creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000236097

2008년 2월

석사학위논문

비정상 3차원 *Navier-Stokes* 식을 이용한 원형실린더 주위의 공력음향해석

조선대학교 대학원

항 공 우 주 공 학 과

이 상 수

비정상 3차원 *Navier-Stokes* 식을 이용한 원형 실린더 주위의 공력음향해석

Acoustics Analysis of Circular Cylinder using Unsteady Three Dimensional Navier-Stokes Equation

2008년 2월 25일

조선대학교 대학원

항 공 우 주 공 학 과

이 상 수

비정상 3차원 *Navier-Stokes* 식을 이용한 원형 실린더 주위의 공력음향해석

지도교수 김 재 수

이 논문을 공학 석사학위신청 논문으로 제출함.

2007년 11월

조선대학교 대학원

항 공 우 주 공 학 과

이 상 수

이상수의 석사학위논문을 인준함

위 원 장 CFTech 대표이사 정 동 규 인

위 원 조선대학교 교수 김 재 수 인

위 원 조선대학교 교수 이 상 기 인

2007 년 11 월 16 일

조선대학교 대학원

목 차

LIST OF FIGURES ..... *iv*
NOMENCLATURE ..... *vi*
ABSTRACT ..... *vii*

제 *1* 장 서론 *1*

제 *2* 장 지배방정식 및 변환 *2*
제 *1* 절 지배 방정식 *2*
제 *2* 절 지배방정식의 좌표변환 *5*
제 *3* 절 기하보존 법칙 *7*
제 *4* 절 무차원화 *9*
제 *5* 절 시간 이산화 *10*
제 *6* 절 공간 이산화 *12*
제 *7* 절 일반화된 특성치 경계조건 *15*
제 *8* 절 인공점쇄항 *25*
제 *9* 절 *Nonreflecting Zonal Characteristic Boundary Condition* .. *29*

제 *3* 장 병렬처리기법 *30*
제 *1* 절 *OpenMP* *31*
제 *2* 절 *Cluster OpenMP* *33*
제 *3* 절 *MPI (Message Passing Interface)* *34*

제 *4* 장 계산 결과 및 검토 *35*
제 *1* 절 격자계 *35*
제 *2* 절 경계조건이 잘못 적용된 경우의 음향 해석 *36*
제 *3* 절 정상 경계조건에 의한 해석 결과 *46*

제 5 장 결론 45

참고 문헌 50

LIST OF FIGURE

Fig. 2.3.1 2nd order finite differentiation Invidcid Flux Vector 8
Fig. 2.3.2 4th order finite differentiation Invidcid Flux Vector 8
Fig. 2.7.1 Numerical and Physical reflected wave at boundary the advection equation 15
Fig. 2.7.2 Numerical and Physical reflected wave at boundary the Euler equation 16
Fig. 2.7.3 Waves leaving and entering the computational domain 17
Fig. 3.1.1 Parallel computing using OpenMp 30
Fig. 3.1.2 OpenMP using performance improvement 31
Fig. 3.1.3 OpenMP using calculated time 31
Fig. 3.2.1 Parallel computing using Cluster OpenMP 32
Fig. 3.2.2 Cluster OpenMP using performance improvement 33
Fig. 3.2.3 Cluster OpenMP using calculated time 33
Fig. 3.3.1 Parallel computing using MPI 33
Fig. 3.3.2 MPI using calculated time (itr=100) 34
Fig. 3.3.3 MPI using perfomance improvement time (itr=100) 34
Fig. 4.1.1 Computational grid for three dimensional circular cylinger 35
Fig. 4.2.1 Pressure contour of circular cylinder at boundary 36
Fig. 4.2.2 Density contour of circular cylinder at boundary 36
Fig. 4.2.3 Pressure contour of circular cylinder at wall boundary 37
Fig. 4.2.4 Density contour of circular cylinder at wall boundary 37
Fig. 4.2.5 Pressure contour of inflow condition 38
Fig. 4.2.6 Pressure contour of incoming wave at inflow condition 38
Fig. 4.2.7 Density contour of inflow condition 39
Fig. 4.2.8 Pressure contour and incoming wave at inflow condition 39
Fig. 4.2.9 Contours of Pressure at computational domain 40

Fig. 4.2.10 Contours of Density at computational domain ····· 40
Fig. 4.2.11 Density contour at wall condition (t-5) ····· 41
Fig. 4.2.12 Density contour at wall condition (t-15) ····· 41
Fig. 4.2.13 Residual history for three dimensional circular cylinder ····· 42
Fig. 4.2.14 Contours of Pressure at computational domain (t=20) ····· 43
Fig. 4.2.15 Contours of Pressure at computational domain (t=50) ····· 43
Fig. 4.2.16 Contours of Pressure at computational domain (t=80) ····· 43
Fig. 4.2.17 Contours of Pressure at computational domain (t=100) ····· 43
Fig. 4.2.18 Residual history for three dimensional circular cylinder ····· 44
Fig. 4.2.19 contour of Pressure for Vortex problem(t=200) ····· 45
Fig. 4.2.20 contour of Pressure for Vortex problem(t=210) ····· 45

NOMENCLATURE

a = *speed of sound*

e = *total energy,* $p/(\gamma-1)+\rho(u_x^2+u_y^2)/2$

f = *frequency in Hz*

M = *Mach number*

p = *pressure*

Pr = *Prandtl number, 0.72*

q = *heat flux*

Re = *Reynolds number,* $\rho_\infty V_\infty D/\mu_\infty$

T = *temperature*

U = *freestream velocity* (m/s)

u, v, w = *velocity components*

x, y, z = *normalized cartesian coordinates,* X/D, Y/D *and* Z/D

X, Y, Z = *dimensional cartesian coordinates*

Greek Symbols

γ = *specific heat ratio, 1.4*

μ = *viscosity*

ρ = *density*

τ = *Reynolds stress*

Subscripts

$(.)_\infty$ = *freestream condition*

$(.)_{ref}$ = *reference value*

$(.)_v$ = *viscosity*

ABSTRACT

Acoustics Analysis of Circular Cylinder using Unsteady Three dimensional Navier-Stokes equation

by Lee, Sang-Soo
Advisor : Prof. Kim, Jae-Soo, Ph. D.
Department of Aerospace Engineering,
Graduate School of Chosun University

