 시스템 안정도 판별 ····· 11
2. 비선형 시스템의 안정도 ····· 12
제 3절 퍼지제어 시스템의 안정도 ····· 18
1. 입출력 방법 ····· 20
2. 주파수 응답 방법 ····· 21
3. Lyapunov 방법 ····· 22

제 3 장 퍼지변수에 따른 퍼지제어기 특성 해석 ····· 24
제 1 절 퍼지제어기의 특성 ····· 24
제 2 절 멤버쉽 함수에 따른 퍼지논리 특성 ····· 25
제 3 절 멤버쉽 함수에 따른 수학적 해석 ····· 29
1. 퍼지변수에 따른 비선형 특성 ····· 29
2. 퍼지제어기의 수학적 표현 ····· 31
3. 퍼지제어기 응답 ····· 34

제 4 장 Describing Function 해석 ····· 43
제 1 절 Describing Function의 정의 ····· 44
1. 준선형화 ····· 44
2. Describing Function의 기본 조건 ····· 46

3. Describing Function의 수학적 표현 ····· 47
4. 일반적 비선형 요소의 Describing Function ····· 49
5. Describing Function을 이용한 안정도 판별 ····· 54
제 2 절 Describing Function을 이용한 퍼지제어기 해석 ····· 60
1. 퍼지제어기의 Describing Function 표현 ····· 60
2. 후건부 변수에 따른 Describing Function ····· 61
3. 후건부 변수에 따른 도식적 표현 ····· 76
4. 후건부 변수에 대한 MGM과 MPM ····· 77

제 5 장 Circle Criterion 해석 ····· 85
제 1 절 Circle Criterion 정의 ····· 85
1. 절대안정 ····· 85
2. Circle Criterion ····· 88
제 2 절 Circle Criterion을 이용한 퍼지제어기 해석 ····· 92
1. 퍼지제어기의 Circle Criterion 안정도 판별 ····· 92
2. 후건부 변수에 대한 MGM과 MPM ····· 97

제 6 장 실험 및 고찰 ····· 99
제 1 절 시스템 모델링 ····· 100
1. Fuzzy Logic Controller 시스템 구성 ····· 100
2. 플랜트 구성 ····· 101
3. 정상상태 오차 제거 ····· 104
제 2 절 시뮬레이션 ····· 106
1. Describing Function 해석 ····· 106
2. 시간응답 특성 ····· 112
3. 퍼지변수에 의한 시스템 안정성 특성 ····· 114
4. Circle Criterion 해석 ····· 118

제 7 장 결 론 ····· 119

참 고 문 헌 ····· 123
부 록 ····· 126

LIST OF TABLES

Table 2.1. The comparison characteristic between linear and nonlinear system. 9

Table 2.2. Lyapunov stability in pictures. ····· 17

Table 4.1. Describing functions of nonlinearity factors. ····· 51

Table 4.2. The general type of describing function. ····· 54

Table 4.3. $-1/DF$ of FLC with three fuzzy variables. ····· 63

Table 4.4. $-1/DF$ of FLC with five fuzzy variables. ····· 67

Table 4.5. $-1/DF$ of FLC with seven fuzzy variables. ····· 72

Table 5.1. $-1/\beta$ according to the size of fuzzy variable. ····· 96

Table 6.1. The characteristic on time response. ····· 114

LIST OF FIGURES

Fig. 2.1. Response of the linearized system and the nonlinear system. ····· 6

Fig. 2.2. Stable, unstable, and semi-stable limit cycles. ····· 7

Fig. 2.3. The state of attractors. ····· 8

Fig. 2.4. Stability at $x = 0$. ····· 12

Fig. 2.5. Concept of stability. ····· 13

Fig. 2.6. Typical shape of a positive definite function $V(x_1, x_2)$. ····· 14

Fig. 3.1. Fuzzy variables ····· 26

Fig. 3.2. Response for fuzzy variables A. ····· 27

Fig. 3.3. Response for fuzzy variables B. ····· 27

Fig. 3.4. Response for fuzzy variables C. ····· 28

Fig. 3.5. Response for fuzzy variables D. ····· 28

Fig. 3.6. Response for fuzzy variables E. ····· 29

Fig. 3.7. Four types of simple nonlinear curves. ····· 30

Fig. 3.8. Premise and consequence membership function of fuzzy controller. ·· 31

Fig. 3.9. Two cases for fuzzy output aggregation. ····· 33

Fig. 3.10. SISO fuzzy logic. ····· 34

Fig. 3.11. Membership function for premise and consequence of fuzzy controller. ····· 35

Fig. 3.12. The response plot of FLC. ····· 35

Fig. 3.13. The response curve for changing x_2(a), changing x_1(b). ····· 36

Fig. 3.14. The piecewise linearization of a response of FLC. ····· 37

Fig. 3.15. Premise and consequence membership function of fuzzy controller with five fuzzy variables. ····· 38

Fig. 3.16. The response curve for changing d_1, d_2, d_3. ····· 39
Fig. 3.17. Premise and consequence membership function of fuzzy controller with seven fuzzy variables. ····· 40
Fig. 3.18. The response curve for changing d_1, d_2, d_3, d_4. ····· 42
Fig. 4.1. The linearizing approximation. ····· 44
Fig. 4.2. Illustration of quasi-linearization. ····· 45
Fig. 4.3. A nonlinear system and its describing function representation. ····· 47
Fig. 4.4. Nonlinearization with gain-changing. ····· 49
Fig. 4.5. Input-output relationship for a gain-changing nonlinearity. ····· 50
Fig. 4.6. General piecewise-linear odd memoryless nonlinearity. ····· 52
Fig. 4.7. Hysteresis characteristic with input and output waveforms. ····· 53
Fig. 4.8. A nonlinear system. ····· 55
Fig. 4.9. A limit cycle using Describing Function. ····· 56
Fig. 4.10. A limit cycle of frequency dependent cycle. ····· 57
Fig. 4.11. The solution of $G(j\omega)N(A,\omega)$ with A. ····· 58
Fig. 4.12. Oscillation characteristic on nyquist plot. ····· 58
Fig. 4.13. The stable characteristic of DF. ····· 59
Fig. 4.14. DF (a) and $-1/DF$ (b) for changing A. ····· 62
Fig. 4.15. $-1/DF$ of FLC with three fuzzy variables on nyquist plot. ····· 63
Fig. 4.16. System response on $d_1 = 0.1, d_2 = 0$. ····· 64
Fig. 4.17. System response on $d_1 = 0.5, d_2 = 0$. ····· 65
Fig. 4.18. The max value graph of $-1/DF$ for changing d_1, d_2. ····· 65
Fig. 4.19. $-1/DF$ of FLC with five fuzzy variables on nyquist plot. ····· 67
Fig. 4.20. The max value graph of $-1/DF$ for changing d_1, d_2, d_3. ····· 69
Fig. 4.21. $-1/DF$ of FLC with seven fuzzy variables on nyquist plot. ····· 70
Fig. 4.22. The max value graph of $-1/DF$ for changing d_1, d_2, d_3, d_4. ····· 71

Fig. 4.23. MCP plot for x_1, x_2. ····· 77
Fig. 4.24. Gain margin and phase margin. ····· 79
Fig. 4.25. Gain margin and phase margin on nyquist plot. ····· 81
Fig. 5.1. Control system with nonlinear gain. ····· 86
Fig. 5.2. The sector condition. ····· 87
Fig. 5.3. Sector nonlinearity. ····· 89
Fig. 5.4. Presenting $D(\alpha,\beta)$ on the nyquist plot. ····· 90
Fig. 5.5. Presenting on nyquist plot in $0 < \alpha < \beta$. ····· 90
Fig. 5.6. Presenting on nyquist plot in $0 = \alpha < \beta$. ····· 91
Fig. 5.7. Presenting on nyquist plot in $\alpha < 0 < \beta$. ····· 92
Fig. 5.8. Premise and consequence membership function of fuzzy controller. ·· 93
Fig. 5.9. The gradient of the response of FLC with (x_1,x_2). ····· 94
Fig. 5.10. $D(\alpha,\beta)$ according to (x_1,x_2). ····· 95
Fig. 5.11. MCP plot on circle criterion. ····· 96
Fig. 6.1. The structure of fuzzy logic controller. ····· 100
Fig. 6.2. Normalized output of FLC. ····· 101
Fig. 6.3. FLC with constant gain. ····· 102
Fig. 6.4. The structure of simulink for simulation. ····· 103
Fig. 6.5. Nyquist plot of G(s). ····· 103
Fig. 6.6. The response plot of $G(s)$. ····· 105
Fig. 6.7. The response plot of $G(s)$ with constant gain. ····· 106
Fig. 6.8. The unstable region of $G(s)$ on MCP Plot. ····· 107
Fig. 6.9. The response plot for x_1, x_2. ····· 108
Fig. 6.10. $PM_{\min}(d_1,d_2)$ for $G(s)$. ····· 108
Fig. 6.11. The stable region for crossover point 0.7 on FLC with five fuzzy variables. ····· 109

Fig. 6.12. The response plot for x_1, x_2, x_3. ····· 110
Fig. 6.13. The stable region for crossover point 0.7 on FLC with seven fuzzy variables. ····· 111
Fig. 6.14. The response plot for d_1, d_2, d_3, d_4. ····· 112
Fig. 6.15. The system response for changing d_1, d_2. ····· 113
Fig. 6.16. The time response characteristic of $G(s)$. ····· 113
Fig. 6.17. Nyquist plot of $G(s)$. ····· 115
Fig. 6.18. The stable region for crossover point -1.36. ····· 116
Fig. 6.19. The response on changing d_1, d_2. ····· 117
Fig. 6.20. The response characteristic response for FLC. ····· 117
Fig. 6.21. The unstable region at critical point $(0.7, j0)$. ····· 118

ABSTRACT

Consideration for Stability on Changing Fuzzy Variables of Membership Function in Fuzzy Logic Controller

Lee, kyoungwoong

Advisor : Prof. Hansoo choi

Dept. of Control and Instrumentation Eng.,

Graduate School of Chosun University

It is hard to design FLC because it has a nonlinear characteristic. For this reason, FLC design usually requires a quite amount of trial and error procedures based on computer simulation. This paper describes a simple method for designing FLC based on a describing function method and a circle criterion in frequency domain. Proposed method is simple and easy to understand, since it is based on the Nyquist stability criterion that is used to analyze absolute stability and relative stability, a phase margin and a gain margin, of linear system. To linearize in frequency domain, FLC is represented by a describing function using a piecewise linearization of the response plot of FLC. This describing function is represented as the function of magnitude of input sinusoid and nonlinear parameters x_1 and x_2 which change consequence fuzzy variables and nonlinearity of FLC. The describing function is redefined without the magnitude of sinusoid input because the maximum values of the describing function can explain the stability of system. This redefined describing function

is used to get minimum stability characteristic, an absolute stability, phase margin and gain margin, of FLC. Using this function, we can explicitly figure out the various characteristic of FLC according to the width of consequence fuzzy variables in frequency domain.

In this work, we suggest a minimum critical point(MCP), a minimum phase margin(MPM) and a minimum gain margin(MGM) for FLC which can be used to determine whether system is stable or not. For simplicity, we use one-input FLC with three, five and seven fuzzy variables. For various nonlinear response of FLC, changing fuzzy variables of a consequence membership function is used. Simulation results show that these parameters are effective in analyzing FLC.

제 1 장 서 론

대부분의 퍼지제어기는 시스템의 복잡성과 상관없이 에러와 에러변화율을 입력으로 하며 기본적인 구성은 전통적인 PD 와 PI 또는 PID형 제어기를 따르고 있다. 퍼지 논리는 고전제어처럼 제어 대상에 대한 수학적 모델링을 통하여 제어기를 설계하는 것이 아닌 인간의 판단, 경험 등과 같은 애매성을 포함한 지식을 통해 제어 알고리즘을 *If-Then* 형식으로 표현하고 퍼지 추론 및 비퍼지화를 통해 제어값을 나타내기 때문에 퍼지 제어기를 수학적으로 모델링하기 어려우며, 퍼지 변수를 정의하는 것 또한 어려운 일로 대부분 전문가의 지식이나 시행착오법을 사용하여 시스템의 특성이나 안정도에 대한 고찰 없이 퍼지변수를 정의하고 있다.

퍼지제어기를 포함한 시스템의 안정도 판별을 위해 다양한 연구가 이루어졌는데 Bretthauer, Hojo, Hwang 등은 퍼지제어기의 멤버쉽 함수의 정의를 이용하여 상태공간을 일정수로 분할한 후 상태방정식을 이용한 퍼지제어기의 안정도 해석방법을 제안하였다[1, 2, 3]. 그리고 퍼지제어기가 비선형임으로 비선형 시스템에 대한 안정도 판별에 많이 사용되어지는 Lyapunov 방법을 퍼지제어기의 안정도 판별에 이용한 다양한 연구가 이루어졌는데 특히 Sugeno, Chen은 퍼지제어시스템의 안정도 척도를 제시하기위해 Lyapunov 방법을 이용하였는데 이는 평형점(equilibrium point)에서의 Lyapunov 함수의 도함수가 negative semi definite 함을 보임으로써 안정여부를 판단하는 방법을 제안하였다[4, 5]. Barreiro, Opitz 등은 퍼지제어기의 비선형 입출력 특성을 선형시스템으로 제한된 플랜트에 적용하여 안정도 조건을 만족하는지에 대한 연구를 수행하였다[6, 7]. Driankov는 퍼지제어시스템의 안정도 조건과 안정도에 대한 강인제어 인덱스를 나타내는 방법으로 Bifurcation 이론을 이용하여 연구하였다[8]. Aracil, Ray, Bühler 등은 주파수 영역에서의 안정도 판별을 위해 비선형 안정도 판별에 사용되어지는 Circle Criterion과 Popov Criterion을 이용한 퍼지제어기의 안정도에 대해 해석하였는데 이러한 방법은 몇몇 조건하에서 정의되어지며 퍼지제어기를 근사화하여 조건에 따라 Limit Cycle의 발생여부를 그

래프를 통하여 시스템의 안정도를 판별한다[9-11].

이와 같은 안정도 판별은 퍼지제어기가 안정할 수 있는 영역을 제시하는 것이 아닌 퍼지제어기의 퍼지규칙, 퍼지변수와 같은 퍼지제어기를 구성하는 파라미터들이 결정된 후 결정된 파라미터에 대해 시스템의 안정도 여부를 판단하고 있다. 따라서 파라미터의 변화에 따라 계속적인 안정도 판별이 이루어져야 한다.

본 연구에서는 퍼지제어기의 성능을 결정하는 파라미터 중 퍼지변수의 범위를 안정도 관점에서 플랜트의 특성에 따라 도식적으로 제시하여 퍼지제어기의 설계과정에서 시스템의 안정도가 보장된 퍼지변수를 결정할 수 있는 방법은 제안한다. 퍼지제어기를 포함한 시스템은 후건부 퍼지변수의 크기에 따라 시스템이 안정하기도 하고 불안정하기도 한다. 본 논문에서는 퍼지 제어기(Fuzzy Logic Controller, FLC)가 안정하기 위한 후건부 퍼지변수의 범위를 제시하고자 한다. 후건부 퍼지변수의 크기변화에 따른 입출력 응답의 관계가 시불변 비선형임으로 퍼지제어기의 입출력 응답을 비선형 시스템 안정성 관점에서 수학적으로 모델링하고 이를 이용하여 안정한 퍼지제어기 설계를 위한 후건부 퍼지변수의 범위를 도식적으로 제시하고자 한다.

Mandani 타입 퍼지제어기는 전건부 퍼지변수의 변화에 대한 응답 특성 보다 후건부 퍼지변수의 변화에 대해 일정한 응답 특성을 보인다. 따라서 전건부 퍼지변수를 좌우 대칭이 되도록 완전히 겹쳐 고정하고 후건부 퍼지변수는 중앙값을 기준으로 좌우 대칭이 되어 크기가 변경되어지도록 구성하여 응답특성을 정의하고 후건부 퍼지변수에 따른 입출력 응답곡선을 구한 후 이를 이용하여 비선형 시스템의 안정도 판별에 사용되어지는 Describing Function과 Circle Criterion을 사용하여 시스템이 Limit Cycle이 발생하지 않고 안정하기 위한 임계점을 구하고 이를 Nyquist 선도상의 안정조건에 따라 시스템이 안정하기 위한 후건부 퍼지변수의 범위를 도시적인 방법으로 표현하였다. 이를 통해 퍼지제어기를 설계하는 설계자가 가시적으로 시스템이 안정하기 위한 후건부 퍼지변수의 범위를 결정할 수 있는 방법을 제안하고 있다. 비선형 시스템의 안정성 판별에 이용 되는 Describing

Function은 주파수 영역에서 유사 선형화를 통해 비선형 시스템의 특성 예측이나 근사해석에 사용되어지며 Limit Cycle을 예측하는데 주로 이용되어진다. Circle Criterion은 Nyquist Criterion의 비선형 시스템에 대한 일반적인 접근 방법으로 본 논문에서 제시하는 단입출력(SISO) 퍼지제어기는 시불변 기함수임으로 안정성 판별을 위해 Circle Criterion에서 안정성을 판별하는 방법 중 Disk가 아닌 임계점을 이용하였다.

2장에서는 퍼지제어기의 비선형 특성에 대한 해석을 위해 비선형 시스템의 특성 및 안정도 특성에 대해 소개하고 퍼지제어기의 안정도 판별을 위한 연구들을 소개한다. 3장에서는 후건부 퍼지변수가 3개, 5개, 7개로 구성되어 졌을 때의 퍼지제어기의 입출력 특성을 기술한다. 특히 3개의 퍼지변수로 구성되어진 퍼지제어기의 퍼지변수에 따른 시스템 응답의 수학적 해석에 대해 서술한다. 4장 및 5장에서는 3장에서 구해진 퍼지제어기의 입출력 특성에 대해 Describing Function과 Circle Criterion을 이용한 비선형 해석을 수행하여 퍼지변수의 변하에 따른 임계점을 구하고 임계점 선도를 통하여 퍼지제어기를 포함한 시스템의 안정도를 판단하는 방법을 제시한다. 또한 3 퍼지변수에 대한 MCP(Minimum Critical Point)선도를 통하여 퍼지제어기를 포함한 시스템을 안정하게 하는 후건부 퍼지변수의 범위 및 상대안정도를 나타내는 MGM(Minimum Gain Margin)과 MPM(Minimum Phase Margin)를 정의하였고 5퍼지변수, 7퍼지변수에 대해서는 $-1/DF$의 최대값 그래프를 통해 시스템을 안정하게 하는 후건부 퍼지변수의 범위를 정의하는 방법을 제시한다. 6장에서는 시뮬레이션을 통하여 4장과 5장에서 제시한 방법의 타당성을 검증하였으며 7장에서는 본 연구를 수행한 결론을 서술한다.

제 2 장 비선형 시스템

제 1 절 비선형 시스템

모든 제어시스템은 물리적으로 비선형시스템 이지만 수학적 해석이 어렵기 때문에 선형시스템으로 근사화하여 시스템을 나타낸다. 본 연구에서는 퍼지제어기의 안정성 판별을 위해 비선형 시스템의 일반적인 특성과 비선형 시스템의 안정성 판별에 대하여 서술하고 퍼지제어시스템의 안정도 판별에 주로 사용되는 방법에 대하여 기술한다.

1. 비선형성

비선형성은 고유 비선형성과 인위적 비선형성로 분류 할 수 있다. 고유 비선형성은 시스템의 하드웨어와 동적 특성에 의해 나타나는 비선형성으로 회전중 구심력과 쿨롱마찰과 같은 것이 있는데 일반적으로 이러한 비선형성은 원치 않는 영향을 초래함으로 제어시스템에서는 효과적인 보상이 필요하다. 인위적 비선형성은 설계자에 의해 의도적으로 포함되어지는 비선형성으로 적응제어와 Bang-Bang 최적제어가 대표적이라 할 수 있으며 비선형 미분방정식으로 표현되며, 해의 존재성이나 안정성 등을 분석하는 것이 매우 어렵다[12]. 따라서 비선형시스템은 선형시스템과는 달리 해석이 쉽지 않고, 제어기 설계문제도 상당히 까다롭고 어렵다. 선형제어시스템에 대한 연구는 식 (2-1)과 같이 표현되어지는 선형시불변 시스템에 대해 주로 연구가 이루어지고 있다.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{2-1}$$

$\boldsymbol{x}$: 상태 백터

A: 시스템 상태 행렬

선형시스템은 아래와 같은 단순한 특성을 가지고 있다.

- A가 비특이 행렬이면 선형 시스템은 유일한 평형점을 갖는다.
- 초기 조건과 상관없이 A의 모든 고유값이 음의 실수 부분에 위치하면 평

형점은 안정하다 할 수 있다.

- 외부 입력 $\boldsymbol{u(t)}$가 주어 졌을 경우 식 (2-2)는 중첩의 원리를 만족하며 시스템의 안정도는 $\boldsymbol{u}$의 범위에서 경계입력 경계출력에 의한 안정도를 나타내며 sine 함수 입력에 대해 동일한 주파수의 sine 함수 출력을 보인다.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{2-2}$$

비선형 미분방정식은 식 (2-3)과 같이 나타낸다.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{2-3}$$

$$\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}$: 상태벡터, 제어입력, 출력

$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$: $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{u}$에 대해서 연속이고 미분가능한 함수.

2. 비선형 시스템의 특성

가. 다수의 평형점

평형점은 시스템이 과도응답 후 지속적으로 유지되는 값으로 일반적으로 비선형 시스템은 한개 이상의 평형점을 가진다. 평형점은 상수 벡터쌍 (x_0, u_0, y_0)과 같이 나타내며 식 (2-4)와 같이 표현되어진다.

$$f(x_0, u_0) = 0, \;\; y = g(x_0, u_0) \tag{2-4}$$

입력이 $u = u_0$을 유지하면 상태 $x = x_0$와 출력$y_0 = g(x_0, u_0)$도 일정하게 유지된다.

선형시스템의 경우 평형점이 유일하지만 비선형 시스템의 경우 초기조건에 따라 평형점이 여러 개가 있을 수 있다.

예를 들어 비선형 시스템의 상태 방정식이 식 (2-5)와 같이 주어졌을 경우 초기상태가 $x(0) = x_0$와 같을 때 시스템을 선형화한 식과 해는 식 (2-6)과 같으며 비선형 형태의 해를 구하면 식 (2-7)과 같다.

$$\dot{x} = -x + x^2 \tag{2-5}$$

$$\dot{x} = -x \tag{2-6}$$
$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}} \tag{2-7}$$

식 (2-6)과 식 (2-7)의 응답 곡선은 그림 2.1과 같다. 그림에서 볼 수 있듯이 선형화된 응답은 하나의 평형을 갖지만 비선형 형태의 응답의 $x=0$과 $x=1$ 2개의 평형점을 갖는데 이는 평형점이 초기값에 의존함을 보여주고 있다.

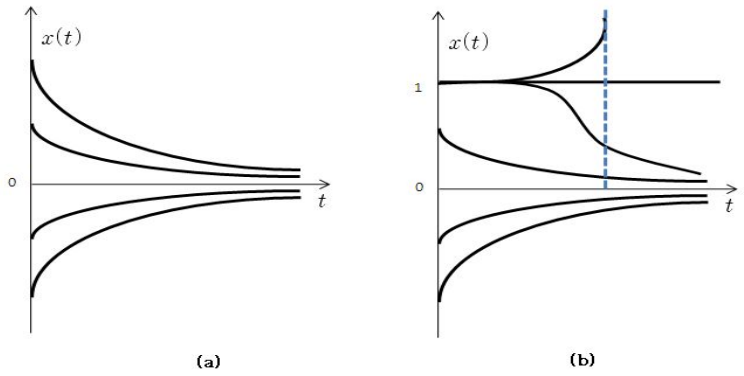


그림 2.1. 선형화 시스템 응답(a)과 비선형 시스템 응답(b).

Fig. 2.1. Response of the linearized system(a) and the nonlinear system(b).

나. Limit Cycle

선형시스템은 고유값이 허수축에 있을 경우 진동을 하게 되며 진동의 크기는 초기값에 의존한다. 그러나 비선형 시스템은 외부입력이나 초기값과 관계없이 고정된

크기와 주기를 갖는 진동을 보이는데 이것을 Limit Cycle 또는 자기발진 진동이라 한다.

위상평면에서 Limit Cycle은 고립된 폐곡선으로 정의되어지며 Limit Cycle 주변에서 궤적의 행동 패턴에 따라 다음과 같이 3가지로 구분되어진다.

- Stable Limit Cycle : Limit Cycle 주변의 모든 궤적이 $t \to \infty$일 때 Limit Cycle로 수렴할 경우 (그림 2.2 (a)).
- Unstable Limit Cycle : Limit Cycle 주변의 모든 궤적이 $t \to \infty$일 때 Limit Cycle에서 발산 할 경우 (그림 2.2 (b)).
- Semi-Stable Limit Cycle : Limit Cycle 주변의 궤적이 $t \to \infty$일 때 일부는 Limit Cycle로 수렴하고 일부는 발산 할 경우 (그림 2.2 (c)).

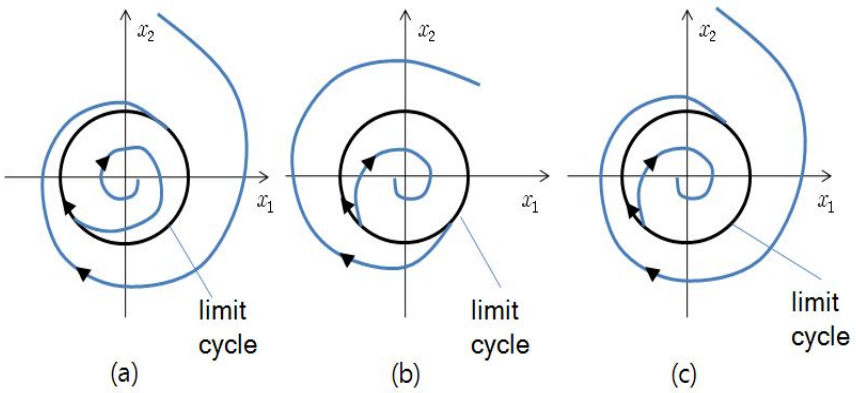


그림 2.2. 안정, 불안정, 부분안정 limit cycle.

Fig. 2.2. Stable, unstable, and semi-stable limit cycles.

다. Bifurcation

역학계의 상태변화를 상태공간에서 시간에 따라 변하는 하나의 궤도로 나타낼 수 있다. 이 궤도는 역학계의 외부에서 주어지는 에너지에 의해 요동하게 된다. 이 때의 요동은 시간이 지나면서 곧 없어지고, 다시 안정된 원래의 궤도를 그린다. 이와 같이 상태공간을 움직이는 점은 대부분 안정된 궤도로 끌려가는데 점들을 안정된 궤도로 끌어당긴다고 해서 끌개(Attractor)라고 한다. 점이 시간의 경과에 따라

그리는 궤적은 초기상태에 의해 달라진다. 궤적의 수는 처음 출발점(초기상태)의 수만큼 많다. 이들 복잡한 곡선군 중에는 어느 점으로부터 출발하여도 결국은 거기에 귀착하는 하나의 곡선이 있다. 이것을 끌개라고 부른다. 즉, 끌개는 근처의 모든 궤도가 수렴하는 불변집합인 것이다. 불변집합이란 '$f: X \to X$일 때, $E \subset X$ 이고 $f(E) \subset E$ 이다.'를 만족하는 집합 E이다.

이에 대해 일시적인 상태를 나타내는 점은 끌개가 아니라 반박기(Repeller)라고 한다. 끌개는 역학계가 가장 안정된 상태에 있는 점들인데 반해 반박기는 불안정한 상태의 점들이다. 역학계의 안정성은 여러 가지가 있는데, 그 중에는 궤도안정성과 점근안정성이 있다. 끌개는 점근안정성이며 끌개의 근방에 있는 점들은 모두 끌개로 끌려간다.

끌개는 주어진 역학계의 안정상태를 구체적으로 나타내는 것이므로 역학계의 연구에서는 매우 중요하다. 예를 들어 그네는 가만히 놔두면 멈춘다. 그래서 멈추지 않도록 계속 조금씩 밀어주면, 그네는 불규칙하기는 하지만 일정한 범위 안에서 계속 움직이게 된다. 이때 주어진 에너지가 운동에너지와 위치에너지로 뒤바뀌며 끊임없이 반복한다. 이러한 역학계의 끌개는 폐곡선인 원이 된다. 그러다가 힘을 가하면 원을 벗어났다가 다시 원주상을 돌게 되고 마찰력 때문에 원 안쪽으로 끌려갔다 다시 그네에 힘이 가해지면 궤도는 원 밖으로 벗어나고 계속 힘을 가하지 않으면 운동에너지와 위치에너지는 공기의 마찰 때문에 점점 줄어들어 모두 0이 되는 점으로 끌려간다. 이렇게 운동에너지와 위치에너지가 그리는 궤도의 최후 낙착점이 끌개이다. 그림 2.3 (a)는 마찰이 없을 때의 끌개를 나타내고 그림 2.3 (b)는 마찰이 있을 때의 끌개를 보여주고 있다.

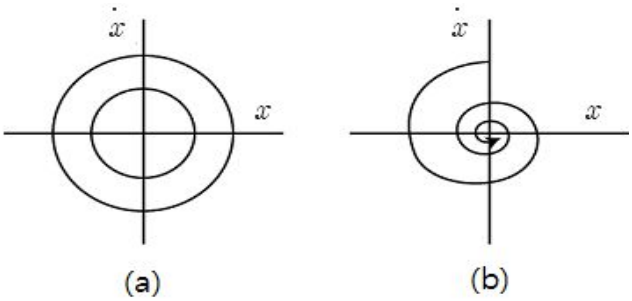


그림 2.3 attractor의 상태.

Fig. 2.3 The state of attractors.

끌개는 기하학적인 모양에 따라 Fixed Point Attractor, Limit Cycle Attractor, Quasi-periodic Attractor, Strange Attractor 네 가지로 나누어지며 위의 끌개들은 모두 연속역학계에 속하며 이산역학계에서는 Convergence Point Attractor, Period Point Attractor, Closed Curve Attractor, Strange Attractor 등이 있다.

에너지가 가해지면 끌개가 변화하는데 이 변화는 단순한 것이 아니고 위상적인 변화인 것이다. 이러한 끌개의 변화를 '분기 (Bifurcation)'라고 한다.

분기란 2개로 분할, 분열 또는 변화하는 것 등을 의미한다. 역학계에는 여러 종류의 끌개가 있다. 외부에서 역학계에 가해지는 에너지가 점점 늘어나면, 역학계는 상전이를 일으키고, 다른 끌개를 갖게 된다. 끌개가 고정점이었다가 원으로 바뀌는 것 같이 역학계에 에너지가 가해지면 끌개가 변한다. 이 변화는 단순한 것이 아니고 위상적인 변화인 것이다. 이러한 끌개의 변화를 '분기'라고 말한다.

라. Chaos

안정된 선형시스템에서 초기값의 작은 변화는 출력의 작은 변화만을 일으킨다. 그러나 비선형시스템에서 초기값에 민감한 반응을 보이는데 이를 카오스(Chaos)라고 한다. 카오스의 근본적 특성은 우리가 시스템의 정확한 수학적 모델을 알고 있다고 해도 시스템의 출력을 예상할 수 없다는 것이다.

카오스는 무작위 움직임과 구별되어지는데 무작위 움직임은 시스템의 입력이나 시스템 자체에서 가지고 있는 불확실성으로 인하여 출력을 예상할 수 없는 것이며 시스템 모델, 입력 그리고 초기값에 거의 불확실성을 가지고 있지 않다. 표 2.1은 선형시스템과 비선형시스템간의 기본적 특성에 대한 비교를 보여주고 있다.

표 2.1. 선형시스템과 비선형 시스템의 특성 비교.
Table 2.1. The comparison characteristic between linear and nonlinear system.

	LINEAR SYSTEM $\dot{x}= Ax$	NONLINEAR SYSTEM $\dot{x}= f(x)$
EQUILIBIUM POINTS	UNIQUE	MULTIPLE
A point where the syst	If A has rank n, then	$f(x_e)=0$

em can stay forever wit hout moving.	$x_e = 0$, otherwise the solution lies in the null space of A.	n nonlinear equations in n unknowns $0 \rightarrow +\infty$ solutions
ESCAPE TIME	$x \rightarrow +\infty$ *as* $t \rightarrow +\infty$	The state can go to infinity in finite time.
STABILITY	The equilibrium point is stable if all eigenvalues of A have negative real part, regardless of initia l conditions.	About an equilibrium point: ● Dependent on IC ● Local vs. Global stability important ● Possibility of limit cycles **LIMIT CYCLES** ● A unique, self.excited os- cillation ● A closed trajectory in t- he state space ● Independent of IC
FORCED RESPONSE	$\dot{x} = Ax + Bu$ ● The principle of sup erposition holds. ● I/O stability → boun ded input, bounded o utput ● Sinusoidal input → s inusoidal output of s ame frequency	$\dot{x} = f(x,u)$ ● The principle of superpo- sition does not hold in ge neral. ● The I/O ratio is not uni- que in general, may also not be single valued. **CHAOS**

		Complicated steady.state behavior, may exhibit randomness despite the deterministic nature of the system.

제 2 절 비선형 시스템의 안정도

1. 선형 시스템 안정도 판별

1892년 러시아의 수학자인 Alexander Mikhailovich Lyapunov는 선형시스템과 비선형 시스템의 안정도 판별을 위한 이론을 제시하였다. Lyapunov 안정도 판별 이론에서는 Lyapunov 함수라고 하는 $V(x)$를 통해서 안정도를 판별한다. 비선형 시스템에 대한 Lyapunov 함수를 찾기 위한 일반적인 방법이 없기 때문에 Lyapunov 대수 방정식을 통해 Lyapunov 함수를 구하게 된다. 비선형 시스템에 대해 식 (2-8)과 식 (2-9)를 만족하는 $V(x)$가 존재하면 그 시스템은 안정하다 할 수 있다. 그리고 식 (2-9)가 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$을 만족할 경우에는 시스템이 '점진적으로 안정하다' 고 한다.

$$V(\boldsymbol{x}) > 0, \quad V(\mathbf{0}) = 0 \tag{2-8}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \leq 0 \tag{2-9}$$

시스템이 식 (2-2)와 같이 주어졌을 경우 Lyapunov 함수는 식 (2-10)과 식 (2-11)과 같이 구할 수 있다.

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > 0 \tag{2-10}$$

$$\dot{V}(x) = x^T(\dot{A}^T P + PA)x \tag{2-11}$$

시스템이 안정하기 위해서는 식 (2-12)를 만족해야 하며 식 (2-10)의 Q는 양정의 행렬이여야 한다. 식 (2-13)을 Lyapunov 대수 방정식이라 한다.

$$A^T P + PA < 0 \tag{2-12}$$

$$A^T P + PA = -Q, \quad Q = Q^T > 0 \tag{2-13}$$

선형시불변 시스템이 점진적으로 안정하기 위해서는 $Q = Q^T > 0$에 대해 식 (2-13)을 만족하는 $P = P^T > 0$이 존재하여야 한다.

선형시스템에 대해서 안정도 판별법은 A의 고유값을 통해 안정도를 바로 판별할 수 있으므로 Lyapunov 안정도 판별법은 효율적이지 않다.

2. 비선형 시스템의 안정도

그림 2.4에서 같이 평형점을 $x = 0$이라고 할 때 상태가 이동해도 $x = 0$으로 접근할 경우 안정하다 할 수 있다.

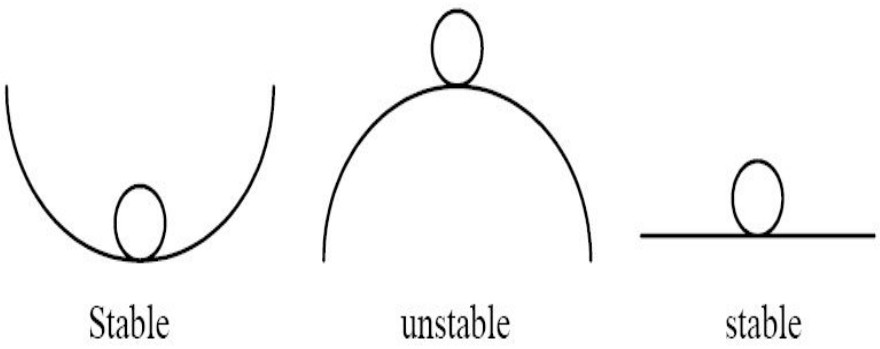


그림 2.4. $x=0$ 에서 안정성.

Fig. 2.4. Stability at $x=0$.

식 (2-14)와 같이 비선형 시스템이 주어지고 평형점이 $x=0$일 때 식 (2-15)와 같이 $\epsilon > 0$에 대해 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$이면 '안정하다'고 한다.

$$\dot{x} = f(x) \tag{2-14}$$

$$\| x(0) \| < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \epsilon, \ \forall t \geq 0 \tag{2-15}$$

만약 안정하고 δ가 식 (2-16)과 같을 경우 '점진적으로 안정하다'고 하며 안정하지만 점진적으로 안정하지 않을 경우 '한계안정하다'고 한다.

$$\| x(0) \| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \tag{2-16}$$

그림 2.5는 안정도에 대해 도식적으로 보여주고 있다.

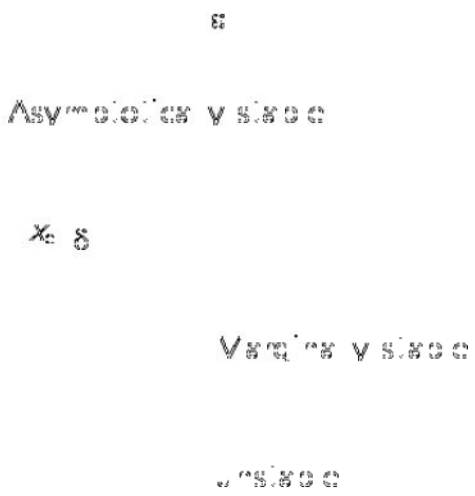


그림 2.5. 안정도의 도식적 표현.

Fig. 2.5. Concept of stability.

상태벡터가 $\boldsymbol{x}=[x_1\,x_2]^T$와 같은 2차 시스템이 주어졌을 경우 식 (2-17)를 만족하는 양정의함수 $V(x_1,x_2)$를 정의하고 $V(x_1,x_2)$가 감소할 경우 그림 2.5와 같이 최종적으로 원점에 도달하게 되며 $V(x_1,x_2)$가 Autonomous일 경우 $\dot{V}$는 식 (2-18)과 같이 주어진다. 상태방정식이 $\dot{x}=f(x)+g(x)\cdot u$와 같이 주어졌을 때 시간에 독립적이면 시스템이 Autonomous 하다고 한다. 시스템이 Autonomous하지 않을 경우에는 시스템의 상태방정식을 $\dot{x}=f(x,t)+g(x,t)\cdot u$와 같이 표현한다. 그림 2.6과 같은 응답을 보일 때 $\dot{V}<0$ 이라 할 수 있다.

$$V(x)>0 \quad \forall x\neq 0 \text{ and } V(0)=0 \tag{2-17}$$

$$\dot{V}=\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \nabla V^T \cdot f \tag{2-18}$$

$$f=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \text{ and } \nabla V^T=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2}\right]$$

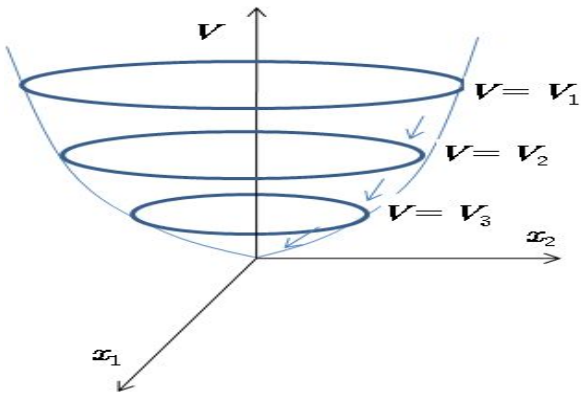


그림 2.6. positive definite function $V(x_1,x_2)$ 의 기본 형태.

Fig. 2.6. Typical shape of a positive definite function $V(x_1,x_2)$.

가. Lyapunov 간접방법

안정도에 대한 정의에 따라 안정도의 특성은 평형점 근방의 특성에 의해 좌우된다. 평형점으로 부터 미소한 변위에 대한 특성은 근사적으로 선형으로 해석 할 수 있다. 선형화를 통해 안정도를 판별하는 것을 안정도 판별을 위한 Lyapunov 간접방법 이라고 한다.

식 (2-14)에 대해 $x=0$을 평형점이라 하고 $f:D \rightarrow R^n$ 연속적이며 미분가능이며 D를 평형점 주변이라 한다. λ_i를 행렬 $A=\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}$의 고유값이라 한다.

- 모든 i에 대해 $Re(\lambda_i)<0$일 경우 $x=0$은 점진적으로 안정하다고 한다.
- 하나 이상의 i에 대해 $Re(\lambda_i)>0$ 이며 불안정 하다고 한다.
- 모든 i에 대해 $\lambda_i \leq 0$이고 적어도 한개 이상이 $\lambda_i=0$이면 $x=0$은 안정하거나 ,점진적으로, 안정하거나 불안정 하다 할 수 있다.

경계상황을 제외하고 선형화된 시스템의 고유값은 비선형 시스템의 평형점의 안정성을 나타낸다.

나. Lyapunov 직접방법

$x=0$을 비선형 시스템 $\dot{x}=f(x)$의 평형점이라 하고 $x=0$의 주변 D에 대해 $V:D \rightarrow R$를 연속적이며 미분가능 함수라 할 때 식 (2-19)를 만족하면 $x=0$은 안정하다고 한고 만약 $\dot{V}(x)<0$ in $D-0$ 이면 $x=0$에서 점진적으로 안정하다고 한다.

$$V(0)=0 \text{ and } V(x)>0 \text{ in } D-0, \dot{V}(x) \leq 0 \text{ in } D \tag{2-19}$$

리아푸노프 함수$V(x)$는 아래의 조건을 만족하여야 한다.

- V는 연속적이여야 한다.
- $V(x)$는 주변 D내의 어느점 보다 평형점 x_{eq}에서 유일한 최소값을 가져야

한다.

- D내의 시스템의 궤적을 따라서 V의 값은 증가하지 않아야 한다.

간접방법은 평형점 근처에서 안정도를 결정할 수 있으나 직접방법은 평형점에서 얼마나 멀리 떨어질 수 있는지와 t가 ∞로 접근 할 때 여전히 수렴하는지를 결정할 수 있다. 이것을 점근적 안정 영역이라고 한다.

$\Phi(t:x)$가 시스템 방정식의 해이고 $t=0$에서 초기 상태 x가 시작할 때 점근적 안정영역은 식 (2-20)와 같이 정의되어진다.

$$\lim_{t\to\infty}\Phi(t:x)=0 \tag{2-20}$$

$\Omega_c = x\in R^n | V(x) \le c$가 경계에 있고 D에 포함되면 Ω_c에서 출발하는 모든 궤적은 Ω_c에서 유지되고 $t\to\infty$이면 평형점에 접근한다. 따라서 Ω_c를 점근적 안정영역의 추정이 된다. 점근적 안정영역의 추정으로 안정도를 다음과 같이 구분할 수 있다.