The effort aero-acoustic is coming to be various recently from all fields. Aerodynamic noise that happen in unsteady flow of vortex or effort noise that happen in jet flow does not expect by causing degradation and instability by provoking a lot of shocks. Specially, the oscillation vibration of shock wave happens by flow and interaction between acoustic. Theoretical and analytic method in the past. However, could plan interference action directly mutually between flow and sound because computer technology such as latest parallel processing technique uses computing effort sound developing greatly. To analysis aero-acoustic needs to a high order and resolution scheme. It is used to capture the aero-acoustic wave because acoustic energy is much smaller than flow energy. An optimized compact finite scheme used to spatial

differentiation. The fourth order Runge-Kutta method is used for time integration.

A generalized characteristic boundary condition applied to reduce non-physical reflection of acoustics wave at the far-filed boundary. The artificial dissipation model is important for numerical computation for the shock in the flow and acoustic. The adaptive nonliner artificial dissipation model consisted of two terms. first, A 4th-order selective background smoothing term for acoustics and the other term is 2nd-order well established terms for the shock. This method is good result of acoustic wave in present computation. Aero-acoustics computation needs to long time calculation. Numerical calculations were performed by different type parallel processing with time discretizations carried out by the 4th-order Runge-Kutta method. The circular cylinder diameter is 1 and far-filed condition is 40 from cylinder. The Mach number and the Reynolds number were 0.3 and 300, respectively. It is found that Laminar Reynolds number range is appear as phenomenon of acoustics wave and mutually between flow and acoustics at three dimensional circular cylinder.

제 1 장 서 론

최근 모든 분야에서 공력소음이 자치하는 분야가 다양해지고 있다. 와류의 비정상운동에서 발생하는 공력소음이나 우주 발사체의 제트 분사에서 발생하는 공력 소음 등은 많은 진동을 유발함으로써 성능 저하 및 불안정성을 초래함으로써 예상치 못하는 문제점에 접하게 된다. 특히 음향에 의한 충격파의 비정상적인 진동은 유동과 음향간의 상호작용을 함으로써 발생한다. 과거에는 실험 및 Lighthill 방정식, Ffocws Williams-Hawking 방정식 그리고 Phillips나 Lilley 방정식등을 통한 이론적이고 해석적인 방법으로 이러한 문제들을 해결했지만 최근 병렬처리 기법 등 컴퓨터 관련 기술이 비약적으로 발달함으로써 전산공력음향을 이용하여 유동과 음향간의 상호 간섭 작용을 직접 모사 할 수 있게 되었다. 전산공력음향학에서는 선형화된 Euler 방정식을 사용하여 유동장에서의 음향장을 해석하는 방법과 비선형 방정식을 가정없이 Euler나 Navier-Stokes 방정식을 사용하여 해석하는 두 가지 방법이 있다.

현재까지 원형 실린더에 대해서 많은 학자들이 이론적, 실험적 및 수치적인 증명을 했지만 많은 부분에서 명확하지 않는 부분이 있다. [1]~[2] 레이놀즈수가 $Re \ll 1$인 경우 유동은 전후 대칭인 유동장을 형성하고 $Re > 45$인 영역에서는 비정상적인 유동이 발생하고 실린더 뒤쪽에서 vortex shedding이 발생하게 된다. 특히 vortex shedding은 유동으로 발생하는 진동 및 소음의 주된 원인이 된다. 원형 실린더 주위의 유동을 살펴보면 실린더 벽면의 경계층 유동, 유동 박리, 후류등의 다양한 유동이 존재하게 되고 이 때 발생하는 소음은 Reynolds 수에 따라 다른 특성을 나타내게 된다. 원형 실린더 후류에서 레이놀즈수가 증가함에 따라 후류지역에서는 불안정성이 증가하고 양력 및 항력을 증가시킨다. 레이놀즈 응력이 증가하여 재순환 영역의 길이가 감소함과 동시에 기저압력이 증가하고 비정상적인 힘이 발생된다. 특히 압력 변동에 따른 Karman vortex가 주기적으로 발생하면서 서로 다른 주기와 진폭을 갖는 양력이 발생한다. 본 연구에서는 고차, 고해상도 기법을 이용하여 레이놀즈수의 변화 따른 3차원 실린더에서 발생하는 유동 해석 및 공력 소음에 대해서 해석 하고자 한다. [3]~[4]

제 2 장 지배방정식 및 변환

제 1 절 지배방정식

3차원 비정상 압축성 Navier-Stokes 방정식

본 연구에서 사용되는 3차원 비정상 압축성 Reynolds Averaged Navier-Stokes 방정식을 무차원화된 3차원 직교좌표계의 보존형(conservation form)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{\partial E_V}{\partial x}+\frac{\partial F_V}{\partial y}+\frac{\partial G_V}{\partial z} \qquad (2\text{-}1)$$

여기서 Q는 무차원 보존형의 유량함수벡터(Conservative Flow Variable Vector)를 나타내며 E, F, G는 각각 방향의 비점성 유속벡터(Inviscid Flux Vector)이고, E_V, F_V, G_V는 각각의 점성유속벡터(Viscid Flux Vector)를 나타낸다. 유동변수벡터와 각 유속벡터들은 다음과 같은 식으로 정의된다.

$$Q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho e_t\end{bmatrix}, \qquad E=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (\rho e_t+p)u\end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

$$F=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (\rho e_t+p)v\end{bmatrix}, \qquad G=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (\rho e_t+p)w\end{bmatrix} \qquad (2\text{-}3)$$

$$E_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ e_v \end{bmatrix}, \quad F_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ f_v \end{bmatrix}, \quad G_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ g_v \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}4)$$

ρ, u, v, w, p, e_t는 각각 밀도, 방향의 속도성분, 압력, 총에너지(Total Energy)를 의미하며 이상기체(공기의 경우:$\gamma = 1.4$)에서 총에너지와 총엔탈비의 관계식은 다음과 같다

$$e_t = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right), \qquad h_t = e_t + \frac{p}{\rho} \qquad (2\text{-}5)$$

점성유속벡터에서 점성응력텐서τ는 Newtonian 유체의 가정에 따라 다음과 같이 정의되며, μ와 λ는점성계수로 두 계수의 관계는 열적평형상태(Thermal Equilibrium)에서 Stokes가정에 따라 다음과 같이 나타낸다.

$$3\lambda + 2\mu = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = -\frac{2}{3}\mu \qquad (2\text{-}6)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$e_v = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{\mu}{(\gamma - 1)\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$f_v = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{\mu}{(\gamma-1)\Pr}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$g_v = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \frac{\mu}{(\gamma-1)\Pr}\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$T = c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma(\gamma-1)\left[e - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right]$$

이상기체 상태방정식을 이용하여 압력p와 열유속q_i 의 정의는 다음과 같다.

$$p = \rho(\gamma-1)\left(e - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right) \qquad (2\text{-}7)$$

$$q_x = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial(p/\rho)}{\partial x}$$

$$q_y = -\kappa\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial(p/\rho)}{\partial y}$$

$$q_z = -\kappa\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial(p/\rho)}{\partial z}$$

여기서 k는 열전달 계수,$\Pr$는 Prantle 계수를 나타낸다.

제 2 절 지배방정식의 좌표변환

수치해석기법의 효율성과 경계조건의 적용을 간단히 하기위하여 지배방정식의 직교좌표계 (x,y,z)에서 일반곡선좌표계 (ξ,η,ζ)로 변환하였다. 이때 직교좌표계에서의 독립변수 가 일반좌표계에서도 유지되도록 변환을 정할 수 있고, 이와 같은 변환을 통하여 보존법칙이 그대로 유지될 수 있다. 주어진 직교좌표계의 물리영역을 다음과 같은 변환을 통하여 계산영역으로 변환하였다.

$$\xi = \xi(x,y,z) \qquad (2\text{-}8)$$
$$\eta = \eta(x,y,z)$$
$$\zeta = \zeta(x,y,z)$$

위의 좌표변환에 대하여 metric항들을 Chain rule에 의하여 전개하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\xi_x = J\left(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta\right), \xi_y = J\left(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta\right), \xi_z = J\left(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta\right) \qquad (2\text{-}9)$$
$$\eta_x = J\left(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta\right), \eta_y = J\left(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta\right), \eta_z = J\left(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta\right)$$
$$\zeta_x = J\left(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi\right), \zeta_y = J\left(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi\right), \xi_z = J\left(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\right)$$
$$J^{-1} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\zeta y_\xi z_\eta + x_\eta y_\zeta z_\xi - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi$$

좌표변환을 해서 얻어진 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \hat{E}_V}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_V}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}_V}{\partial \zeta} \qquad (2\text{-}10)$$

보존량 $\hat{Q}$ 와 플러스벡터 $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}, \widehat{E_V}, \widehat{F_V}, \widehat{G_V}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{Q} = \frac{Q}{J} \qquad (2\text{-}11)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{J}\left(\xi_x E + \xi_y F + \xi_z G\right)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J}\left(\eta_x E + \eta_y F + \eta_z G\right)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{J}\left(\zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G\right)$$

$$\hat{E}_V = \frac{1}{J}\left(\xi_x E_V + \xi_y F_V + \xi_z G_V\right)$$

$$\hat{F}_V = \frac{1}{J}\left(\eta_x E_V + \eta_y F_V + \eta_z G_V\right)$$

$$\hat{G}_V = \frac{1}{J}\left(\zeta_x E_V + \zeta_y F_V + \zeta_z G_V\right)$$

제 3 절 기하보존법칙

Navier-Stokes 방정식을 고차, 고해상도의 수치기법을 이용하여 정확하게 해석하기 위해서는 격자계에 대한 값이 정확해야 한다. 공간에 대해서 4차의 중앙 직접유한 차분법을 적용하기 위해서는 flux내의 metric값도 4차의 정확도가 필요하다. 격자계의 품질에 따라서 flux내의 metric 값의 변화를 알아보기 위하여 2차 정확도의 미분과 4차의 정확도로 미분값으로 계산을 해보았다. 격자계의 품질이 좋을 경우 미분 정확도에 영향을 받지 않지만, 격자계의 품질이 좋지 않을 경우 Fig 2.3.1과 Fig 2.3.2에서 볼 수 있듯이 미분정확도에 따른 격자계의 오차값이 수치 계산에 미치는 영향이 상당히 큼을 알 수 있다. 직교좌표계(x,y,z)에서의 지배방정식을 일반좌표계(ξ,η,ζ)로 표현할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta_x}{J}\right)=0 \qquad (3\text{-}1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta_y}{J}\right)=0 \qquad (3\text{-}2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_z}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta_z}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta_z}{J}\right)=0 \qquad (3\text{-}3)$$