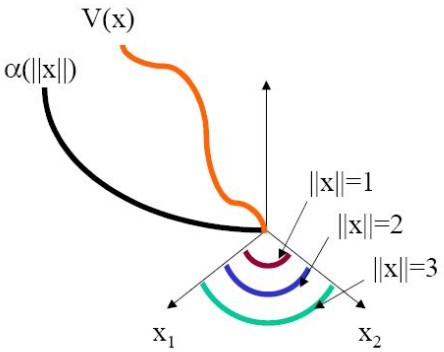
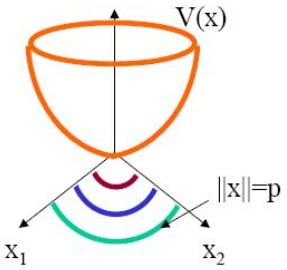
- Local Stability: 작은 섭동(perturbation)하에서 시스템이 평형점 주변의 극소영역에서 유지될 때
- Finite Stability: 시스템 주변의 유한 차원의 영역 R안의 어떤 점에서 부터도 시스템이 평형점으로 복귀할 때
- Global Stability: 영역 R이 전체 상태 공간을 포함할 때

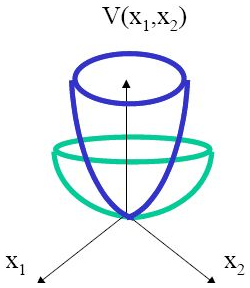
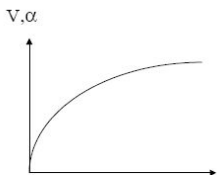
$x=0$을 시스템 $\dot{x}=f(x)$의 평형점이라고 하고 $V:R^n\to R$을 연속이며 미분가능 함수라 할 때 식 (2-21)를 만족하면 $x=0$을 전체적 점진적 안정하다고 한다.

$$\begin{aligned} &V(0)=0 \text{ and } V(x)>0 \qquad \forall x\neq 0 \\ &\| x \| \to \infty \Rightarrow V(x)\to\infty \\ &\dot{V}(x)\le 0 \quad \forall x\neq 0 \end{aligned} \tag{2-21}$$

표 2.2. Lyapunov 안정도.

Table 2.2. Lyapunov stability in pictures.

Condition	Picture/Comments
$V(0,t)=0$	Need to check this condition $V(x)=0$ $at x=0$. We need $x=0$ to coincide with $V=0$ because the method relies on making $V\to 0$.
$V(x,t)$ is positive definite, i.e. there exists a continuous, non-decreasing scalar function $\alpha(x)$ such that $\alpha(0)=0$ and $\forall x \neq 0, 0 < \alpha(x) < V(x,t)$	Need to check this.  Simplifies to $\alpha(x) \leq V(x)$. The level sets of α are circles. We are used to dealing with the definition of positive definite to mean $V(x) \geq 0$ everywhere and $V(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.  $\alpha(p) = \min_{\|x\|=pcircle} V(x)$
$\dot{V}(x,t)$ is negative definite, that is	Similar interpretation to that of (ii), only looking at $-\dot{V}(x)$. If the condition does not hold, we can use LaSalle's (time-invariant cases).

$\dot{V}(x,t) \le -\gamma(\| x \|) < 0$ where γ is a continuous non-decreasing scalar function such that $\gamma(0) = 0$	
$V(x,t) \le \beta(\| x \|)$where β is a continuous non-decreasing function and $\beta(0) = 0$, i.e. V is decrescent, i.e. the Lyapunov function is upper bounded	Doesn't matter for time-invariant systems Simplifies to $V(x) \le \beta(\| x \|)$ 
V is radially unbounded, that is $\alpha(\| x \|) \to \infty \; as \; \| x \| \to \infty$	Need to check to get a global result. 

제 3 절 퍼지제어 시스템의 안정도

안정도는 궤환제어 시스템의 가장 기본이 되는 영역이다. 실질적인 제어에 있어서도 안정성 문제는 항상 주요 관심이 되지만 안정성은 성능 조건을 만족한 후 고려되곤 한다. 선형 궤환 시스템의 안정도 판별에 대해서는 잘 알려져 있으며 시스템의 동적 특성 등에 의해 결정되어진다. 비선형 시스템의 안정도에 대

한 문제는 복잡하며 일반화하기 어렵다. 퍼지제어기는 비선형 시스템으로 실용적인 부분에서는 일정조건에 의한 실험에 의해 안정도를 결정하고 있으나 안정도가 시스템의 중요한 조건일 경우 이러한 방법은 충분하지 않으며 또한 일반화된 결과를 도출할 수 없다. 안정도에 대한 많은 연구는 평형점에서의 부분 안정도에 대해 이루어졌으며 몇몇 연구자들만이 변수의 전체 영역에 대한 전체안정도를 연구하였다.

대부분의 퍼지제어 시스템은 퍼지규칙으로 표현되어지는 전문가의 지식에 의해 설계되어져 왔다. 몇몇 연구자들은 퍼지규칙과 시스템 안정도에 대해 문제점을 제기하였다. 이러한 방법은 시스템의 응답곡선 관찰을 통해 퍼지규칙이나 퍼지변수의 조정을 통해 안정도를 확보한다.

안정도 해석에 대한 방법들은 몇 가지 영역으로 분류될 수 있다.

1. 입출력의 관계에 의한 안정도 해석으로 이는 외부적인 출력과 입력의 관계를 통해 안정도를 해석하는 방법이다. 잘알려진 방법으로는 BIBO(Bounded Input Bounded Output)안정도가 있다. BIBO는 시스템의 제한된 입력은 제한된 출력은 보이고 입력의 작은 변화는 출력의 작은 변화를 보인다는 가정이 필요하다.
2. 주파수 응답 방법으로 입출력의 관계에 의한 방법과 같이 입출력에 의한 안정도 판별이지만 방법은 서로 다르다. 이를 위한 방법으로는 직간접 Nyquist, Mess Bands, Gershgorin Bands, Characteristic Loci 등이 있다.
3. 내부 기술 방법은 시스템의 상태변수 표현과 내부 상태변화에 대한 외란의 영향과 관계가 있다. Lyapunov함수의 정의에 기초한 Lyapunov 이론이 대표적이다.
4. 정성적 방법은 비선형 동적시스템의 정성적 이론에 의한 시스템의 동적 전개를 이용하는 방법이다. 안정도와 강인성 지수는 인간의 지식을 통해 생성되어진 규칙에 의한 퍼지제어기의 해석을 위해 형성되어진다. 강인성 지수

는 시스템이 안정도에서 어느 정도 거리에 있는지를 나타내는 양이다.

1. 입출력 방법

만약 G가 제어대상 프로세스의 동작점에서의 선형 시불변 표현이면 이득은 주파수 응답을 통해 식 2-22와 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$g(G) = \bar{\sigma}(G(jw)) \tag{2-22}$$

식 2-22에서 $\bar{\sigma}$은 행렬 $G(jw)$의 최대 측이값이 된다. 더욱이 H가 비선형 정적 퍼지제어기 즉 $H = \phi(e)$이면 이득은 식2-23과 같이 얻을 수 있다.

$$g(\phi) = [\frac{|\phi(e)|}{|e|}], |e| \neq 0 \tag{2-23}$$

작은 이득 이론에서는 폐시스템의 안정도를 위한 충분조건으로 $g(G)g(H) < 1$을 제시하고 있다. 이득의 적(product)은 반드시 1보다 작아야 한다는 의미이다. 이와 같은 개념의 활용으로 몇가지 안정도 척도가 있다. 특히 Circle Criterion은 SISO(Single Input Single Output)와 MIMO(Multiple Input Multipule Output)에 대한 Mandani 타입 퍼지제어기의 안정도 해석을 위해 제안되어 졌다 [13]. Circle Criterion의 적용을 위해서는 플랜트가 비선형 시불변일 이라는 조건이 주어지는데 이러한 조건은 실용적인 이용에 있는 제한적인 가정이라 할 수 있다.

Conicity Criterion은 위의 결과를 일반화 시키는데 사용되어질 수 있다. 이 척도는 퍼지제어 시스템의 안정도에 대해 다음과 같은 충분조건을 제시한다 [14].

충분조건은 $i_c < 1$과 같이 정의하는데 여기서 i_c는 Conicity 지수라고 하고 $i_c = r_h / r_g$과 같이 정의한다. 여기서 $r_h(C) = g(H - c)$는 Conicity 도함수라고 하고

$r_g(C) = 1/g(G(I+CG)^{-1})$을 conicity 강인성이라고 한다. 여기서 C는 원뿔의 중심이라고 한다. 따라서 안정성 해석은 $i_c < 1$과 같은 원뿔의 중심을 찾는 것으로 간결화 될 수 있다.

2. 주파수 응답 방법

퍼지제어기 해석에 사용된 주파수 응답 방법은 프로세스와 비선형 궤환 시스템의 선형화 모델에 적용되었다. 이러한 모델의 요구사항은 실제 퍼지제어기에는 한계가 있었다. 따라서 시스템의 안정성에 관한 연구가 가능하도록 하는 변화 기술이 제안되어졌다. 주파수 응답 방법에서는 Limit cycle에 대한 조사를 위해 식 2-24와 같이 조화 균형 방정식이 사용되어 진다.

$$G(jw)N(a)y = -y \tag{2-24}$$

여기서 $y_i = a_i e^{j(wt+\theta i)}$은 사인함수에 대한 복소 표현이다. 그리고 $N(a)$는 퍼지제어기의 Describing Function이다. limit cycle이 존재하기 위해서는 식 2-24는 비특이해를 가져야 된다. 이러한 방정식을 풀기위한 방법은 Mess에 의해 제안되었다 [15]. 이 방법은 $G^{-1}(jw)+N(a)$가 적어도 하나의 특성값을 갖는다면 식 2-24는 해가 존재한다는 사실에 기반을 두고 있다. Gershgorin 이론이 사용되어지는데 이 이론의 안정도 조건은 식 2-25와 같다 [16].

$$|\widehat{g_{kk}}(jw)+n_{kk}| > \sum_{i\neq k}^{n}|\widehat{g_{ik}}(jw)| + \sum_{i\neq k}^{n}|n_{ik}|, k=1,...,n \tag{2-25}$$

다른 방법은 다른 조화 균형 방정식의 직접 분석에 기반을 둔다. 따라서 $G(jw)N(a)$궤적이 $(-1,0)$을 포함하는 수가 안정도 판별의 조건이 된다[17].

다른 방법으로 특성값을 이용한 Limit cycle의 견건성 분석이다. 이 방법은 증분 에러 △모델을 통해 시스템에 적용되며 이 이론은 Limit Cycle의 부재를 보장한다 [18]. 모델 에러에 대해 식 2-16과 같은 조건을 정의한다.

$$\bar{\sigma}(\triangle(jw)) < \frac{1}{\bar{\sigma}((G(jw)N(a)(I+G(jw)N(a_0))^{-1}} \forall w, \forall a. \quad (2\text{-}26)$$

3. Lyapunov 방법

Lyapunov 방법을 이용한 안정도 분석은 Takagi-Sugeno 타입 퍼지제어기에 대해서는 가장 많이 이용되어지고 있다. 연속 시간 선형 T-S 타입 퍼지제어기는 식 2-27과 같은 등가식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x} = (\sum_{i=1}^{M} w_i(x)A_i)x + (\sum_{i=1}^{M} w_i(x)B_i)u \quad (2\text{-}27)$$

식 2-27은 Convexity 조건을 만족해야 하며 폴리토픽 선형 미분 포함(Polytopic Linear Differential Inclusion, PLDI)으로 고려되어 질 수 있어 식 2-28과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x} = A(t) + B(t)u, [A(t)B(t)] \in Co[A_1B_1], ..., [A_nB_n] \quad (2\text{-}28)$$

즉 $[A(t)B(t)]$은 $[A_1B_1], \ldots, [A_nB_n]$에 의해 범위 지워진 convex hull에 위치하게 된다. 안정성을 위해 $PA_i + P_i^T < 0, P > 0$에서 유효한 P를 구하는 것으로 컨벡스 최적화 방법(convex optimization techniques)을 이용한다. 이차 Lyapunov 합수는 $V(x) = x^T Px$와 같이 주어진다 [19, 20, 21].

Lyapunov 방법은 매우 보수적이기 때문에 많은 안정한 퍼지제어 시스템의 2차

Lyapunov 함수를 찾는것은 불가능하다. 그러나 부분 2차 Lyapunov함수는 전통적인 방법으로는 해결할 수 없었던 안정도에 대한 많은 문제의 해결책을 제공한다. 이때 행렬 P_i는 전체영역에서 계산되어져 하며 Lyapunov 함수는 $V(x) = x^T P_i x$와 같이 정의되어 진다[22].

제 3 장 퍼지변수에 따른 퍼지제어기 특성 해석

제 1 절 퍼지제어기의 특성

인공지능을 이용한 제어를 하고자 하는 이유는 고전 제어에서는 실세계에서의 복잡하고 어려운 시스템에 대한 수학적인 모델링을 요구하고 제어기를 설계할 때 다양한 제약적 가정을 포함하고 있기 때문이다. 심지어 제어대상 시스템에 대해 아주 정교하게 정의되어진 수학적 모델링이 있다고 하여도 실제로 이를 제어기에 적용하기는 어렵다. 퍼지논리를 이용한 제어에서는 몇 가지 관점에서 시스템을 바라볼 수 있는데 퍼지제어기를 설계할 때 사용 되어지는 방법은 아래와 같다.

첫째는 전문가의 지식을 이용한 방법으로 인공지능을 이용한 제어시스템에서 월등한 성능을 보이는 측면으로 제어대상 시스템이 비선형 시스템이거나 복잡한 구조를 가지고 있을 경우 별도의 수학적 모델링 과정을 거치지 않고 전문가의 지식을 기반으로 제어할 수 있다는 것이다. 전문가의 경험과 지식을 활용한다는 것은 숙련된 오퍼레이터의 경험이나 해당 분야 제어 전문가의 지식 등을 정성적인 언어로 표현하고 이를 퍼지제어 규칙의 형태로 논리화하는 것이다. 이는 어려운 수학적 모델링을 피할 수는 있으나 퍼지변수의 결정이나 추론 함수의 수의 결정 등 여러 가지 어려운 부분이 존재한다.

둘째는 제어대상 시스템이 아닌 퍼지 제어기의 관점에서 시스템을 바라보는 것으로 기존 제어시스템이 구축 된 후 퍼지변수나 퍼지 규칙에 의해 전체 시스템의 특성을 변화 시킬 수 있는데 이를 위해서는 주로 시행착오법을 통하여 적절한 퍼지변수의 범위를 찾거나 퍼지규칙을 정의 한다. 일반적으로 숙련된 오퍼레이터에 의해 이루어질 수 있다. 위의 두 관점은 시스템의 설계에 있어 별도로 행하여 지지 않고 함께 시행되어져야 한다. 하지만 제어시스템의 설계에서 절차적으로 관점의 변화는 주는 것은 중요하다고 할 수 있다.

셋째로 시스템에 대한 전문가나 숙련된 오퍼레이터가 없는 플랜트에 대한 제어를 하는 경우로 제어대상 시스템에 대한 퍼지 모델에 의거한 방법이다. 여기서 퍼지 모델이란 퍼지제어 규칙과 같은 *if-then* 형식을 이용하여 플랜트의 동특성을 기술한 것이다. 플랜트의 퍼지 모델에 있어서 하나의 *if-then* 표현은 플랜트의 거동 혹은 플랜트의 법칙이라고 불리어진다. 법칙이라고 불리어지는 것은 퍼지제어에서 사용하는 규칙이나 언어가, 인공적인 것을 의미하기 때문이다. 요컨대 법칙이란 인공적인 규칙에 대한 자연의 법칙이라는 의미다. 따라서 퍼지 모델이란 복수개의 플랜트 법칙이 모인 것으로 모델로의 입력에 대해 출력은 퍼지 추론에 의해 구해진다. 퍼지제어의 개념은 고전 제어론, 그리고 현대 제어론의 개념과 현저하게 다르다. 그것은 제어계의 기술 언어를 중심으로 보기 때문이다. 고전 제어론에서는 전달함수로, 현대 제어론에서는 상태변수의 미분 방정식으로 시스템을 기술하고 퍼지제어론에서는 *if-then* 형식으로 기술한다. 이렇게만 본다면 단지 기술 언어의 차이에 지나지 않지만 전자의 두 가지는 단일 식으로 제어기와 플랜트의 특성을 기술하는 것에 비하여 퍼지 제어이론에서는 복수개의 식으로 기술한다.

제 2 절 멤버쉽 함수에 따른 퍼지논리 특성

퍼지제어기는 비선형 제어기이다. 이러한 비선형 특성은 Rule base와 멤버쉽 함수에 따라 변화한다. 퍼지제어기의 멤버쉽 함수의 영향을 설명하기위해 다음과 같은 시스템을 가정한다.

- 전건부와 후건부의 퍼지변수는 그림 3.1과 같이 NB(Negative Small), AZ (Approximate Zero) and PS (Positive Small) 3개로 한다.
- 퍼지제어기의 입력은 e, 출력은 u로 한다.
- min-max 추론 사용

- 비퍼지화는 COG를 사용한다.
- 멤버쉽 함수의 범위는 $[-1, 1]$로 한다.

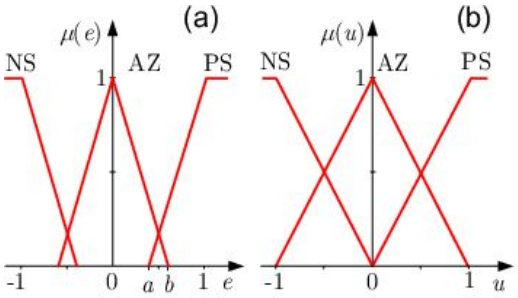


그림 3.1. 퍼지 변수.

Fig. 3.1. Fuzzy variables.

그림 3.2는 전건부 멤버쉽 함수의 퍼지변수들이 겹침이 없을 경우의 응답특성을 보여주고 있다. 출력은 세부분으로 나누어지는데 입력이 주어질 경우 오직 하나의 규칙만이 적용됨으로 출력은 적합도에 의해서만 결정되어지게 됨으로 COG의 출력이 상수로 나타나게 된다. 그림 3.3에서 볼 수 있듯이 퍼지변수의 수에 따라 출력이 구분되어진다.

퍼지제어기의 출력은 퍼지변수의 수와 상관없이 비슷한 출력 형태를 보이지만 퍼지변수의 수가 증가할수록 영역의 수는 증가하게 된다. 출력의 구분영역은 오직 퍼지변수의 수와 퍼지변수의 대(Support)의 크기에 의해서만 결정되어진다.

퍼지변수가 0을 기준으로 서로 대칭하면 퍼지제어기의 출력값도 0을 기준으로 대칭인 출력을 보인다. 퍼지변수의 대의 크기는 퍼지제어기의 특성에 크게 영향을 주는데 그림 3.4와 그림 3.5와 같이 후건부 퍼지 변수의 크기는 서로 다르지만 출력 값은 비슷하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 퍼지 변수간의 겹침이 발생하지 않을 경우 출력은 그림 3.3와 같이 나타난다. 따라서 퍼지변수의 선택에 따라 시스템의 응답이 변화가 없을 수 있음을 보여 주고 있다.

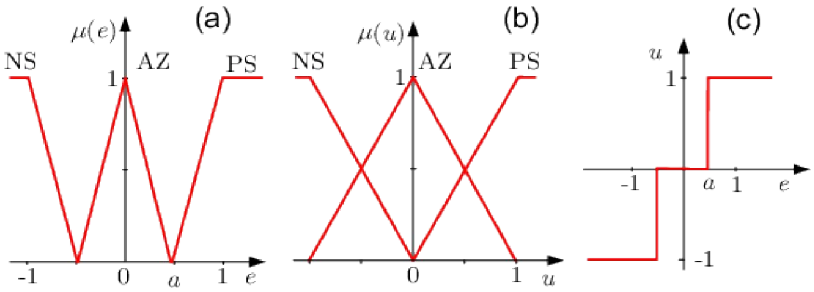


그림 3.2. 퍼지변수에 따른 퍼지제어기 응답 A.

Fig. 3.2. Response for fuzzy variables A

Influence of the characteristic of a proportional fuzzy controller without overlapping in the input membership functions(a) and with full overlapping in the output membership functions(b).

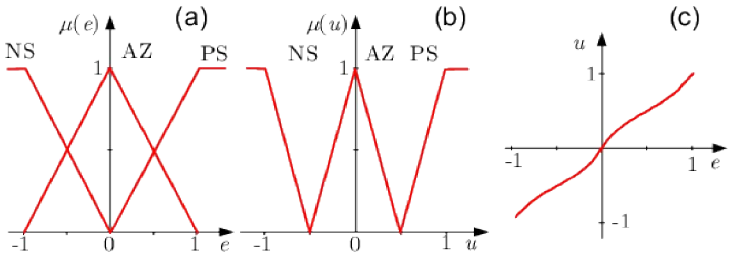


그림 3.3. 퍼지변수에 따른 퍼지제어기 응답 B.

Fig. 3.3. Response for fuzzy variables B

Influence on the characteristic of a proportional fuzzy controller with full overlap in the input membership functions(a) and without overlap in the output membership functions(b).

그림 3.3 그림 3.4, 그림 3.5 그리고 그림 3.6은 후건부 멤버쉽 함수의 AZ 퍼지 변수의 크기에 따른 퍼지 제어기의 응답을 보여 주고 있는데 AZ 퍼지변수의 대가

적을수록 0 주변에서 급격한 변화를 보이고 AZ의 대가 클수록 0 주변에서 완만한 변화를 보임을 알 수 있다.

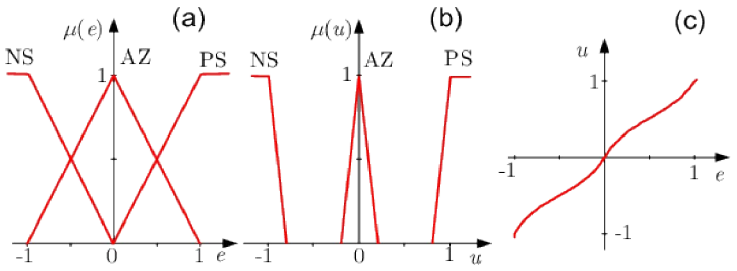


그림 3.4. 퍼지변수에 따른 퍼지제어기 응답 C.

Fig. 3.4. Response for fuzzy variables C

Influence on the characteristic of a proportional fuzzy controller with full overlap in the input membership functions(a) and with reduced support in the output membership functions(b).

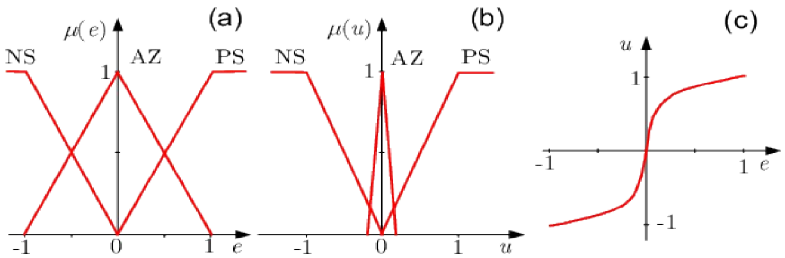


그림 3.5. 퍼지변수에 따른 퍼지제어기 응답 D.

Fig. 3.5. Response for fuzzy variables D

Influence on the characteristic of a proportional fuzzy controller with full overlap in the input membership functions(a) and with a small support in the output membership function AZ(b).

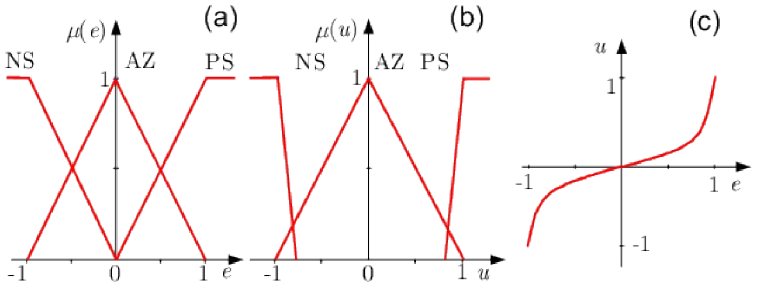


그림 3.6. 퍼지변수에 따른 퍼지제어기 응답 E.

Fig. 3.6. Response for fuzzy variables E

Influence on the characteristic of a proportional fuzzy controller with full overlap in the input membership functions(a) and with a large support in the output membership function AZ(b).

제 3 절 멤버쉽 함수에 따른 수학적 해석

1. 퍼지변수에 따른 비선형 특성

2절에서 후건부 멤버쉽 함수의 퍼지변수의 대의 크기에 따라 퍼지제어기의 응답이 다름을 보였다. 이러한 특성을 이용하여 Bao-Gang Hu는 퍼지제어기의 비선형적인 특성을 수학적으로 표현하였다[23]. Bao-Gang Hu는 퍼지제어기의 응답에 의한 시스템의 응답특성을 그림 3.7과 같이 4가지의 비선형 곡선으로 정의하였다. $\hat{u_p}$는 퍼지제어기의 출력값을 나타내며 $\hat{e}$는 퍼지제어기의 입력값을 나타낸다.

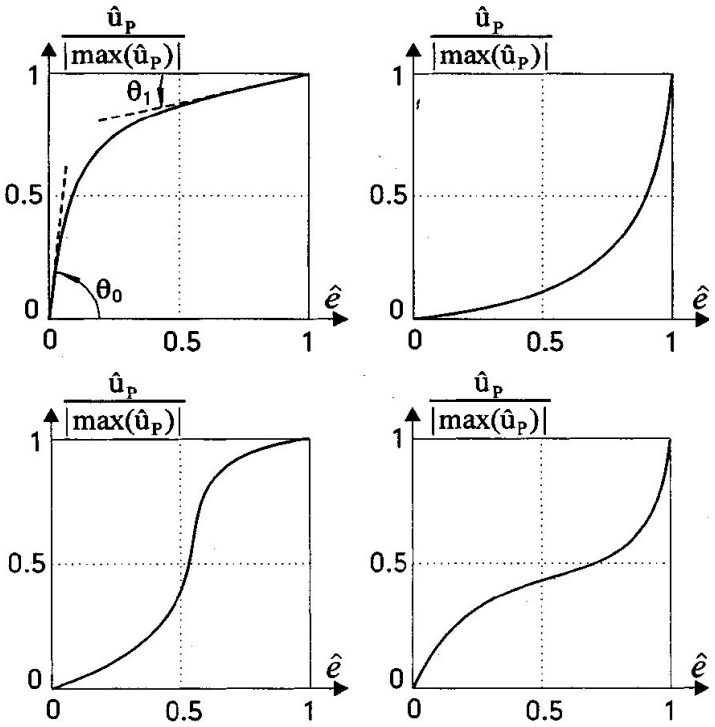


그림 3.7. 4가지 타입의 비선형 곡선.

Fig. 3.7. Four types of simple nonlinear curves.

이러한 비선형 곡선을 수식으로 표현하기위해 퍼지제어기의 후건부 변수를 그림 3.8과 같이 정의하였다. 전건부 멤버쉽 함수는 완전 겹침이 되도록 퍼지 변수를 정의하고 후건부의 퍼지변수를 변화 시켜 퍼지제어기의 응답특성을 그림 3.7과 같이 여러 가지 비선형 응답곡선으로 나타낼 수 있도록 하였다.

Bao-Gang Hu는 후건부 퍼지변수의 범위에 따라 MMG-1, MMG-2, MMG-3, MMG-4와 같이 4가지의 형태로 정의하고 각 형태에 따른 입력과 출력의 관계를 수식으로 표현하였다[24]. 이렇게 구해진 수식을 통해 원점에서의 각과 1에서의 각을 각각 구한 후 그림 3.7에서의 비선형 특성을 이용하여 시스템의 안정성여부를 판단하였다.

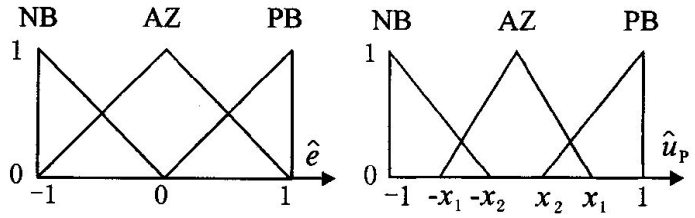


그림 3.8. 전건부, 후건부 멤버쉽 함수.

Fig. 3.8. Premise and consequence membership function of fuzzy controller.

2. 퍼지제어기의 수학적 표현

퍼지제어기의 수학적 표현을 위해 후건부 퍼지변수의 겹침여부에 따라 형태를 구분하였으며(겹침이 없을 경우를 1형, 겹침이 있을 경우를 2형) 겹침이 있을 경우 각각의 범위에 따라 별도의 수식을 구하였다. 퍼지변수가 겹침이 있을 경우에는 분리점이라고 불리는 $\hat{e_d}$를 통하여 각각의 영역을 구분하였다. $\hat{e_d}$는 식 (3-1)과 같이 표현되어 진다. 퍼지변수 NB, AZ, PB 3개로 구성하였으며 입력 멤버쉽함수는 고정하였으며 후건부 퍼지변수의 크기만을 변화 시켰다. 후건부 퍼지변수의 크기는 좌우대칭이 되도록 하였으며 각각 x_1, x_2에 의해 크기가 결정되어진다. x_1은 AZ의 크기를 정의하고 x_2는 NB와 PB의 크기를 결정한다. 퍼지규칙은 3개로 하였다.

$$\hat{e_d} = (x_1 - x_2)/(1 + x_1 - x_2) \tag{3-1}$$

그림 3.9에서와 같이 2형의 경우 $\hat{e_d}$에 의해 3가지의 영역의 구분되어진다. 1형의 경우에는 $\hat{e}$의 퍼지 변수 각각에 대해 후건부 멤버쉽 함수의 퍼지변수가 하나씩 대응되지만 2형의 경우에는 $\hat{e}$의 크기에 따라 여러 개의 퍼지변수가 대응되어 진다.

1형의 경우는 겹침이 발생하지 않기 때문에 $x_1 \leq x_2$가 되며 식 (3-2)와 같다.

$$\hat{u}=\frac{y_2\hat{e}[3x_2(2-|\hat{e}|)+y_2(3-\widehat{e^2})]}{3[2x_1(1-\widehat{e^2})+y_2(2|\hat{e}|-\widehat{e^2})]} \tag{3-2}$$

2형의 경우에는 $\widehat{e_d}$에 따라 3가지 영역으로 구분되어 구해지며 식 (3-3), 식 (3-4), 식 (3-5)와 같다.

$$\hat{u}=\frac{\hat{e}[3(1-x_1^2)+3x_1^2|\hat{e}|-x_1^2\widehat{e^2}]}{3[2x_1+2(1-x_1)|\hat{e}|-x_1\widehat{e^2}]}\ \ (0\le|\hat{e}|\le\widehat{e_d}) \tag{3-3}$$

$$\hat{u}=\frac{\hat{e}y_2|\hat{e}|[3x_2(2-|\hat{e}|)+y_2(3-\widehat{e^2})]-y_1\widehat{e_d}[(3-\widehat{e_d})x_1-y_1]}{3|\hat{e}|[2x_1(1-\widehat{e^2})+y_2(2|\hat{e}|-\widehat{e^2})-y_1\widehat{e_d}]},\ (\widehat{e_d}<|\hat{e}|<1-\widehat{e_d}) \tag{3-4}$$

$$\hat{u}=\frac{\hat{e}z_1[3-x_1^2(1+|\hat{e}|+\widehat{e^2})]-y_2z_3[3-y_2(1-|\hat{e}|+\widehat{e^2})]}{3|\hat{e}|[z_1(2+x_1z_2)-y_2z_3]},\ (1-\widehat{e_d}\le|\hat{e}|\le1) \tag{3-5}$$

위식에서 z_1, z_2, z_3은 식 (3-6)과 같으며 y_1, y_2는 식 (3-7)과 같다.

$$z_1=1-|\hat{e}|, z_2=1+|\hat{e}|, z_3=1-2|\hat{e}| \tag{3-6}$$

$$y_1=x_1-x_2, y_2=1-x_2 \tag{3-7}$$

위의 식을 통하여 퍼지제어기를 수학적으로 명확히 표현할 수 있으나 퍼지변수가 증가함에 따라 표현식이 복잡해져 계산이 불가능해 질 수도 있다. 앞에서 언급하였듯이 퍼지변수의 증가는 퍼지제어의 응답 영역의 수를 증가 시켜 전체응답을

좀 더 부드럽게 할 수 있지만 3개의 퍼지변수를 통해서도 위에서 제시한 4개의 기본적인 퍼지제어의 비선형 응답을 표현할 수 있음을 알 수 있다.

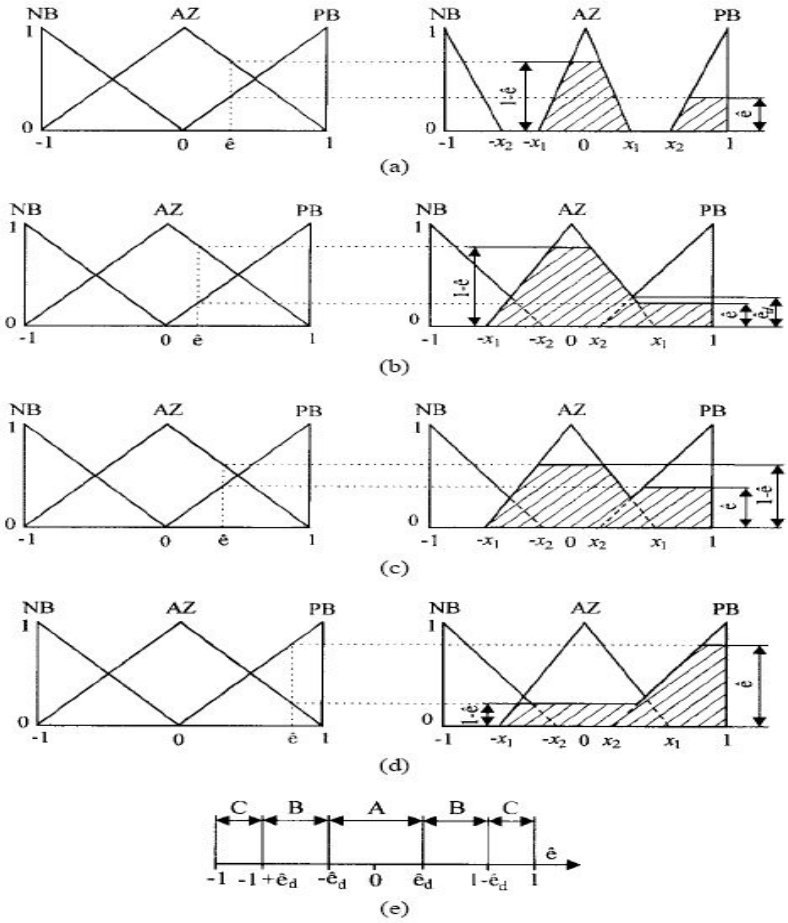


그림 3.9. 두 가지 경우에 대한 퍼지 응답 집합.

Fig. 3.9. Two cases for fuzzy output aggregation.

(a) Case 1: $x_1 \le x_2$.

(b) Case 2: $x_1 > x_2$. Range A: $0 \le |\hat{e}| \le \hat{e_d}$.

(c) Case 2: $x_1 > x_2$. Range B: $\hat{e_d} < |\hat{e}| \le 1 - \hat{e_d}$.

(d) Case 2: $x_1 > x_2$. Range C: $1 - \hat{e_d} < |\hat{e}| \le 1$.

(e) Case 2: $x_1 > x_2$. Three ranges with respect to $\hat{e}$.

3. 퍼지제어기 응답

퍼지제어기의 수학적 표현은 수식이 복잡하고 3퍼지변수에 대해 수식으로 5 퍼지변수 및 7퍼지변수에 적용하기 힘들다. 여기서는 퍼지변수의 수에 따른 퍼지제어기의 응답특성을 기술하고 다음 장에서는 이를 이용하여 안정도 판별을 위한 방법을 제시한다.

가. 3 퍼지변수의 응답

2장에서 기술하였듯이 퍼지제어기는 후건부 퍼지변수의 크기에 따라 다양한 비선형응답을 보인다. SISO 퍼지제어기가 그림 3.10과 같이 주어지고 멤버쉽 함수가 그림 3.11과 같고 Rule Base가 식 (3-8)과 같을 때 후건부 퍼지변수의 d_1, d_2 변화에 대한 퍼지제어기의 e에 대한 응답은 그림3.12와 같다. 응답곡선에서 볼 수 있듯이 d_1, d_2가 작을수록 원점에서 급격한 변화를 보이고 d_1, d_2이 클수록 원점에서 완만한 변화를 보임을 알 수 있다. 특히 d_1의 경우 원점을 중심으로 응답 변화에 관여하게 되고 d_2의 경우 끝값의 변화에 관여하게 된다. 따라서 d_1이 퍼지제어기의 입출력 응답에 d_2보다 크게 관여하게 된다. 퍼지제어기의 입출력 응답 특성이 기함수의 특성을 갖도록 하기 위해 전건부 소속함수는 완전겹침이 되도록하여 고정하였고 후건부 소속함수의 퍼지변수는 좌우대칭이 되도록 가운데 퍼지 변수를 기준으로 동일한 같이 변화되도록 구성 한다. 따라서 그림 3.11과 같이 퍼지변수가 3개일 경우 2개의 변수 즉 d_1, d_2에 의해 후건부 퍼지변수가 변화함을 볼 수 있다.

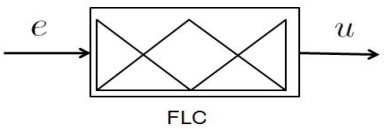


그림 3.10. SISO 퍼지 논리.

Fig. 3.10. SISO fuzzy logic.

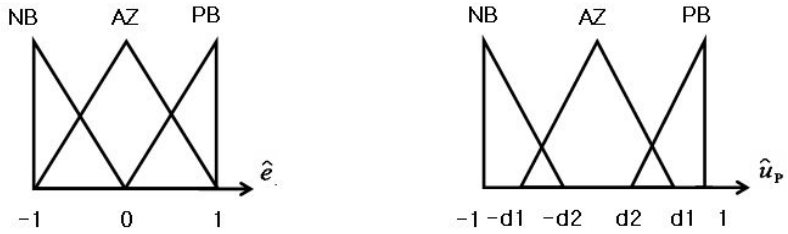


그림 3.11. 3개퍼지 변수의 전건부, 후건부 소속함수.

Fig. 3.11. premise and consequence Membership function of fuzzy controller with three fuzzy variables.

$R1$: if$(e\ is\ NB)\ then\ (u\ is\ NB)$ (3-8)

$R2$: if$(e\ is\ AZ)\ then\ (u\ is\ AZ)$

$R3$: if$(e\ is\ PB)\ then\ (u\ is\ PB)$

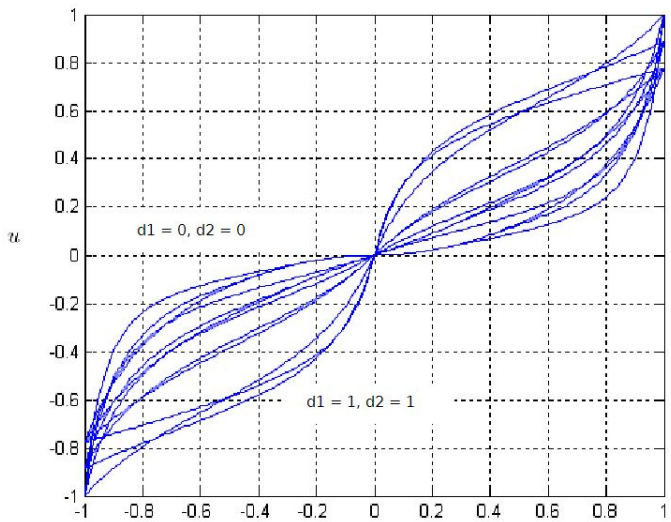


그림 3.12. d_1, d_2의 변화에 따른 퍼지제어기 응답곡선.

Fig. 3.12. The Response curve for changing d_1, d_2.

그림 3.13은 d_1, d_2각각의 변화에 대한 응답곡선을 보여주고 있다. (a)는$d_1 = 0.4$일

때 d_2의 변화에 대한 응답곡선으로 적은 변화를 보여주고 있고 (b)는 $d_2 = 0.4$일 때 d_1의 변화에 대한 응답곡선으로 큰 변화를 보여줌을 알 수 있다.

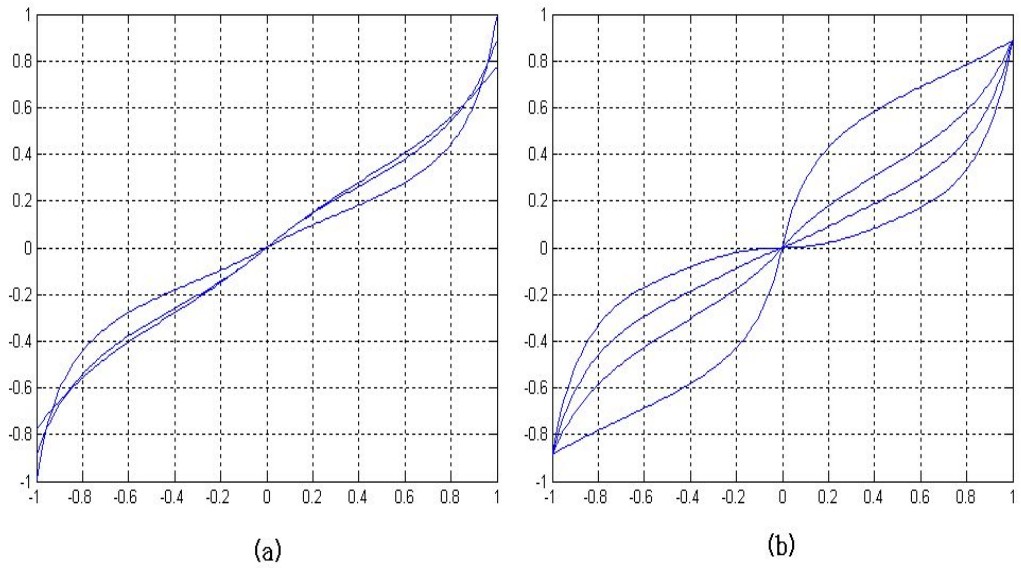


그림 3.13. 응답곡선 d_2(a), d_1(b).

Fig. 3.13. The response curve for changing d_2(a), changing d_1(b).

Describing Function 방법을 이용하기 위해서는 입출력 함수에 대한 유사선형화가 필요하다. 본 논문에서 제안되어진 퍼지제어기의 경우 입출력이 기함수의 특성이 있으므로 부분 선형화를 통하여 퍼지제어기의 응답곡선을 근사화하여 Describing Function 방법을 적용하였다. 그림 4.14 (a)는 $d_1 = 0.7, d_2 = 0.7$ 일 때 퍼지제어기 응답곡선이고 (b)는 이를 부분 선형화한 그래프이다. 정밀도를 높이기 위해 전체를 8개 구간으로 나누었다. 구간의 설정을 위해 그래프상의 변곡점을 기준으로 구간을 분류하였다. 먼저 그래프에서 가장 큰 변곡점을 보이는 점을 1차 구간 기준점으로 하고 1차 구간 기준점으로 1차 구간 중 2차 구간 기준점을 구하고 2차 구간 중 3차 구간 기준점을 구하고 3차 구간에서 4차 구간 기준을 구하여 각

각 8개의 구간을 구하고 각각의 구간을 부분 선형화하였다.