2차원 경우에서보다 3차원의 경우 오차가 증가하고 이러한 오차는 해가 발산하게 되므로 음향해석에 있어 불안정성을 가져오게 된다. 식(3-1,2,3)을 소거하지 않고 원천항으로 이항하면 보정된 값을 갖는 Navier-Stokes 방정식을 얻을 수 있다

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta}+\frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta}=\tilde{S}_V+E\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta_x}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta_x}{J}\right)\right]$$
$$+F\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_y}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta_y}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta_y}{J}\right)\right] \qquad (3\text{-}4)$$
$$+G\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_z}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\eta_z}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\zeta_z}{J}\right)\right]$$

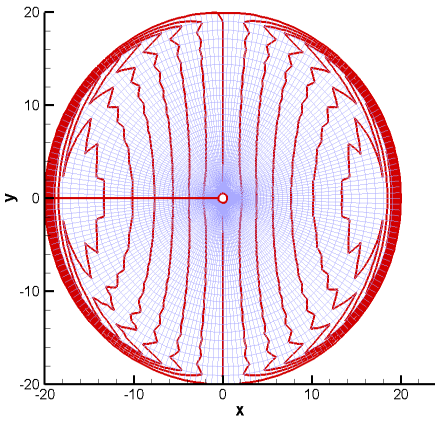

Fig. 2.3.1 2nd order finite differentiation Inviscid Flux Vector

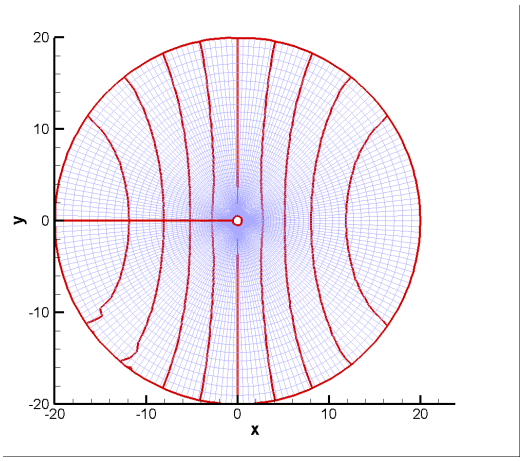

Fig. 2.3.2 4th order finite differentiation Inviscid Flux Vector

제 4 절 무차원화

유체의 지배방정식을 무차원화 할 경우, 기하학적으로 유사한 상황에서 동역학적으로 유사성을 얻을 수 있으며, 마하수나 레이놀즈수와 같은 무차원수로써 유동의 상사성을 판단할 수 있고, 변수의 크기를 표준화함으로써 반복연산에 따른 정확도의 감소를 막을 수 있다. 무차원화에는 여러 가지 방법이 있으나 본 연구에서는 다음과 같은 무차원화[5] 방법을 사용하였다.

$$x^* = \frac{x}{L},\ y^* = \frac{y}{L},\ z^* = \frac{z}{L} \qquad (4\text{-}1)$$

$$u^* = \frac{u}{u_\infty},\ v^* = \frac{v}{v_\infty},\ w^* = \frac{w}{w_\infty}\ \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}$$

$$t^* = t\frac{u_\infty}{L},\ \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty},\ p^* = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2},\ \mathrm{Re}^* = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty}$$

L은 무차원화를 위한 특성길이, 첨자∞는 자유흐름조건을 나타내며 이후 편의를 위해 무차원 변수를 뜻하는 기호 *는 생략하고 지배방정식을 정리하면 무차원화된 3차원 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\sqrt{\gamma_\infty} M_\infty}{\mathrm{Re}_\infty}\left(\frac{\partial E_V}{\partial x} + \frac{\partial F_V}{\partial y} + \frac{\partial G_V}{\partial z} + S_V\right) \qquad (4\text{-}2)$$

제 5 절 시간 이산화

시간 적분법으로는 외재적(explicit) 방법과 내재적(implicit) 방법으로 분류할 수 있다. 외재적 방법은 알고리즘이 비교적 간단하고 적은 기억용량을 요구하는 장점이 있어서 비교적 단순한 문제나 비정렬 격자와 같이 데이터 구조가 복잡한 문제의 경우에 편리하게 사용할 수 있는 방법이다. 또한 적용이 용이하고 계산시간이 짧은 장점이 있는 반면에 안정성이 높지 않으므로 계산 시간 간격을 크게 할 수 없어 반복계산이 많아지고 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 수가 작은 경우에만 사용이 가능한 단점이 있다. 내재적 방법은 많은 메모리 요구와 복잡한 알고리즘이 필요한 단점이 있어 수치계산에 적용하기 어려운 점이 있지만 외재적 기법보다 안정성이 좋아 시간간격을 크게 할 수 있는 장점이있다. 정상유동문제의 수치해를 구하는 경우 수렴성을 좋게 하기 위하여 각 격자에서 최적의 시간간격으로 시간진행을 할 수 있지만, 비정상 유동문제의 경우에는 모든 격자에 동일한 시간간격을 적용함을써 시간에 따른 비정상해를 구하게 된다. 본 연구에서는 비정상 압축성유동에 대하여 외재적 방법으로 Runge-Kutta 4th order를 사용하였다. [6] 지배방정식인 식(3-1)을 차분화후 정리를 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} + R_i = 0 \qquad (5\text{-}1)$$

각각 i 번째 격자에 대해서,a_i a_i는 격자의 넓이 이고 $R_i = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i$는 잔류치를 나타낸다. Runge-Kutta의 외재적 시간 적분법은 다음의 식으로 정리가 된다.

$$Q_i^{(1)} = Q_i^n \qquad (5\text{-}2)$$

$$Q_i^{(2)} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{4}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i^{(1)}$$

$$Q_i^{(3)} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{3}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i^{(2)}$$

$$Q_i^{(4)} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i^{(3)}$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \Delta t\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i^{(4)}$$

제 6 절 공간 이산화

- 고차, 고해상도 집적유한차분법

7-point stencil을 갖는 중앙 직접유한차분법(Compact Finite Difference Scheme)은 다음과 같다.

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{3} a_m \left(f_{i+m} - f_{i-m} \right) \qquad \text{식(6-1)}$$

여기서f_i는 유동 변수 같은 목적 함수이고 f'_i는 일차의 정확도를 가지고 있는 미분 계수값을 나타낸다.α, β, a 는 차분법 계수값을 의미한다. 직접유한차분법의 차분 형식은 $a \neq 0, \beta = 0$이거나 $a \neq 0, \beta \neq 0$인경우로 주변의 여러점을 고려하여 미분하는 방식이므로 삼각(Tridiagonal) 또는 오각(Pentadiagonal)행렬을 이용하여 각 점들의 미분값을 구할 수 있다. 중앙차분법만을 이용하게 되면 절단오차(Truncation Error)와 위상오차(Phase Error)를 갖게된다. 이러한 오차값을 최소화 하기 위해서는 Fourier Analysis를 통한 α, β, a 계수값을 이끌어 낸다. 본 연구에서는 J.W,Kim & D.J,Lee [7]가 제안한 Optimized High-Order Compact Scheme를 이용하였다. OHOC scheme을 사용할 때 각 노드에 사용되는 계수와 경계면에서 사용되는 식은 다음과 같다.

$i = 1\,(boundary \quad node)$

$$f'_1 + \alpha_{1,2} f'_2 + f'_i + \beta_{1,3} f'_3 = \frac{1}{h}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq 1}}^{4} a_{1,m} \left(f_m - f_1 \right) \qquad (6\text{-}2)$$

$i = 2\,(boundary \quad node)$

$$\alpha_{2,1} f'_1 + f'_2 + \alpha_{2,3} f'_3 + \beta_{2,4} f'_4 = \frac{1}{h}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq 2}}^{5} a_{2,m} \left(f_m - f_2 \right) \qquad (6\text{-}3)$$

$i = 3\,(boundary \quad node)$

$$\beta_{3,1} f_1' + \alpha_{3,2} f_2' + f_3' + \alpha_{3,4} f_4' + \beta_{4,5} f_5' = \frac{1}{h} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 3}}^{6} a_{3,m} \left(f_m - f_3 \right) \qquad (6\text{-}4)$$

식(6-1)의 차분 계수값

$a_1 = 0.6511278808920836$, $a_2 = 0.2487500014377899$

$a_3 = 0.00614479661269978$, $\alpha = 0.5775233202590945$

$\beta = 0.08953895334666784$

식(6-2)의 차분 계수값

$a_{1,2} = -3061503488555582$, $a_{1,3} = 5.917946021057852$

$a_{1,4} = 0.4176795271056629$, $\alpha_{1,2} = 5.870156099940824$

$\beta_{1,3} = 3.157271034936285$

식(6-3)의 차분 계수값

$a_{2,1} = -0.5401943305881343$, $a_{2,3} = 0.8952361063034303$

$a_{2,4} = 0.2553815577627246$, $a_{2,5} = 0.007549029394582539$

$\alpha_{2,3} = 0.7162501763222718$, $\beta_{2,4} = 0.08619830787164529$

식(6-4)의 차분 계수값

$a_{3,1} = -0.1327404414078232$, $a_{3,2} = -0.6819452549637237$

$a_{3,4} = 0.7109139355526556$, $a_{3,5} = 0.2459462758541114$

$a_{3,6} = 0.00396541575151062$, $\alpha_{3,2} = 0.440685460195004$

$\alpha_{3,4} = 0.605550907986632$

$\beta_{3,1} = 0.03447751898726934$, $\beta_{3,5} = 0.0814149851258753$

제 7 절 일반화된 특성치 경계조건

T.J. Poinst 와 Lele, S.K. [8]가 제안한 Navier-Stokes Characteristic Boundary는 Fig.2.7.1 및 Fig.2.7.2와 같은 특성을 가지고 있다. 자세한 물리적 및 수치적인 파동특성을 비교하기 위하여 advection 방정식과 Euler 방정식을 사용한 경우를 비교하였다. Vichnevetsky and Bowles [9]가 분류한 것처럼 물리적인 파동 특성은 p 파동 이라하고 정의하고 수치적인 파동을 q 라고 정의한다. 물리적인 파동은 긴 파장을 가지고 있고 경계면을 지날 때 섭동이 발생한다. 이에 비해 수치적 파동은 짧은 파장을 가지고 있고 경계면에서 수치적 미분의 영향으로 인해 불필요한 파동이 발생하게 된다. 이 파동의 특성은 미분방법에 따라 달라진다. Euler 방정식은 advection 방정식보다 더 복잡한 특성이 나타난다. 아음속에서 음향파가 $u+c$ 의속도로 전파해 가면서 경계면에 도달했을 때 Fig.2.7.2 에서 볼 수 있듯이 2개의 반사파가 발생한다. 첫 번째는 $u-c$ 의 속도로 들어는 물리적인 반사가 발생하게 되고 두 번째 반사파는 수치적으로 발생하는 반사파가 발생해서 수치적 에러를 발생시키게 된다. 본 연구에서는 이러한 경계면에서 비물리적인 반사를 억제하기 위해 Kim and Lee [10]가 제안한 일반화된 특성치 경계조건을 사용하였다.