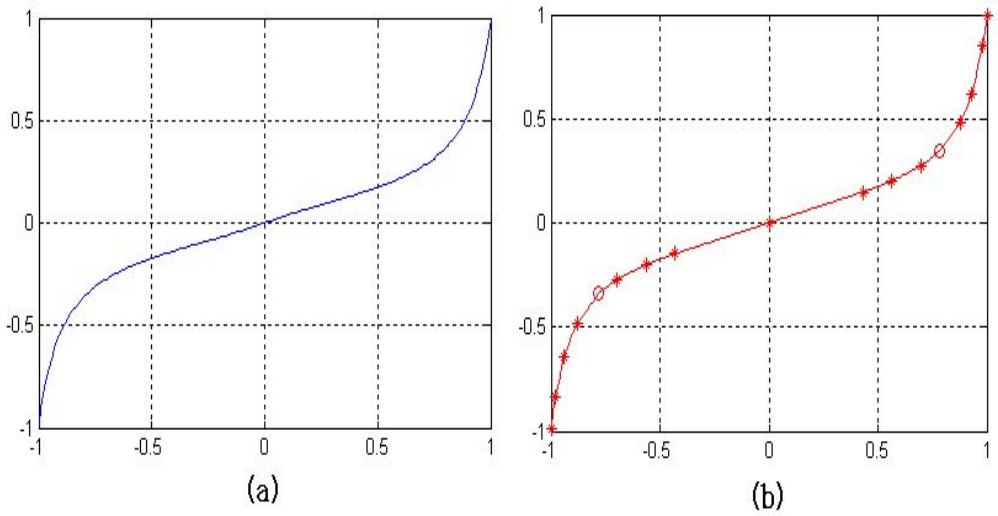


그림 3.14. 퍼지제어기 응답의 부분 선형화.

Fig. 3.14. The piecewise linearization of a response of FLC.

나. 5 퍼지변수에 대한 응답

본 연구에서는 Describing Function을 사용함으로 기함수의 특성을 가져야 한다. 따라서 중심값을 기준으로 좌우 대칭이 되도록 구성하였다. 5개의 퍼지변수는 그림 3.15와 같이 NB(Negative Big), NM(Negative Medium), AZ(Approximate Zero), PM(Positive Medium), PB(Positive Big)으로 정의하였으며 후건부 퍼지변수의 크기 변화를 식 (3-9)와 같이 d_1, d_2, d_3을 정의하여 좌우대칭을 이루도록 하였다. 각 퍼지변수의 중심값은 전체영역을 균등 분배하여 -1, -0.5, 0, 0.5 1로 하였다. AZ는 d_1으로 정의되어져 있으며 $0 \le d_1 \le 1$의 범위에서 변화하게 된다. d_2의 경우에는 NM과 PM의 값을 나타내는데 $0 \le d_2 \le 0.5$의 범위를 갖는다. 이는 경계값인 -1을 넘지 못하게 하기 위해서다. NM의 경우에는 퍼지변수의 크기가 $-(0.5+d_2), -(0.5-d_2)$으로 정의되어져 d_2의 변화에 따라 직각 삼각형을 구성하도

록 하였다. PM은 $(0.5-d_2),(0.5+d_2)$로 구성하였다. x_3은 퍼지변수 NB와 PB를 정의하는데 $0 \le d_3 \le 1$의 범위를 갖는다. 퍼지규칙은 총 5개의 규칙으로 구성하였다.

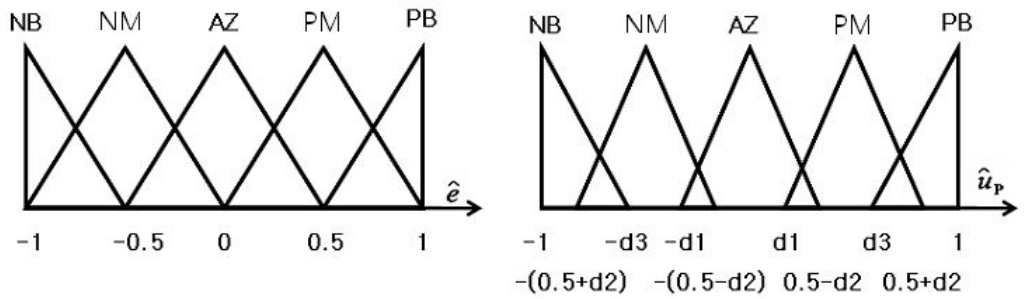


그림 3.15. 5개 퍼지변수의 전건부, 후건부 멤버쉽 함수.

Fig. 3.15. premise and consequence Membership function of fuzzy controller with five fuzzy variables.

$$D_1 = (d|0 \le d \le 1) \tag{3-9}$$

$$D_2 = (d|0 \le d \le 0.5)$$

$$D_3 = (d|0 \le d \le 1)$$

$$R1: \text{if}(e\ is\ NB)\ then\ (u\ is\ NB) \tag{3-10}$$

$$R2: \text{if}(e\ is\ NM)\ then\ (u\ is\ NM)$$

$$R3: \text{if}(e\ is\ AZ)\ then\ (u\ is\ AZ)$$

$$R4: \text{if}(e\ is\ PM)\ then\ (u\ is\ PM)$$

$$R5: \text{if}(e\ is\ PB)\ then\ (u\ is\ PB)$$

5개의 퍼지변수에 의한 퍼지 응답곡선은 그림 3.16과 같다. 그림 3.16에서 볼 수 있듯이 퍼지변수의 개수의 변화에 따라 전체적으로 4개의 영역으로 구분되어짐을

볼 수 있다. 3개의 퍼지변수보다는 더 다양한 비선형성을 보여줌을 알 수 있다.

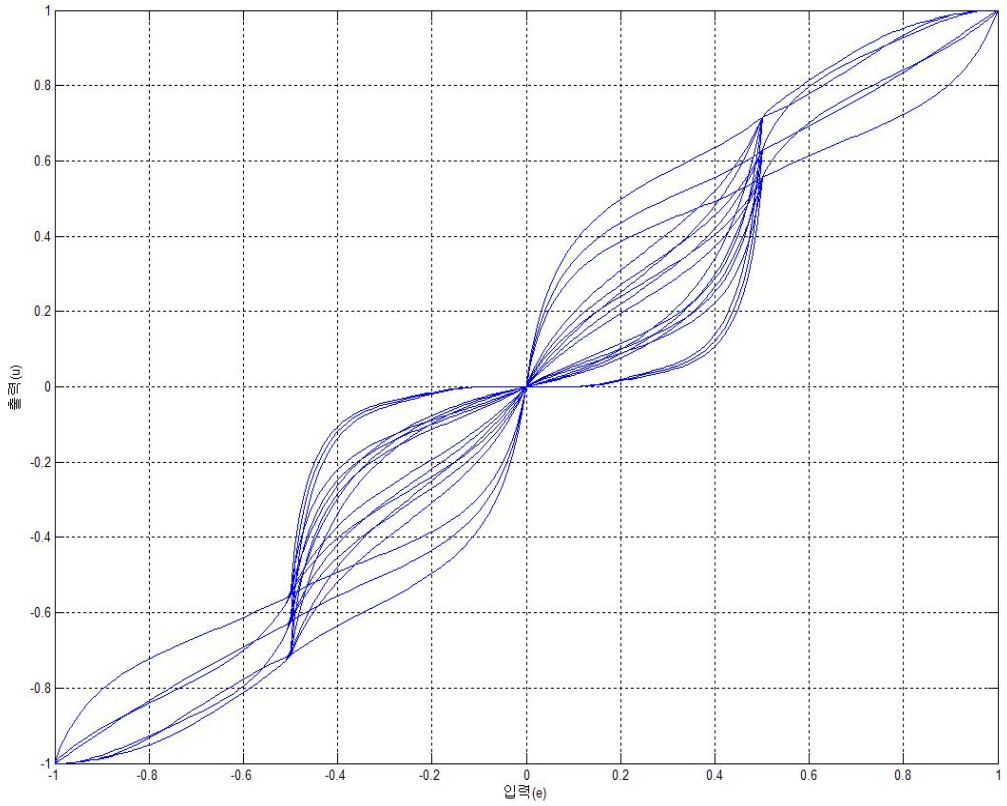


그림 3.16. d_1, d_2, d_3의 변화에 따른 퍼지제어기 응답곡선.

Fig. 3.16. The response curve for changing d_1, d_2, d_3.

다. 7 퍼지변수의 응답

7 개의 퍼지변수는 그림 3.16과 같이 NB(Negative Big), NM(Negative Medium), NS(Negative Small), AZ(Approximate Zero), PS(Positive Small), PM(Positive Medium), PB(Positive Big)으로 정의하였다. 각 퍼지변수의 중심값은 -1, -0.66, -0.33, 0, 0.33, 0.66, 1로 하였다. 각 변수의 범위는 식 (3-11)과 같이 AZ는 d_1에 의해 정의되어지는데 $0 \leq d_1 \leq 1$의 범위를 갖는다. NS, NP는 d_2로 정의하는데

$0 \le x_2 \le 0.33$의 범위로 정의한다. NS는 $-(0.66+d_3), -(0.66-d_3)$으로 정의되고 NP는 $(0.66-d_3), (0.66+d_3)$으로 정의되어진다. NM, PM은 x_3로 정의하는데 범위는 $0 \le d_3 \le 0.33$으로 정의되어진다. NM은 $-(0.33+d_3), -(0.33-d_3)$으로 PM은 $(0.33-d_3), (0.33+d_3)$으로 정의되어진다. NB와 NP는 d_4로 정의되어지며 범위는 $0 \le d_4 \le 1$와 같다. 퍼지규칙은 식 (3-12)와 같이 입력과 출력이 각각 1개임으로 전체적으로 7개로 구성하였다.

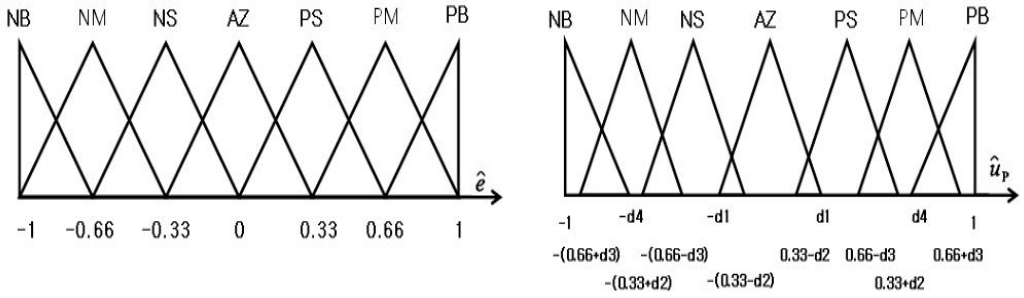


그림 3.17. 7퍼지변수의 전건부, 후건부 멤버쉽 함수.

Fig. 3.17. premise and consequence Membership function of fuzzy controller with 7 fuzzy variables.

$$D_1 = (d|0 \le d \le 1) \tag{3-11}$$

$$D_2 = (d|0 \le d \le 0.33)$$

$$D_3 = (d|0 \le d \le 0.33)$$

$$D_4 = (d|0 \le d \le 1)$$

$R1$: if(e *is NB*) *then* (u *is NB*) (3-12)

$R2$: if(e *is NM*) *then* (u *is NM*)

$R3$: if(e *is NS*) *then* (u *is NS*)

$R4$: if(e *is AZ*) *then* (u *is AZ*)

$R5$: if(e *is PS*) *then* (u *is PS*)

$R6$: if(e *is PM*) *then* (u *is PM*)

$R7$: if(e *is PB*) *then* (u *is PB*)

7개 퍼지변수로 이루어진 퍼지제어기의 응답곡선은 그림 3.18과 같이 6개의 영역으로 구성되어지고 5퍼지변수 응답곡선 보다 다양한 비선형 응답을 보여주고 있다.

퍼지제어기의 경우 퍼지변수의 개수에 따라 각각 다른 응답곡선을 보여주고 있다. 퍼지변수 개수가 증가할수록 다양한 비선형 응답을 보여주고 있으며 특히 퍼지변수의 개수에 따라 영역이 생성됨을 볼 수 있었다. 각각의 후건부 퍼지변수는 멤버쉽 함수의 대의 범위 중 정의되어진 대의 영역에 대응하는 영역의 응답에 기여도가 높음을 알 수 있다.

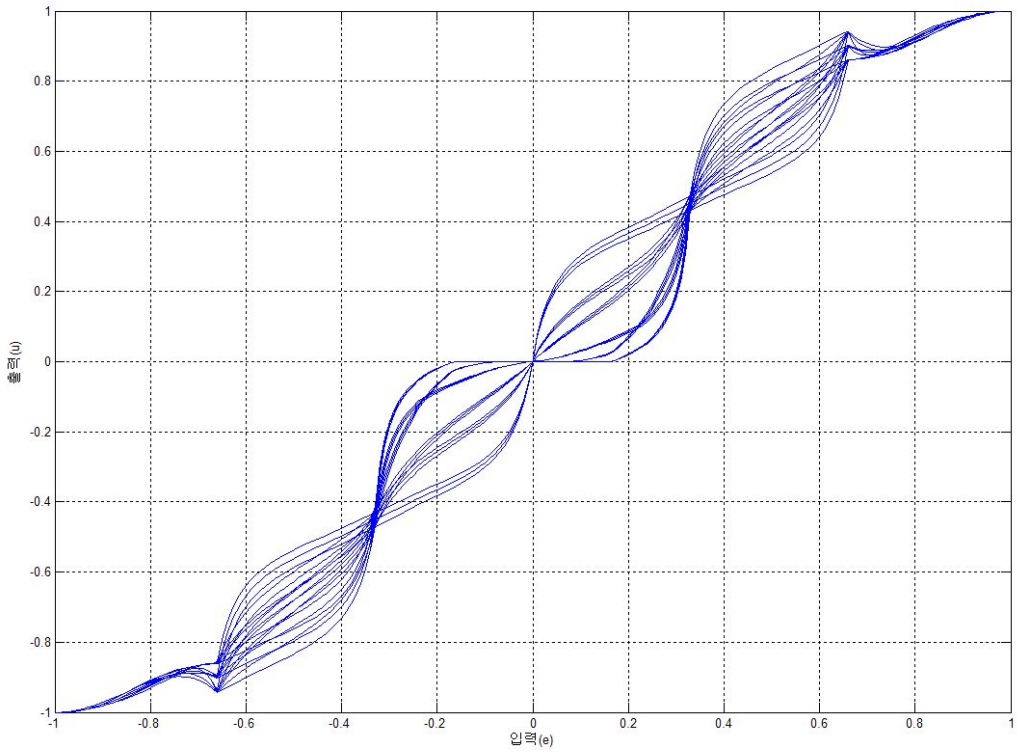


그림 3.18. d_1, d_2, d_3, d_4의 변화에 따른 퍼지제어기 응답곡선.

Fig. 3.18. The response curve for changing d_1, d_2, d_3, d_4.

제 4 장 Describing Function 해석

Describing Function 방법은 비선형시스템의 특성을 이해하고 분석하는데 효과적인 수학적 접근 방법을 제공한다. 선형시스템에 대한 수학적 이론들은 선형시스템의 가능한 모든 특성들을 이해하기 위한 통일된 프레임웍을 제공하지만 비선형시스템에 대해서는 이러한 이론이 존재하지 않는다. 일반적으로 정확한 해석은 비교적 단순한 시스템에 대해서만 적용되며 복잡한 시스템에 대해서는 근사 해석이 이루어진다. DF는 복잡한 시스템에 대한 근사 해석에 대해 적용된다.

비선형 시스템을 다루기 위한 방법중에 선형화가 있는데 비선형부분의 기울기나 변위를 선형부분의 이득으로 하여 선형시스템에서 사용되지는 여러 가지 방법을 사용할 수 있지만 선형화 된 점으로부터 작은 변위에 대해서만 효과가 있다. 따라서 이러한 방법은 비선형 진동과 같은 비선형 현상을 이해하는 데에는 적합하지 않다. 비선형시스템 특성에 대한 연구에 대해 DF의 기본 아이디어는 입력의 크기에 대한 함수를 이득으로 하여 비선형 요소를 유사선형화(quasi-linear)한다는 것이다. 단일 비선형 요소를 갖는 시스템에 대한 DF를 이용한 해석은 다양한 연구가 이루어졌으며 Hannebrink등에 의해 sinusoidal-input DF(SIDF)에 대한 연구가 이루어졌으며 Ramnath, Hedrick and Paynter는 다중 비선형성에 대한 연구를 하였다[25-28].

일반적으로 주기적인 현상에 대한 연구는 SIDF를 사용하는데 limit cycle 분석과 주파수 영역에서의 비선형 플랜트의 입/출력 특성을 분석하는데 주로 사용되어진다. RIDF(Random Input Describing Function)은 확률적 비선형시스템의 분석이나 설계에 사용되어진다. DF는 비선형 시스템의 다양한 문제들을 선형시스템의 직접적이며 단순한 확장을 통하여 해결할 수 있도록 해준다. DF를 통해 연구되어지는 비선형성의 형태는 매우 일반적이며 시스템의 차수 또한 심각한 제약사항은 아니다. DF는 주파수 영역에서 유사선형화를 통해 비선형 시스템의 특성 예측, 근사

해석에 사용되어지며 Limit Cycle을 예측하는데 주로 이용되어진다.

제 1 절 Describing Function 정의

1. 준선형화

비선형시스템에 대한 연구에서 어려운 점은 비선형요소의 선형화로 대체하여 근사시스템의 성능에 대한 연구로 대신할 수 있지만 이는 선형화의 근사성에 좌우되어지며 비선형 시스템에 대한 선형화는 동작점 근처에서만 유효하다. 그림 4.1과 같이 이러한 특성은 선형화에 의한 동작점 주변의 유효한 범위를 벗어난 시스템 응답에 대해서는 유효한 응답을 얻을 수 없으므로 매번 새로운 동작점에 대한 선형화를 하여야 한다.

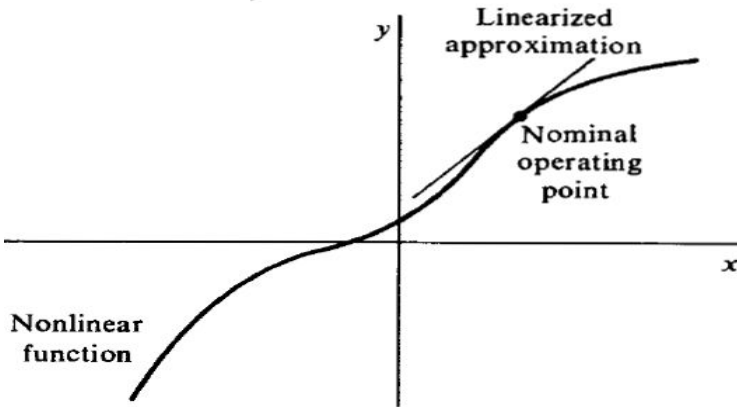


그림 4.1. 선형화의 근사성.

Fig. 4.1. The linearizing approximation.

비선형시스템에 대한 선형화는 제한된 입력에 대해 유효하지만 선형화를 통한 시스템 해석은 다양한 선형시스템 해석법을 사용하기 때문에 효과적이라 할 수 있

다. 동일한 비선형시스템에 대해 다른 형태의 입력에 의하거나 동일한 형태이지만 다른 크기의 입력에 대한 선형 근사화를 통해 이러한 제한을 해결할 수 있는데 이와 같이 입력의 특성에 의해 선형화를 준선형화라 한다. 준선형화는 시스템에 대한 선형화를 하기 때문에 선형화라 할 수 있으나 시스템의 입력의 특성에 따라 선형 근사화의 특성이 변화하기 때문에 완전한 선형화라 할 수 는 없다. 그림 4.2 (a)에서는 일반적인 포화형 타입 비선형을 보여주고 있으며 그림 4.2 (b)는 그에 따른 선형화와 준선형화에 대한 기울기의 변화를 보여 주고 있다. 선형화의 경우 원점을 중심으로 선형화되었기 때문에 고정된 이득을 나타내지만 준선형화의 경우 입력에 따라 다른 이득을 보임을 알 수 있다.

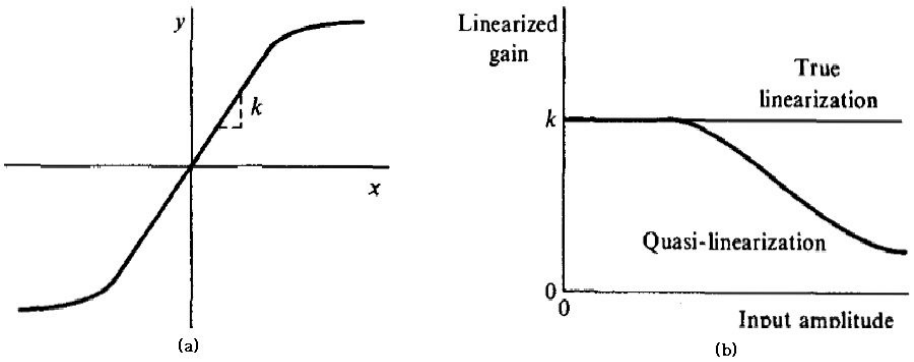


그림 4.2. 준선형화.

Fig. 4.2. Illustration of quasi-linearization.

선형화는 동작점과 시스템에 의해 이루어지지만 준선형화는 시스템의 입력 특성과 시스템 특성에 의해 결정되어짐으로 적용하기가 더 어렵지만 비선형 시스템 해석에서 많이 사용되어 지고 있다.

2. Describing Function의 기본 조건

비선형 시스템에 DF 방법을 적용하기위해서는 시스템이 아래의 조건을 만족하여야 한다.

- 오직 하나의 비선형 요소만이 존재해야 한다.
- 비선형 요소는 시불변이여야 한다.
- 입력 $x = Asin(\omega t)$에 대하여 출력 중 오직 기본파에 대해서만 고려한다.
- 비선형 함수는 기함수(odd function)이여야 한다.

첫 번째 조건은 시스템에 두개이상의 비선형 요소가 존재할 경우에는 비선형 요소들을 하나로 합하여 하나의 비선형 요소로 하여 DF방법을 적용하던지 아니면 중요 비선형 요소에만 DF방법을 적용하고 나머지 비선형 요소는 그대로 두고 해석하여한다.

두 번째 조건은 비선형 요소가 Autonomous 비선형 이어야 하는데 이는 DF를 평가하는 Nyquist 임계점이 선형시불변 시스템에 대해 적용되어지기 때문이다.

세 번째 조건은 사인입력파에 대한 비선형 요소 응답의 고조파는 일반적으로 플랜트가 저주파 필터링의 특성을 가지고 있어 고조파 성분은 무시할 수 있기 때문이다. 식 (4-1)과 같이 고조파는 기본파보다 현저히 작은 값을 갖기 때문에 DF방법에서는 기본파만을 이용하여 표현한다.

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)| \text{ for } n = 2, 3, ... \tag{4-1}$$

네 번째 조건은 Describing Function 방법의 단순화를 위한 것으로 출력값이 원점을 중심으로 대칭임을 나타낸다. 따라서 출력값의 DC 이득은 0이 되어 비선형 요소의 출력값은 기본파로만 표현되어진다.

3. Describing Function의 수학적 표현

비선형 시스템이 그림 4.3과 같이 주어졌을 때 출력에 대한 퓨리에 급수는 식 (4-2)와 같이 나타낼 수 있다. 그림 4.3 (b)에서와 같이 비선형 요소는 입력 sine함수의 크기 A 와 각주파수 ω 의 함수로 표현하면 출력은 위상 ϕ 를 포함하는데 만약 비선형요소가 주파수와 무관할 경우에는 크기 A 의 함수로만으로 표현되어진다.

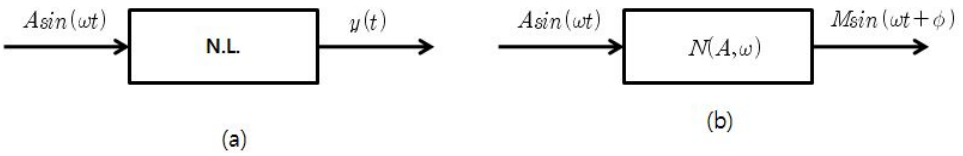


그림 4.3. 비선형 시스템의 Describing Function 표현.

Fig. 4.3. A nonlinear system and its describing function representation.

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \tag{4-2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) d\omega t$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(n\omega t) d\omega t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(n\omega t) d\omega t$$

Describing Function 방법에서는 기본파만을 대상으로 함으로 식 (4-2)는 식 (4-3)과 같이 간략화 할 수 있다.

$$y(t) \simeq a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = M sint(\omega t + \phi) \tag{4-3}$$

$$M(A,\omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\phi(A,\omega) = \tan^{-1}(\frac{a_1}{b_1})$$

복소수형태로 표현할 경우는 식 (4-4)와 같이 표현되어지고 Describing Function은 식 (4-5)와 같이 된다.

$$y(t) \simeq M(A,\omega) e^{j(\omega t + \phi)} = (b_1 + j a_1) e^{j\omega t} \tag{4-4}$$

$$N(A,\omega) = \frac{phasor\ representation\ of\ output\ component\ at\ \omega}{phasor\ representation\ of\ input\ component\ at\ \omega} \tag{4-5}$$

$$= \frac{M(A,\omega) e^{j(\omega t + \phi(A,\omega))}}{A e^{j\omega t}}$$

$$= \frac{M(A,\omega)}{A} e^{j\phi(A,\omega)}$$

$$= \frac{1}{A}(b_1 + j a_1)$$

만약 비선형요소가 비메모리일 경우(미분과 적분 요소가 없을 경우) a_1=0이 되어 Describing Function은 입력 sine함수의 크기에 대한 함수가 되어 식 (4-6)과 같이 표현되어진다.

$$N(A) = \frac{1}{A} b_1 \tag{4-6}$$

4. 일반적 비선형요소의 Describing Function

많은 비선형 그래프의 경우 적절히 비선형 구간을 분류하여 각 구간을 부분선형화 할 수 있다. 부분 선형특성을 갖는 비선형 그래프가 그림 4.4와 같이 주어지고 각각의 범위가 식 (4-7)과 같이 주어졌을 때 그림 4.4의 응답은 그림 4.5와 같이 나타나며 DF는 식 (4-8)을 통해 식 (4-9)와 같이 정의할 수 있다. 대표적인 비선형 요소에 대한 DF는 표 4.1과 같다. 식 (4-9)에서 볼 수 있듯이 기함수 특성을 갖는 비선형 곡선의 부분선형화에 의한 Describing Function은 선형화되어진 각각의 직선의 기울기 m과 입력 sine함수의 크기로 표현되어 진다. 기울기 m은 선형화에 의해 구해지는 상수임으로 전체적인 Describing Function은 입력 sine함수의 크기에 대한 함수가 된다.

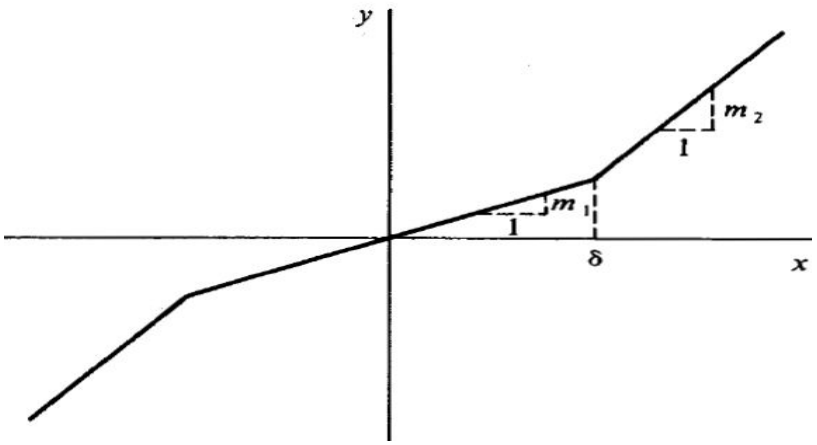


그림 4.4. 이득 변경 비선형.

Fig. 4.4. Nonlinearization with gain-changing.

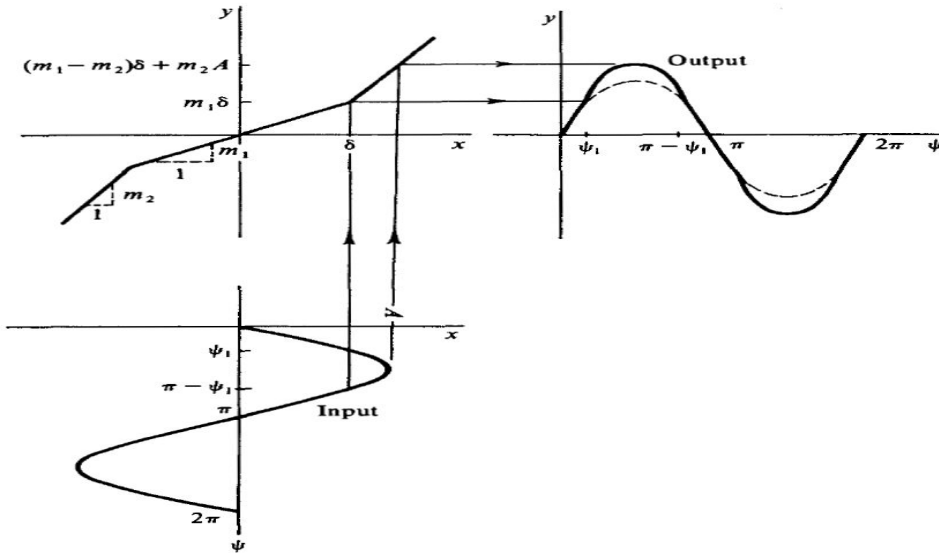


그림 4.5. 이득 변경 비선형의 입출력 관계.

Fig. 4.5. Input-output relationship for a gain-changing nonlinearity.

$$0 < x \le \delta \qquad y = m_1 x \tag{4-7}$$

$$\delta < x \le \frac{\pi}{2} \qquad y = (m_1 - m_2)\delta + m_2 x$$

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sin\psi\, d\psi \tag{4-8}$$

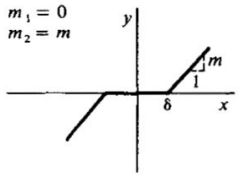
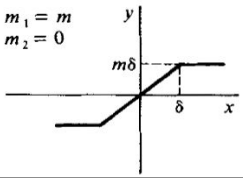
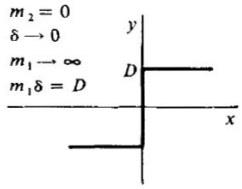
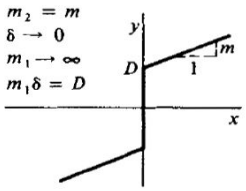
$$= \frac{4}{\pi A}\int_0^{\psi_1} m_1 A sin^2\psi\, d\psi + \frac{4}{\pi A}\int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} (m_1 - m_2)\delta + m_2 A\sin\omega t\sin\psi d\psi$$

$$= \frac{2(m_1 - m_2)}{\pi}\left(\psi_1 - \frac{1}{2}sin2\psi_1 + 2\frac{\delta}{A}cos\psi_1\right) + m_2$$

$$N(A) = \frac{2(m_1 - m_2)}{\pi}\left\{\sin^{-1}\frac{\delta}{A} + \frac{\delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{A}\right)^2}\right\} + m_2 \tag{4-9}$$

표 4.1. 비선형 요소의 Describing Function.

Table 4.1. Describing Functions of nonlinearity factors.

비선형요소	그래프	Describing Function
Dead zone		$N(A)=0, \quad A \le \delta$ $N(A)=\frac{m}{\pi}\left\{\pi-2\sin^{-1}\left(\frac{\delta}{A}\right)-2\left(\frac{\delta}{A}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{A}\right)^2}\right\}$ $A > \delta$
Saturation		$N(A)=m \quad A \le \delta$ $N(A)=\frac{2m}{\pi}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{\delta}{A}\right)+\left(\frac{\delta}{A}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{A}\right)^2}\right\}$ $A > \delta$
Ideal relay		$N(A)=\frac{4m_1\delta}{\pi A}=\frac{4D}{\pi A}$
Preload		$N(A)=\frac{4D}{\pi A}+m$

본 연구에서는 퍼지제어기의 응답 곡선을 여러 개의 부분 근사 선형화하고 이를 이용하여 Describing Function을 구하게 된다. 따라서 여러 개의 선형 요소를 갖는 부분 선형 기함수에 대한 Describing Function의 정의가 필요하다. 부분 선형 비메모리 기함수의 특성을 갖는 비선형요소가 그림 4.6과 같고 각각의 범위가 식 (4-10)과 같이 주어지면 Describing Function은 식 (4-11)과 같이 나타낼 수 있다.

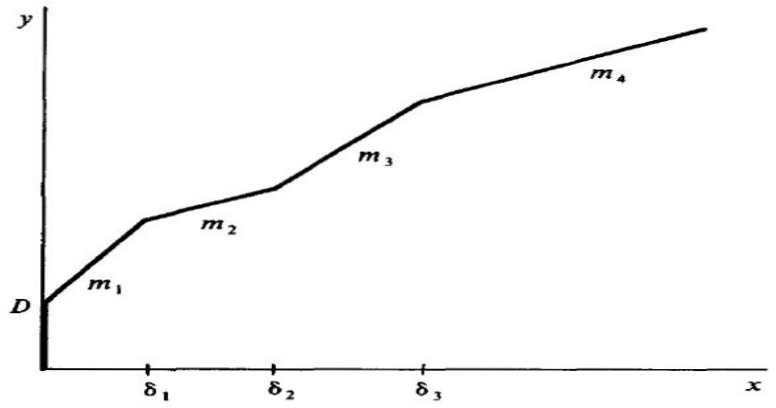


그림 4.6. 일반적인 부분 선형 비메모리 기함수.

Fig. 4.6. General piecewise-linear odd memoryless nonlinearity.

$$0 < x \le \delta_1 \quad y = m_1 x + D \tag{4-10}$$

$$\delta_1 < x \le \delta_2 \quad y = (m_1 - m_2)\delta_1 + m_2 x + D$$

$$\delta_2 < x \le \delta_3 \quad y = (m_1 - m_2)\delta_1 + (m_2 - m_3)\delta_2 + m_3 x + D$$

$$\delta_3 < x \quad y = (m_1 - m_2)\delta_1 + (m_2 - m_3)\delta_2 + (m_3 - m_4)\delta_3 + m_4 x + D$$

$$N(A) = \frac{4D}{\pi A} + (m_1 - m_2) f\left(\frac{\delta_1}{A}\right) + (m_2 - m_3) f\left(\frac{\delta_2}{A}\right) + (m_3 - m_4) f\left(\frac{\delta_3}{A}\right) + m_4 \tag{4-11}$$

그림 4.6은 비메모리 요소에 대해 나타내게 되는데 만약 비선형요소가 그림 4.7과 같이 메모리 비선형 요소인 히스테리시스로 주어지게 되면 식 (4-12)와 같이 나타낼 수 있으며 식 (4-13)을 통해 식 (4-12)는 식 (4-14)와 같이 나타낼 수 있다.

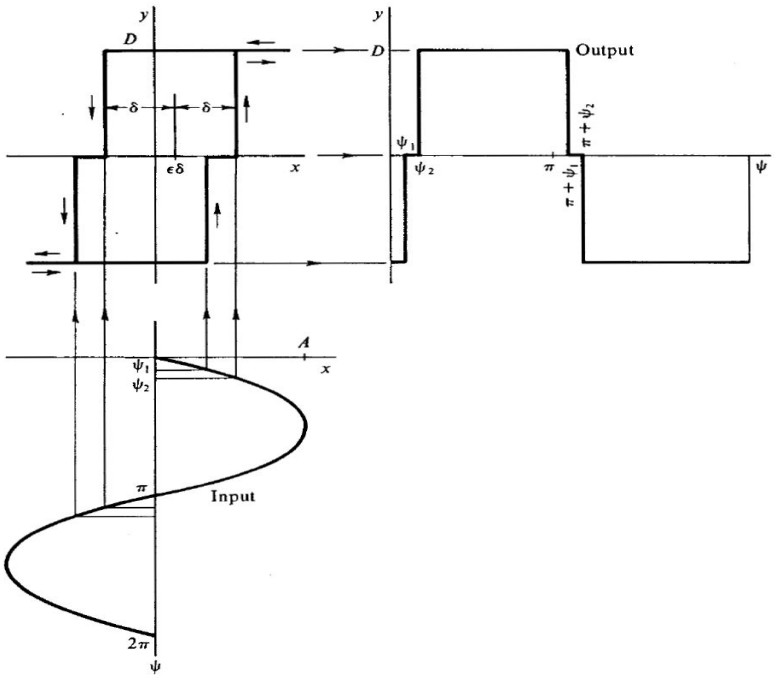


그림 4.7. 사인함수 입력에 대한 Hysteresis의 입출력 특성

Fig. 4.7. Hysteresis characteristic with input and output waveforms.

$$N(A)=\frac{2j}{\pi A}\int_0^{\pi} y(A\sin\psi)e^{-j\psi}\,d\psi \tag{4-12}$$

$$=\frac{2j}{\pi A}\left\{\int_0^{\psi_1}(-D)e^{-j\psi}\,d\psi+\int_{\psi_1}^{\psi_2}0\,d\psi+\int_{\psi_2}^{\pi}De^{-j\psi}\,d\psi\right\}$$

$$=\frac{2D}{\pi A}\left(e^{-j\psi_1}+e^{-j\psi_2}\right)$$

$$A\sin\psi_1=\delta(1-\varepsilon)\ \text{ or }\ \psi_1=\sin^{-1}\frac{\delta}{A}(1-\varepsilon) \tag{4-13}$$

$$A\sin\psi_2=\delta(1+\varepsilon)\ \text{or}\ \psi_2=\sin^{-1}\frac{\delta}{A}(1+\varepsilon)$$

$$N(A)=\frac{2D}{\pi A}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{A}\right)^2(1-\varepsilon)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{A}\right)^2(1+\varepsilon)^2}\right\}-j\frac{4D\delta}{\pi A^2} \quad (4\text{-}14)$$

표 4.2에서는 다양한 비선형요소에 대한 Describing Function을 보여주고 있다.

표 4.2. Describing function의 일반적인 형태.

Table 4.2. The general type of describing function.

구분	Describing Function
일반적인 동적 비선형 (general dynamic nonlinearity) $y=y(x,\dot{x})$	$\frac{j}{\pi A}\int_0^{2\pi} y(A\sin\psi, A\omega\cos\psi)e^{-j\psi}\,d\psi$
일반적인 정적 비선형 (general static nonlinearity) $y=y(x)$	$\frac{j}{\pi A}\int_0^{2\pi} y(A\sin\psi)e^{-j\psi}\,d\psi$
기함수 정적 비선형 (odd static nonlinearity) $y(x)=-y(-x)$	$N(A)=\frac{2j}{\pi A}\int_0^{\pi} y(A\sin\psi)e^{-j\psi}\,d\psi$
일반적인 비메모리 정적 비선형 (general memoryless static nonlinearity)	$N(A)=\frac{2}{\pi A}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi$
기함수 비메모리 정적 비선형 (odd memoryless static nonmemority)	$N(A)=\frac{4}{\pi A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi$

5. Describing Function를 이용한 안정도 판별

비선형요소를 포함한 시스템은 비선형의 특성에 의하여 Limit Cycle을 포함하게

된다. 이러한 Limit Cycle은 시스템의 안정도와 연관이 있는데 시스템의 정상상태 응답에 Limit Cycle이 존재할 경우 시스템이 안정하다할 수 없다. 비선형요소의 Describing Function를 이용하면 정상상태에서의 Limit Cycle의 존재 여부를 Nyquist 판별법을 통하여 확인할 수 있는데 이를 통하여 시스템이 안정화 될 수 있는 이득을 구할 수 있다. Nyquist 판별법은 선형시스템의 안정도 판별에 적용되지만 Describing Function은 준선형화 함수로 Nyquist 판별법을 사용할 수 있다.

Describing Function을 포함하는 시스템이 그림 4.8과 같이 주어졌을 때 시스템의 특성 방정식은 식 (4-15)와 같다.

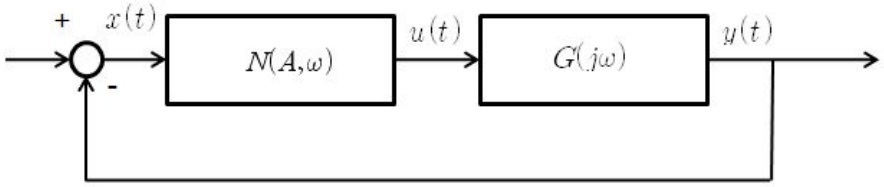


그림 4.8. 비선형 시스템.
Fig. 4.8. A nonlinear system.

$$G(j\omega)N(A,\omega)+1=0 \tag{4-15}$$

$$G(j\omega)=-\frac{1}{N(A,\omega)} \tag{4-16}$$

식 (4-15)는 식 (4-16)과 같이 쓸 수 있는데 여기서 식 (4-16)을 만족하는 ω와 A 가 존재하지 않을 경우에는 위의 비선형 시스템은 Limit Cycle이 존재하지 않는다고 하며 위의 해가 존재할 경우 비선형 시스템의 Limit Cycle의 크기와 주파수는 각각 식 (4-16)의 A와 ω가 된다. 그러나 $N(A,\omega)$를 구하는 것은 고차함수로 갈수록 구하기가 힘들어 해석적 방법으로 구해 Nyquist 선도에 그려 교차점을 확인하여 Limit Cycle을 구한다.

비선형 요소가 주파수 독립적일 때 식 (4-16)은 식 (4-17)과 같이 Describing Function의 크기 입력 sine함수의 크기 A의 함수가 된다.

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \tag{4-17}$$

그림 4.9에서와 같이 선형 플랜트 $G(j\omega)$의 Nyquist 선도에 Describing Function을 표시할 경우 Limit Cycle은 점 P가 된다. 이때 Limit cycle은 크기 A_P와 주파수 ω_P가 된다. 만약 교차점 P가 n개 존재하면 Limit Cycle은 n개가 되며 점 P가 복소수가 아닐 경우 Describing Function은 실수축에 존재하게 된다.

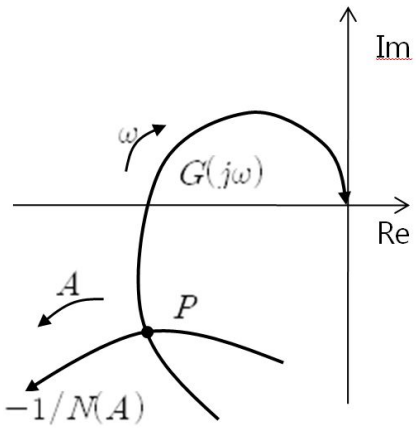


그림 4.9. DF를 이용한 limit cycle.

Fig. 4.9. A limit cycle using DF.

그림 4.10은 Describing Function이 주파수 종속적일 때의 Limit cycle을 보여주고 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 무수히 많은 Limit Cycle이 존재함을 알 수 있다.

$G(j\omega)N(A,\omega)$의 그래프를 이용하여 직접적으로 해를 구할 수 있는데 복소평면에서 A를 고정하고 ω를 0 에서 ∞까지 변화 시킬 때 그림 4.10과 같이 나타낼 수

있다. $G(j\omega)N(A,\omega)$가 복소평면에서 (-1, 0)을 지날 때 Limit Cycle이 나타나게 되고 그때의 A와 ω가 Limit Cycle의 크기와 주파수가 된다. 그림 4.11에서는 A가 A_1, A_2, A_3, A_4이고 ω를 0 에서 ∞까지 변할 때의 궤적을 보여주고 있다. A가 A_2일 때 Limit Cycle이 발생하고 Limit Cycle의 크기는 A_2가되고 (-1, 0)과 교차할 때의 주파수 ω가 Limit Cycle의 주파수가 된다.

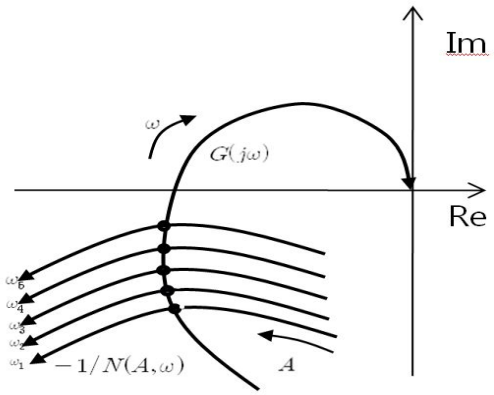


그림 4.10. 주파수 종속 비선형의 limit cycle.

Fig. 4.10. A limit cycle of frequency dependent cycle.

피드백 시스템이 안정하기 위해서는 $N(A,\omega)$의 A가 증가함에 따라 $G(j\omega)$에 포함되지 않아야 한다. 그림 4.12에서와 같이 주파수 독립이고 실수축에만 존재하는 $N(A)$가 그림 4.12 (a)와 같을 경우 시스템은 안정하다 할 수 있고 그림 4.12 (c)는 limit cycle 안정하다 할 수 있으며 그림 4.12 (b), 그림 4.12 (d)와 같을 경우 불안정 하다 하겠다. 그림 4.12 (c)의 경우 A가 증가함에 따라 $G(j\omega)$에 포함되어지지 않고 그림 4.12 (d)의 경우 포함되어짐으로 4.12 (c)의 경우 Limit Cycle이 안정하다 할 수 있으며 4.12 (d)의 경우 불안정한 Limit Cycle이 발생한다.

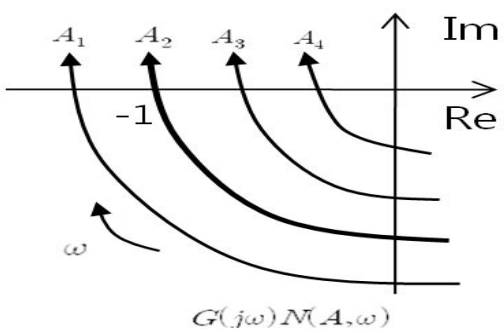


그림 4.11. A에 대한 $G(j\omega)N(A,\omega)$의 해.

Fig. 4.11. The solution of $G(j\omega)N(A,\omega)$ with A.

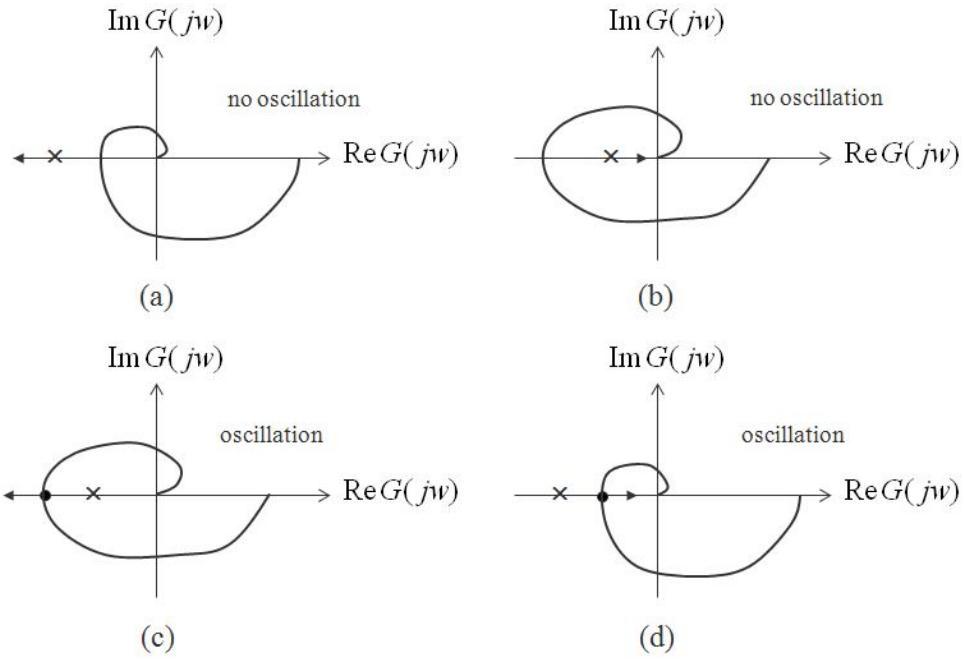


그림 4.12. Nyquist 선도에서의 진동 특성.

Fig. 4.12. Oscillation characteristic on nyquist plot.

Limit Cycle Criterion에 따르면 Describing Function $N(A,\omega)$와 $G(j\omega)$의 곡선이 서로 교차할 경우 모든 교차점에서 limit cycle이 발생하는데 만약 교차점 주변에서 A가 증가함에 따라 $G(j\omega)$에 포함 되지 않을 경우 그 Limit Cycle은 안정하다고 하고 그렇지 않을 경우 Limit Cycle이 불안정하다고 한다. 그림 4.13에서와 같이 점 P1은 Describing Function의 A가 증가함에 따라 $G(j\omega)$에 포함되어지지 않기 때문에 Limit Cycle이 안정하다 할 수 있고 점 P2는 A가 증가함에 따라 $G(j\omega)$에 포함되어지므로 Limit Cycle이 불안정하다 할 수 있다.

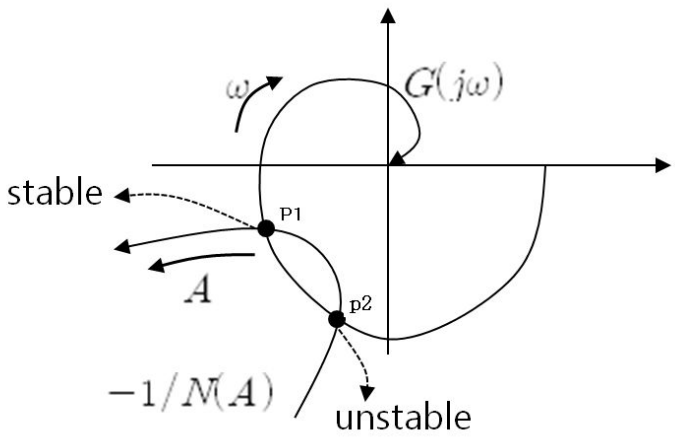


그림 4.13. Describing Function의 안정도 특성.

Fig. 4.13. The stable characteristic of Describing Function.

제 2 절 Describing Function을 이용한 퍼지제어기 해석

1. 퍼지제어기의 Describing Function 표현

4장에서 구해진 퍼지제어기 응답곡선의 부분선형화 응답 그래프는 주파수 독립적이며 부분 선형 비메모리 기함수와 동일하고 원점을 포함함으로 부분비선형이 4구역일 경우 식 (4-18)과 같이 표현할 수 있다.

$$N(A)=(m_1-m_2)f\left(\frac{\delta_1}{A}\right)+(m_2-m_3)f\left(\frac{\delta_2}{A}\right)+(m_3-m_4)f\left(\frac{\delta_3}{A}\right)+m_4 \tag{4-18}$$

부분 선형 비메모리 기함수의 부분선형 구역에 따른 Describing Function에 대한 정의를 위해 식 (4-5)와 식 (4-18)을 이용하여 식 (4-19)와 같이 표현하였다.

$$F(A,n)=\frac{2(m_n-m_{n+1})}{\pi}\left[\sum_{\xi=1}^{n}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{\delta_\xi}{A}\right)+\left(\frac{\delta_\xi}{A}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\delta_\xi}{A}\right)^2}\right\}\right]+m_{n+1} \tag{4-19}$$

퍼지제어기에 대한 부분선형화를 7구역으로 하였으므로 δ_n의 크기에 따라 퍼지제어기에 대한 Describing Function은 식 (4-20)와 같이 구해진다.

$$N(A)=\begin{cases}0 < A \le \delta_1, m_1 \\ \delta_1 < A \le \delta_2, F(A,1) \\ \delta_2 < A \le \delta_3, F(A,2) \\ \delta_3 < A \le \delta_4, F(A,3) \\ \delta_4 < A \le \delta_5, F(A,4) \\ \delta_5 < A \le \delta_6, F(A,5) \\ \delta_6 < A \le \delta_7, F(A,6) \\ \delta_7 < A \le \delta_8, F(A,7)\end{cases} \quad (4\text{-}20)$$

2. 후건부 변수에 따른 Describing Function

가. 3 퍼지변수

퍼지제어기의 퍼지변수 크기에 따른 특성을 알아보기 위해 우선 3개의 퍼지변수로 구성되어진 시스템의 특성에 대하여 연구하였다. 3개의 퍼지변수로 구성되어진 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수 크기변화에 대한 변수는 x_1, x_2 2개로 되어져 있으며 d_1, d_2의 범위를 $D=\{d|0 \le d \le 1, d \in R\}$로 하여 총 121개의 $N(A)$를 구하여 후건부 변수의 크기에 따른 응답 특성을 조사하였다. 그림 4.14는 A의 변화에 따른 DF와 $-1/DF$를 보여 주고 있다. d_1, d_2의 변화에 따라 다양한 응답 형태를 보여주고 있는데 시스템의 안정도에 대한 판별을 위해 $G(j\omega)$와 $-1/DF$ 이 서로 교차하지 않아야 함으로 최대값을 안정도 판별의 근거로 하였다.

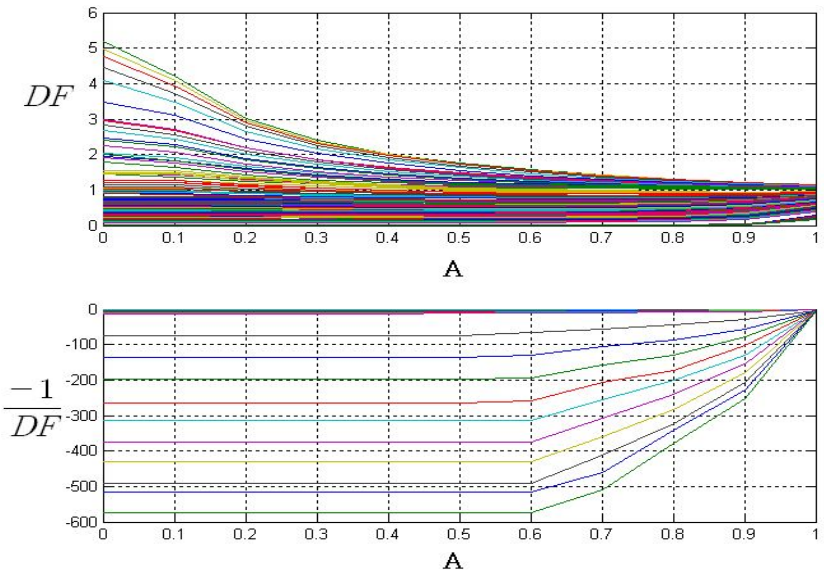


그림 4.14. A의 변화에 따른 DF (a)와 $-1/DF$(b).

Fig. 4.14. DF (a) and $-1/DF$ (b) for changing A

플랜트의 전달 함수가 주어졌을 때 후건부 퍼지변수의 크기에 따라 플랜트의 Nyquist 선도에 대응하여 다양한 특성을 보여준다. 그림 4.15는 플랜트의 Nyquist 선도에 후건부 퍼지변수의 크기 즉 d_1, d_2의 변화에 따른 $-1/DF$ 값을 투영한 것이다. 그림 4.15에서 볼 수 있듯이 d_1, d_2의 변화에 따라 시스템이 안정할 수도 불안정할 수도 있으며 Limit Cycle의 발생 여부를 보여주고 있다. 표 4-3은 d_1, d_2를 0.1씩 변화 시켰을 때의 최대값을 보여주고 있다.

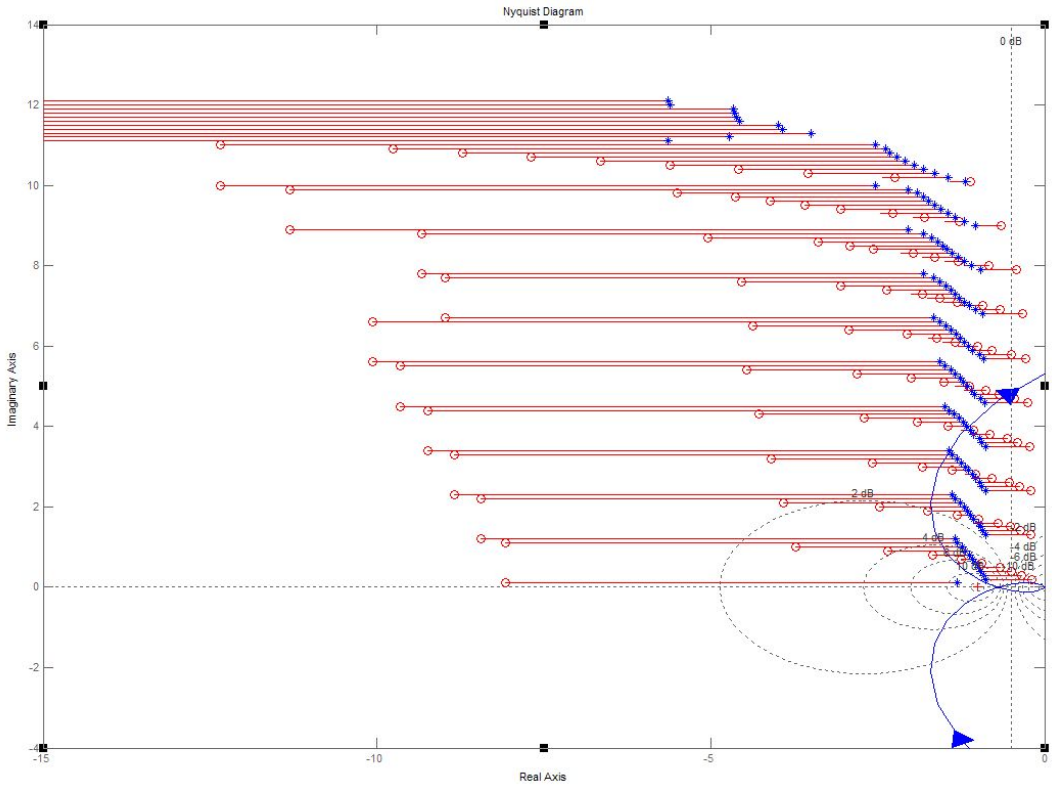


그림 4.15. 3퍼지변수의 Nyquist 선도상의 $-1/DF$.

Fig. 4.15. $-1/DF$ of FLC with three fuzzy variables on nyquist plot.

표 4.3. 3퍼지변수의 크기에 따른 $-1/DF$ 값.

Table 4.3. $-1/DF$ of FLC with three fuzzy variables.

구분	d_1										
d_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	-1.3027	-0.1926	-0.3389	-0.4907	-0.6734	-0.9405	-1.0786	-1.1262	-1.1788	-1.2373	-1.3027
0.1	-1.3366	-0.2011	-0.3549	-0.5138	-0.6948	-0.9849	-1.1039	-1.1532	-1.2078	-1.2685	-1.3366
0.2	-1.3783	-0.2103	-0.3736	-0.5257	-0.7848	-1.0306	-1.1336	-1.1854	-1.2426	-1.3064	-1.3783
0.3	-1.4276	-0.2244	-0.4037	-0.557	-0.8215	-1.0709	-1.1688	-1.2234	-1.2834	-1.3512	-1.4276
0.4	-1.4884	-0.2451	-0.4469	-0.6879	-0.88	-1.119	-1.2117	-1.2697	-1.3337	-1.4059	-1.4884
0.5	-1.564	-0.2881	-0.4967	-0.7853	-0.9973	-1.2086	-1.2658	-1.328	-1.3964	-1.4746	-1.564
0.6	-1.6654	-0.3361	-0.6712	-0.9218	-1.2081	-1.2777	-1.3409	-1.4064	-1.4793	-1.5657	-1.6654
0.7	-1.8127	-0.4181	-0.8272	-1.2071	-1.2988	-1.3804	-1.4574	-1.527	-1.6028	-1.6967	-1.8127
0.8	-2.0486	-0.6469	-1.2051	-1.3383	-1.4535	-1.5578	-1.6512	-1.7399	-1.8144	-1.9123	-2.0486
0.9	-2.5399	-1.1141	-1.4484	-1.6455	-1.8081	-1.9525	-2.0899	-2.2135	-2.3255	-2.3836	-2.5399
1	-5.6407	-4.7279	-3.4991	-3.9332	-3.9905	-4.5729	-4.6112	-4.6392	-4.6605	-5.6147	-5.6407

그림 4.16은 $d_1 = 0.1, d_2 = 0$일 경우의 시스템 응답이다. 그림에서 볼 수 있듯이 Limit cycle이 발생함을 알 수 있다.

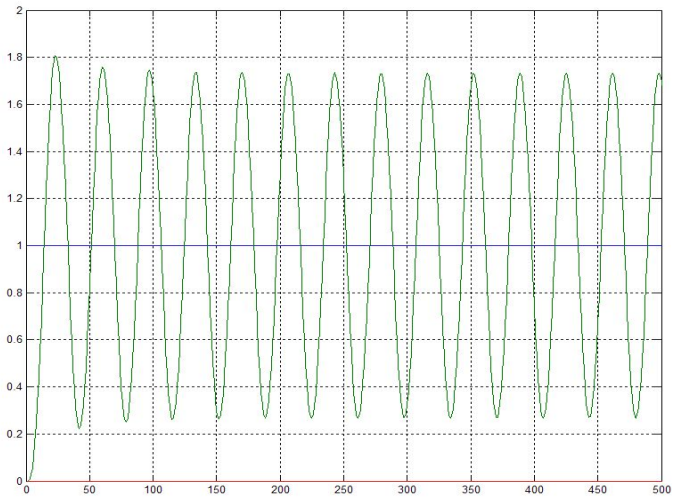


그림 4.16. $d_1 = 0.1, d_2 = 0$에서의 시스템 응답.

Fig. 4.16. System response on $d_1 = 0.1, d_2 = 0$.

그림 4.17은 $d_1 = 0.5, d_2 = 0$일 경우의 시스템 응답이다. 그림에서 볼 수 있듯이 Limit cycle이 생기지 않고 안정임을 알 수 있다.

3 퍼지변수의 변화에 대한 $-1/DF$의 값을 그래프로 표현하면 그림 4.18과 같다. 우측의 범례는 d_1의 값을 나타내고 그래프상의 축에 표시된 값은 d_2값을 나타내고 있다. 내부에 표시되어진 값은 해당하는 d_1, d_2에 대한 $-1/DF$값을 나타내고 있다. 그래프에서 볼 수 있듯이 전체적으로 d_2보다는 d_1의 변화에 더 민감함을 알 수 있다. 플랜트의 Nyquist 선도상의 임계점을 알면 해당되는 임계점을 그래프에 표시하여 시스템을 안정하게 하는 퍼지변수의 크기를 구할 수 있다.

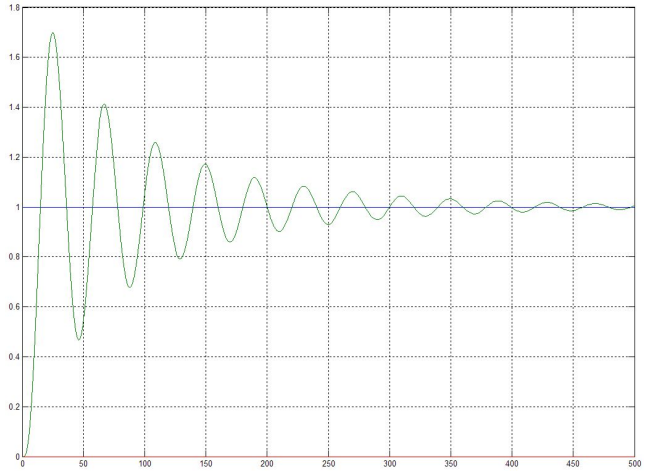


그림 4.17. $d_1 = 0.5, d_2 = 0$에서의 시스템 응답.

Fig. 4.17. System response on $d_1 = 0.5, d_2 = 0$.

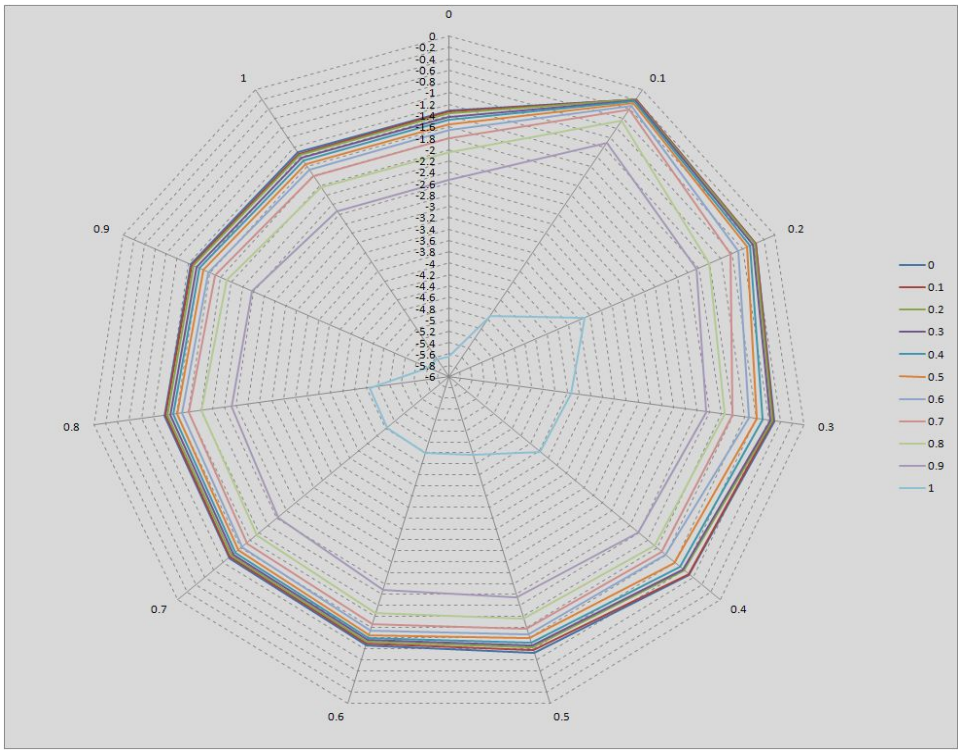


그림 4.18. d_1, d_2의 변화에 대한 $-1/DF$의 최대값 그래프.

Fig. 4.18. The max value graph of $-1/DF$ for changing d_1, d_2.

나. 5 퍼지변수에 대한 시스템 응답

퍼지변수가 5개일 경우의 퍼지제어기의 구성은 앞장에서 나타낸 것 같이 퍼지변수 크기를 변화시키기 위해 d_1, d_2, d_3의 변수로 이루어져 있다. d_1, d_2, d_3은 앞장에서 정의된 것과 같이 각각 변수의 범위에서 0.1씩 변화 시키면 식 (4-21)과 같이 변수값을 정의할 수 있다.

$$d_1 = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 \quad (4\text{-}21)$$

$$d_2 = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$$

$$d_3 = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$$

따라서 총 726개의 퍼지제어기 응답에 대한 $-1/DF$를 Nyquist 선도상에 투영할 수 있다. 그림 4.19는 플랜트의 Nyquist 선도에 후건부 퍼지변수의 크기 즉 d_1, d_2, d_3의 변화에 따른 $-1/DF$ 값을 투영한 것이다.

표 4.4는 d_1, d_2, d_3를 각각 0.1씩 변화 시킬 경우의 DF의 임계값을 보여 주고 있다. 플랜트의 Nyquist 선도상의 임계점이 주어질 경우 표 4.4를 참조하여 시스템이 안정할 수 있는 퍼지변수의 크기를 구할 수 있다.

5 퍼지변수의 Nyquist 선도상의 $-1/DF$의 값을 그래프로 표현하면 그림 4.20과 같다. 우측의 범례는 d_1의 값을 나타내고 그래프상의 축에 표시된 값은 d_2, d_3값을 나타내고 있다. 내부에 표시되어진 값은 해당하는 d_1, d_2, d_3에 대한 $-1/DF$값을 나타내고 있다. 전체적으로 일정한 형태를 보이고 있다. 플랜트의 Nyquist 선도상의 임계점을 알면 해당되는 임계점을 그래프에 표시하여 시스템을 안정하게 하는 퍼지변수의 크기를 구할 수 있다.

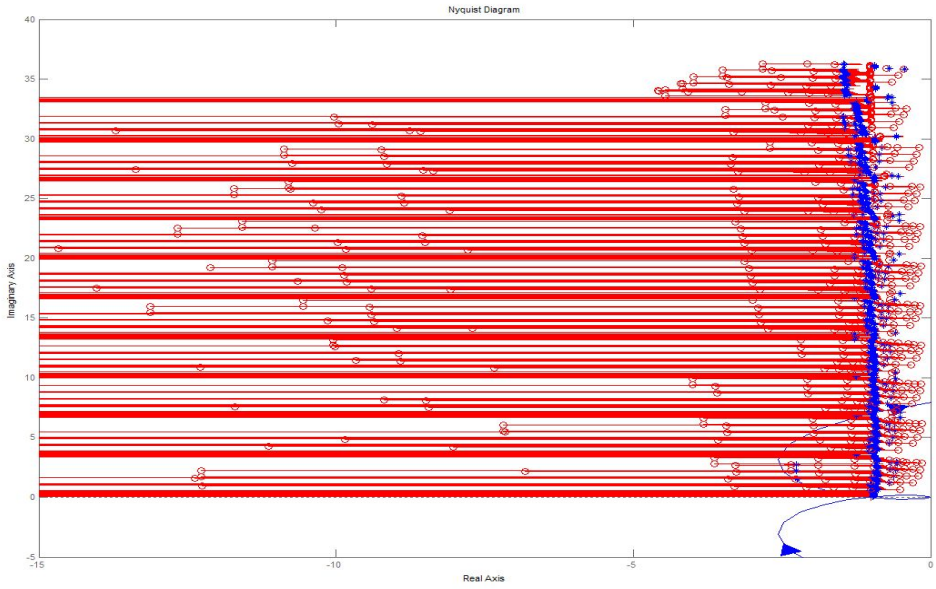


그림 4.19. 5퍼지변수에 대한 Nyquist 선도상의 $-1/DF$.

Fig. 4.19. $-1/DF$ of FLC with five fuzzy variables on nyquist plot.

표 4.4. 5퍼지변수의 퍼지변수의 크기에 따른 $-1/DF$ 값.

Table 4.4. $-1/DF$ of FLC with five fuzzy variables.

구분		d_1										
d_3	d_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	-0.9166	-0.8934	-0.8988	-0.9005	-0.9053	-0.9056	-0.9229	-0.9207	-0.919	-0.9063	-0.9166
	0.1	-0.9398	-0.5151	-0.758	-0.7828	-0.809	-0.8227	-0.8313	-0.9246	-0.9237	-0.8423	-0.9398
	0.2	-0.8881	-0.2959	-0.5151	-0.6629	-0.7592	-0.7762	-0.7981	-0.8221	-2.2051	-0.8405	-0.8881
	0.3	-0.8332	-0.2093	-0.4105	-0.5217	-0.687	-0.7478	-0.7702	-0.7927	-0.8059	-0.8266	-0.8332
	0.4	-2.2311	-0.1803	-0.2941	-0.4412	-0.5586	-0.6933	-0.7455	-0.7653	-0.7864	-0.7978	-2.2311
	0.5	-0.8046	-0.1449	-0.2382	-0.3984	-0.4739	-0.5779	-0.6962	-0.7428	-0.7583	-0.7834	-0.791
0.1	0	-0.8981	-0.8752	-0.8821	-0.8824	-1.2462	-1.2486	-0.9038	-0.9018	-0.9003	-0.8887	-0.8981
	0.1	-1.0009	-0.5401	-0.7725	-0.7979	-0.8124	-0.824	-0.8658	-0.9755	-0.964	-0.884	-1.0009
	0.2	-0.8633	-0.2953	-0.5401	-0.695	-0.7862	-0.8025	-0.8226	-0.8377	-0.9485	-0.8641	-0.9312
	0.3	-0.8895	-0.2194	-0.4304	-0.5469	-0.7204	-0.7796	-0.8006	-0.8144	-0.8392	-0.8498	-0.8895
	0.4	-0.8548	-0.1744	-0.2939	-0.4626	-0.5856	-0.7269	-0.7751	-0.7984	-0.8109	-0.8314	-0.8446
	0.5	-0.826	-0.1519	-0.2498	-0.3554	-0.4969	-0.6059	-0.7299	-0.7777	-0.7973	-0.8181	-0.8402
0.2	0	-0.4217	-0.8752	-0.8866	-1.2458	-0.8957	-0.896	-0.9113	-0.9094	-0.9079	-0.8967	-0.4217
	0.1	-0.9978	-0.5671	-0.7923	-0.8223	-0.8363	-0.8492	-0.8627	-0.9736	-0.9626	-0.8864	-0.9978
	0.2	-0.9372	-0.3101	-0.5671	-0.7864	-0.8038	-0.8192	-0.8307	-0.8517	-0.9465	-0.8634	-0.9372
	0.3	-0.8701	-0.2304	-0.4519	-0.5743	-0.7564	-0.8154	-0.8372	-0.8581	-0.8733	-0.865	-0.9365
	0.4	-0.908	-0.1831	-0.3086	-0.4857	-0.6149	-0.7633	-0.8118	-0.8303	-0.8491	-0.8811	-0.908

	0.5	-0.8794	-0.1595	-0.2623	-0.3732	-0.5218	-0.6362	-0.7664	-0.8265	-0.8427	-0.8709	-0.8948
0.3	0	-0.5896	-0.8621	-0.872	-1.2528	-1.2564	-0.8807	-0.8965	-0.8947	-0.8933	-0.8826	-0.5896
	0.1	-0.9989	-0.5958	-0.8142	-0.8323	-0.8462	-0.8611	-0.8598	-0.9757	-0.9782	-0.8946	-0.9989
	0.2	-0.901	-0.3258	-0.5958	-0.7668	-0.8379	-0.8505	-0.8628	-0.8856	-0.9805	-0.8992	-0.9777
	0.3	-0.9107	-0.2421	-0.4748	-0.6034	-0.7947	-0.8523	-0.8788	-0.8996	-0.8987	-0.9082	-0.9805
	0.4	-0.963	-0.1924	-0.3242	-0.5103	-0.6461	-0.802	-0.8687	-0.8919	-0.9167	-0.8934	-0.963
	0.5	-0.899	-0.1676	-0.2756	-0.3781	-0.5482	-0.6684	-0.8053	-0.8683	-0.8903	-0.9139	-0.899
0.4	0	-1.2771	-0.8422	-0.8507	-1.2608	-1.2651	-0.8601	-0.8744	-0.8728	-0.8715	-1.2761	-0.5954
	0.1	-1.0042	-0.6258	-0.843	-0.8629	-0.877	-0.878	-0.885	-0.9666	-0.9714	-0.8997	-1.0042
	0.2	-1.0466	-0.3422	-0.6258	-0.8053	-0.8807	-0.8932	-0.9254	-0.9438	-1.0666	-0.9572	-1.0466
	0.3	-1.0475	-0.2543	-0.413	-0.6338	-0.8347	-0.901	-0.9181	-0.9289	-0.9482	-0.9559	-1.0475
	0.4	-1.0077	-0.2021	-0.3405	-0.536	-0.6786	-0.8423	-0.9113	-0.9357	-0.9207	-0.9343	-1.0077
	0.5	-1.1067	-0.176	-0.2737	-0.3971	-0.5758	-0.7021	-0.8458	-0.9121	-0.9461	-1.0895	-1.1069
0.5	0	-0.6042	-0.8343	-0.8446	-1.2708	-0.8534	-0.8529	-0.8664	-0.8648	-0.8637	-0.8746	-0.4209
	0.1	-0.9604	-0.6563	-0.873	-0.8921	-0.8937	-0.906	-0.9184	-1.0302	-1.0368	-0.9564	-1.0699
	0.2	-1.0926	-0.3404	-0.6563	-0.8446	-0.9262	-0.9473	-0.9649	-0.9766	-1.0952	-0.9918	-1.0926
	0.3	-1.0777	-0.2485	-0.4142	-0.6646	-0.8754	-0.9302	-0.9544	-0.9593	-0.973	-0.9824	-1.0777
	0.4	-1.0003	-0.2119	-0.3394	-0.4819	-0.7117	-0.8833	-0.9546	-0.9732	-1.099	-0.9892	-1.0828
	0.5	-1.1464	-0.1673	-0.287	-0.4008	-0.8679	-0.8679	-0.8679	-0.9489	-0.9772	-1.1261	-1.1462
0.6	0	-0.6158	-0.8411	-0.8372	-0.8453	-1.2814	-0.8463	-0.8581	-0.8566	-0.8555	-1.2727	-0.4263
	0.1	-1.1042	-0.6862	-0.9164	-0.9258	-0.9417	-0.9554	-0.9764	-1.0604	-1.0671	-0.9878	-1.1042
	0.2	-1.127	-0.3559	-0.6862	-0.883	-0.9691	-0.9853	-1.0087	-1.0235	-1.1396	-1.0366	-1.127
	0.3	-1.135	-0.2598	-0.433	-0.6949	-0.9153	-0.967	-1.0962	-1.0128	-1.0287	-1.04	-1.135
	0.4	-1.2406	-0.2216	-0.3548	-0.5038	-0.903	-0.903	-0.9909	-1.1248	-1.1393	-1.0408	-1.2406
	0.5	-1.1906	-0.175	-0.3001	-0.4191	-0.9074	-0.9074	-0.9074	-0.989	-1.008	-1.1652	-1.1904
0.7	0	-0.4337	-0.825	-0.8353	-0.8437	-0.8444	-0.8447	-0.856	-0.8547	-0.6317	-1.2956	-0.4337
	0.1	-1.1478	-0.7142	-0.957	-0.9703	-0.9815	-0.9988	-1.014	-1.1001	-1.1051	-1.0276	-1.1478
	0.2	-1.1629	-0.3704	-0.7142	-0.919	-1.0925	-1.1088	-1.0458	-1.0544	-1.1593	-1.0603	-1.1629
	0.3	-1.1833	-0.2704	-0.4507	-0.9337	-0.9337	-1.0189	-1.1351	-1.1508	-1.1653	-1.0836	-1.1833
	0.4	-1.3059	-0.2306	-0.3693	-0.9398	-0.9398	-0.9398	-1.0307	-1.052	-1.1837	-1.1992	-1.3059
	0.5	-1.2394	-0.1821	-0.3124	-0.6763	-0.9444	-0.9444	-0.9444	-1.0326	-1.0642	-1.0861	-1.2394
0.8	0	-0.8605	-0.816	-0.8252	-1.2783	-0.834	-0.8343	-0.845	-0.8437	-0.4466	-0.8354	-0.6496
	0.1	-1.1914	-0.7385	-1.0784	-1.0273	-1.0358	-1.0458	-1.0571	-1.1314	-1.1457	-1.0649	-1.1914
	0.2	-1.1006	-0.362	-0.9604	-1.0385	-1.0618	-1.1435	-1.1595	-1.1766	-1.2016	-1.0997	-1.2054
	0.3	-1.3435	-0.2796	-0.6816	-0.9658	-0.9658	-1.0642	-1.0872	-1.1924	-1.2089	-1.2227	-1.3435
	0.4	-1.3812	-0.2385	-0.6095	-0.9719	-0.9719	-0.9719	-1.0694	-1.0916	-1.1148	-1.2547	-1.3812
	0.5	-1.1463	-0.1883	-0.5604	-0.7284	-0.9766	-0.9766	-0.9766	-1.0678	-1.0988	-1.1214	-1.1463
0.9	0	-0.8583	-0.8132	-0.817	-0.8249	-0.8246	-0.8251	-0.836	-0.8347	-0.4668	-1.2799	-0.4738
	0.1	-1.2404	-0.9861	-1.0831	-1.1442	-1.1585	-1.1718	-1.1001	-1.1787	-1.1922	-1.107	-1.2404
	0.2	-1.451	-0.6127	-0.9922	-0.9922	-1.1103	-1.1371	-1.1644	-1.2605	-1.4273	-1.2818	-1.451
	0.3	-1.4622	-0.5263	-0.9954	-0.9954	-0.9954	-1.1085	-1.1329	-1.1584	-1.1867	-1.475	-1.4622
	0.4	-1.1993	-0.4455	-0.6606	-0.997	-0.997	-0.997	-0.997	-1.1293	-1.1535	-1.1785	-1.1993
	0.5	-1.1805	-0.4111	-0.5924	-1.0016	-1.0016	-1.0016	-1.0016	-1.0016	-1.1314	-1.1547	-1.1805
1	0	-0.6146	-1.0514	-1.0521	-1.2434	-1.0549	-1.0551	-1.0687	-0.7205	-0.6161	-1.0572	-0.7183
	0.1	-1.3759	-1.0168	-1.0168	-1.2076	-1.2374	-1.2706	-1.3107	-1.3388	-1.3498	-1.3641	-1.3759
	0.2	-1.3003	-0.9264	-0.9264	-0.9264	-0.9264	-1.1932	-1.223	-1.2563	-1.2816	-1.2901	-1.3003
	0.3	-1.2719	-0.646	-1.017	-1.017	-1.017	-1.017	-1.181	-1.2083	-1.2387	-1.2599	-1.2719

	0.4	-1.2449	-0.548	-1.017	-1.017	-1.017	-1.017	-1.017	-1.1706	-1.1963	-1.2229	-1.2449
	0.5	-1.2138	-0.4397	-0.6941	-0.9392	-0.9392	-0.9392	-0.9392	-0.9392	-1.1568	-1.187	-1.2138

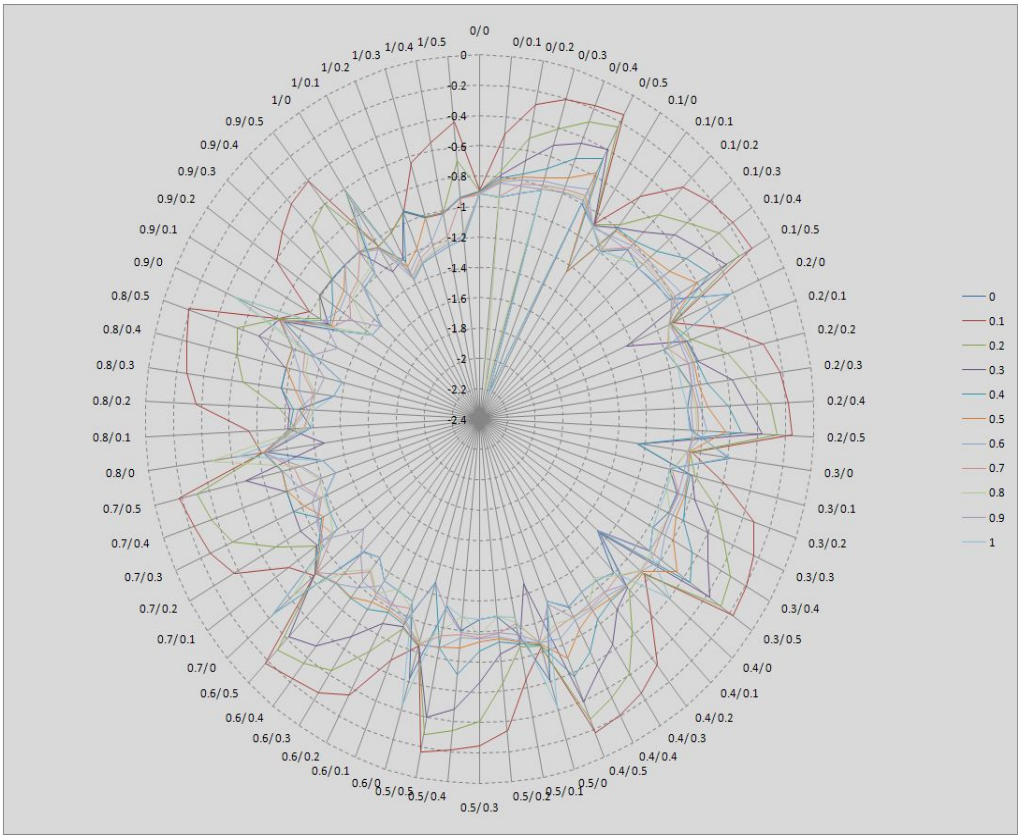


그림 4.20. d_1, d_2, d_3의 변화에 대한 $-1/DF$의 최대값 그래프.

Fig. 4.20. The max value graph of $-1/DF$ for changing d_1, d_2, d_3 .

다. 7 퍼지변수에 대한 시스템 응답

퍼지변수가 7개일 경우의 퍼지제어기의 구성은 앞장에서 나타낸 것 같이 퍼지변수 크기를 변화시키기 위해 d_1, d_2, d_3, d_4의 4개 변수로 이루어져 있다. d_1, d_2, d_3, d_4는 앞장에서 정의된 것과 같이 각각 변수의 범위에서 0.1씩 변화 시키면 식 (4-27)과 같이 변수값을 정의할 수 있다. 따라서 총 1936개의 퍼지제어기응답에 대한 Describing Function 값을 Nyquist 선도상에 투영 할 수 있다.

$$d_1 = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 \quad (4\text{-}22)$$

$$d_2 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$$

$$d_3 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$$

$$d_4 = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$$

7 퍼지변수의 후건부 퍼지변수의 변화에 대한 $-1/DF$의 변화를 알아보기 위해 그림 4.21과 같이 Nyquist 선도상에 투영하였다. 그림에서 파란색의 점이 최대값을 나타내며 시스템의 안정도 판별에 이용되어진다.

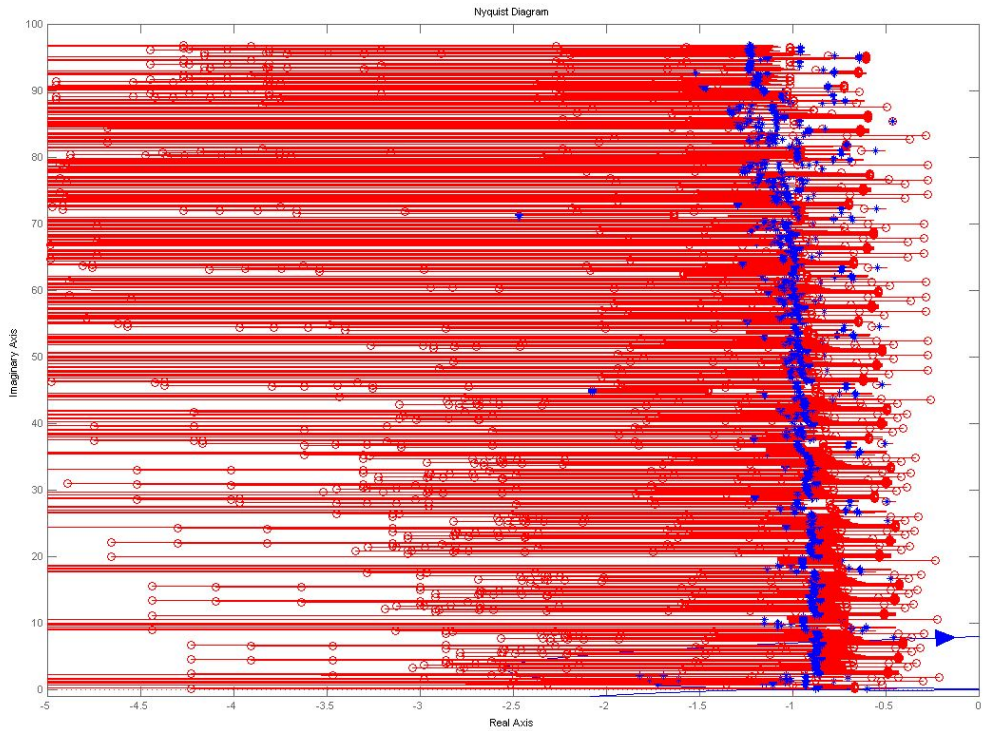


그림 4.21. 7퍼지변수에 대한 Nyquist 선도상의 $-1/DF$.