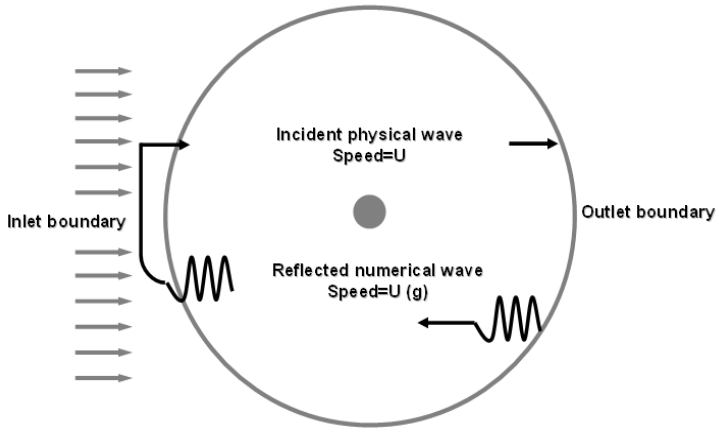

Fig.2.7.1 Numerical and Physical reflected wave at boundary: the advection equation.

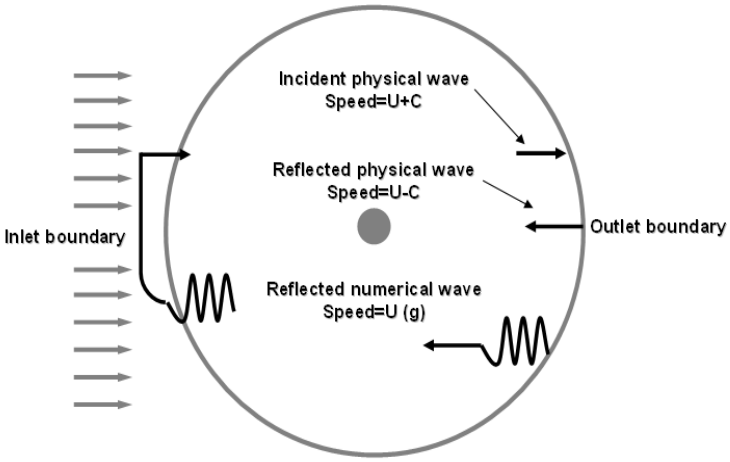

Fig.2.7.2 Numerical and Physical reflected wave at boundary: the Euler equation.

Navier-Stokes방정식을 경계면에 수직한 방향으로 변환한 특성치 방정식에서 식을 유도 할 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\underline{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+\underline{B}\frac{\partial Q}{\partial y}+\underline{C}\frac{\partial Q}{\partial z}=S_V \qquad (7\text{-}1)$$

식 (8-1)을 일반좌표계로 변환하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\left(\xi_x\underline{A}+\xi_y\underline{B}+\xi_z\underline{C}\right)\frac{\partial Q}{\partial \xi}=S_V-\left(\eta_x\frac{\partial E}{\partial \eta}+\eta_x\frac{\partial F}{\partial \eta}+\eta_x\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)-\left(\zeta_x\frac{\partial E}{\partial \zeta}+\zeta_y\frac{\partial F}{\partial \zeta}+\zeta_z\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)$$

ξ가 일정하게 유지되는 경계면에 수직한 방향으로 대각화를 통하여 준선형 특성치 파동 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial R}{\partial t}+\underline{\Lambda}\frac{\partial R}{\partial \xi}=-\underline{P}^{-1}S_V^{*} \qquad (7\text{-}2)$$

$$S_V^* = S_V - \left(\eta_x \frac{\partial E}{\partial \eta} + \eta_x \frac{\partial F}{\partial \eta} + \eta_x \frac{\partial G}{\partial \eta}\right) - \left(\zeta_x \frac{\partial E}{\partial \zeta} + \zeta_y \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \zeta_z \frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)$$

식(8-2)는 고유값의 속도를 가지는 특성치의 파동방정식을 나타낸다. 대류항은 특성 속도에 따라 물리적인 정보가 없이 들오는 성분과 물리적인 정보를 가지고 나가는 성분으로 구분된다. 직교 좌표계의 대류항을 일반 좌표계의 대류항으로 변환하면 다음과 같다. 나가는 성분과 들어는 성분을 간단하게 도시하면 Fig.2.7.3 과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \\ \rho c^2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ u_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 + \dfrac{\rho}{2c}(L_4 + L_5) \\ \dfrac{\rho c}{2}(L_4 + L_5) \\ \dfrac{1}{2}(L_4 - L_5) \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} \qquad (7\text{-}3)$$

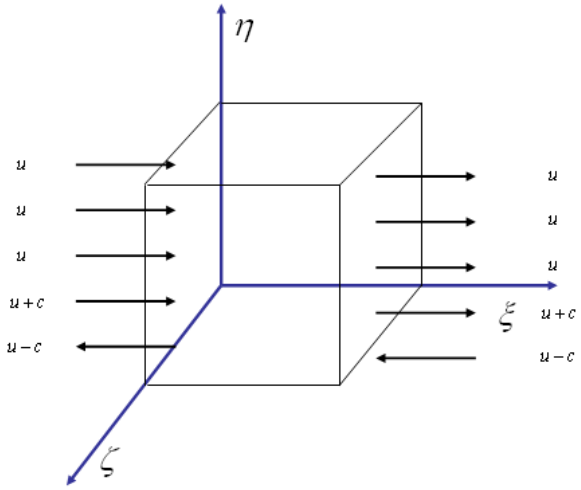

Fig.2.7.3 Waves leaving and entering the computational domain

x_1은 경계면에 수직인 면을 나타내고, c는 음속, L_i는 특성치 속도에 따른 특성파의 크기를 나타낸다.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = u_1 , \lambda_4 = u_1 + c , \lambda_5 = u_1 - c \qquad (7\text{-}4)$$