Fig. 4.21. $-1/DF$ of FLC with seven fuzzy variables on nyquist plot.

표 4.5는 d_1, d_2, d_3, d_4를 각각 0.1씩 변화 시킬 경우의 Describing Function의 임계값을 보여 주고 있다. 플랜트의 Nyquist 선도상의 임계점이 주어질 경우 표 4.5를 참조하여 시스템이 안정할 수 있는 퍼지변수의 크기를 구할 수 있다.

7 퍼지변수의 Nyquist 선도상의 $-1/DF$의 값을 그래프로 표현하면 그림 4.22와 같다. 우측의 범례는 d_1의 값을 나타내고 그래프상의 축에 표시된 값은 d_2, d_3, d_3값을 나타내고 있다. 내부에 표시되어진 값은 해당하는 d_1, d_2, d_3, d_4에 대한 $-1/DF$값을 나타내고 있다. 전체적으로 일정한 형태를 보이고 있다. 플랜트의 Nyquist 선도상의 임계점을 알면 해당되는 임계점을 그래프에 표시하여 시스템을 안정하게 하는 퍼지변수의 크기를 구할 수 있다.

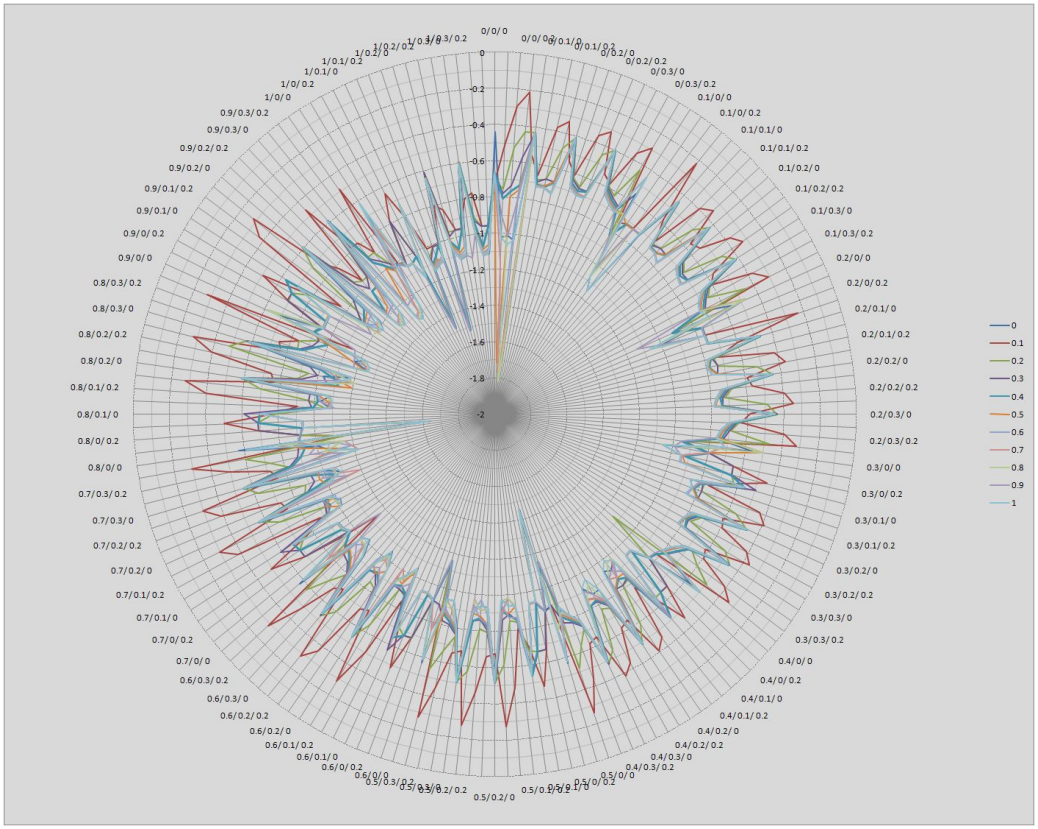


그림 4.22. d_1, d_2, d_3, d_4의 변화에 대한 $-1/DF$의 최대값 그래프.

Fig. 4.22. The max value graph of $-1/DF$ for changing d_1, d_2, d_3, d_4.

표 4.5. 7 퍼지변수의 퍼지변수의 크기에 따른 $-1/DF$ 값.

Table 4.5. $-1/DF$ of FLC with seven fuzzy variables .

구분			d1										
d4	d3	d2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0	-0.9662	-0.9644	-0.9654	-0.9657	-0.9659	-0.966	-0.9661	-0.9661	-0.9662	-0.9662	-0.9662
		0.1	-0.955	-0.5563	-0.8441	-0.8875	-0.9359	-0.9454	-0.9471	-0.9516	-0.9529	-0.954	-0.955
		0.2	-0.9468	-0.3794	-0.5609	-0.7932	-0.8425	-0.9194	-0.9437	-0.9455	-0.9461	-0.9464	-0.9468
		0.3	-0.9454	-0.3151	-0.43	-0.6913	-0.7683	-0.8285	-0.8748	-0.9151	-0.9312	-0.945	-0.9454
	0.1	0	-0.5639	-0.5597	-0.562	-0.5628	-0.5633	-0.5635	-0.5636	-0.5638	-0.5638	-0.5639	-0.5639
		0.1	-0.7253	-0.5563	-0.681	-0.6964	-0.7066	-0.7141	-0.7179	-0.7203	-0.7222	-0.7238	-0.7253
		0.2	-0.7883	-0.3794	-0.5609	-0.7274	-0.7539	-0.7683	-0.7756	-0.7786	-0.7795	-0.7802	-0.7883
		0.3	-0.8188	-0.3151	-0.43	-0.7324	-0.7556	-0.7939	-0.8114	-0.8165	-0.8176	-0.8183	-0.8188
	0.2	0	-0.5696	-0.5653	-0.5676	-0.5684	-0.5689	-0.5691	-0.5693	-0.5694	-0.5695	-0.5695	-0.5696
		0.1	-0.6694	-0.5563	-0.6209	-0.6336	-0.647	-0.6586	-0.6631	-0.6652	-0.6668	-0.6682	-0.6694
		0.2	-0.7143	-0.3794	-0.5609	-0.6678	-0.6801	-0.6931	-0.701	-0.7034	-0.7042	-0.7127	-0.7143
		0.3	-0.7474	-0.3151	-0.43	-0.7287	-0.7123	-0.7268	-0.7375	-0.7443	-0.7458	-0.7468	-0.7474
	0.3	0	-0.5684	-0.5641	-0.5664	-0.5672	-0.5677	-0.568	-0.5681	-0.5682	-0.5683	-0.5684	-0.5684
		0.1	-0.6379	-0.5563	-0.5881	-0.5995	-0.6115	-0.6219	-0.6273	-0.6307	-0.6335	-0.6358	-0.6379
		0.2	-0.6757	-0.3794	-0.5609	-0.6371	-0.6487	-0.6506	-0.6603	-0.6638	-0.6726	-0.6743	-0.6757
		0.3	-0.7013	-0.3151	-0.43	-0.6423	-0.6707	-0.6836	-0.6926	-0.6985	-0.6999	-0.7007	-0.7013
0.1	0	0	-0.9586	-0.9567	-0.9578	-0.9581	-0.9583	-0.9584	-0.9584	-0.9585	-0.9585	-0.9585	-0.9586
		0.1	-0.9471	-0.5833	-0.885	-0.9293	-0.9339	-0.9381	-0.9397	-0.9439	-0.9452	-0.9462	-0.9471
		0.2	-0.9394	-0.3977	-0.5881	-0.8316	-0.8834	-0.9324	-0.9365	-0.9382	-0.9387	-0.9391	-0.9394
		0.3	-0.9381	-0.3303	-0.4508	-0.7248	-0.8056	-0.8687	-0.9172	-0.9329	-0.9341	-0.9377	-0.9381
	0.1	0	-0.6001	-0.5956	-0.598	-0.5988	-0.5994	-0.5996	-0.5998	-0.5999	-0.6	-0.6	-0.6001
		0.1	-0.7604	-0.5833	-0.714	-0.7301	-0.7408	-0.7487	-0.7527	-0.7552	-0.7572	-0.7589	-0.7604
		0.2	-0.817	-0.3977	-0.5881	-0.7627	-0.7904	-0.8044	-0.8091	-0.811	-0.8116	-0.812	-0.817
		0.3	-0.8415	-0.3303	-0.4508	-0.7679	-0.7922	-0.8279	-0.8341	-0.8392	-0.8403	-0.841	-0.8415
	0.2	0	-0.5923	-0.5879	-0.5903	-0.5911	-0.5916	-0.5919	-0.592	-0.5921	-0.5922	-0.5923	-0.5923
		0.1	-0.7018	-0.5833	-0.651	-0.6643	-0.6783	-0.6905	-0.6953	-0.6974	-0.6991	-0.7006	-0.7018
		0.2	-0.749	-0.3977	-0.5881	-0.7002	-0.7131	-0.7266	-0.735	-0.7375	-0.7383	-0.7472	-0.749
		0.3	-0.7861	-0.3303	-0.4508	-0.7825	-0.7479	-0.7631	-0.7756	-0.7827	-0.7844	-0.7854	-0.7861
	0.3	0	-0.5913	-0.5869	-0.5893	-0.5901	-0.5906	-0.5909	-0.591	-0.5911	-0.5912	-0.5913	-0.5913
		0.1	-0.6688	-0.5833	-0.6166	-0.6286	-0.6411	-0.652	-0.6577	-0.6613	-0.6642	-0.6667	-0.6688
		0.2	-0.7085	-0.3977	-0.5881	-0.668	-0.6801	-0.6933	-0.6923	-0.696	-0.7052	-0.707	-0.7085
		0.3	-0.7353	-0.3303	-0.4508	-0.6734	-0.7032	-0.7167	-0.7261	-0.7324	-0.7338	-0.7347	-0.7353
0.2	0	0	-0.9548	-0.9525	-0.9537	-0.9542	-0.9545	-0.9546	-0.9547	-0.9547	-0.9548	-0.9548	-0.9548
		0.1	-0.9434	-0.6124	-0.9224	-0.9266	-0.931	-0.935	-0.9365	-0.9404	-0.9416	-0.9426	-0.9434
		0.2	-0.9361	-0.4176	-0.6175	-0.8702	-0.9226	-0.9295	-0.9334	-0.935	-0.9355	-0.9358	-0.9361

		0.3	-0.9349	-0.3469	-0.4734	-0.7611	-0.8459	-0.9096	-0.9256	-0.93	-0.9312	-0.9345	-0.9349
	0.1	0	-0.6249	-0.6202	-0.6227	-0.6236	-0.6242	-0.6244	-0.6246	-0.6247	-0.6248	-0.6248	-0.6249
		0.1	-0.7985	-0.6124	-0.7503	-0.7666	-0.7779	-0.7861	-0.7904	-0.793	-0.7951	-0.7969	-0.7985
		0.2	-0.834	-0.4176	-0.6175	-0.7998	-0.8159	-0.8215	-0.8262	-0.828	-0.8286	-0.829	-0.834
		0.3	-0.8651	-0.3469	-0.4734	-0.8063	-0.8318	-0.851	-0.857	-0.8628	-0.8639	-0.8646	-0.8651
	0.2	0	-0.617	-0.6125	-0.6149	-0.6158	-0.6163	-0.6166	-0.6167	-0.6168	-0.6169	-0.617	-0.617
		0.1	-0.7449	-0.6124	-0.684	-0.6975	-0.7123	-0.7251	-0.7318	-0.736	-0.7394	-0.7424	-0.7449
		0.2	-0.7864	-0.4176	-0.6175	-0.7348	-0.7488	-0.763	-0.7718	-0.7744	-0.7753	-0.7846	-0.7864
		0.3	-0.8144	-0.3469	-0.4734	-0.7554	-0.7889	-0.8019	-0.8072	-0.8124	-0.8134	-0.814	-0.8144
	0.3	0	-0.6164	-0.6119	-0.6143	-0.6152	-0.6157	-0.6159	-0.6161	-0.6162	-0.6163	-0.6164	-0.6164
		0.1	-0.7244	-0.6124	-0.6667	-0.6795	-0.6935	-0.7057	-0.712	-0.716	-0.7192	-0.722	-0.7244
		0.2	-0.7513	-0.4176	-0.6175	-0.6966	-0.7095	-0.7232	-0.7222	-0.7408	-0.7448	-0.7483	-0.7513
		0.3	-0.7721	-0.3469	-0.4734	-0.7071	-0.7384	-0.7516	-0.7615	-0.769	-0.7706	-0.7715	-0.7721
0.3	0	0	-0.9537	-0.9515	-0.9527	-0.9531	-0.9533	-0.9535	-0.9535	-0.9536	-0.9536	-0.9537	-0.9537
		0.1	-0.9429	-0.6435	-0.9229	-0.9268	-0.931	-0.9348	-0.9362	-0.94	-0.9411	-0.9421	-0.9429
		0.2	-0.9359	-0.4388	-0.6488	-0.9143	-0.923	-0.9296	-0.9334	-0.9349	-0.9353	-0.9357	-0.9359
		0.3	-0.9348	-0.3645	-0.4974	-0.7996	-0.8453	-0.9215	-0.9259	-0.9294	-0.9312	-0.9344	-0.9348
	0.1	0	-0.6456	-0.6409	-0.6434	-0.6443	-0.6449	-0.6451	-0.6453	-0.6454	-0.6455	-0.6456	-0.6456
		0.1	-0.8293	-0.6435	-0.7899	-0.8045	-0.8146	-0.8216	-0.8242	-0.8259	-0.8272	-0.8283	-0.8293
		0.2	-0.8675	-0.4388	-0.6488	-0.8403	-0.8489	-0.8546	-0.8594	-0.8614	-0.862	-0.8624	-0.8675
		0.3	-0.8798	-0.3645	-0.4974	-0.7996	-0.8472	-0.8706	-0.8745	-0.8777	-0.8791	-0.8795	-0.8798
	0.2	0	-0.6436	-0.6388	-0.6414	-0.6423	-0.6428	-0.6431	-0.6432	-0.6434	-0.6434	-0.6435	-0.6436
		0.1	-0.7959	-0.6435	-0.7319	-0.7466	-0.7627	-0.7767	-0.784	-0.7886	-0.7924	-0.7944	-0.7959
		0.2	-0.824	-0.4388	-0.6488	-0.7736	-0.7883	-0.8032	-0.8102	-0.813	-0.8215	-0.8229	-0.824
		0.3	-0.8416	-0.3645	-0.4974	-0.7937	-0.7937	-0.8289	-0.8343	-0.8387	-0.8405	-0.8412	-0.8416
	0.3	0	-0.6443	-0.6396	-0.6421	-0.643	-0.6436	-0.6438	-0.644	-0.6441	-0.6442	-0.6442	-0.6443
		0.1	-0.7565	-0.6435	-0.6965	-0.7099	-0.7244	-0.737	-0.7436	-0.7477	-0.7511	-0.754	-0.7565
		0.2	-0.7894	-0.4388	-0.6488	-0.7319	-0.7455	-0.7598	-0.7588	-0.7784	-0.7826	-0.7862	-0.7894
		0.3	-0.8164	-0.3645	-0.4974	-0.7429	-0.7429	-0.7921	-0.8051	-0.8119	-0.8147	-0.8157	-0.8164
0.4	0	0	-0.9545	-0.9524	-0.9536	-0.954	-0.9542	-0.9543	-0.9544	-0.9545	-0.9545	-0.9545	-0.9545
		0.1	-0.9442	-0.6759	-0.9251	-0.9289	-0.9329	-0.9365	-0.9379	-0.9415	-0.9425	-0.9434	-0.9442
		0.2	-0.9376	-0.4609	-0.6815	-0.9208	-0.9253	-0.9316	-0.9351	-0.9366	-0.937	-0.9373	-0.9376
		0.3	-0.9365	-0.3828	-0.5224	-0.715	-0.9199	-0.9238	-0.928	-0.9314	-0.9331	-0.9361	-0.9365
	0.1	0	-0.673	-0.668	-0.6707	-0.6716	-0.6722	-0.6724	-0.6726	-0.6727	-0.6728	-0.6729	-0.673
		0.1	-0.8602	-0.6759	-0.828	-0.8406	-0.8469	-0.8523	-0.855	-0.8567	-0.858	-0.8592	-0.8602
		0.2	-0.8843	-0.4609	-0.6815	-0.8682	-0.8721	-0.8759	-0.879	-0.8803	-0.8807	-0.881	-0.8843
		0.3	-0.8938	-0.3828	-0.5224	-0.715	-0.8811	-0.8848	-0.8886	-0.8918	-0.8931	-0.8935	-0.8938
	0.2	0	-0.6724	-0.6675	-0.6701	-0.671	-0.6716	-0.6719	-0.672	-0.6722	-0.6723	-0.6723	-0.6724
		0.1	-0.8246	-0.6759	-0.7641	-0.7794	-0.7961	-0.8106	-0.8167	-0.8193	-0.8213	-0.8231	-0.8246
		0.2	-0.8579	-0.4609	-0.6815	-0.8109	-0.8263	-0.842	-0.8482	-0.85	-0.8554	-0.8567	-0.8579
		0.3	-0.8722	-0.3828	-0.5224	-0.715	-0.8538	-0.8592	-0.8646	-0.8692	-0.8711	-0.8717	-0.8722

	0.3	0	-0.6759	-0.671	-0.6736	-0.6746	-0.6752	-0.6754	-0.6756	-0.6757	-0.6758	-0.6759	-0.6759
		0.1	-0.7935	-0.6759	-0.7307	-0.7447	-0.7599	-0.7731	-0.78	-0.7843	-0.7878	-0.7909	-0.7935
		0.2	-0.829	-0.4609	-0.6815	-0.7687	-0.783	-0.7981	-0.8108	-0.8175	-0.822	-0.8258	-0.829
		0.3	-0.8545	-0.3828	-0.5224	-0.715	-0.8159	-0.8306	-0.8428	-0.8499	-0.8528	-0.8538	-0.8545
0.5	0	0	-0.956	-0.954	-0.9551	-0.9555	-0.9557	-0.9558	-0.9559	-0.9559	-0.956	-0.956	-0.956
		0.1	-0.9462	-0.7088	-0.9278	-0.9315	-0.9353	-0.9388	-0.9401	-0.9435	-0.9445	-0.9454	-0.9462
		0.2	-0.9398	-0.4833	-0.7146	-0.9238	-0.928	-0.934	-0.9375	-0.9388	-0.9393	-0.9395	-0.9398
		0.3	-0.9387	-0.4014	-0.5479	-0.7498	-0.9228	-0.9266	-0.9306	-0.9338	-0.9355	-0.9384	-0.9387
	0.1	0	-0.7019	-0.6968	-0.6995	-0.7004	-0.7011	-0.7013	-0.7015	-0.7016	-0.7017	-0.7018	-0.7019
		0.1	-0.8882	-0.7088	-0.8653	-0.8715	-0.8779	-0.883	-0.8848	-0.8859	-0.8868	-0.8876	-0.8882
		0.2	-0.9073	-0.4833	-0.7146	-0.8913	-0.895	-0.8988	-0.902	-0.9033	-0.9037	-0.9039	-0.9073
		0.3	-0.9168	-0.4014	-0.5479	-0.7498	-0.904	-0.9078	-0.9116	-0.9148	-0.9161	-0.9165	-0.9168
	0.2	0	-0.7043	-0.6992	-0.7019	-0.7029	-0.7035	-0.7038	-0.704	-0.7041	-0.7042	-0.7043	-0.7043
		0.1	-0.8622	-0.7088	-0.8003	-0.8163	-0.8337	-0.8489	-0.854	-0.8567	-0.8588	-0.8606	-0.8622
		0.2	-0.8969	-0.4833	-0.7146	-0.8509	-0.8665	-0.8822	-0.8868	-0.8887	-0.8943	-0.8956	-0.8969
		0.3	-0.9107	-0.4014	-0.5479	-0.7498	-0.8916	-0.8972	-0.9029	-0.9076	-0.9095	-0.9102	-0.9107
	0.3	0	-0.7089	-0.7037	-0.7064	-0.7074	-0.708	-0.7083	-0.7085	-0.7086	-0.7087	-0.7088	-0.7089
		0.1	-0.8321	-0.7088	-0.7663	-0.7809	-0.7969	-0.8107	-0.818	-0.8225	-0.8262	-0.8294	-0.8321
		0.2	-0.8694	-0.4833	-0.7146	-0.8066	-0.8212	-0.8369	-0.8502	-0.8573	-0.862	-0.866	-0.8694
		0.3	-0.8936	-0.4014	-0.5479	-0.7498	-0.8545	-0.8699	-0.8813	-0.8887	-0.8918	-0.8928	-0.8936
0.6	0	0	-0.9566	-0.9547	-0.9557	-0.9561	-0.9563	-0.9564	-0.9565	-0.9565	-0.9566	-0.9566	-0.9566
		0.1	-0.9471	-0.7411	-0.9284	-0.9331	-0.9367	-0.9401	-0.9413	-0.9446	-0.9456	-0.9464	-0.9471
		0.2	-0.941	-0.5054	-0.7472	-0.9257	-0.9297	-0.9355	-0.9388	-0.9401	-0.9405	-0.9408	-0.941
		0.3	-0.94	-0.4197	-0.5728	-0.784	-0.9247	-0.9284	-0.9322	-0.9353	-0.9369	-0.9397	-0.94
	0.1	0	-0.7329	-0.7276	-0.7304	-0.7314	-0.7321	-0.7324	-0.7325	-0.7327	-0.7328	-0.7329	-0.7329
		0.1	-0.9236	-0.7411	-0.9016	-0.908	-0.9144	-0.9182	-0.9201	-0.9213	-0.9222	-0.923	-0.9236
		0.2	-0.9413	-0.5054	-0.7472	-0.9248	-0.9287	-0.9326	-0.9359	-0.9372	-0.9376	-0.9379	-0.9413
		0.3	-0.9532	-0.4197	-0.5728	-0.784	-0.94	-0.9439	-0.9478	-0.9511	-0.9525	-0.9529	-0.9532
	0.2	0	-0.7364	-0.7311	-0.7339	-0.7349	-0.7356	-0.7359	-0.7361	-0.7362	-0.7363	-0.7364	-0.7364
		0.1	-0.9015	-0.7411	-0.8367	-0.8535	-0.8717	-0.8876	-0.8929	-0.8957	-0.8979	-0.8998	-0.9015
		0.2	-0.9377	-0.5054	-0.7472	-0.8897	-0.906	-0.9224	-0.9273	-0.9292	-0.935	-0.9365	-0.9377
		0.3	-0.9522	-0.4197	-0.5728	-0.784	-0.9323	-0.9381	-0.944	-0.949	-0.951	-0.9517	-0.9522
	0.3	0	-0.7345	-0.7292	-0.7321	-0.7331	-0.7337	-0.734	-0.7342	-0.7343	-0.7344	-0.7345	-0.7345
		0.1	-0.8672	-0.7411	-0.7988	-0.814	-0.8306	-0.845	-0.8525	-0.8572	-0.8611	-0.8644	-0.8672
		0.2	-0.9309	-0.5054	-0.7472	-0.862	-0.8779	-0.8952	-0.9098	-0.9175	-0.9226	-0.927	-0.9309
		0.3	-0.937	-0.4197	-0.5728	-0.784	-0.8946	-0.9107	-0.9241	-0.9319	-0.9351	-0.9362	-0.937
0.7	0	0	-0.9545	-0.9527	-0.9537	-0.954	-0.9542	-0.9543	-0.9544	-0.9545	-0.9545	-0.9545	-0.9545
		0.1	-0.9455	-0.7713	-0.9275	-0.932	-0.9355	-0.9387	-0.9399	-0.9431	-0.944	-0.9448	-0.9455
		0.2	-0.9396	-0.526	-0.7777	-0.925	-0.9288	-0.9343	-0.9375	-0.9387	-0.9391	-0.9394	-0.9396
		0.3	-0.9387	-0.4368	-0.5962	-0.8159	-0.9308	-0.9275	-0.9312	-0.9342	-0.9357	-0.9384	-0.9387
	0.1	0	-0.7627	-0.7571	-0.7601	-0.7611	-0.7618	-0.7621	-0.7623	-0.7624	-0.7625	-0.7626	-0.7627

		0.1	-0.9609	-0.7713	-0.9384	-0.945	-0.9513	-0.9552	-0.9572	-0.9584	-0.9594	-0.9602	-0.9609
		0.2	-0.9793	-0.526	-0.7777	-0.9621	-0.9661	-0.9702	-0.9736	-0.975	-0.9754	-0.9757	-0.9793
		0.3	-0.9917	-0.4368	-0.5962	-0.8159	-0.9779	-0.9819	-0.986	-0.9895	-0.9908	-0.9913	-0.9917
	0.2	0	-0.7613	-0.7558	-0.7588	-0.7598	-0.7605	-0.7608	-0.7609	-0.7611	-0.7612	-0.7613	-0.7613
		0.1	-0.9407	-0.7713	-0.8718	-0.8893	-0.9083	-0.9249	-0.9317	-0.9346	-0.9369	-0.9389	-0.9407
		0.2	-0.976	-0.526	-0.7777	-0.9259	-0.943	-0.96	-0.9651	-0.9671	-0.9731	-0.9746	-0.976
		0.3	-0.991	-0.4368	-0.5962	-0.8159	-0.9703	-0.9763	-0.9825	-0.9876	-0.9897	-0.9905	-0.991
	0.3	0	-0.7651	-0.7595	-0.7625	-0.7635	-0.7642	-0.7645	-0.7647	-0.7648	-0.7649	-0.765	-0.7651
		0.1	-0.9034	-0.7713	-0.832	-0.8479	-0.8652	-0.8802	-0.888	-0.893	-0.897	-0.9004	-0.9034
		0.2	-0.9698	-0.526	-0.7777	-0.898	-0.9146	-0.9326	-0.9478	-0.9559	-0.9612	-0.9657	-0.9698
		0.3	-1.0072	-0.4368	-0.5962	-0.8159	-0.941	-0.9632	-0.9814	-0.997	-1.0034	-1.0056	-1.0072
0.8	0	0	-0.948	-0.9462	-0.9472	-0.9475	-0.9477	-0.9478	-0.9479	-0.9479	-0.948	-0.948	-0.948
		0.1	-0.9394	-0.7976	-0.9222	-0.9265	-0.9298	-0.9329	-0.934	-0.9371	-0.9379	-0.9387	-0.9394
		0.2	-0.9338	-0.5439	-0.8042	-0.9197	-0.9234	-0.9287	-0.9317	-0.9329	-0.9333	-0.9336	-0.9338
		0.3	-0.9329	-0.4517	-0.6165	-0.8437	-0.9253	-0.9222	-0.9257	-0.9285	-0.93	-0.9326	-0.9329
	0.1	0	-0.7856	-0.7799	-0.783	-0.784	-0.7847	-0.785	-0.7852	-0.7853	-0.7854	-0.7855	-0.7856
		0.1	-1.0007	-0.7976	-0.973	-0.9799	-0.9872	-0.9934	-0.9965	-0.998	-0.9991	-0.9999	-1.0007
		0.2	-1.0199	-0.5439	-0.8042	-1.002	-1.0062	-1.0104	-1.014	-1.0154	-1.0159	-1.0162	-1.0199
		0.3	-1.0297	-0.4517	-0.6165	-0.8437	-1.0212	-1.0227	-1.0267	-1.0285	-1.0293	-1.0295	-1.0297
	0.2	0	-0.7885	-0.7827	-0.7858	-0.7869	-0.7876	-0.7879	-0.7881	-0.7882	-0.7883	-0.7884	-0.7885
		0.1	-0.9765	-0.7976	-0.9031	-0.9212	-0.941	-0.9582	-0.9671	-0.9702	-0.9726	-0.9747	-0.9765
		0.2	-1.0092	-0.5439	-0.8042	-0.9575	-0.9751	-0.9927	-0.998	-1.0001	-1.0063	-1.0079	-1.0092
		0.3	-1.0331	-0.4517	-0.6165	-0.8437	-1.0113	-1.0176	-1.0241	-1.0295	-1.0318	-1.0325	-1.0331
	0.3	0	-0.7926	-0.7868	-0.7899	-0.791	-0.7917	-0.792	-0.7922	-0.7923	-0.7924	-0.7925	-0.7926
		0.1	-0.9362	-0.7976	-0.8621	-0.8786	-0.8965	-0.9121	-0.9203	-0.9254	-0.9295	-0.9331	-0.9362
		0.2	-1.0051	-0.5439	-0.8042	-0.9306	-0.9478	-0.9665	-0.9823	-0.9907	-0.9962	-1.0009	-1.0051
		0.3	-1.044	-0.4517	-0.6165	-0.8437	-0.9731	-0.9983	-1.0173	-1.0334	-1.0401	-1.0424	-1.044
0.9	0	0	-0.9352	-0.9335	-0.9344	-0.9347	-0.9349	-0.935	-0.9351	-0.9351	-0.9351	-0.9352	-0.9352
		0.1	-0.927	-0.818	-0.9107	-0.9147	-0.9179	-0.9208	-0.9219	-0.9248	-0.9256	-0.9264	-0.927
		0.2	-0.9217	-0.5578	-0.8247	-0.9083	-0.9118	-0.9169	-0.9197	-0.9209	-0.9212	-0.9215	-0.9217
		0.3	-0.9208	-0.4633	-0.6323	-0.8653	-0.9136	-0.9107	-0.914	-0.9167	-0.9181	-0.9205	-0.9208
	0.1	0	-0.8095	-0.8037	-0.8068	-0.8079	-0.8086	-0.8089	-0.8091	-0.8093	-0.8094	-0.8095	-0.8095
		0.1	-1.0338	-0.818	-1.0021	-1.0153	-1.0229	-1.0294	-1.0318	-1.0324	-1.033	-1.0334	-1.0338
		0.2	-1.0423	-0.5578	-0.8247	-1.033	-1.0352	-1.0374	-1.0392	-1.04	-1.0402	-1.0404	-1.0423
		0.3	-1.0478	-0.4633	-0.6323	-0.8653	-1.0418	-1.0426	-1.0448	-1.0466	-1.0474	-1.0476	-1.0478
	0.2	0	-0.813	-0.8071	-0.8103	-0.8114	-0.8121	-0.8124	-0.8126	-0.8128	-0.8129	-0.813	-0.813
		0.1	-1.0158	-0.818	-0.932	-0.9508	-0.9713	-0.9892	-0.9985	-1.0044	-1.0092	-1.0133	-1.0158
		0.2	-1.0396	-0.5578	-0.8247	-0.982	-1	-1.019	-1.0279	-1.0301	-1.0365	-1.0381	-1.0396
		0.3	-1.0501	-0.4633	-0.6323	-0.8653	-1.0417	-1.0449	-1.0471	-1.0489	-1.0496	-1.0499	-1.0501
	0.3	0	-0.8159	-0.8099	-0.8132	-0.8143	-0.815	-0.8153	-0.8155	-0.8157	-0.8158	-0.8159	-0.8159
		0.1	-0.9644	-0.818	-0.8878	-0.9049	-0.9234	-0.9395	-0.9479	-0.9532	-0.9575	-0.9612	-0.9644

		0.2	-1.0358	-0.5578	-0.8247	-0.9586	-0.9764	-0.9958	-1.0121	-1.0208	-1.0265	-1.0314	-1.0358
		0.3	-1.0342	-0.4633	-0.6323	-0.8653	-0.9875	-1.0052	-1.02	-1.0286	-1.0321	-1.0333	-1.0342
1	0	0	-0.9147	-0.9131	-0.914	-0.9143	-0.9145	-0.9146	-0.9146	-0.9146	-0.9147	-0.9147	-0.9147
		0.1	-0.907	-0.8304	-0.8916	-0.8954	-0.8985	-0.9012	-0.9022	-0.9049	-0.9057	-0.9064	-0.907
		0.2	-0.902	-0.5663	-0.8372	-0.8894	-0.8927	-0.8975	-0.9002	-0.9012	-0.9016	-0.9018	-0.902
		0.3	-0.9012	-0.4703	-0.6418	-0.8784	-0.8944	-0.8916	-0.8947	-0.8973	-0.8986	-0.9009	-0.9012
	0.1	0	-0.8423	-0.836	-0.8394	-0.8406	-0.8413	-0.8417	-0.8419	-0.842	-0.8421	-0.8422	-0.8423
		0.1	-1.0642	-0.8304	-1.0147	-1.0358	-1.0487	-1.0598	-1.0621	-1.0628	-1.0633	-1.0638	-1.0642
		0.2	-1.0738	-0.5663	-0.8372	-1.0641	-1.0664	-1.0687	-1.0706	-1.0714	-1.0716	-1.0718	-1.0738
		0.3	-1.0796	-0.4703	-0.6418	-0.8784	-1.0733	-1.0742	-1.0765	-1.0784	-1.0791	-1.0794	-1.0796
	0.2	0	-0.839	-0.8327	-0.8361	-0.8372	-0.838	-0.8383	-0.8385	-0.8387	-0.8388	-0.8389	-0.839
		0.1	-1.0536	-0.8304	-0.964	-0.9839	-1.0055	-1.0244	-1.0342	-1.0404	-1.0455	-1.0498	-1.0536
		0.2	-1.062	-0.5663	-0.8372	-0.9957	-1.014	-1.0333	-1.0437	-1.0473	-1.0583	-1.061	-1.062
		0.3	-1.0678	-0.4703	-0.6418	-0.8784	-1.0603	-1.0625	-1.0647	-1.0666	-1.0673	-1.0676	-1.0678
	0.3	0	-0.8378	-0.8316	-0.8349	-0.8361	-0.8369	-0.8372	-0.8374	-0.8375	-0.8377	-0.8378	-0.8378
		0.1	-0.9924	-0.8304	-0.9125	-0.9303	-0.9496	-0.9664	-0.9752	-0.9807	-0.9852	-0.9891	-0.9924
		0.2	-1.0669	-0.5663	-0.8372	-0.9815	-1.0049	-1.0251	-1.0422	-1.0513	-1.0572	-1.0624	-1.0669
		0.3	-1.0557	-0.4703	-0.6418	-0.8784	-1.0049	-1.0231	-1.0411	-1.0499	-1.0535	-1.0548	-1.0557

3. 후건부 변수에 따른 도식적 표현

3 퍼지변수에 대하여 퍼지변수의 크기에 따른 임계점을 각각의 변수의 연관성을 알아보기 위해 Contour를 이용 하여 표현하면 그림 4.23과 같다. 그림 4.23은 d_1, d_2가 0에서 1까지 변할 때 MCP(Minimum Critical Point)선도를 보여 주고 있다. Describing Function에서는 Limit Cycle가 나타나지 않게 하기위해서는 A의 변화에 대해 궤적이 Nyquist선도와 만나지 않고 포함되지 않아야 함으로 d_1, d_2에 의한 $-1/DF$의 최대값을 통해 안정도를 판별할 수 있다.

본 연구에서는 단순화를 위해 3 퍼지변수를 대상으로 하였다. d_1, d_2에 의한 $1/DF$의 Contour를 사용하였다. d_1의 경우 0에서 0.1까지 d_1이 증가 할수록 $1/DF$의 최소값이 감소하고 급격한 변화를 보여 주고 있으며 0.1에서 1까지는 d_1이 증가할수록 $1/DF$의 최소값도 증가하고 완만한 변화를 보여 주고 있다. d_2의 경우 d_2가 증가 할수록 $1/DF$의 최소값도 증가함을 보여주고 있다. 위 그림을 통해 시스템의

Nyquist 선도가 주어지면 퍼지제어기를 통해 안정화 되어질 수 있는 d_1, d_2의 범위를 구할 수 있게 된다.

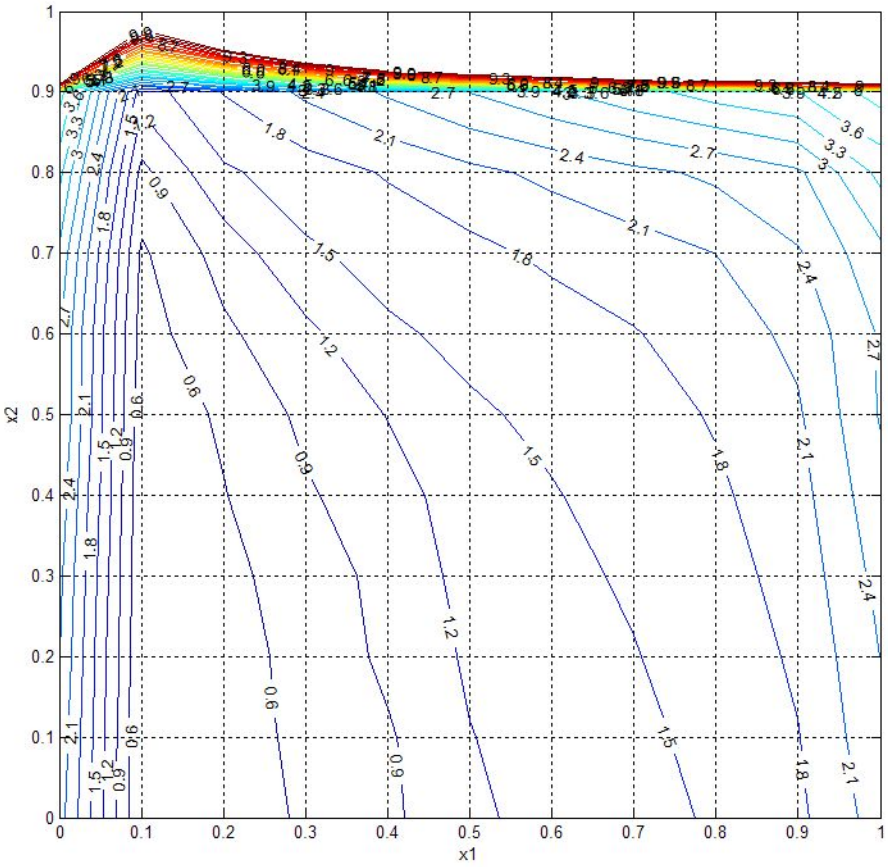


그림 4.23. d_1, d_2에 대한 MCP 선도.

Fig. 4.23. MCP plot for d_1, d_2.

4. 후건부 변수에 대한 MGM과 MPM

단위크기의 어떤 주파수의 정현파 입력에 관한 출력응답을 주파수응답이라고 하며, 출력의 크기와 위상을 각각 크기응답과 위상응답이라고 한다. 주파수응답은 크기와 위상응답을 따라 나타낼 수도 있고 복소평면위에 한개의 궤적으로 나타낼 수도 있다. 입력을 크기와 위상이 다른 여러 주파수의 정현파의 합으로 나타낼 수 있

으며 입력신호위 어떤 주파수 성분에 대응하는 주파수응답을 곱하면 그 주파수성분의 출력신호를 쉽게 계산할 수 있고 이러한 출력성분 전체를 합하면 출력신호가 된다. 시스템의 전달함수가 $G(s)$인 안정한 선형시스템에 정현파가 입력될 때 정상상태에서 출력을 계산할 때 s 대신 jw를 대입한 $G(jw)$의 크기와 편각을 각각 $A(w)$, $\phi(w)$라고 하면 각각 식 (4-23), 식 (4-24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$A(w) = |G(jw)| \tag{4-23}$$

$$\phi(w) = \angle G(jw) = \tan^{-1}[ImG(jw)/ReG(jw)] \tag{4-24}$$

정현파 입력 $u(t) = A_0 \sin wt$에 대한 출력은 식 (4-25)와 같다.

$$y(t) = A_0[ReG(jw)\sin wt + ImG(jw)\cos wt] = A_0 A(w)\sin[wt + \phi(w)] \tag{4-25}$$

폐루프시스템의 주파수 응답곡선에서 주파수영역의 특성을 나타내는 성능지표로는 대역이득, 차단주파수, 주파수 대역폭, 공진 주파수, 공진 최대값등이 있으며 안정성을 나타내는 지표로는 이득여유, 위상여유 등이 있다.

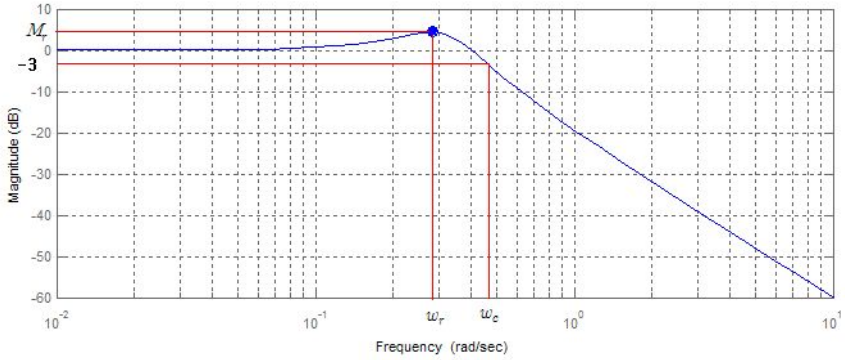


그림 4.24. 이득여유와 위상여유.

Fig. 4.24. Gain margin and phase margin.

폐루프 전달함수의 응답곡선이 그림 4.24와 같을 때 대역이득 G_B는 폐로전달함수의 크기가 일정하게 나타나는 통과대역 주파수범위에서의 전달함수 이득으로 대개의 경우 데시벨로 나타내며 차단주파수 w_c는 크기가 대역이득 크기의 $1/\sqrt{2}$이 되거나, 또는 대역이득보다 3[dB] 감소하는 주파수로 통과대역의 위 부분과 아래 부분에서 나타나는 고역 차단주파수와 저역 차단주파수가 있다 제어시스템에서는 대부분의 경우에 고역 차단주파수만 있으며 저역 차단주파수는 0이다. 주파수대역폭 w_B는 시스템을 통과하는 주파수범위로 고역 차단주파수와 저역 차단주파수의 차이로 정의된다. 제어시스템에서는 대부분의 경우에 저역 차단주파수가 0 이므로 주파수 대역폭은 고역 차단주파수와 같다. 공진은 주파수 대역폭 안의 어떤 특정주파수에서 이득이 다른 주파수에서보다 눈에 띄게 더 커지는 현상으로 2차이상의 시스템에서 감쇠비가 $\zeta = 0.707$인 경우에 나타난다. 공진주파수 w_r은 주파수응답에서 공진이 일어나는 주파수로 2차시스템에서 감쇠비가 $\zeta = 0.707$인 경우에 일어나며, 감쇠비 ζ가 0에 가까워질수록 공진주파수는 고유진동수에 수렴한다. 공진최대값 M_r은 공진주파수에서의 이득의 최대값으로 정의되며 대개의 경우 데시벨로 나타난다.