λ_1엔트로피 이류 속도이고 λ_2와λ_3은 각각 u_2와u_3의 이류속도이다. λ_4와 λ_5는 각각 음파의 들어오는 방향과 나가는 방향의 속도이다.

$$L_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \qquad (7\text{-}5)$$

$$L_2 = \lambda_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \qquad (7\text{-}6)$$

$$L_3 = \lambda_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \qquad (7\text{-}7)$$

$$L_4 = \lambda_4 \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \qquad (7\text{-}8)$$

$$L_5 = \lambda_5 \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \qquad (7\text{-}9)$$

대류항인 식(8-3)을 보존형 플럭스 미분항으로 변환을 하면 다음과 같다.

$$\xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial G}{\partial \xi} = \underline{P}\,\underline{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial \xi} = \underline{P} L \qquad (7\text{-}10)$$

$$
\underline{P} = \begin{bmatrix}
\tilde{\xi}_x & \tilde{\xi}_y & \tilde{\xi}_z & \dfrac{\rho}{2c} & \dfrac{\rho}{2c} \\
u\tilde{\xi}_x & u\tilde{\xi}_y - \rho\tilde{\xi}_z & u\tilde{\xi}_z + \rho\tilde{\xi}_y & \dfrac{\rho}{2c}\left(u + \tilde{\xi}_x c\right) & \dfrac{\rho}{2c}\left(u - \tilde{\xi}_x c\right) \\
v\tilde{\xi}_x + \rho\tilde{\xi}_z & v\tilde{\xi}_y & v\tilde{\xi}_z - \rho\tilde{\xi}_x & \dfrac{\rho}{2c}\left(v + \tilde{\xi}_y c\right) & \dfrac{\rho}{2c}\left(v - \tilde{\xi}_y c\right) \\
w\tilde{\xi}_x - \rho\tilde{\xi}_y & w\tilde{\xi}_y + \rho\tilde{\xi}_x & w\tilde{\xi}_z & \dfrac{\rho}{2c}\left(w + \tilde{\xi}_z c\right) & \dfrac{\rho}{2c}\left(w - \tilde{\xi}_z c\right) \\
\vec{b}\cdot\vec{l}_x & \vec{b}\cdot\vec{l}_y & \vec{b}\cdot\vec{l}_z & \dfrac{\rho}{2c}\left(H + c\vec{v}\cdot\vec{l}_\xi\right) & \dfrac{\rho}{2c}\left(H - c\vec{v}\cdot\vec{l}_\xi\right)
\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}11)
$$

$$
\vec{b} = \frac{|\vec{v}|^2}{2}\vec{l}_\xi + \rho\left(\vec{v}\times\vec{l}_\xi\right), \quad H = \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1}
$$

$$
\underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix}
\vec{B}_o\cdot\vec{l}_x & (\gamma-1)\dfrac{u}{c^2}\tilde{\xi}_x & (\gamma-1)\dfrac{v}{c^2}\tilde{\xi}_x + \dfrac{\tilde{\xi}_z}{\rho} & (\gamma-1)\dfrac{w}{c^2}\tilde{\xi}_x - \dfrac{\tilde{\xi}_y}{\rho} & -\dfrac{\gamma-1}{c^2}\tilde{\xi}_x \\
\vec{B}_o\cdot\vec{l}_y & (\gamma-1)\dfrac{u}{c^2}\tilde{\xi}_y - \dfrac{\tilde{\xi}_z}{\rho} & (\gamma-1)\dfrac{v}{c^2}\tilde{\xi}_y & (\gamma-1)\dfrac{w}{c^2}\tilde{\xi}_y + \dfrac{\tilde{\xi}_x}{\rho} & -\dfrac{\gamma-1}{c^2}\tilde{\xi}_y \\
\vec{B}_o\cdot\vec{l}_z & (\gamma-1)\dfrac{u}{c^2}\tilde{\xi}_x + \dfrac{\tilde{\xi}_y}{\rho} & (\gamma-1)\dfrac{v}{c^2}\tilde{\xi}_z - \dfrac{\tilde{\xi}_x}{\rho} & (\gamma-1)\dfrac{w}{c^2}\tilde{\xi}_z & -\dfrac{\gamma-1}{c^2}\tilde{\xi}_z \\
\dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\gamma-1}{2}M^2 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{l}_\xi}{c}\right) & \vec{C}_+\cdot\vec{l}_x & \vec{C}_+\cdot\vec{l}_y & \vec{C}_+\cdot\vec{l}_z & \dfrac{\gamma-1}{\rho c} \\
\dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\gamma-1}{2}M^2 + \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{l}_\xi}{c}\right) & \vec{C}_-\cdot\vec{l}_x & \vec{C}_-\cdot\vec{l}_y & \vec{C}_-\cdot\vec{l}_z & \dfrac{\gamma-1}{\rho c}
\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}12)
$$

$$
\vec{B}_o = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\vec{l}_\xi - \frac{1}{\rho}\left(\vec{v}\times\vec{l}_\xi\right),
$$

$$
\vec{C}_\pm = \pm\frac{\vec{l}_\xi}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}\vec{v}
$$

$$
\vec{l}_\xi = \left(\tilde{\xi}_x, \tilde{\xi}_y, \tilde{\xi}_z\right) = \frac{1}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}\left(\xi_x, \xi_y, \xi_z\right)
$$

$$
\vec{l}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{l}_y = (0, 1, 0), \quad \vec{l}_z = (0, 0, 1)
$$

식(8-1)에 대한 보정된 대류항은 다음과 같다.