절대안정성은 시스템의 안정여부만을 판단한다. 그러나 실제의 제어시스템을 설

계하는 과정에서는 대상 플랜트를 모델링할 때에 불확실성이 존재하게 된다. 상대안정성이란 시스템 $G(s)$에 불확실성을 나타내는 성분 $\triangle G(s)$가 추가되어 실제 시스템의 전달함수인 $G_T(s)=G(s)+\triangle G(s)$의 폐루프 전달함수가 안정한가를 나타내는 것을 뜻하며 상대안정성을 나타내는 자료로는 안정성여유와 이득여유가 있다.

시스템에 불확실한 성분이 있는 경우 $G(s)+\triangle G(s)$를 $G(s)(1+\triangle G(s)/G(s))$로 표시할 수 있으며 $L(s)=1+\triangle G(s)/G(s)$라고 하면 전달함수는 $G(s)L(s)$로 나타낼 수 있다. 모델오차가 없는 경우 $\triangle G(s)$는 0이되어야 하고 $L(s)$는 1이 되어야 한다. 일반적인 모델불확실성 $L(s)$의 주파수 특성인 $L(jw)$는 크기도 주파수 함수이고 위상도 주파수 함수이기 때문에 다루기 힘들기 때문에 $L(jw)=Ke^{-j\theta}$과 같이 나타낸다. 따라서 루프전달함수($G_L(s)$)는 모델오차가 있을 경우 식 (4-26)과 같이 표시된다.

$$G_L(s)=G(s)Ke^{-j\theta} \tag{4-26}$$

식 (4-26)에서 $Ke^{-j\theta}$는 전달함수 모델의 불확실성을 나타내는 부분으로 K는 이득의 불확실성을 나타내고 θ는 위상의 불확실성을 나타내는 것으로 $K=1, \theta=0$이면 불확실성이 없는 경우를 뜻한다. K와 θ는 실제로는 입력주파수의 함수이지만 해석을 쉽게 하기 위해서 편의상 상수로 가정하면 불확실 성분 $Ke^{-j\theta}$은 주파수에 무관한 단순한 형태가 되면서 전달함수에서의 불확실성을 나타내기에 쉬운 꼴이 된다. 안정성여유란 루프전달함수에 불확실성이 존재할 때에 단위 되먹임에 의해 폐루프시스템의 안정성이 보장되는 K와 θ의 범위를 의미하며 $\theta=0$인 경우에 폐루프시스템의 안정성이 보장되는 K의 범위를 전달함수 $G(s)$의 이득여유라고 하며 $K=1$인 경우에 폐루프안정성이 보장되는 θ의 범위를 $G(s)$의 위상여유라 한다.

전달함수 $G(s)$가 안정할 때 그림 4.25와 같이 Nyquist 선도상에 안정성 여유를 나타내고 있다. 실제 전달함수의 Nyquist 선도는 불확실성 K와 θ에 따라 바뀌게 되는데 Nyquist 선도의 특성에 의하면 K가 커질수록 Nyquist 선도는 K만큼 커지

며 따라서 실수축과 만나는 교점도 그만큼 원점으로부터 멀어진다. 그리고 위상각 θ는 Nyquist 선도를 θ만큼 시계방향으로 회전시키는 역할을 한다. 개루프 전달함수가 안정한 경우에 폐루프 시스템에 대한 안정성의 필요충분 조건은 Nyquist 선도가$(-1, j0)$점을 포함하지 않는 것이다. 따라서 Nyquist선도에서 볼 때 개루프 시스템이 안정한 경우의 이득여유와 위상여유는 그림 4.25와 같이 정의될 수 있다. 즉 이득여유는 Nyquist 선도가 좌실수축과 만나는 점에서 개로 전달함수 크기 $|G(jw)|$의 역수와 같고, 위상여유는 Nyquist 선도상에서 이득이 1인 점과 좌반면 실수축이 이루는 각과 같다. Nyquist 선도가$(-1, j0)$점을 포함하는 경우에는 이득여유는 Nyquist 선도가 좌qksas 실수축과 만나는 점이 두개가 있으므로 크기의 역수 사이가 되는데 이는 불확실성이 값을 초과하기 전까지는 $(-1, j0)$점을 포함하지 않아서 폐루프시스템의 안정성이 유지되기 때문이다.

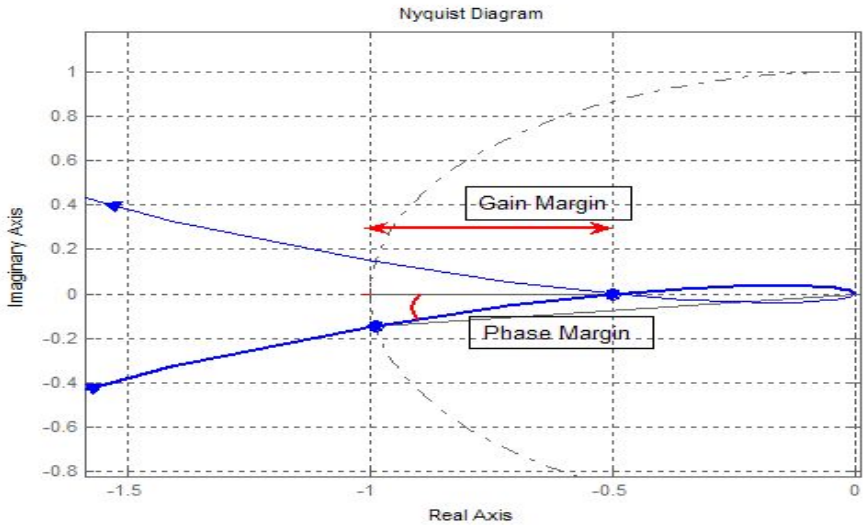


그림 4.25. Nyquist선도 상의 이득여유와 위상여유.

Fig. 4.25. Gain margin and phase margin on nyquist plot.

개루프시스템이 안정한 시스템일 때 단위되먹임에 의한 폐루프시스템이 안정하기 위해서는 $[dB]$로 표시된 이득여유나 위상여유가 모두 0보다 크며, 그 값이 크면 클수록 상대안정성이 높다고 할 수 있다. 이득여유나 위상여유 가운데 어느 하나라도

0보다 작으면 폐루프시스템은 불안정하다. 따라서 상대안정성 조건으로는 이득여유와 위상여유가 함께 고려되어야 하며 둘 중에 하나만으로는 상대안정성의 충분한 지표가 될 수 없다. 안정성여유가 클수록 상대안정성은 높아지지만 반면에 시간응답특성이 느려지기 때문에 안정성과 성능을 함께 고려한 바람직한 안정성여유는 위상여유를 $30^\circ \sim 60^\circ$으로 설정하고 이득여유를 $6dB$로 설정한다. 주어진 시스템에서 상대안정성이 불만족스러울 때에는 단위되먹임 대신에 궤환이득이 1이 아닌 제어기를 추가하여 상대안정성을 조절하는데, 이득여유는 쉽게 조절할 수 있기 때문에 대부분의 경우 위상여유 조절에 초점을 맞추어 제어기를 설계한다.

이득여유는 식 (4-27)와 같이 위상차단 주파수 w_p에서 $G(jw)$의 역수로 주어진다. $GM > 1$이면 시스템은 점진적으로 안정하며 $GM \leq 1$ 이면 시스템은 불안정하다.

$$GM = \frac{1}{|G(jw_p)|}, \angle G(jw_p) = -180^\circ \tag{4-27}$$

위상 여유는 식 4-28과 같이 이득 차단 주파수 w_g를 통해 구할 수 있다. $PM > 0$이면 시스템은 점진적으로 안정하며 $PM \leq 0$이면 시스템은 불안정하다.

$$PM(Phase\ Margin) = \angle G(jw_g) + 180^\circ, |G(jw_g)| = 1 \tag{4-28}$$

시스템 $G(jw)$의 상대 안정도를 나타낼 때 일반적으로 이득여유와 위상여유를 이용한다. 이득여유는 $\theta = 0$인 경우에 폐루프시스템의 안정성이 보장되는 K의 범위를 나타내며 위상여유는 $K = 1$인 경우에 폐루프안정성이 보장되는 θ의 범위를 나타낸다. d_1, d_2에 의한 시스템의 안정도 범위를 구체화하기 위해 이득여유와 위상여유를 정의하였다. Describing Function에 의한 시스템의 안정도는 그림 4.23을 통해 구할 수 있는데 이를 위해 MGM(Minimum Gain Margin)과 MPM(Minimum

Phase Margin)을 정의 하였다. $1/DF$의 최소값을 최소임계점(Minimum Critical Point, MCP)으로 정의하고 식 (4-29)와 같이 $CP_{\min}(d_1,d_2)$으로 정의하였다. MCP를 통해서 후건부 퍼지 Describing Function은 d_1과 d_2에 대한 함수로 표현되어진다.

$$CP_{\min}(d_1,d_2)=\min(1/DF(A,d_1,d_2))\ \ 0\le A\le 1 \tag{4-29}$$

식 (4-29)의 $CP_{\min}(d_1,d_2)$을 이용하여 MGM은 식 (4-30)과 같이 $GM_{\min}(d_1,d_2)$로 정의되어진다. $\widehat{w_p}$는 시스템 $G(jw)$의 최소 위상 주파수를 나타내고 있다. MGM을 통해 시스템 $G(jw)$의 상대안정도는 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수의 크기를 나타내는 d_1, d_2의 함수로 표현되어진다.

$$GM_{\min}(d_1, d_2)=\frac{CP_{\min}(d_1,d_2)}{\left|G(j\widehat{w_p})\right|} \tag{4-30}$$

식 (4-31)은 시스템 $G(jw)$의 임계안정을 나타내고 있다.

$$\left|G(jw)_{w=\widehat{w_p}}\right|=CP_{\min}(d_1, d_2) \tag{4-31}$$

MPM은 식 (4-32)의 위상여유를 구하는 식을 통해 $P_{\min}(d_1,d_2)$로 정의할 수 있는데 식 (4-32)은 $\frac{1}{DF}$가 1일 때의 MPM를 나타내고 있다. $\widehat{w_g}$은 최소 이득 주파수를 나타내고 있다.

$$PM_{\min}(d_1,d_2)=\angle G(j\widehat{w_g})+180^\circ \tag{4-32}$$

식 (4-33)은 MPM에 대한 함수를 나타내고 있다. $G(jw)$의 크기가 $CP_{\min}(d_1, d_2)$와 같은 점까지의 각을 나타낸다. 이를 통해 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수의 크기를 나타내는 d_1과 d_2에 대한 함수로 MPM을 표현할 수 있다.

$$PM_{\min}(d_1, d_2) = \angle(|G(jw)| = P_{\min}(d_1, d_2)) + 180^\circ \tag{4-33}$$

$$PM_{\min}(d_1, d_2) = \angle(|G(jw)| = GM_{\min}(d_1, d_2))$$

위와 같이 본 연구에서는 퍼지제어기를 이용한 시스템의 설계에서 후건부 퍼지변수의 크기에 대한 시스템의 절대안정도의 척도인 MCP를 퍼지변수 크기를 나타내는 d_1과 d_2에 대한 함수 $CP_{\min}(d_1, d_2)$로 제시하였다. MCP함수는 플랜트와는 상관없이 후건부 퍼지변수에 의해서만 정의되어진다. 따라서 한번 정의되어진 MCP 선도는 플랜트의 모델링과는 상관없이 적용이 가능하다. 제시된 MCP함수를 이용해 시스템이 안정하기 위한 후건부 퍼지변수의 범위를 알 수 있으며 또한 상대안정도를 위해 MPM함수 $PM_{\min}(d_1, d_2)$와 MGM함수 $GM_{\min}(d_1, d_2)$을 유도하여 시스템에 대한 상대안정도의 척도를 제시하였다. MCP함수와 다르게 MPM함수와 MGM함수는 플랜트의 Nyquist 선도상의 최소이득 주파수와 최소위상 주파수가 주어져야한다.

제 5 장 Circle Criterion 해석

시스템 설계에 있어 안정도는 중요한 특성이며 안정성이 확보되지 않으면 아무리 효과적인 시스템이라도 사용할 수 없을 것이다. 일반적으로 퍼지제어기 설계에서 있어 퍼지변수 크기는 시뮬레이션이나 시행착오를 통하여 결정 한다. 따라서 설계 후 다양한 안정도 판별법을 통하여 안정도 특성을 검토하게 된다. 본 연구에서는 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수의 크기 변화에 따른 안정성 해석을 위하여 비선형 시스템의 안정성 해석 방법인 Circle Criterion을 이용하여 퍼지제어기가 안정하기 위한 후건부 퍼지변수의 범위를 제시할 수 있는 방법에 대해 제시하고자 한다. 이를 통하여 퍼지제어기의 설계단계에서 시스템이 안정할 수 있는 영역 내에서 퍼지변수를 선택하여 시스템 설계를 효과적으로 할 수 있게 된다.

제 1 절 Circle Criterion 정의

1. 절대안정

그림 5.1은 플랜트는 선형 시불변이고 되먹임 이득이 비선형인 시스템을 나타내며 시스템의 상태방정식은 식 (5-1), 식 (5-2)와 같다. 플랜트의 경우 (A, B)는 가제어성을 가지고 (A, C)는 가관측성을 가져야 하며 비선형 이득 $\Psi(y,t)$는 $\Psi:[0,\infty)\times R\rightarrow R$ 조건하에 비메모리 특성을 가져야 하고 시변일 수 도 있다.

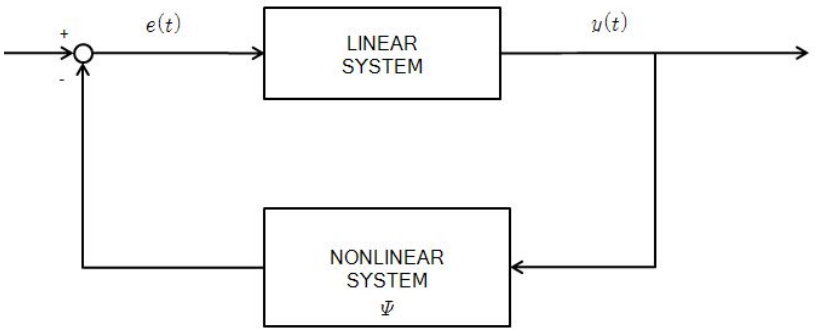


그림 5.1. 비선형 이득을 포함한 시스템.

Fig. 5.1. Control system with nonlinear gain.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + be \tag{5-1}$$

$$\boldsymbol{y} = c^T x$$

$$G(s) = c^T(s\boldsymbol{I} - A)^{-1}b \tag{5-2}$$

되먹임 이득이 단순히 선형 이득을 가질 경우 즉 $\Psi(y) = \alpha y$일 경우에 전체 시스템의 안정도는 폐루프 시스템 $\boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{bc^T}$의 고유값에 의해 결정되어질 수 있다. 그러나 되먹임 Ψ가 비선형일 경우에는 더욱 복잡해진다. 되먹임 Ψ가 비선형일 경우에 시스템의 안정도를 판별하기 위해 Lyapunov의 직접법을 사용할 경우 비선형은 식 (5-3)과 같은 구역 조건을 만족하여야 한다.

$$y \neq 0 \Rightarrow k_1 \leq \frac{\Psi(y)}{y} \leq k_2 \tag{5-3}$$

식 (5-3)의 음이 아닌 k_1, k_2가 존재할 경우 연속함수 Ψ가 구역 $[k_1, k_2]$에 속한다고 말할 수 있다. 이를 그림으로 나타내면 그림 5.2와 같이 나타낼 수 있다. 비선형 함수 $\Psi(y)$는

선 $k_1 y$와 $k_2 y$사이에 존재하게 된다. 식 (5-3)을 통해 두 가지 특성을 도출할 수 있는데 첫 번째는 $\Psi(0) = 0$이고 다른 하나는 $\Psi(y)$는 1사분면과 3사분면에 존재하는 것이다. 즉 $y\Psi(y) \geq 0$이 된다.

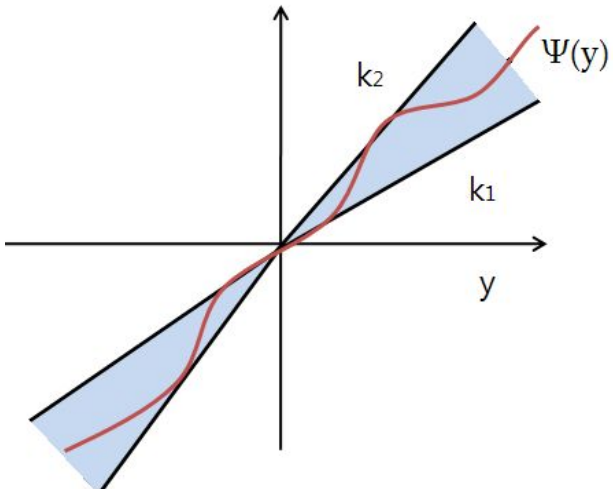


그림 5.2. 구역 조건.

Fig. 5.2. The sector condition.

Aizerman의 Conjecture는 $k_1 \leq k \leq k_2$의 모든 k에 대해 $\Psi(y) = k$을 포함하는 페루프 시스템 즉 $[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bc}^{\boldsymbol{T}} k]$이 안정할 경우 $k_1 \leq \Psi(y) \leq k_2$하면 비선형 되먹임시스템은 전체 점진적 안정 하다. Kalman의 Conjecture는 Aizerman의 Conjecture 조건 중 $k_1 \leq \Psi(y) \leq k_2$을 $k_1 \leq \dfrac{\partial(y\Psi(y))}{\partial y} \leq k_2$으로 대체하였다. Aizerman의 Conjecture가 참 이였다면 비선형 시스템의 안정성 판별은 선형시스템의 안정성 판별만큼 쉽게 계산되어질 수 있었을 것이다. Aizerman 이후 많은 과학자에 의해 안정성 보장을 위한 몇 가지 조건들이 추가되었다. Popov's Criterion은 이러한 조건들을 추가한 것으로 다음과 같다.

Popv's Criterion은 식 (5-1), 식 (5-2)와 같은 시스템이 아래와 같은 조건을 만족한다면 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 0점에서 전체 점진적 안정 하다고 할 수 있다.

- 행렬 A가 Hurwitz(모든 고유값이 우반면에 존재한다.)하고 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$가 가제어성을 갖는다.
- 비선형요소 Ψ는 sector $[0,k]$에 속한다.
- 식 (5-4)에 대해 양수인 α가 존재한다.

$$\forall w \geq 0 \; Re[(1+j\alpha w)G(jw)] + \frac{1}{k} \geq \epsilon \qquad (5\text{-}4)$$

식 (5-4)를 Popov's 부등식이라고 하며 Popov's Criterion은 다음과 같다.

- Autonomous 시스템에만 적용된다.
- 단일 비메모리 비선형 시스템에만 적용된다.
- 비선형 부분의 안정성은 시스템의 선형부분의 주파수 응답 함수를 통해 판별되어진다.
- 안정성 판단을 위한 충분조건만을 제시한다.

2. Circle Criterion

Nyquist Criterion의 비선형 시스템에 대한 일반적인 접근 방법으로 Circle Criterion이 있다. 비선형 이득 함수 Ψ가 그림 5.3과 같이 특정 범위에 있고 식 (5-5)를 만족할 경우 부분 비선형이라고 한다. 식 (5-5)가 $y \in (-\infty, \infty)$을 만족하면 무한 절대 안정하다고 한다.

식 (5-5)는 비선형 이득함수 Ψ가 기울기가 각각 α, β인 직선으로 정의되어지는 영역에 존재함을 의미한다. 따라서 α는 하한값이 되고 β는 상한값이 된다. 기울기 α, β는 이득함수 Ψ의 특성에 따라 변화하게 된다.

$$\alpha y \leq \Psi(y) \leq \beta y, \; (\beta > \alpha, a < 0 < b) \qquad (\text{식 } 5\text{-}5)$$

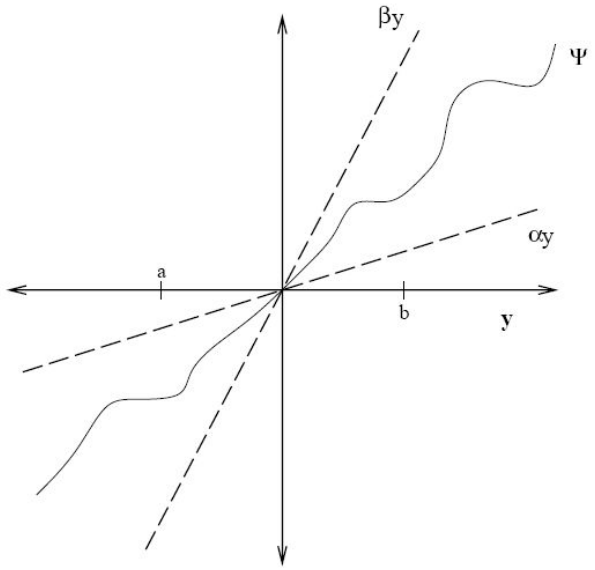


그림 5.3. 구역 비선형.

Fig. 5.3. Sector nonlinearity.

위와 같은 비선형 이득에 대해 그림 5.4와 같이 전체 시스템의 Nyquist 판별법을 이용하여 안정도를 판별하기 위해 중심을 $-(\alpha+\beta)/2\alpha\beta$으로 하고 반지름을 $|\alpha-\beta|/2|\alpha\beta|$으로 하는 원 $D(\alpha,\beta)$을 Nyquist 선도에 그려 도식적으로 안정도를 확인한다. 부분 비선형의 경우 아래와 같은 조건 중의 하나라도 만족하면 시스템은 절대 안정하다고 할 수 있다.

- $0<\alpha<\beta$과 같은 경우 $G(jw)$의 Nyquist 선도와 $D(\alpha,\beta)$가 만나지 않거나 $G(s)$의 우반면 근의 수만큼 시계방향으로 일주할 경우
- $0=\alpha<\beta$과 같은 경우 $G(s)$의 모든 근이 좌반면에 있고 $G(jw)$의 Nyquist 선도가 $s=-1/\beta$의 오른쪽에 있을 경우
- $\alpha<0<\beta$과 같은 경우 $G(s)$의 모든 근이 좌반면에 있고 $G(jw)$의 Nyquist 선도가 $D(\alpha,\beta)$ 안에 있을 경우

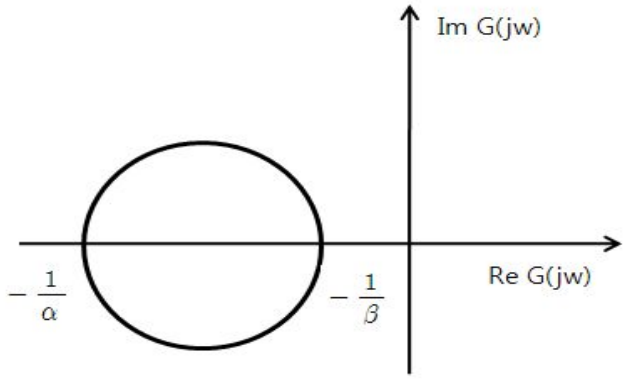


그림 5.4. $D(\alpha,\beta)$의 Nyquist 선도에서 표현.

Fig. 5.4. Presnting $D(\alpha,\beta)$ on the Nyquist plot.

위의 조건을 Nyquist 선도위에 표현하면 그림 5.5, 그림 5.6, 그림 5.7과 같이 나타낼 수 있다.

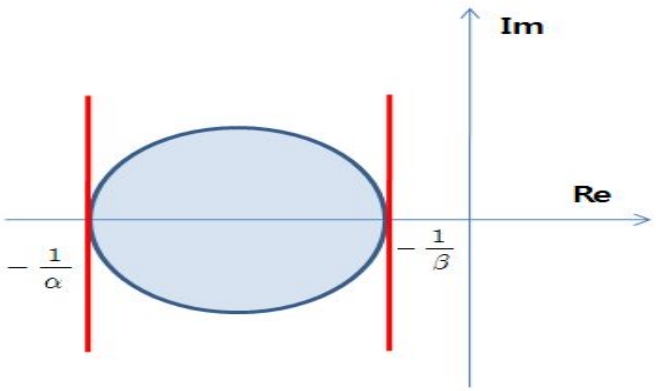


그림 5.5. $0<\alpha<\beta$일 경우 Nyquist 선도 표현.

Fig. 5.5. Presenting on Nyquist plot in $0<\alpha<\beta$.

그림 5.5는 첫 번째 조건인 $0<\alpha<\beta$일때를 나타내고 있다. 따라서 플랜트의 주파수 응답이 Nyquist 선도상에서 $-\frac{1}{\alpha},-\frac{1}{\beta}$를 경계로 형성되어지는 원과 만나지 않거나 플랜

트의 우반면 근의 수만큼 원을 일주하여야 한다.

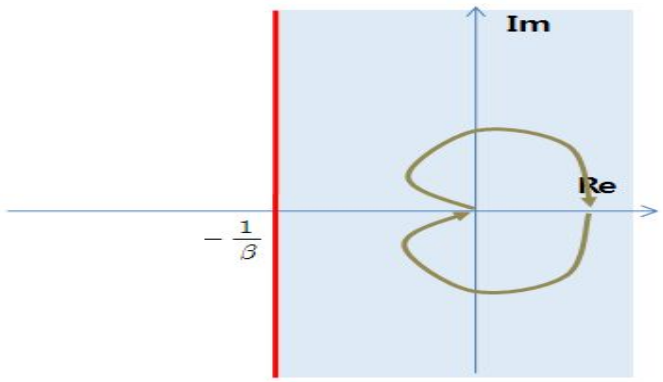


그림 5.6. $0=\alpha<\beta$일 경우 Nyquist 선도 표현.

Fig. 5.6. Presenting on Nyquist plot in $0=\alpha<\beta$.

그림 5.6은 두 번째 조건인 $0=\alpha<\beta$일 경우를 나타내고 있다. α가 0이 되어 $-\frac{1}{\beta}$과 음의 무한 기준으로 원을 형성함으로 플랜트의 주파수 응답은 $-\frac{1}{\beta}$의 우반면에 존재하여야 한다. 또한 플랜트의 주파수 응답이 $0=\alpha<\beta$에 의해 형성되어진 원을 일주 할 수 없음으로 플랜트의 모든 근이 좌반면에 존재하여야 한다.

그림 5.7은 세 번째 조건인 $\alpha<0<\beta$과 같이 주어졌을 경우를 나타내고 있다. 위의 경우도 플랜트의 주파수 응답이 $-\frac{1}{\alpha},-\frac{1}{\beta}$에 의해 형성되어진 원에 포함되어져 우반면에 근이 존재할 경우 $-\frac{1}{\alpha},-\frac{1}{\beta}$에 의한 원을 일주할 수 없음으로 플랜트의 모든 근이 좌반면에 존재하여야 한다.

비선형 이득 함수 Ψ이 $y\in[a,b]$ 조건에서 식 (5-5)를 만족할 경우 시스템이 유한 절대 안정하다고 할 수 있는데 α,β의 크기에 따라 플랜트가 우반면에 근의 갖지 않아야 한다는 제약조건이 존재하기도 한다.

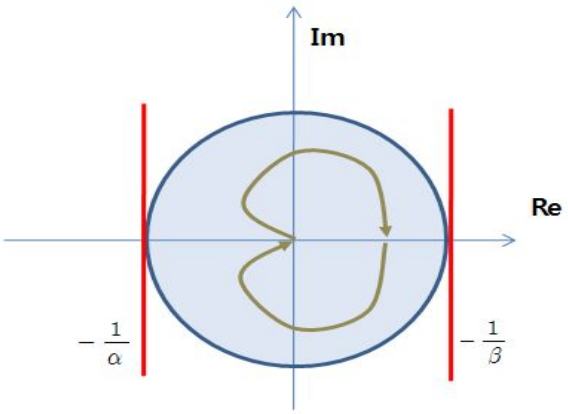


그림 5.7. $\alpha < 0 < \beta$일 경우 Nyquist 선도 표현.

Fig. 5.7. Presenting on Nyquist plot in $\alpha < 0 < \beta$.

제 2 절 Circle Criterion을 이용한 퍼지제어기 해석

퍼지제어기의 응답은 멤버십 함수와 Rule Base을 통하여 다양한 특성을 보이는데 본 연구에서는 퍼지제어기의 응답을 후건부 퍼지 변수의 크기를 변화 시켜 응답 특성을 변화 시켰으며 2절의 두 번째 안정조건을 이용하여 시스템의 안정도를 평가하였다. $\Psi(t,y)$이 시간 t에 독립적이고 $\Psi(-y) = -\Psi(y), \alpha \le \Psi(y) \le \beta$, 이면 $\Psi(\bullet)$은 실수축에만 존재하게 된다. SISO 퍼지제어기의 경우 위의 조건을 만족함으로 실수축에만 존재하게 된다. 따라서 $-1/\beta$을 축으로 하는 좌반면에 대해서가 아닌 실수축에서 점$(-1/\beta, 0j)$의 오른쪽에 $G(jw)$에 대한 Nyquist 선도의 존재여부를 통해 안정도를 판별할 수 있다.

1. 퍼지제어기의 Circle Criterion 안정도 판별

Circle Criterion을 통하여 퍼지제어기의 안정도를 판별하기 위해 전건부 멤버쉽 함수는 그림 5.8 (a)와 같이 겹침하여 고정하고 후건부 멤버쉽 함수의 크기를 변화 시켜 퍼지제어

기 응답곡선을 구한 후 응답곡선의 기울기를 이용하여 2절에서 제시한 안정조건을 이용하여 시스템의 안정도를 판별할 수 있다.

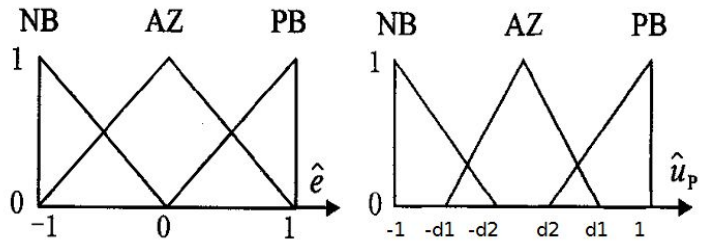


그림 5.8. 전건부, 후건부 멤버쉽 함수.

Fig. 5.8. Premise and consequence membership function of fuzzy controller.

퍼지제어기의 멤버쉽 함수가 그림 5.8과 같을 때 후건부 변수의 크기변화에 따른 Circle Criterion의 특성을 조사하기 위해 후건부 변수 d_1, d_2를 0에서 0.1씩 1까지 변화 시켰을 때의 α,β를 통해 원 $D(\alpha,\beta)$를 구하였다. 그림 5.9는 (d_1,d_2)가 각각 (0.1 , 0.1), (0.5 , 0.5), (0.9 , 0.9)일 때 퍼지제어기 응답곡선에 대한 최대 기울기와 최소 기울기 즉 α,β를 나타내고 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 (d_1,d_2)의 변화에 따라 퍼지제어기 응답곡선의 기울기는 다양하게 변화됨을 알 수 있다.

그림 5.10은 (d_1,d_2)의 변화에 따른 α,β를 통하여 원 $D(\alpha,\beta)$를 복소평면에 나타낸 것이다. 시스템의 $G(s)$의 Nyquist 선도와 원 $D(\alpha,\beta)$의 교차 여부가 안정성 판별에 이용되어지는데 (d_1,d_2)이 커질수록 $\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right|$의 값이 커져 원 $D(\alpha,\beta)$가 커짐을 볼 수 있다. 이는 (d_1,d_2)가 작을 경우 Circle Criterion의 첫 번째 조건 $0<\alpha<\beta$로 해석이 가능하나 (d_1,d_2)이 커질수록 α가 작아져서 Circle Criterion의 두 번째 조건 $0=\alpha<\beta$로 α,β의 범위를 정의하여야 한다.

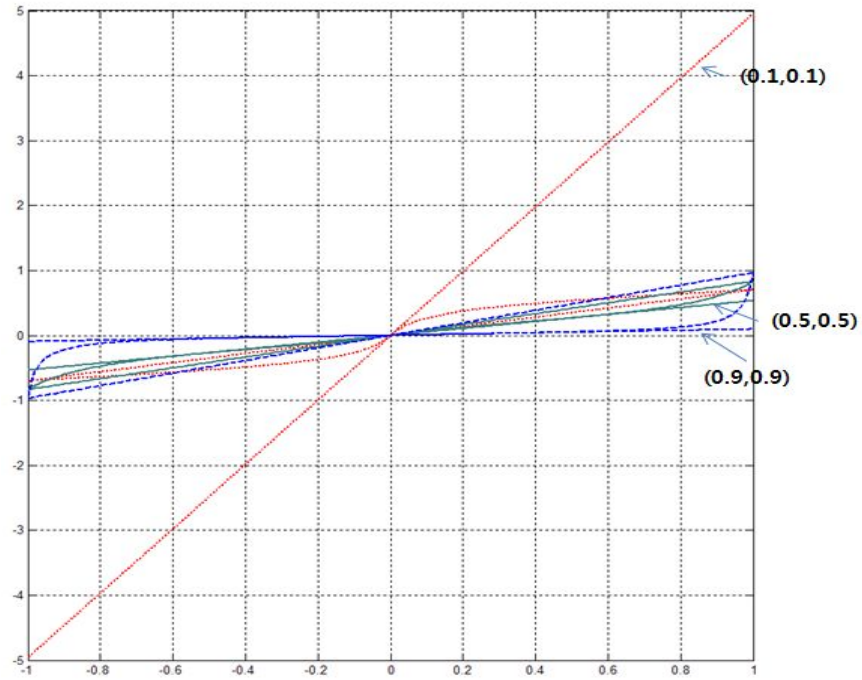


그림 5.9. (d_1, d_2)에 대한 퍼지제어기 응답의 기울기.

Fig. 5.9. The gradient of the response of FLC with (d_1, d_2).

본 연구에서는 2절에서 제시한 Circle Criterion의 두 번째 안정조건을 이용하였다. 이는 (d_1, d_2)의 작은 변화에는 첫 번째 Circle Criterion안정조건을 통해 안정도를 판단할 수 있지만 (d_1, d_2)가 커질수록 α의 값이 작아져 $-1/\alpha$가 $-\infty$가 되어 $D(\alpha, \beta)$은 $-1/\beta$의 좌반면 전체가 되기 때문에 Circle Criterion의 첫 번째 조건은 사용할 수 없게 된다. 따라서 일반성을 위해 두 번째 조건을 안정도 판단 조건으로 하였다. 표 5.1은 퍼지변수의 크기의 변화에 따른 Circle Criterion의 임계값인$-1/\beta$을 나타내고 있다. 표에서 볼 수 있듯이 $-1/\beta$의 값은 d_2의 변화 보다는 d_1의 변화에 더욱 다양한 값을 나타냄을 알 수 있다. 이는 Describing Function 방법을 사용했을 때와 유사한 결론을 도출하고 있다. $G(s)$의 실수축과의 교차점이 위의 임계점의 오른쪽에 위치하면 시스템은 안정하다 할 수 있겠다.

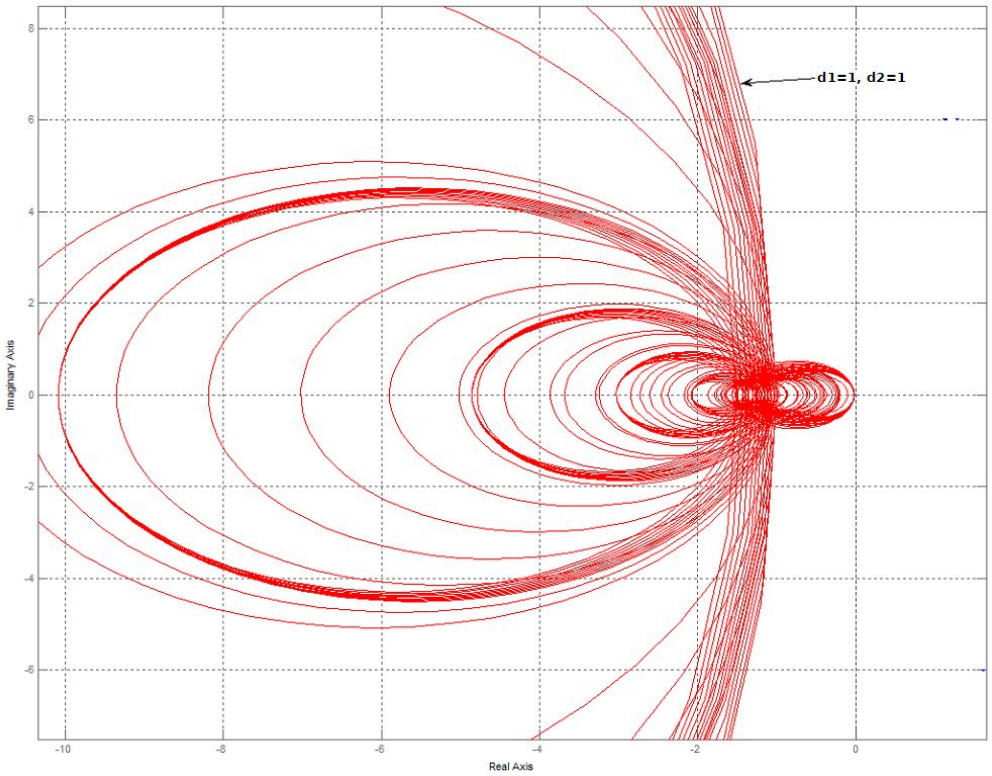


그림 5.10. (d_1, d_2)의 변화에 따른 $D(\alpha, \beta)$.

Fig. 5.10. $D(\alpha, \beta)$ according to (d_1, d_2).

d_1과 d_2를 변화 시켜 그 응답에 대한 $1/\beta$ 값을 구하여 d_1과 d_2에 따른 임계점의 궤적을 그림 5.11과 같이 도식적으로 표현하였다. x축과 y축은 각각 d_1과 d_2의 값을 나타내며 각 선은 $1/\beta$을 나타내고 있다. 시스템이 안정하기 위해서는 퍼지제어기의 $1/\beta$이 Nyquist 임계점보다 큰 값을 갖도록 d_1과 d_2를 조정하여 한다. 따라서 Nyquist 선도의 실수축과의 교차점을 임계점 선도에 표시하여 후건부 퍼지변수의 안정 영역을 구할 수 있다. 임계점 선도에서 볼 수 있듯이 임계점이 1보다 작을 경우에는 후건부 MF의 두 번째 퍼지 변수에 크게 의존하고 1보다 클 경우에는 첫 번째와 세 번째 변수에 크게 의존함을 알 수 있다. 또한 d_1, d_2가 $0 \sim 0.5$일 경우 d_1, d_2의 변화에 대해 다양한 응답을 보일 수 있으며 이보다 클 경우 응답이 d_2변화에 둔감함을 보여주고 있다. 그러나 Circle

Criterion에 의한 안정도 판별은 시스템이 안정하기 위한 필요조건만을 제시한다.

표 5.1. 후건부 퍼지변수 크기에 따른 $-1/\beta$.

Table 5.1. $-1/\beta$ according to the size of fuzzy variable.

d_2 \ d_1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	-0.028	-0.019	-0.016	-0.015	-0.016	-0.100
0.2	-0.395	-0.396	-0.448	-0.582	-1.023	-1.003
0.4	-0.877	-0.877	-0.882	-1.152	-1.071	-1.003
0.6	-1.499	-1.363	-1.25	-1.153	-1.071	-1.003
0.8	-1.499	-1.363	-1.25	-1.153	-1.071	-1.003
1.0	-1.499	-1.363	-1.25	-1.153	-1.071	-1.003

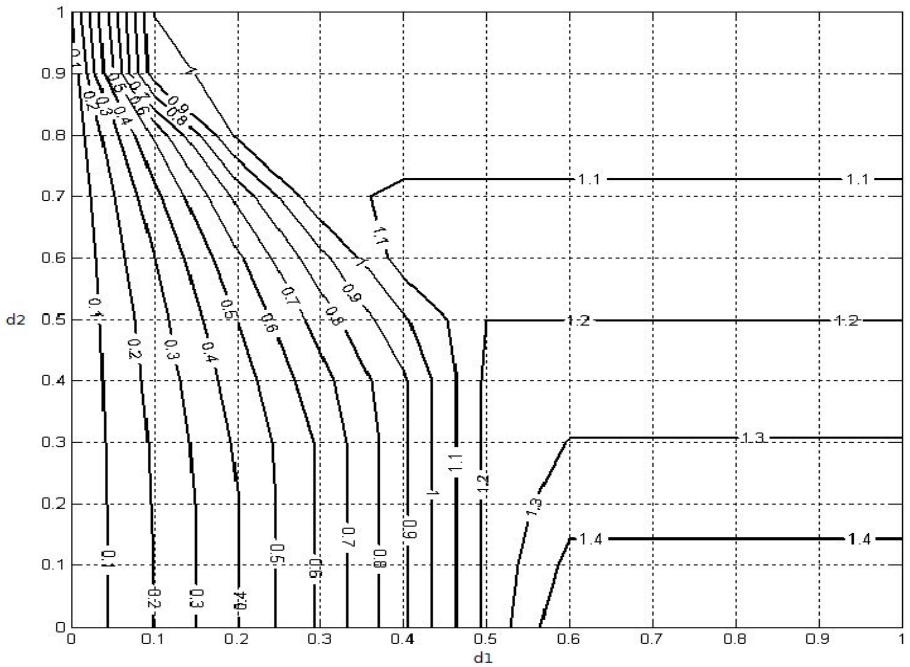


그림 5.11. $\Psi(y)$의 MCP 선도(d_1과 d_2에 대한 $1/\beta$의 값).

Fig. 5.11. MCP plot on Circle Criterion.

2. 후건부 변수에 대한 MGM과 MPM

4장에서 Describing Function에 대한 MGM과 MPM에 대한 정의를 하였다. Circle criterion 또한 Describing function에서와 같이 MGM과 MPM을 구할 수 있다. Describing Function에서는 $\frac{1}{DF}$의 최소값을 MCP로 정의하고 MCP를 정의한 $CP_{\min}(x_1,x_2)$을 이용하여 MGM과 MPM을 정의하였다. 그러나 Circle Criterion에서는 $\frac{1}{\beta}$의 최소값을 이용하여 MCP를 정의하고 정의되어진 MCP를 이용하여 대한 MGM과 MPM을 정의하였다. Circle Criterion에서의 MCP는 식 (5-5)와 같다.

$$P_{\min}(d_1,d_2)=\min(1/B(a,d_1,d_2)) \quad -1\le a\le 1 \tag{5-5}$$

식 (5-24)에서 $B(a,d_1,d_2)$은 입력 a가 $-1\le a\le 1$로 주어졌을 때 퍼지제어기 응답곡선의 최대기울기를 나타내는 함수로 수학적인 표현보다는 도식적 표현으로 구할 수 있다. 식 (5-5)에 의해 구해진 $CP_{\min}(d_1,d_2)$을 이용하여 Describing Function에서와 같이 MGM과 MPM을 구할 수 있다. 식 (5-6)은 MGM을 식 (5-7)은 MPM을 나타낸다.

$$GM_{\min}(d_1,d_2)=\frac{CP_{\min}(d_1,d_2)}{\left|G(j\widehat{w}_p)\right|} \tag{5-6}$$

$$PM_{\min}(d_1,d_2)=\angle(|G(jw)|=CP_{\min}(d_1,d_2))+180^\circ \tag{5-7}$$

Circle Criterion을 이용하여 비선형 되먹임을 가진 선형 시스템의 안정도에 대해 논하였다. 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수의 크기에 대한 퍼지제어기의 응답곡선은

시불변이기 때문에 퍼지변수 크기변화에 의한 Contour를 통해 전체적 시스템의 안정성을 판별할 수 있다.

제 6 장 실험 및 고찰

본 연구에서는 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수의 변화에 의한 시스템 특성에 대한 고찰을 위해 위에서 제시된 Describing Function과 Circle Criterion을 이용한 해석방법의 타당성을 검증하기 위해 Matlab을 이용한 Simulation을 수행하였다. 본 연구에서는 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수의 크기 즉 x_1과 x_2의 변화에 대한 퍼지제어기의 비선형 응답특성에 대한 모델링을 위하여 Describing Function과 Circle Criterion을 이용하였다. 또한 시스템의 응답특성 보다는 시스템이 안정할 수 있는 영역을 정의하여 안정 영역에서의 시스템 특성에 대해 기술하였다.

퍼지제어기의 비선형 특성에 대한 해석을 위해 퍼지제어기의 응답곡선을 부분선형화하여 Describing Function을 통해 퍼지제어기를 포함한 궤환시스템이 안정하기 위한 d_1과 d_2의 영역을 정의하였고 제시된 d_1과 d_2의 범위에서의 시스템 응답 특성에 대해 시뮬레이션을 수행하였으며 Describing Function에 대해 퍼지변수 5개 및 7개에 대해서도 동일한 시뮬레이션을 수행하였다. 또한 비선형 시스템에 대한 안정성 해석 방법인 Circle Criterion을 통한 후건부 퍼지변수의 d_1과 d_2의 변화에 대한 시스템 응답 특성에 대한 해석을 위해 퍼지제어기의 d_1과 d_2의 변화에 의한 응답곡선을 이용하여 각각의 응답곡선에 대한 sector의 기울기를 구하여 이를 도식화 하여 전체시스템이 안정하기 위한 d_1과 d_2의 범위를 정의하고 제시된 범위에서 시스템의 응답 특성에 대하여 시뮬레이션을 통하여 검증하였다. 퍼지제어기의 모델링은 Matlab의 Script를 사용하여 모델링하였으며 플랜트는 선형시스템을 이용하였다.

제 1 절 시스템 모델링

1. Fuzzy Logic Controller 시스템 구성

시뮬레이션을 위한 시스템 구조는 그림 6.1 과 같다. 단일입력 단일출력(SISO)으로 구성하였으며 입력 $e(n)$은 전처리되어 Fuzzy Logic Controller의 입력이 되며 출력 $u(n)$은 후처리에 의해 출력 $\hat{u}(x_2,n)$이 된다. 식 (6-1)은 입력에 대한 전처리 식을 나타내고 있다.

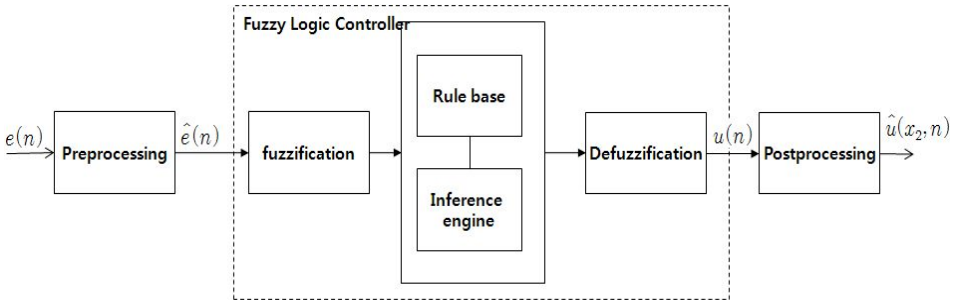


그림 6.1. 퍼지 제어기 구조.

Fig. 6.1. The structure of fuzzy logic controller.

$$\hat{e}(n)=\begin{cases} 1 & ,e(n)>1 \\ e(n), & |e(n)|>1 \\ -1 & ,e(n)<-1 \end{cases} \tag{6-1}$$

출력을 $[-1,1]$로 일반화하기 위해 식 (6-2), 식 (6-3)과 같이 후처리 하였다. 식 (6-3)은 x_1과 x_2의 변화 따른 퍼지제어기의 응답 값을 Least square를 이용하여 도출하였다. 식 (6-3)에서 볼 수 있듯이 퍼지제어기의 입력 $[-1,1]$에서의 응답은 일반화는 d_2에 의해 결정 되어진다. 그림 6.2 일반화 전의 퍼지제어기의 응답과 일반화 후의 퍼지제어기의 응답을 보여 주고 있다. 그림 6.2 (a)는 일반화 이전의 퍼지

제어기 응답을 나타내고 있는데 퍼지변수의 크기에 따라 $\hat{u}$값의 범위가 $[-1,1]$보다 작게 나타나고 있다. 그림 6.2 (b)는 일반화 된 응답을 보여 주고 있다. d_2에 의해서 $\hat{u}$가 모든 퍼지변수 변화에 대해서 $[-1,1]$에 존재함을 보여주고 있다. 이는 퍼지제어기의 응답곡선이 중심점에서는 퍼지변수의 중앙값에 의해 응답이 결정되어지고 양 끝값은 퍼지변수의 양 끝값에 의해 결정됨을 보여준다고 하겠다.

$$s_u(d_2) = 0.2 \times d_2^2 - 0.6941 \times d_2 + 1.497 \tag{6-2}$$

$$\hat{u}(n, d_2) = s_u(d_2) \times u(n) \tag{6-3}$$

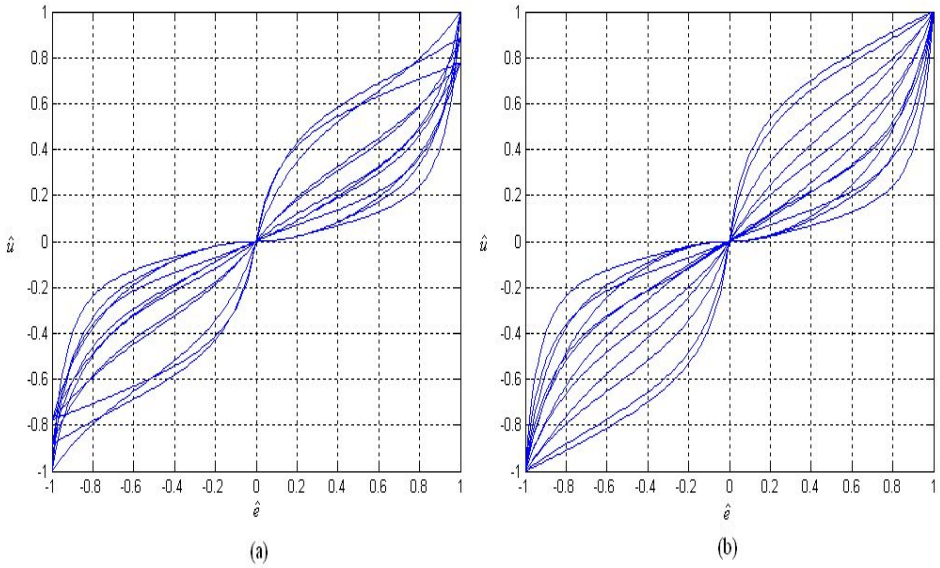


그림 6.2. 퍼지제어기의 일반화된 출력.

Fig. 6.2. Normalized output of FLC.

2. 플랜트 구성

전체적인 시스템 구성은 그림 6.3과 같다. 퍼지제어기는 그림 6.1과 같이 전건부

후건부 각각 3개, 5개, 7개의 퍼지변수 및 3개, 5개, 7개의 퍼지규칙으로 구성 하였으며 퍼지제어기의 입력과 출력은 $[-1,1]$ 범위에 존재하도록 일반화 하였다. 플랜트 상태방정식이 식 (6-4)와 같을 때 전달 함수는 식 (6-5)와 같다.

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-3.3333 & -3 & -0.6667\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u \tag{6-4}$$

$$y=(0\,0\,6.6667)x$$

$$G(s)=\frac{20}{3s^3+10s^2+9s+2} \tag{6-5}$$

본 연구에서는 P형 퍼지제어기를 사용함으로 정상상태 오차에 대해 취약하다. 이에 대한 보완을 위해 그림 6.3과 같이 퍼지제어기의 출력에 시스템 응답의 정상상태 오차를 통해 구해진 이득 C_g를 추가하였다[29]. 추가되어진 이득 C_g는 정상상태 오차를 상쇄시켜 시스템 응답이 참조값에 도달할 수 있도록 한다.

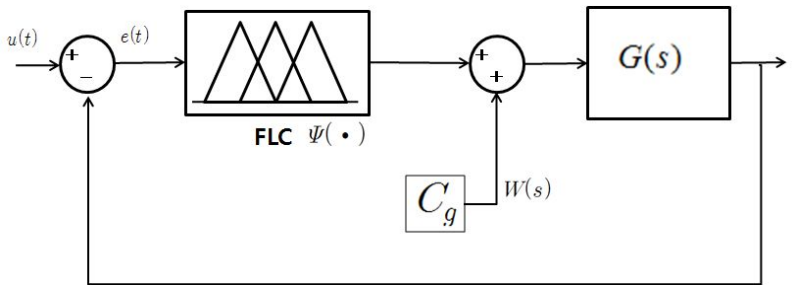


그림 6.3. 이득을 포함한 퍼지제어기.

Fig. 6.3. FLC with constant gain.

시뮬레이션을 위해 Matlab의 Simulink를 사용하였다. Simulink 구성도는 그림 6.4와 같다. Fuzzy Logic은 Matlab 함수를 사용하여 후건부 퍼지 변수의 크기를 변경할 수 있도록

하였으며 $G(s)$에 의해 계산되어진 정상상태 오차를 제거 할 수 있도록 상수 이득을 포함하였으며 입력은 1을 기준 입력하여 응답을 확인하였다.

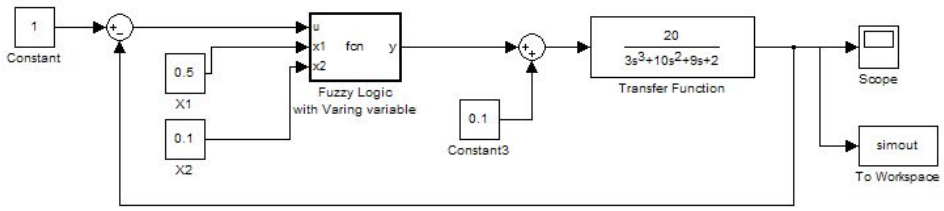


그림 6.4. 시뮬레이션을 위한 Simulink 구성도.

Fig. 6.4. The structure of simulink for simulation.

그림 6.5는 식 (6-4)에 대한 Nyquist 선도를 나타내고 있다. 식 (6-4)의 교차점은 $(-1, j0)$의 우반면에 존재하기 때문에 안정하다 할 수 있으며 이득 여유는 $2.92dB$이며 위상여유는 $10.6\,\mathrm{deg}$를 나타내고 있다. 교차점 좌표는 $(-0.708, j0)$을 나타내고 있다.

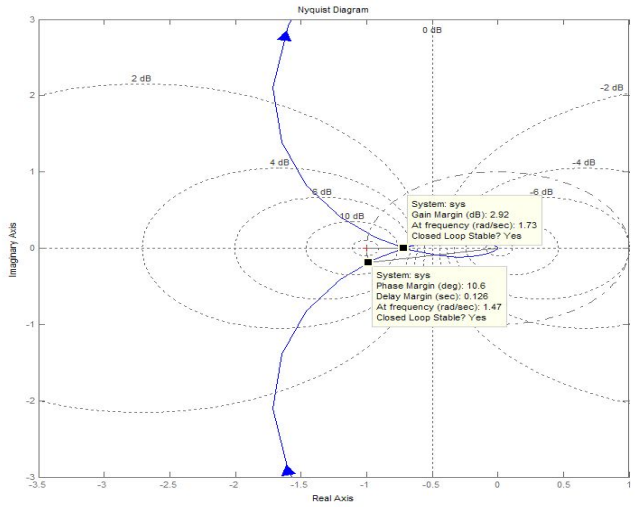


그림 6.5. $G(s)$의 Nyquist 선도.

Fig. 6.5. Nyquist plot of $G(s)$.

3. 정상상태 오차 제거

본 연구에서는 상수 이득을 통하여 정상상태를 오차를 제거하였다. 시불변 시스템의 경우 정상상태 오차는 일정한 값을 유지함으로 시스템에 상수 이득을 포함하여 정상상태 오차를 제거할 수 있다.

퍼지제어기는 시간 독립이므로 그림 6.3과 같이 ψ로 하고 상수 이득 C_g를 $W(s)$로 나타낼 수 있으며 되먹임 시스템으로 구성 하였을 경우 출력은 식 (6-6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(s) = \frac{\psi \bullet G(s)}{1+\psi \bullet G(s)} U(s) + \frac{G(s)}{1+\psi \bullet G(s)} W(s) \tag{6-6}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \bullet Y(s) = SP \tag{6-7}$$

식 (6-7)과 같이 최종값 정리에 의해 C_g는 식 (6-8)과 같이 구할 수 있으며 SP(Set Point)는 설정 값을 나타낸다. 식 (6-9)에서와 같이 퍼지제어기는 C_g와 무관해 진다 [29].

$$c_g \bullet G(0) = SP \Rightarrow c_g = \frac{SP}{G(0)} \tag{6-8}$$

식 (6-9)와 같이 상수 이득 C_g를 포함하였을 때의 정상상태 오차는 0으로 SP가 됨을 알 수 있다.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = s \cdot \frac{\psi \cdot G(0)}{1+\psi \cdot G(0)} \cdot \frac{SP}{s} + s \cdot \frac{G(0)}{1+\psi \cdot G(0)} \cdot \frac{c_g}{s} \tag{6-9}$$

$$= \frac{\psi \cdot G(0)}{1+\psi \cdot G(0)} \cdot SP + \frac{G(0)}{1+\psi \cdot G(0)} \cdot \frac{SP}{G(0)}$$

$$= SP$$

식 (6-5)의 $G(0)$은 10이고 SP는 1이므로 C_g 는 0.1이 된다. 그림 6.6은 식 (6-5)에 의한 $G(s)$의 응답 곡선을 보여주고 있다. 그래프에서 볼 수 있듯이 정상상태 오차가 존재함을 알 수 있다.

식 (6-8)에 의해 구해진 C_g값을 플랜트 $G(s)$에 추가한 시스템 응답이 그림 6.7과 같다. 상수 이득 C_g=0.1이고 상수 이득으로 인해 정상상태 오차가 상쇄됨을 볼 수 있다. 상수 이득의 경우 시스템 수학적 모델링에 따라 계산되어져야 한다.

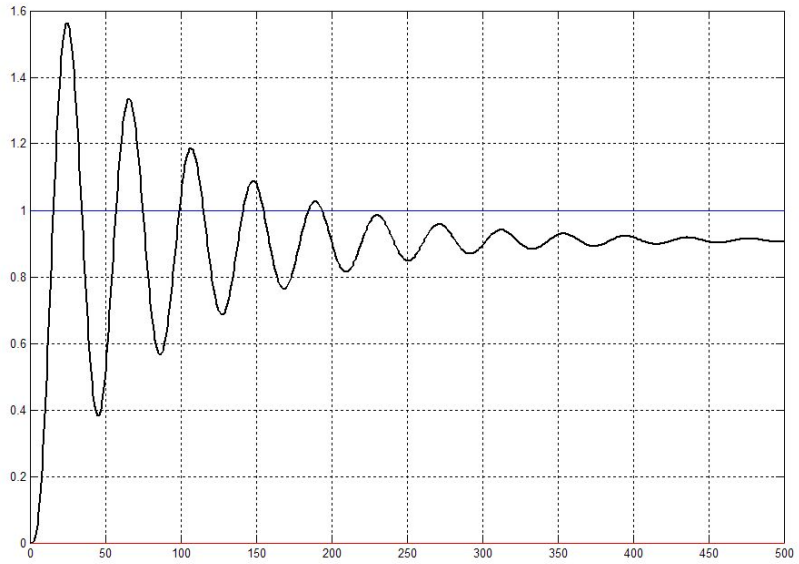


그림 6.6. $G(s)$의 응답 곡선.

Fig. 6.6. The response plot of $G(s)$.

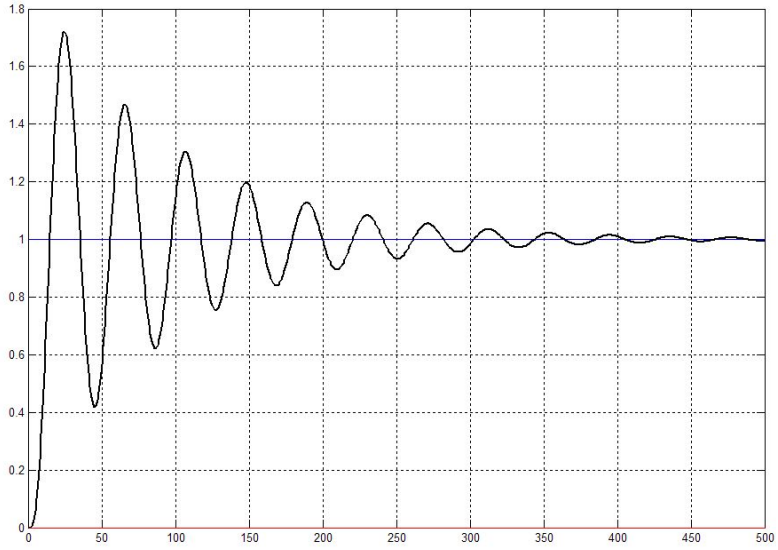


그림 6.7. 이득을 포함한 $G(s)$의 응답곡선.

Fig. 6.7. The response plot of $G(s)$ with constant gain.

제 2 절 시뮬레이션

1. Describing Function 해석

가. 3 퍼지변수 해석

위에서 제시된 $G(s)$에 3 퍼지 변수로 구성된 퍼지제어기를 포함 시켰을 경우 시스템이 안정할 수 있는 후건부 퍼지 변수의 크기(x_1, x_2의 크기)의 범위를 구하기 위해 Describing Function에 의한 궤적에 불안정 영역을 표시하였다. 그림 6.8에서와 같이 $G(s)$의 실수축과의 교차점 좌표는$(-0.708, j0)$임으로 Describing Function의 최저값이 0.7보다 작은 부분을 표시하였다. 이를 통하여 시스템이 안정할 수 있는 d_1, d_2의 범위를 구할 수 있다. 그림에서와 같이 d_2의 크기와 무관하게 $0.08 < d_1 < 0.39$의 범위에 존재하면 시스템이 안정함을 보여주고 있다. 따라서 후건부 퍼지변수의 크기는 이 값의

범위에서 설계되어져야 함을 알 수 있다. 이에 대한 검증을 위해 불안정 영역에 존재하는 $d_1 = 0.3, d_2 = 0.2$일 경우의 시스템 응답을 그림 6.9 (a)에서 나타내었는데 시스템 응답이 SP에 수렴하지 않고 Limit Cycle을 보여 주고 있다. 이는 $d_1 = 0.3, d_2 = 0.2$에 의한 Describing Function 값이 Nyquist 선도상에서 $G(s)$의 주파수 응답 곡선과 교차함을 의미한다. 또한 C_g에 의해 Limit Cycle이 기준값을 기준으로 진동함을 볼 수 있다. 그림 6.9(b)는 $x_1 = 0.4, x_2 = 0.2$일 경우 응답을 나타내고 있는데 임계영역과 근접함으로 SP에 수렴하나 응답 속도가 늦고 전체적인 제어특성이 좋지 않음을 보여주고 있다.

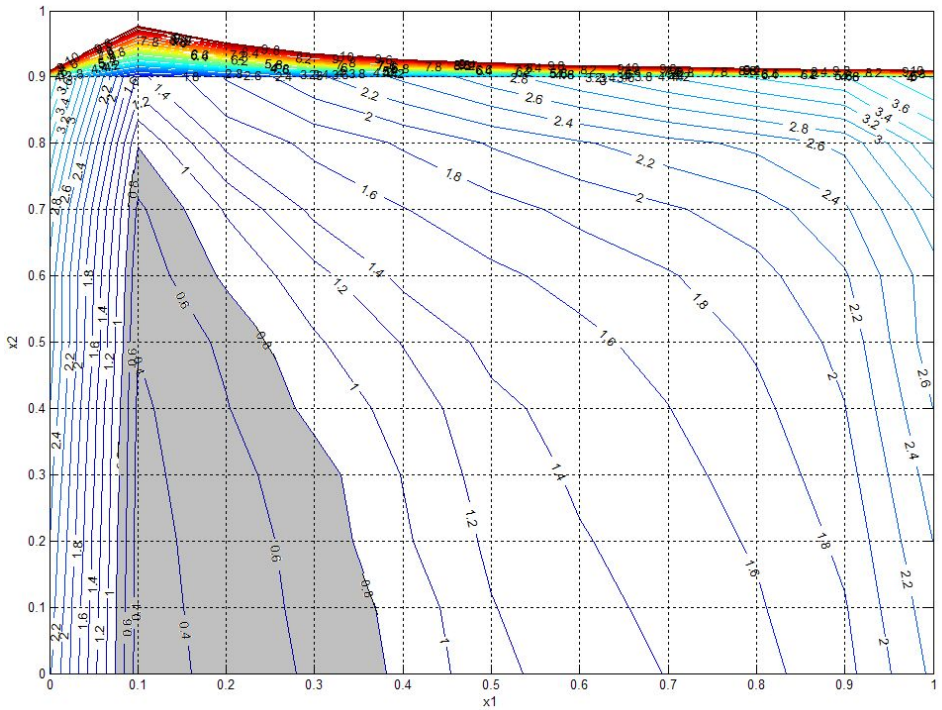
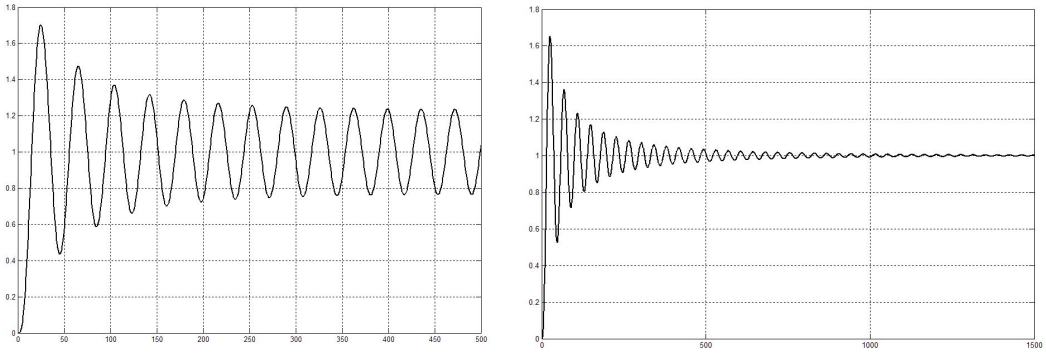


그림 6.8. $G(s)$의 MCP 선도상의 불안정 영역.

Fig. 6.8. The unstable region of $G(s)$ on MCP plot.



(a) (b)

그림 6.9. d_1, d_2에 따른 응답 곡선 (a) $d_1 = 0.3, d_2 = 0.2$, (b) $d_1 = 0.4, d_2 = 0.2$.

Fig. 6.9. The response plot for d_1, d_2, (a) $d_1 = 0.3, d_2 = 0.2$, (b) $d_1 = 0.4, d_2 = 0.2$.

그림 6.10은 $G(s)$에 대한 $PM_{\min}(d_1,d_2)$ 궤적을 보여주고 있다. 위상 궤적의 경우 플랜트에 따라 $CP_{\min}(d_1,d_2)$궤적과 다르게 나타난다.

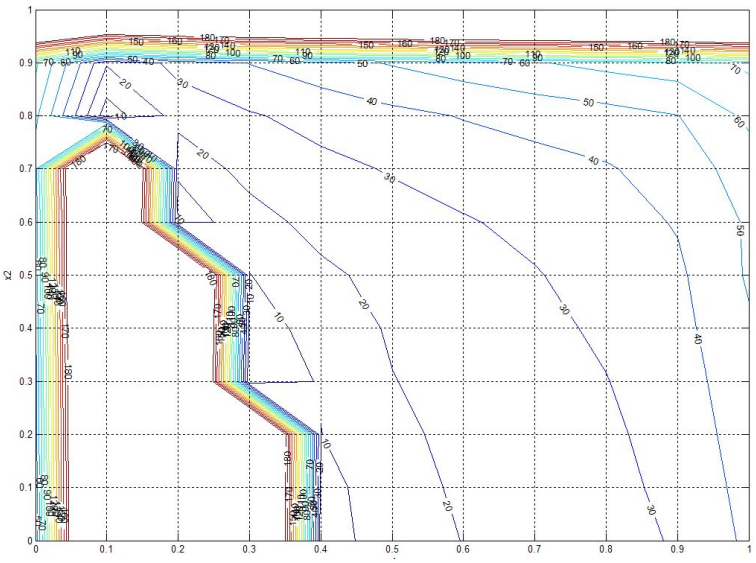


그림 6.10. $G(s)$에 대한 $PM_{\min}(d_1,d_2)$.

Fig. 6.10. $PM_{\min}(d_1,d_2)$ for $G(s)$.

나. 5 퍼지변수 해석

위에서 제시된 $G(s)$에 5퍼지 변수로 구성된 퍼지제어기를 포함 시켰을 경우 시스템이 안정할 수 있는 후건부 퍼지 변수의 크기(d_1, d_2, d_3의 크기)의 범위를 구하기 위해 앞에서 제시된 Describing Function에 의해 $-1/DF$의 최대값 그래프 통해 안정하기 위한 영역을 그림 6.11과 같이 영역을 표시하였다. 후건부 퍼지변수의 크기를 나타내는 d의 값이 그림 6.11에서와 같이 $d_1 = 0.1, d_2 = 0.4, d_3 = 0.4$과 같으면 시스템은 불안정하게 되는데 이는 그림 6.12의 (a)와 같은 응답을 보이며, d의 값이 $d_1 = 0.1, d_2 = 0, d_3 = 0.5$ 시스템은 안정하게 되는데 이에 대한 응답은 그림 6.12의 (b)와 같다.

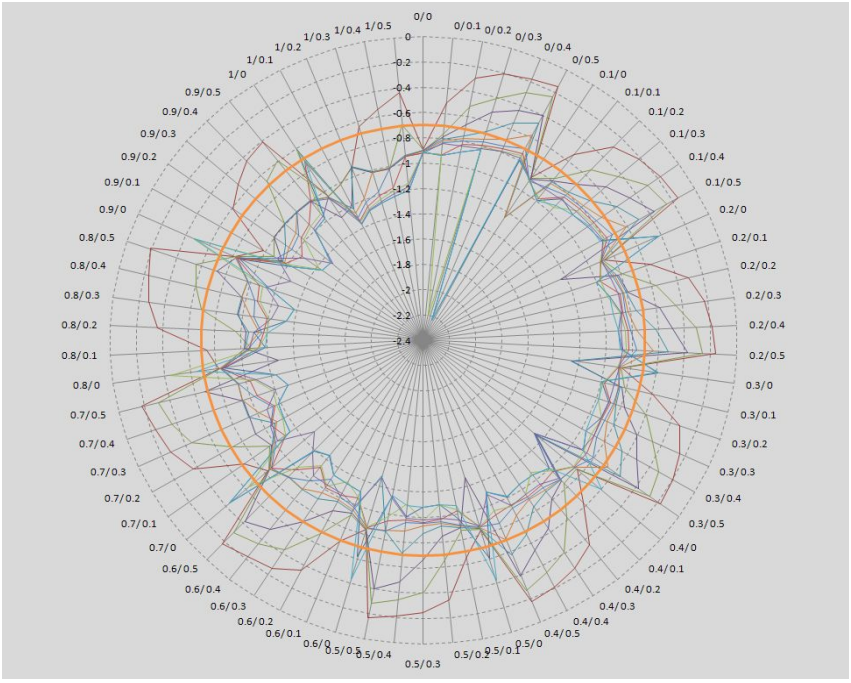


그림 6.11. 교차점 0.7에 대한 5퍼지변수 퍼지제어기의 안정영역.

Fig. 6.11. The stable region for crossover point 0.7 on FLC with five fuzzy variables.

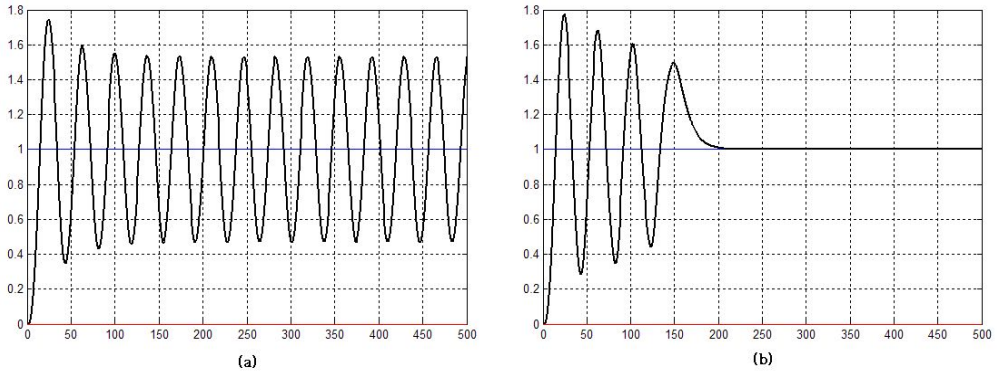


그림 6.12. d_1, d_2, d_3에 따른 응답 곡선 (a) $d_1 = 0.1, d_2 = 0.4, d_3 = 0.4$, (b) $d_1 = 0.1, d_2 = 0, d_3 = 0.5$.

Fig. 6.12. The response plot for x_1, x_2, x_3 (a) $d_1 = 0.1, d_2 = 0.4, d_3 = 0.4$, (b) $d_1 = 0.1, d_2 = 0, d_3 = 0.5$.

다. 7 퍼지변수 해석

위에서 제시된 $G(s)$에 5 퍼지 변수로 구성된 퍼지제어기를 포함 시켰을 경우 시스템이 안정할 수 있는 후건부 퍼지 변수의 크기(d_1, d_2, d_3, d_4의 크기)의 범위를 구하기 위해 앞에서 제시된 Describing Function에 의한 $-1/DF$의 최대값 그래프 통해 안정하기 위한 영역을 그림 6.13과 같이 나타냈다. 후건부 퍼지변수의 크기를 나타내는 d의 값이 그림 6.13에서와 같이 $d_1 = 0, d_2 = 0.3, d_3 = 0.2, d_4 = 0.1$과 같으면 시스템은 불안정하게 되는데 이는 그림 6.14의 (a)와 같은 응답을 보이며 d의 값이 그림 6.13에서 나타내듯이 0.7보다 작은 값을 나타내는 $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0.3$, $d_4 = 0.1$이면 시스템은 안정하게 되는데 이에 대한 응답은 그림 6.14 (b)와 같다.

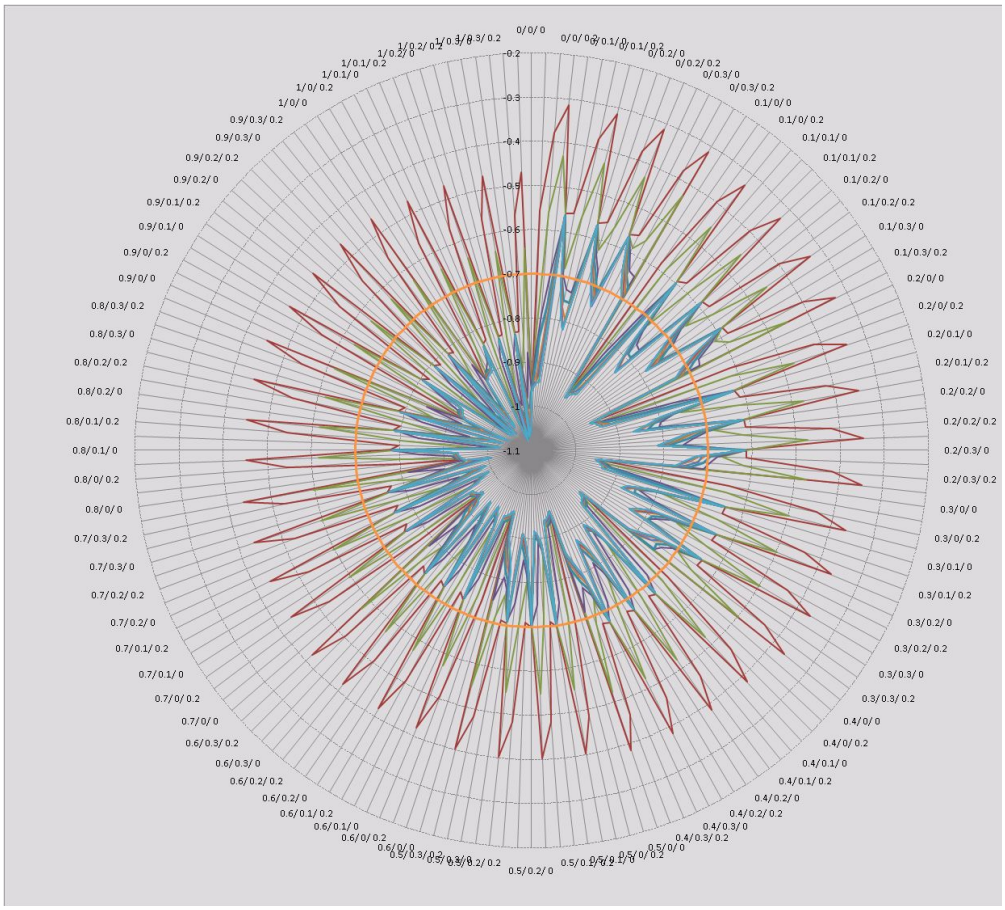


그림 6.13. 교차점 0.7에 대한 7퍼지변수 퍼지제어기의 안정영역

Fig. 6.13. The stable region for crossover point 0.7 on FLC with seven fuzzy variables

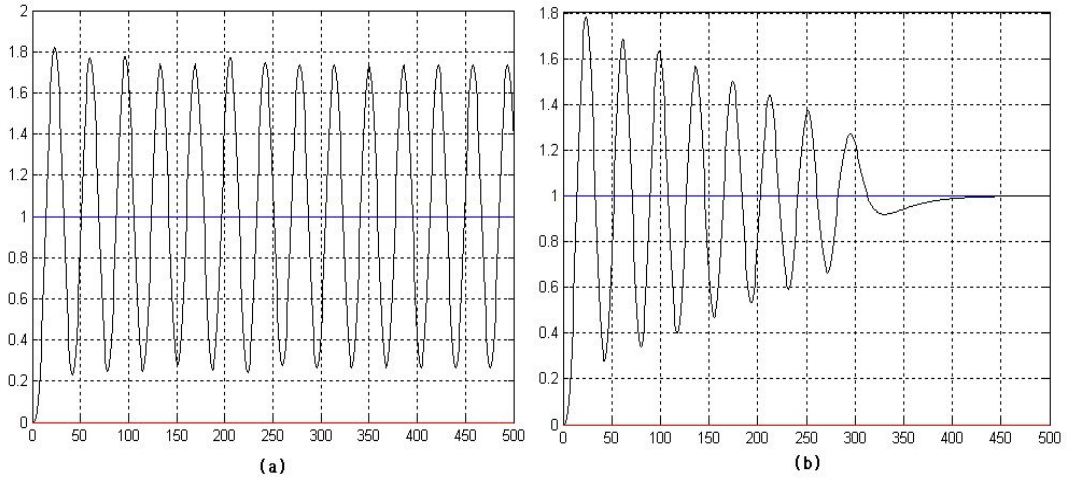


그림 6.14. d_1, d_2, d_3, d_4에 따른 응답 곡선

(a) $d_1 = 0, d_2 = 0.3, d_3 = 0.2, d_4 = 0.1$, (b) $d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0.3, d_4 = 0.1$.

Fig. 6.14. The response plot for d_1, d_2, d_3, d_4

(a)$d_1 = 0, d_2 = 0.3, d_3 = 0.2, d_4 = 0.1$, (b) $d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0.3, d_4 = 0.1$.

2. 시간응답 특성

그림 6.15는 d_1, d_2의 변화에 대한 시스템 응답을 보여 주고 있다. 플랜트 $G(s)$의 경우 x_1, x_2이 값이 클수록 오버슈트가 감소하고 응답시간도 개선되면서 안정된 시스템 응답을 보여 주고 있다. $d_1 = 0.95, d_2 = 0.97$의 경우 오버슈트가 거의 없고 빠른 응답속도를 보여 주고 있다.

$G(s)$와 퍼지제어기를 포함한 궤환시스템의 대한 시간 응답 특성은 그림 6.16과 같다. 퍼지제어기에 대한 성능개선을 알아보기 위해 일반적인 시간 응답특성인 오버슈트, 지연시간, 상승시간, 정정시간에 대해 비교하였다.

표 6.1은 $G(s)$와 퍼지제어기를 포함한 시스템에 대해 위의 4가지 특성을 나타내고 있다.

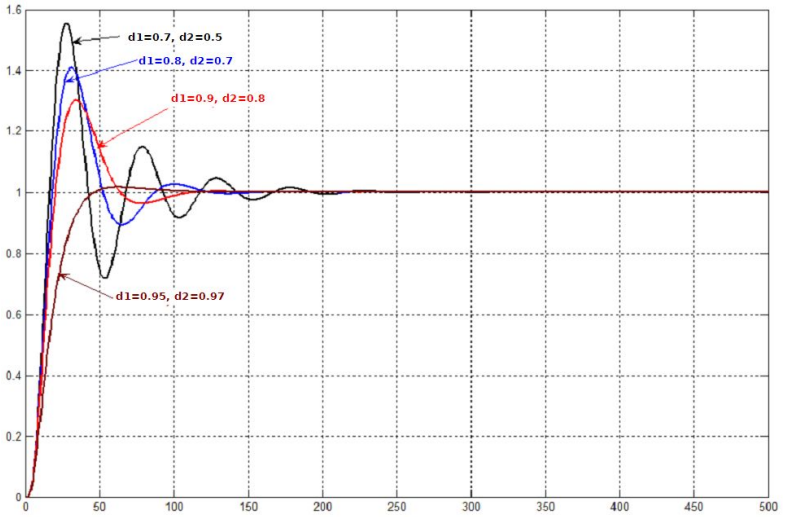


그림 6.15. d_1, d_2 변화에 따른 시스템 응답.

Fig. 6.15. The system response for changing d_1, d_2.

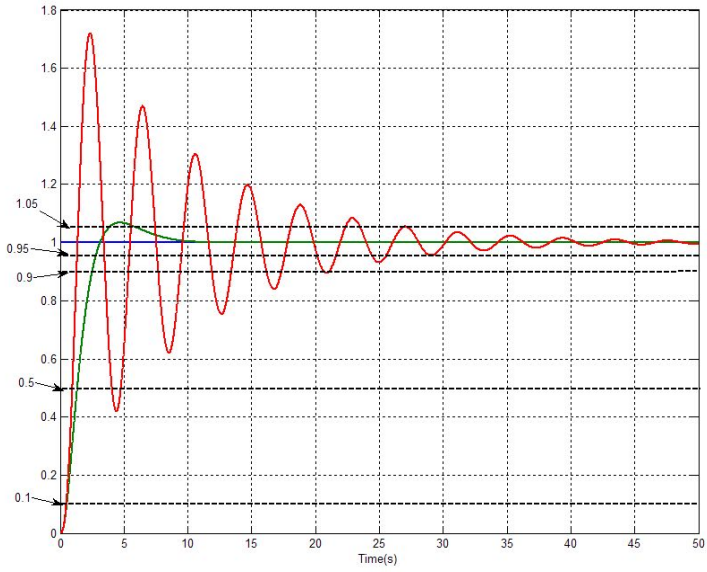


그림 6.16. $G(s)$의 시간응답 특성.

Fig. 6.16. The time response characteristic of $G(s)$.

표 6.1. 시간응답 특성.

Table 6.1. The characteristic on time response.

구분	오버슛	지연시간	상승시간	정정시간
$G(s)$	72.1%	0.97	0.75	6.12
$G(s)+FLC$	6.8%	1.35	1.96	29.12

표 6.1에서와 같이 퍼지제어기를 포함하지 않은 시스템이 지연시간과 상승시간에서는 퍼지제어기를 포함한 궤환시스템 보다는 양호한 특성을 나타내지만 정정시간과 오버슛에 대해서는 퍼지제어기를 포함한 궤환 시스템이 양호한 특성을 보이고 있다. 특히 정정시간은 퍼지제어기를 포함하지 않은 시스템이 약 4.8배 늦음을 알 수 있다. 오버슛도 퍼지제어기를 포함하지 않은 시스템이 약 10.8배 큼을 알 수 있다. 따라서 퍼지제어기를 포함한 궤환시스템이 그렇지 않은 시스템의 성능을 개선함을 알 수 있다.

3. 퍼지변수에 의한 시스템 안정성 특성

불안정한 시스템에 대한 안정도 판별을 위해 위의 $G(s)$를 식 (6-10)과 같이 변경하였다.

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-3.3333 & -3 & -0.6667\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u \tag{6-10}$$

$$y=(0\,0\,13.3367)x$$

$$G(s)=\frac{40}{3s^3+10s^2+9s+2} \tag{6-11}$$

그림 6.17은 식 (6-11)에 대한 Nyquist 선도를 보여주고 있는데 교차점이 $(-1.36, 0j)$으로 $(-1, j0)$의 왼쪽에 존재함으로 $G(s)$는 불안정하다 할 수 있다. 또한 식 (6-11)에 대해 이득 C_g는 0.04로 구성하여야 SP를 제거할 수 있다.

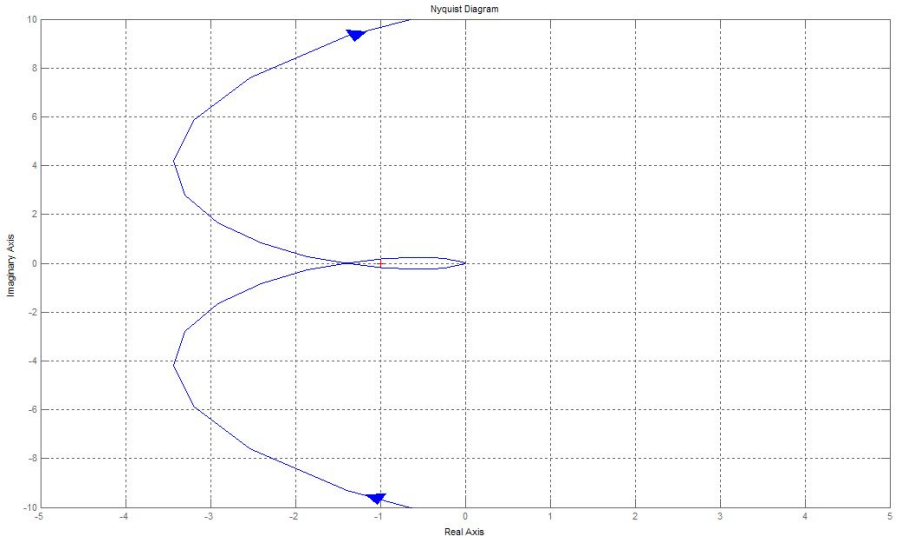


그림 6.17. $G(s)$의 Nyquist 선도.

Fig. 6.17. Nyquist plot of $G(s)$.

시스템이 안정하기 위한 d_1, d_2를 구하기 위해 $CP_{\min}(d_1, d_2)$임계 선도에 위에서 구한 교차점을 대입하면 그림 6.18과 같다. 이를 통해 시스템이 안정하기 위한 d_1, d_2의 범위를 알 수 있다. 시스템이 안정하기 위해서는 비교점이 -1.36보다 작은 값이 되도록 하여야한다.

시스템의 안정성을 확인하기 위해 d_1, d_2의 변화에 의한 시스템 응답 및 $G(s)$만으로 구성된 시스템의 응답 을 확인하면 그림 6.19와 같다. $G(s)$만으로 구성된 시스템은 불안정한 응답을 보이지만 퍼지제어기를 포함한 시스템의 경우 d_1, d_2의 변화에 따라 안정된 응답을 보임을 알 수 있다. 이는 퍼지제어기에 의해 Nyquist 선도상의 안정조건의 척도가 되는 $(-1, j0)$점을 왼쪽으로 이동시킴으로써 시스템이

안정되도록 하기 때문이다.

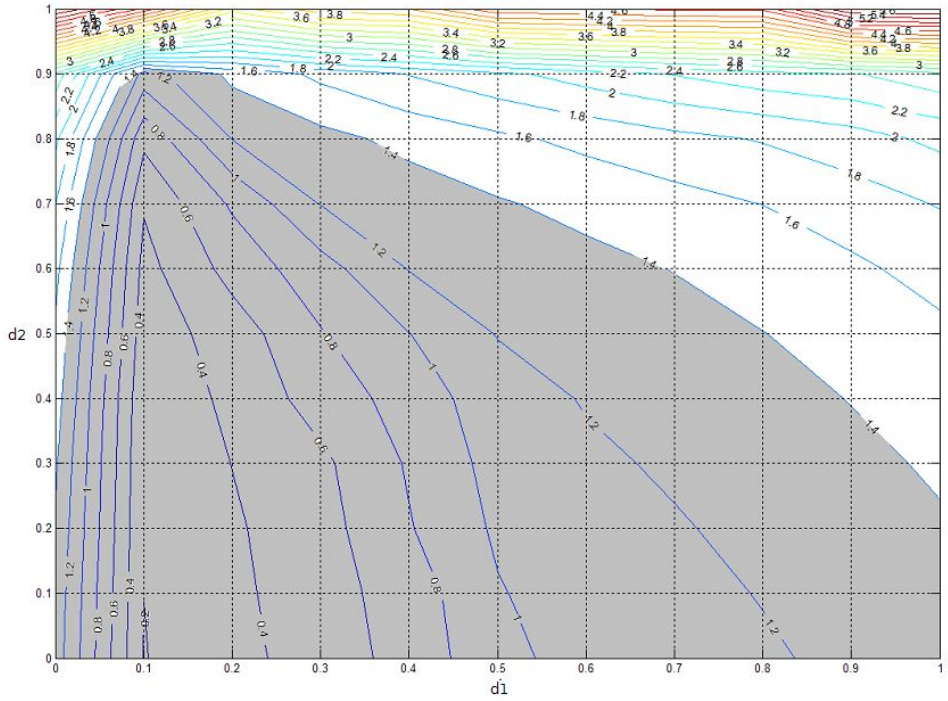


그림 6.18. 시스템의 교차점이 -1.36 일 경우 안정 영역.

Fig. 6.18. The stable region for crossover point -1.36.

퍼지제어기의 경우 후건부 퍼지변수의 크기를 나타내는 d_1, d_2의 크기에 따라 다양한 응답을 보이는데 d_1, d_2이 커질수록 정정 시간이 늦어짐을 보이고 d_1, d_2이 작아 질수록 과도응답에서 오버슛이 커지는 특성을 보인다. 따라서 d_1, d_2의 적절한 선택이 필요하다. 그림 6.20은 $G(s)$가 식 (6-12)와 같을 때 d_2의 변화에 따른 시스템 응답을 보여주고 있다. $d_2 = 0.2$일 때는 오버슛이 나타나고 있으며 d_1의 값이 커질수록 과제어가 되어 정정 시간이 늦어짐을 보여주고 있다.

$$G(s) = \frac{1}{3s^3 + 10s^2 + 9s + 2} \tag{6-12}$$

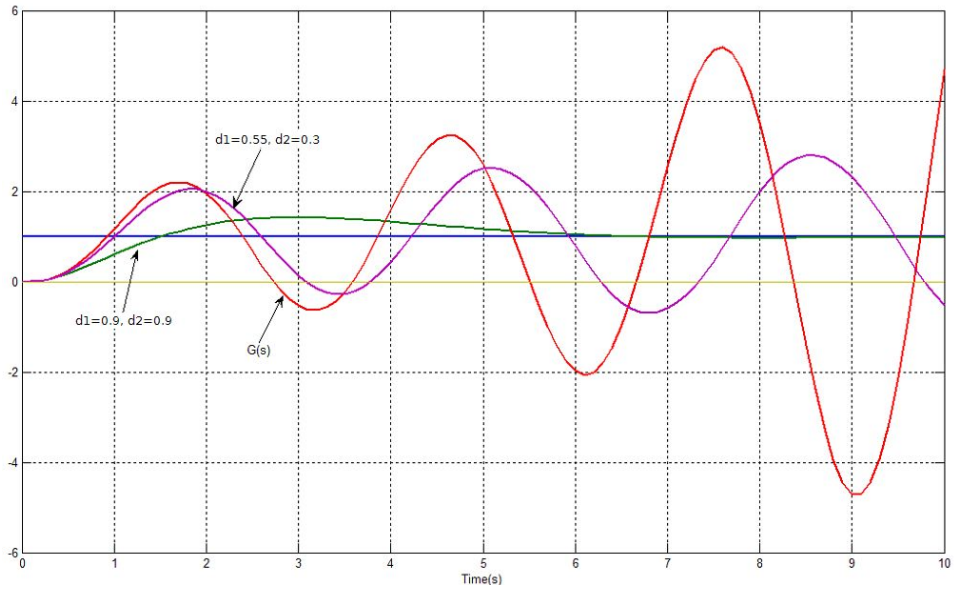


그림 6.19. d_1, d_2의 변화에 대한 응답.

Fig. 6.19. The response on changing d_1, d_2.

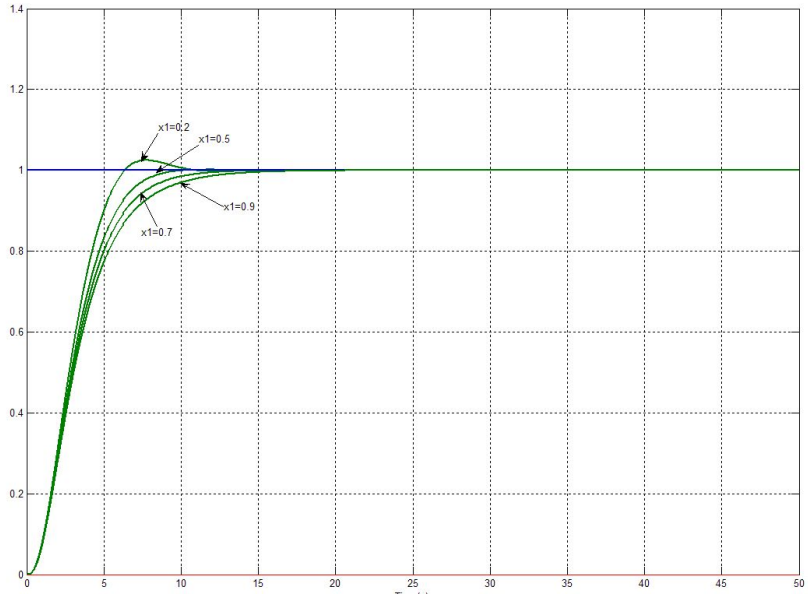


그림 6.20. x_1의 변화에 따른 퍼지제어기 응답 특성.

Fig. 6.20. The response characteristic response for FLC.

4. Circle Criterion 해석

식 (6-4)에서 제시된 $G(s)$에 퍼지제어기를 포함시켰을 경우 시스템이 안정할 수 있는 후건부 퍼지변수의 크기(d_1, d_2의 크기)의 범위를 구하기 위해 Circle Criterion 방법을 통해 안정도에 대한 해석을 하였다. Circle Criterion의 경우 Describing Function에 비해 포괄적인 안정도를 표시하고 있다. 그림 6.21은 Cricle Criterion해석을 통한 플랜트 $G(s)$에 대한 제어가 불안정해지는 d_1, d_2의 영역을 나타내고 있다. 그림 6.16의 Describing Function에 의한 해석에서 보여주는 불안전 영역 보다 넓은 영역을 보여 주고 있다.

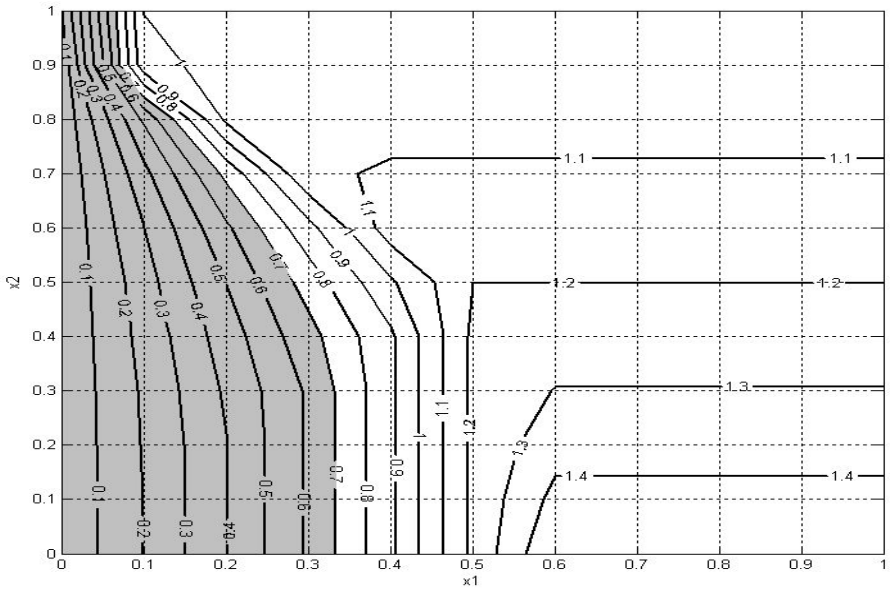


그림 6.21. 임계점 $(-0.7, j0)$에서의 불안정 영역.

Fig. 6.21. The unstable region at critical point $(-0.7, j0)$.

제 8 장 결 론

본 논문에서는 기존의 퍼지 제어기의 설계에 있어 퍼지 변수의 선택이 시행착오법이나 전문가의 지식에 의존하여 정하게 되어 시스템의 전체적 안정을 고려하지 않고 직관적 판단에 의존 하던 문제를 퍼지제어기의 응답특성을 비선형 시스템의 안정성을 판단하는 방법을 이용하여 도식적으로 시스템이 안정할 수 있는 후건부 퍼지변수의 크기의 범위를 제시하는 체계적인 방법을 제안하였다. 본 연구를 통해 후건부 퍼지변수의 크기에 따라 시스템이 안정할 수도 불안정 할 수도 있음을 보였으며 이러한 특성을 이용하여 다음과 같은 단계를 거쳐 시스템이 안정할 수 있는 퍼지제어기의 후건부 퍼지변수의 범위를 결정할 수 있는 방법을 제시하였다.

첫째, 퍼지제어기의 전건부 퍼지변수는 고정하고 후건부 퍼지변수가 중앙값을 기준으로 좌우 대칭이 되도록 구성하였다.

퍼지변수의 크기를 결정하는 변수인 d는 Describing Function의 기본조건을 충족하기 위해 좌우 대칭이 되도록 하기위해서 퍼지변수의 개수에 따라 구분되었다. 퍼지변수가 3개이면 d_1, d_2로 퍼지변수가 5개이면 d_1, d_2, d_3, 퍼지변수가 7개일 경우 d_1, d_2, d_3, d_4로 하여 가운데 값인 AZ를 중심으로 퍼지변수 값이 좌우 대칭이 되도록 구성하였다.

둘째, 후건부 퍼지변수의 크기를 결정하는 변수인 d의 크기에 따른 퍼지제어기 응답을 구하였다.

d의 각 값을 0.1씩 변화시켜 퍼지제어기의 응답특성을 구하였다. 따라서 퍼지변수가 3개이면 121개, 퍼지변수가 5개이면 726개, 7개이면 1,936개의 응답을 구하였다. 좌반면의 퍼지변수의 경우 퍼지변수의 범위가 $[-1, 0]$에 존재하며 우반면의 경우 $[0, 1]$존재하도록 하였다.

셋째, 구해진 퍼지제어기 입출력 응답이 비선형으로 비선형 시스템의 안정도 판별에 이용되는 Describing Function 방법과 Circle Criterion 방법을 이용하여 퍼지제어기 응답곡선의 특성을 도출하였다.

본 연구에서는 Fuzzy Logic의 후건부 퍼지변수의 크기 변화에 대한 입출력 곡선의 부분 선형화를 통하여 유사선형화 하였다. Describing Function은 입력의 크기에 대한 함수를 이득으로 하여 비선형 요소를 유사선형화 하였으며 Circle Criterion은 Fuzzy Logic의 구역조건 특성을 이용하여 시스템의 안정도를 판별하였다. 후건부 퍼지변수의 변화에 대한 시스템 응답의 구역조건을 이용하여 이에 상응하는 기울기에 대한 원을 Nyquist 선도에 그려 도식적으로 안정도를 확인하였다. 또한 $CP_{\min}(d_1, d_2)$ 궤적을 제시하여 가시적인 판단이 가능하도록 하며 시스템이 안정할 수 있는 d_1, d_2의 크기의 범위를 확인 할 수 있다. 본 연구에서는 궤적의 표시를 위해 Circle Criterion의 안정 조건 중 '$0 = \alpha < \beta$과 같은 경우 $G(s)$의 모든 근이 좌반면에 있고 $G(jw)$의Nyquist 선도가 $s = -1/\beta$의 오른쪽에 있을 경우'를 사용하였는데 이는 좀 더 넓은 범위의 안정 조건을 나타내고 있어 정확한 안정영역을 제시하지 못하였다.

퍼지제어기를 포함하는 시스템의 안정성 판정을 위한 Describing Function과 Circle Criterion을 이용한 실험 결과 Circle Criterion은 Describing Function 협소한 안정 영역을 보여주었으며 이는 일반화를 위해 Circle Criterion의 안정영역 결정시 퍼지 변수의 크기에 대해 각각의 응답에 대한 정밀한 조건 적용이 이루어지지 않고 포괄적으로 적용되었기 때문이다.

넷째, 위에서 구해진 특성을 Nyquist 선도상에 투영하여 플랜트의 교차점과의 비교를 통해 시스템의 안정여부를 판단하였다.

퍼지제어기의 응답 특성에 따른 $-1/DF$의 최대값 그래프를 구하고 플랜트의 Nyquist 선도상의 임계점$(-1, j0)$과의 관계를 통해 전체시스템이 안정되기 위한 퍼지변수의 범위를 정의하고 구해진 퍼지변수의 범위중 적절한 값을 선택하여 시

스템이 안정됨을 보였다.

다섯째, 후건부 퍼지변수의 크기를 결정하는 d에 따른 Describing Function과 Circle Criterion에 의해 구해진 임계점을 도식적으로 표현하여 시스템이 안정할 수 있는 d의 범위를 확인할 수 있도록 하였다.

$-1/DF$의 최대값 그래프의 경우 퍼지변수의 개수가 증가할수록 복잡도가 증가하였다. $-1/DF$의 최대값 그래프를 이용한 안정도 판별은 시스템의 전체적인 안정도에 대한 가시적인 판단을 가능하게 하며 시스템이 안정하기 위한 후건부 퍼지변수 크기의 범위를 제시하고 있다.

본 연구를 통해 SISO 퍼지제어기는 Nyquist 선도상의 임계점$(-1, j0)$을 이동시켜 안정도를 보장할 수 있게 함을 볼 수 있었으며 후건부 퍼지변수의 크기를 나타내는 d가 커질수록 과제어가 이루어져 응답속도가 느려지고 작을수록 과도응답에서 오버슈트를 보이고 있다 따라서 $-1/DF$의 최대값 그래프에서 구해진 안정영역에서 d는 신중하게 결정되어져야 한다.

제안된 방법은 효과적으로 퍼지제어기의 응답특성을 정의하고 있지만 퍼지제어기의 비선형 특성으로 인하여 퍼지제어기에 대한 제약조건이 다수 주어져 있다. 또한 Describing Function과 Circle Criterion의 수렴 조건으로 인하여 전체 시스템에서 비선형 요소는 한부분만 주어져야 함으로 플랜트가 비선형이 아닌 선형화 되어진 시스템이라는 제약조건이 존재한다. 추후 다양한 특성의 시스템에 대한 적용을 위해 이 제약 조건의 해소에 대한 연구가 지속되어야 할 것으로 본다.

향후 연구과제로는 다중 입력에 대한 시스템 안정도 판별을 위해 가시적인 방법을 제시하는 것으로 이는 Describing Function의 경우 '오직 하나의 비선형 요소만이 존재해야 한다.' 라는 조건을 만족하여야 함으로 이러한 제약 조건의 해결을 위해 입력에 대한 비선형적 해석에 대한 방법이 연구되어져야 할 것이다. 또한 본 연구에서 보여주었듯이 퍼지 제어기가 주파수 응답상의 임계점인 $(-1, j0)$을 이동 시킬 수 있는

데 이를 이용하여 퍼지 제어기를 이용한 제어시스템의 안정도를 향상 시킬 수 있는 구체적 방법에 대한 연구가 필요하다 하겠다.

참 고 문 헌

[1] Bretthauer, G. and Opitz, H.-P, *Stability of fuzzy systems, Proc. EUFIT94. Aachen, Germany, Sept., 1994, 283-290, 1994.*

[2] Hojo, T., Terano, T., and Masui, S., *Stability Analysis of Fuzzy Control Systems, Proc. IFSA 91, Engineering, Brussels, 44-49, 1991.*

[3] Hwang, G.-C and Liu, S. C., *A Stability Approach to Fuzzy Control Design for Nonlinear Systems, Fuzzy Sets and Systems, 48, 279-287, 1992.*

[4] Tanaka, K. and Sugeno, M., *Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, Fuzzy Sets and Systems, 45, 135-156, 1992.*

[5] Chen, Y. Y., *Stability Analysis of Fuzzy Control a Lyapunov Approach, IEEE Ann. Conf. Syst., Man, and Cyber., 19, 1027-1031, 1986-*

[6] Barreiro, A. and Aracil, J., *Stability of Uncertain Dynamical Systems. Proc., IFAC Symp. on AI in Real-Time Control, Delft, 177-182, 1992.*

[7] Opitz, H.P., *Stability Analysis and Fuzzy Control, Proc. Fuzzy Duisburg 94, Int. Workshop on Fuzzy Technologies in Automation and Intelligent Systems, Duisburg, 1994.*

[8] Driankov, D., Hellendoorn, H., and Reinfrank, M., *An Introduction to Fuzzy Control, Springer-Verlag, Berlin, 1993.*

[9] Aracil, J., Garcia-Cezero, A., Barreiro, A., and Ollero, M., *Stability Analysis of Fuzzy Control Systems: A Geometrical Approach, Kulikowski, C.A. and Huber, R.M. (eds.), AI, Expert Systems and Languages in Modeling and Simulation, North Holland, Amsterdam, 323-330, 1988.*

[10] Ray, K. S. and Majumder, D. D., *Application of Circle Criteria for Stability Analysis Associated with Fuzzy Logic Controller, IEEE Trans. on Syst., Man and Cyber., 14, 345-349, 1984.*

[11] Bühler, H., *Stabilitatsuntersuchung von Fuzzy-Regelungssystemem, Proc., 3, Workshop Fuzzy Control des GMA-UA 1.4.1, Dortmund, 1-12, 1993.*

[12] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, 1991.

[13] Ray S.K. and D.D. Majunder, Application of Circle Criteria for Stability Analysis of Linear SISO and MIMO System Associated with Fuzzy Logic Controllers, *IEEE Trans. Sist. Man. Cyber.,* vol SMC-14,2, pp.345-349, 1984.

[14] Ollero, A., A, Garcia-Cerezo, J. Aracil and A. Barreiro. Stability of Fuzzy Control Systems. Chapter 6 in *An Introduction to Fuzzy Control*, D. Driankov (editor). Springer-Verlag, 1993.

[15] Mees, A.I., Describing functions, circle criteria and multiple-loop feedback systems, *Proc. IEE.* Vol. 120, No. 1, pp.126-130, 1973.

[16] Rosenbrock, H. H. *Computer-Aided control system design*, Academic Press, 1974.

[17] Ollero, A., J. Aracil and F. Gordillo Stability Analysis of MIMO Fuzzy Control Systems in the Frequency Domain, Proc. FUZZ-IEEE'98, 1998.

[18] Gordillo F., J. Aracil, A. Ollero, Frequency Domain Analysis of Multivariable Fuzzy Control Systems. *Whalley and Ebrahimi, Eds. Application of Multi-Variable System Techniques,* Professional Engineering Publishing Ltd., pp.243-252, 1998.

[19] Tanaka K., and M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control system, *Fuzzy sets and systems*, vol. 45, pp. 135-156, 1992.

[20] Tanaka K., K. Ikeda and H. O. Wang. Robust Stabilization of a class of Uncertain Nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic Stabilizability, H_∞ Control Theory and Linear Matrix Inequalities, *IEEE Trans on Fuzzy Systems* 4(1), pp. 1-13, 1996.

[21] Boyd, S., L. El Gahoui, E. Feron and V. Balakrishnan *Linear Matrices Inequalities in Systems and Control Theory,* vol 15 of SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994.

[22] Johansson, M., A. Rantzer, and K-E Arzen. Piecewise Quadratic Stability for Affine Sugeno Sytems. *Proc. FUZZ-IEEE'98,* 1998.

[23] Bao-Gang Hu, George K. I. Mann, Raymond G. Gosine, "A Systematic Study of Fuzzy PID Controllers-Function-Based Evaluation Approach", *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 9, NO. 5,* pp.699-712, OCTOBER 2001.

[24] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, 1991.

[25] A. Gelb and W. E. Vander Velde, "Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design", McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.

[26] D. P. Atherton, "Nonlinear Control Engineering", Van Nostrand Reinhold Co., London &New York; full edition 1975, student edition 1982.

[27] E. H. Mamdani, "Application of fuzzy algorithms for simple dynamic plant", Proc. Inst. Elect. Eng., vol. D-121, pp. 1585-1588, 1974.

[28] D. N. Hannebrink, H. S. Lee, H. Weinstock, and J. K. Hedrick, "Influence of axle load, track gauge, and wheel prole on rail vehicle hunting", *Trans. ASME - J. Eng. Ind.,* pp.186-195, 1977.

[29] C.T. Chao, C.C. Teng "A PD-like self-tuning fuzzy controller without steady-state error", *Fuzzy Sets and Systems 87,* pp. 141-154, 1997.

<부록 : Mathlab 소스>

% Describing Function 구하기

```
aaa=[]; yyy=[]; yyyi=[]; aa=[]; s=1;

for kk=0:0.1:1
    % MF 중 S,B 변수의 크기를 조정한다.
    for jj=0:0.1:1 % x1=x2임으로 반복 삭제
    % MF 중 Z 변수의 크기를 조정한다.
        [p,slop,lp]=findParam(jj,kk);
        if kk==1
            kk=0.9999999;
        end;
        if kk==0
            kk=0.0000001;
        end;
        if jj==1
            jj=0.9999999;
        end;
        if jj==0
            jj=0.0000001;
        end;
        %[p,slop,lp]=findParam(kk,kk); %x1=x2일 경우 사용a
        % s-> 기울기가 변경되는 점
        % d-> 첫번째 직선의 기울기
        % f-> 두번째 직선의 기울기
        % lp -> 마지막 x의 값


        yy=[];
```

```
yyi=[];
%aa=[];
for a=0:0.1:1
    if(a<=p(10))
        y=slop(1);
        yy=[yy y];
        yyi=[yyi (-1/y)];
    elseif(p(10)<a & a<=p(11))
      y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)/
a)^2))+slop(2);
      yy=[yy y];
      yyi=[yyi (-1/y)];
    elseif(p(11)<a & a<=p(12))
        y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)/
a)^2))+(2*(slop(2)-slop(3))/pi)*(asin(p(11)/a)+(p(11)/a)*sqrt(1-(p(11)/a)^2))+slop(3);
        yy=[yy y];
        yyi=[yyi (-1/y)];
    elseif(p(12)<a & a<=p(13))
        y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)/
a)^2))+(2*(slop(2)-slop(3))/pi)*(asin(p(11)/a)+(p(11)/a)*sqrt(1-(p(11)/a)^2))+(2*(slo
p(3)-slop(4))/pi)*(asin(p(12)/a)+(p(12)/a)*sqrt(1-(p(12)/a)^2))+slop(4);
        yy=[yy y];
        yyi=[yyi (-1/y)];
    elseif(p(13)<a & a<=p(14))
        y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)/
a)^2))+(2*(slop(2)-slop(3))/pi)*(asin(p(11)/a)+(p(11)/a)*sqrt(1-(p(11)/a)^2))+(2*(slo
p(3)-slop(4))/pi)*(asin(p(12)/a)+(p(12)/a)*sqrt(1-(p(12)/a)^2))+(2*(slop(4)-slop(5))/
pi)*(asin(p(13)/a)+(p(13)/a)*sqrt(1-(p(13)/a)^2))+slop(5);
        yy=[yy y];
        yyi=[yyi (-1/y)];
```

```
elseif(p(14)<a & a<=p(15))
    y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)/
a)^2))+(2*(slop(2)-slop(3))/pi)*(asin(p(11)/a)+(p(11)/a)*sqrt(1-(p(11)/a)^2))+(2*(slo
p(3)-slop(4))/pi)*(asin(p(12)/a)+(p(12)/a)*sqrt(1-(p(12)/a)^2))+(2*(slop(4)-slop(5))/
pi)*(asin(p(13)/a)+(p(13)/a)*sqrt(1-(p(13)/a)^2))+(2*(slop(5)-slop(6))/pi)*(asin(p(14)
/a)+(p(14)/a)*sqrt(1-(p(14)/a)^2))+slop(6);
    yy=[yy y];
    yyi=[yyi (-1/y)];
elseif(p(15)<a & a<=p(16))
    y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)/
a)^2))+(2*(slop(2)-slop(3))/pi)*(asin(p(11)/a)+(p(11)/a)*sqrt(1-(p(11)/a)^2))+(2*(slo
p(3)-slop(4))/pi)*(asin(p(12)/a)+(p(12)/a)*sqrt(1-(p(12)/a)^2))+(2*(slop(4)-slop(5))/
pi)*(asin(p(13)/a)+(p(13)/a)*sqrt(1-(p(13)/a)^2))+(2*(slop(5)-slop(6))/pi)*(asin(p(14)
/a)+(p(14)/a)*sqrt(1-(p(14)/a)^2))+(2*(slop(6)-slop(7))/pi)*(asin(p(15)/a)+(p(15)/a)*
sqrt(1-(p(15)/a)^2))+slop(7);
    yy=[yy y];
    yyi=[yyi (-1/y)];
elseif(p(16)<a & a<=1)
    y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)/
a)^2))+(2*(slop(2)-slop(3))/pi)*(asin(p(11)/a)+(p(11)/a)*sqrt(1-(p(11)/a)^2))+(2*(slo
p(3)-slop(4))/pi)*(asin(p(12)/a)+(p(12)/a)*sqrt(1-(p(12)/a)^2))+(2*(slop(4)-slop(5))/
pi)*(asin(p(13)/a)+(p(13)/a)*sqrt(1-(p(13)/a)^2))+(2*(slop(5)-slop(6))/pi)*(asin(p(14)
/a)+(p(14)/a)*sqrt(1-(p(14)/a)^2))+(2*(slop(6)-slop(7))/pi)*(asin(p(15)/a)+(p(15)/a)*
sqrt(1-(p(15)/a)^2))+(2*(slop(7)-slop(8))/pi)*(asin(p(16)/a)+(p(16)/a)*sqrt(1-(p(16)/
a)^2))+slop(8);
    yy=[yy y];
    yyi=[yyi (-1/y)];
elseif(a>1)
    %y=(2*(slop(1)-slop(2))/pi)*(asin(p(10)/a)+(p(10)/a)*sqrt(1-(p(10)
/a)^2))+(2*(slop(2)-slop(3))/pi)*(asin(p(11)/a)+(p(11)/a)*sqrt(1-(p(11)/a)^2))+(2*(slo
```

```
p(3)-slop(4))/pi)*(asin(p(12)/a)+(p(12)/a)*sqrt(1-(p(12)/a)^2))+(2*(slop(4)-slop(5))/
pi)*(asin(p(13)/a)+(p(13)/a)*sqrt(1-(p(13)/a)^2))+(2*(slop(5)-slop(6))/pi)*(asin(p(14)
/a)+(p(14)/a)*sqrt(1-(p(14)/a)^2))+(2*(slop(6)-slop(7))/pi)*(asin(p(15)/a)+(p(15)/a)*
sqrt(1-(p(15)/a)^2))+(2*(slop(7)-slop(8))/pi)*(asin(p(16)/a)+(p(16)/a)*sqrt(1-(p(16)/
a)^2))+(2*(slop(8))/pi)*(asin(p(17)/a)+(p(17)/a)*sqrt(1-(p(17)/a)^2));

                    y=1; yy=[yy y]; yyi=[yyi (-1/y)];
                end;
            end;
            yyy=[yyy; yy]; yyyi=[yyyi; yyi];
        end;
end;
aa=[0:0.1:1]; figure(10); hold off subplot(2,1,1); plot(aa,yyy); grid
subplot(2,1,2); plot(aa,yyyi); grid

%%%%% yyyi의 max 값을 통해 범위를 구하는 부분
yyyimax=[]; yyyimax2=[];
for(ij=1:121)
    yyyimax=[yyyimax max(yyyi(ij,:)) ];
    if (mod(ij,11)==0)
        yyyimax2=[yyyimax2 yyyimax ];
        yyyimax=[];
    end;
end;
```

% Describing Function의 부분 선형화 파라미터 구하기

```
function [p,slop,lastPoint] = findParam(d1,d2)
% p-> 기울기가 변경되는 점
% slop1-> 첫번째 직선의 기울기
% slop2-> 두번째 직선의 기울기
```

```
% lastPoint -> 마지막 x의 값

for x=-1:0.01:1
    xx=[xx;x];
    % 퍼지로직의 끝출력값의 크기가 -1,1 이되어야 하는데 그렇게 되지 않아 함수로 변환을 시켜 준다.
    % 퍼지 양 끝값의 크기는 d1에 따라 달라진다.
    kk=0.2*d2^2-0.6941*d2+1.497;
    yy=[yy;fuzzyfcn2(x,d1,d2).*kk];
end;

sz=size(yy); sz=sz(1,1); theta=atan(yy(sz));

rot=[cos(theta) -sin(theta); sin(theta) cos(theta)];
rotV=[xx yy]*rot;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
plot(xx,rotV(:,2));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[maxy,maxp]=max(rotV(:,2));
[miny,minp]=min(rotV(:,2));

if(maxp<minp)
    s1=maxp;
    s2=minp;
else
    s2=maxp;
    s1=minp;
end;
```

```
pCenter=round(sz/2);
%%%
```

```
[maxy,maxp]=max(abs(rotV(:,2)));
p111=pCenter+maxp;

    %%%%%%%%% p112 %%%%%%%%%%%%
theta=atan((yy(s2)-yy(p11))/(xx(s2)-xx(p11)));
rot=[cos(theta) -sin(theta); sin(theta) cos(theta)];
rotV=[xx(p11:s2), yy(p11:s2)]*rot;
[maxy,maxp]=max(abs(rotV(:,2)));
p112=p11+maxp;

    %%%%%%%%%%%% p121 %%%%%%%%%%%%%%%%
if(p12>sz)
    p12=sz;
end;
if((xx(p12)-xx(s2))==0)
    theta=atan((yy(p12)-yy(s2))/0.0000000000000000001);
else
    theta=atan((yy(p12)-yy(s2))/(xx(p12)-xx(s2)));
end;

rot=[cos(theta) -sin(theta); sin(theta) cos(theta)];
rotV=[xx(s2:p12), yy(s2:p12)]*rot;

[maxy,maxp]=max(abs(rotV(:,2)));
p121=s2+maxp;

    %%%%%%%%% p122 %%%%%%%%%%%%
if((xx(sz)-xx(p12))==0)
   theta=atan((yy(sz)-yy(p12))/0.0000000000001);
```

```
else
    theta=atan((yy(sz)-yy(p12))/(xx(sz)-xx(p12)));
end;

rot=[cos(theta) -sin(theta); sin(theta) cos(theta)];
rotV=[xx(p12:sz), yy(p12:sz)]*rot;

[maxy,maxp]=max(abs(rotV(:,2)));
p122=p12+maxp;

%%%%%%%%%%%% 좌 반면 구하기 %%%%%%%%
if(p11==0) p11=p11+1;
elseif(p11>sz) p11=sz;
end;
if(p12==0) p12=p12+1;
elseif(p12>sz) p12=sz;
end;
if(p111==0) p111=p111+1;
elseif(p111>sz) p111=sz;
      end;
if(p112==0) p112=p112+1;
elseif(p112>sz) p112=sz;
      end;
if(p121==0) p121=p121+1;
elseif(p121>sz) p121=sz;
      end;
if(p122==0) p122=p222+1;
elseif(p122>sz) p122=sz;
      end;
```

```
p21=pCenter-(p11-pCenter);
if(p21==0) p21=p21+1;
elseif(p21>sz) p21=sz;
end;
p22=round((sz-p12));
if(p22==0) p22=p22+1;
elseif(p22>sz) p22=sz;
end;
p211=pCenter-(p111-pCenter);
if(p211==0) p211=p211+1;
elseif(p211>sz) p211=sz;
    end;
p212=pCenter-(p112-pCenter);
if(p212==0) p212=p212+1;
elseif(p212>sz) p212=sz;
    end;
p221=pCenter-(p121-pCenter);
if(p221==0) p221=p221+1;
elseif(p221>sz) p221=sz;
    end;
p222=pCenter-(p122-pCenter);
if(p222==0) p222=p222+1;
elseif(p222>sz) p222=sz;
    end;

p=[-1;xx(p222); xx(p22);  xx(p221);  xx(s1);  xx(p212);  xx(p21);
      xx(p211);  xx(pCenter);  xx(p111);  xx(p11);  xx(p112);
      xx(s2);  xx(p121);  xx(p12);  xx(p122);
      xx(sz)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%
```

```
    a6=(yy(p12)-yy(p121))/(xx(p12)-xx(p121));
end;
if((xx(p122)-xx(p12))==0)
    a7=(yy(p122)-yy(p12))/0.00000000000000001;
else
    a7=(yy(p122)-yy(p12))/(xx(p122)-xx(p12));
end;

if((xx(sz)-xx(p122))==0)
    a8=(yy(sz)-yy(p122))/0.0000000000001;
else
    a8=(yy(sz)-yy(p122))/(xx(sz)-xx(p122));
end;
slop=[a1;a2;a3;a4;a5;a6;a7;a8];
lastPoint=yy(sz);

%%%
```

```
b23=yy(p212)-a4*xx(p212);
b24=yy(s1)-a5*xx(s1);
b25=yy(p221)-a6*xx(p221);
b26=yy(p22)-a7*xx(p22);
b27=yy(p222)-a8*xx(p222);
b=[b11 b12 b13  b14 b15 b16 b17 b21 b22 b23 b24 b25 b26 b27];
```

% Describing Function 궤적 구하기

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%contour of FLC
figure(5);
hold off;
tyyyi=yyyi';
datai=max(tyyyi)+(tyyyi(1,:)+tyyyi(11,:))/10;
datai=datai';
datat=[];
X=[0:0.1:1];
Y=X;
for ii=1:11
    %data=datai((ii-1)*11+1:ii*11,1)./0.679;
    data=datai((ii-1)*11+1:ii*11,1);
    datat=[datat data];
end
[c,h]=contour(X,Y,datat'*-1,0:0.2:10);
clabel(c,h)
xlabel('x1');
ylabel('x2');
grid
%
```

```
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% contour of PM
w=[0:0.00001:30];
g=datat;
totalang=[];
totalmag=[];
totalf=[];
tof=[];
tang=[];
tmag=[];
xx=[0:0.1:1];

f=20./(-3i*w.^3-10.*w.^2+9i*w+2);
ang=180+angle(f)*180/pi;
mag=abs(f);

for ii=1:11
    for jj=1:10
        tang(jj,ii)=ang(1,min(find(round(mag*100)==round(g(jj,ii)*-100))));
        %min(find(round(mag*1000)==round(g(jj,ii)*-1000)))
    end
end
figure(20)
[c,h]=contour(xx,xx,tang',0:10:180);
clabel(c,h)
xlabel('x1');
ylabel('x2');
```

```
% Circle Criterion 구하기
pp1=[]; pp2=[];

for(d2=0:0.1:1)
    for (d1=0:0.1:1)
        if(d1==0)
            d1=0.001;
        end
        if(d2==0)
            d2=0.001;
        end
        if(d1==1)
            d1=0.99;
        end
        if(d2==1)
            d2=0.99;
        end

        [p1,p2]=findCircle(d1,d2);
        pp1=[pp1 p1];
        pp2=[pp2 p2];
    end
end;


xp=[0:0.1:2*pi]; xp=[xp 0]; rr=abs(1./pp1-1./pp2)/2; bb=-1./pp1-rr;
figure(40); hold off

cnum=[20]; cden=[3 10 9 2];
nyquist(cnum,cden);
```

```
hold on

for(ii=1:121)
    if(pp1(1,ii)>pp2(1,ii))
        bb1=-1/pp1(1,ii)-rr(1,ii);
    else
        bb1=-1/pp2(1,ii)-rr(1,ii);
    end;

  drpp=rr(1,ii).*exp(i*xp)+bb1;
  plot(drpp,'r');
  hold on;
end;
% 최대값 최소값 표현하기
figure(3);
cnum=[20];
cden=[3 10 9 2];
nyquist(cnum,cden);
hold on
for (ii=1:121)
    plot([-1/pp1(1,ii)+ii*0.1*j -1/pp2(1,ii)+ii*0.1*j])
end;
%

%%%% contour 그리기
figure(35);
datai=-1./pp1;
datai=datai';
datat=[];
X=[0:0.1:1];
```

```
Y=X;
for ii=1:11
    %data=datai((ii-1)*11+1:ii*11,1)./0.679;
    data=datai((ii-1)*11+1:ii*11,1);
    datat=[datat data];
end
[c,h]=contour(X,Y,datat'*-1,0:0.1:10);
clabel(c,h)
xlabel('x1');
ylabel('x2');
grid

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% contour of PM %%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

w=[0:0.00001:30]; g=datat; totalang=[]; totalmag=[];
totalf=[]; tof=[]; tang=[]; tmag=[]; xx=[0:0.1:1];

f=20./(-3i*w.^3-10.*w.^2+9i*w+2);
ang=180+angle(f)*180/pi;
mag=abs(f);

for ii=1:11
    for jj=1:11
        tang(jj,ii)=ang(1,min(find(round(mag*100)==round(g(jj,ii)*-100))));
        %min(find(round(mag*1000)==round(g(jj,ii)*-1000)))
    end
end
```

% Circle 구하기

```
function [p1,p2]= findCircle(d1,d2)
%%%
```

```
ppy=yy(co);
ppx1=xx(co1);
ppy1=yy(co1);
p1=ppy/ppx;
p2=ppy1/ppx1;
figure(20)
plot(xx,yy)
hold on
plot(xx,p1*xx,'r')
plot(xx,p2*xx,'r')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Circle Criterion 궤적 구하기 %%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
datai=-1./pp1;
datai=datai';
datat=[];
X=[0:0.1:1];
Y=X;
for ii=1:11
    %data=datai((ii-1)*11+1:ii*11,1)./0.679;
    data=datai((ii-1)*11+1:ii*11,1);
    datat=[datat data];
end
[c,h]=contour(X,Y,datat'*-1,0:0.1:10);
clabel(c,h)
xlabel('x1');
ylabel('x2');
grid
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% contour of PM %%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

w=[0:0.00001:30]; g=datat; totalang=[]; totalmag=[]; totalf=[];
tof=[]; tang=[]; tmag=[]; xx=[0:0.1:1];

f=20./(-3i*w.^3-10.*w.^2+9i*w+2);
ang=180+angle(f)*180/pi;
mag=abs(f);

for ii=1:11
    for jj=1:11
        tang(jj,ii)=ang(1,min(find(round(mag*100)==round(g(jj,ii)*-100))));
        %min(find(round(mag*1000)==round(g(jj,ii)*-1000)))
    end
end
figure(60)
[c,h]=contour(xx,xx,tang',0:10:180);
clabel(c,h); xlabel('x1'); ylabel('x2');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%% Fuzzy Logic %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function y = fuzzyfcn2(error1,d1,d2)
temp=error1;
if temp>=1
    temp=0.9999999999;
end;
```

```
if temp<=-1
    temp=-0.9999999999;
end;

if (d1==0)
    d1=0.9999999999;
end;

if (d2==0)
    d2=0.0000000000001;
end;

x=-1:0.001:1;
y=-1:0.001:1;

% Premise Membersip Function
N_mf=trapmf(x,[-1 -1 -1 0]);
Z_mf=trimf(x,[-1 0 1]);
P_mf=trapmf(x,[0 1 1 1]);
antecedent_mf=[N_mf;Z_mf;P_mf];

% Consequence Membership Function
%low_mf=trapmf(y,[0 0 0 5]);
CN_mf=trapmf(y,[-1 -1 -1 -1*d2]);
CZ_mf=trimf(y,[-1*d1 0 d1]);
CP_mf=trapmf(y, [d2 1 1 1]);
consequent_mf=[CN_mf;CZ_mf;CP_mf];

if temp==1 ind=max(find(x>0));
```

```
else  ind=min(find(x>temp));
end;
dof1=N_mf(ind);
dof2=Z_mf(ind);
dof3=P_mf(ind);
dof=[dof1;dof2;dof3];

consequent=[min(CP_mf,dof3);
            min(CZ_mf,dof2);
            min(CN_mf,dof1)];

output_mf=max(consequent);
center=  defuzz(y,output_mf,'centroid');

y=center;
```

저작물 이용 허락서

학 과	제어계측공학과	학 번	10341086	과 정	박사
성 명	한글: 이경웅 한문 : 李 京 雄 영문 : Lee,kyoungwoong				
주 소	서울 강동구 암사동 삼성광나루아파트 104동905호				
연락처	E-MAIL : yikw21c@naver.com				
논문제목	한글 : 퍼지제어기의 멤버쉽 함수의 퍼지변수 변화에 따른 안정도 고찰 영어 : Consideration for Stability on Changing Fuzzy Variables of Membership Function in Fuzzy Logic Controller				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집·형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포·전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송·출력을 허락함.

동의여부 : 동의(●) 반대( )

2010년 2월

저작자: 이 경 웅 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하