$$L_i = \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \quad (i = 1, 2, \cdots, 5) \qquad (7\text{-}13)$$

$$\delta R = \underline{P}^{-1} \delta Q = \left[\delta\rho - \frac{1}{c^2}\delta p, \delta\tilde{W}, \delta\tilde{V}, \frac{1}{\rho c}\delta p + \delta\tilde{U}, \frac{1}{\rho c}\delta p - \delta\tilde{U} \right]^T \qquad (7\text{-}14)$$

$$\lambda = \left[U, U, U, U + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}, U - c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \right]^T \qquad (7\text{-}15)$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \quad \delta\tilde{U} = \tilde{\xi}_x \delta u + \tilde{\xi}_y \delta v + \tilde{\xi}_z \delta w$$

$$\delta\tilde{V} = -\tilde{\xi}_x \delta v + \tilde{\xi}_y \delta u, \quad \delta\tilde{W} = \tilde{\xi}_x \delta w - \tilde{\xi}_z \delta u$$

보존 형태의 지배방정식과 국소 일차원 관계식(LODI:Local One-Dimesional invisid relation)으로부터 특성치 L을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L = \underline{P}^{-1} J \left\{ \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} - \left[E \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right) + F \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_y}{J}\right) + G \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_z}{J}\right) \right] \right\} \qquad (7\text{-}16)$$

L벡터 중 계산영역 안으로 들어오는 값은 수치적으로 계산을 할 수 없으므로 경계조건에 알맞은 조건을 부여 하여 보정한 convection 항은 다음과 같이 구 할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} \right)^* = \frac{1}{J} \underline{P} L^* + \left[E \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right) + F \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_y}{J}\right) + G \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_z}{J}\right) \right] \qquad (7\text{-}17)$$

보정된 식(8-18)을 경계면에서 지배방정식(8-1)을 풀게 된다.

- **아음속 입류조건**

입류 조건에서 4개의 특성치 L_1, L_2, L_3, L_4는 계산 영역 안으로 들어오며 L_5는 계산 영역 밖으로 나가게 된다. 계산영역 안으로 들어오는 특성치에 대해서는 $P_\infty, \rho_\infty, \overrightarrow{V_\infty}$ 등을 부여하고 L_5는 식 (8-17)을 이용하여 구할 수 있다.

$$L_1 = 0 \ \ (isentropic \ \ condition) \qquad (7\text{-}18)$$

$$L_2 = K_{in}\frac{\tilde{W} - \tilde{W}_\infty}{2} = K_{in}\frac{\tilde{\xi}_x(w - w_\infty) - \tilde{\xi}_z(v - v_\infty)}{2} \qquad (7\text{-}19)$$

$$L_3 = K_{in}\frac{\tilde{V} - \tilde{V}_\infty}{2} = K_{in}\frac{-\tilde{\xi}_x(v - v_\infty) - \tilde{\xi}_y(u - u_\infty)}{2} \qquad (7\text{-}20)$$

$$L_4 = K_{in}\left[\tilde{U} - \tilde{U}_\infty + \frac{p - p_\infty}{\rho c}\right] = K_{in}\left[\tilde{\xi}_x(u - u_\infty) + \tilde{\xi}_y(v - v_\infty) + \tilde{\xi}_z(w - w_\infty) + \frac{p - p_\infty}{\rho c}\right] \qquad (7\text{-}21)$$

$$K_{in} = \sigma_{in}\left(1 - M_{\max}^2\right)\frac{c}{l} \qquad (7\text{-}22)$$

점성 유동을 해석하기 위해서는 입류 경계에 수직 방향성분의 열 유속 성분과 응력 성분의 기울기 값을 0으로 설정하게 되면 경계면에서 점성항 때문에 발생되는 반사파를 제거할 수 있다.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial n} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial n} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial n} = \frac{\partial q_n}{\partial n} = 0 \qquad (7\text{-}23)$$

- **아음속 출류조건**

1개의 특성치 L_5는 계산영역 안으로 들어오며, L_1, L_2, L_3, L_4는 계산 영역 밖으로 나가게 된다. L_5에 대해서는 $P_\infty, \overrightarrow{V_\infty}$조건을 부여하여 식(8-25)를 풀 수 있다.

$$L_5 = K_{out} \frac{p - p_\infty}{\rho c} \qquad (7\text{-}24)$$

$$K_{out} = \sigma_{out} \left(1 - M_{\max}^2\right) \frac{c}{l} \qquad (7\text{-}25)$$

점성 유동을 해석하기 위해서는 출류경계에 수직 방향성분의 열 유속 성분과 응력 성분의 기울기값을 0으로 설정하게 되면 경계면에서 점성항 때문에 발생되는 반사파를 제거할 수 있다.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial n} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial n} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial n} = \frac{\partial q_n}{\partial n} = 0 \qquad (7\text{-}26)$$

- **벽면 경계조건**

일반적으로 수치해석을 할 경우 벽면 조건은 외삽(extrapolation)을 하여 계산을 하지만 계산 차수가 높은 공력음향에서는 수치적 에러를 발생할 수 있으므로 특성치 벽면 조건을 사용하였다.[11]

ξ가 일정하게 유지되는 경계면에 수직한 방향으로 대각화를 통하여 점성항을 포함한 준선형 특성치 파동 방정식을 다음과 같다.

$$\frac{\partial R}{\partial t} + L = S_C \qquad (7\text{-}27)$$

$$\delta R = \underline{P}^{-1} \delta Q$$

$$L \equiv \underline{\lambda}\frac{\partial R}{\partial \xi} = \underline{P}^{-1}\left(\xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial G}{\partial \xi}\right) \qquad (7\text{-}28)$$

$$S_C = J\underline{P}^{-1}\left\{\hat{S}_V - \left[E\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right) + F\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_y}{J}\right) + G\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi_z}{J}\right) + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta}\right]\right\} \qquad (7\text{-}29)$$

보존 형태의 지배방정식과 True Mulitidimesionality relation)으로부터 특성치 L을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + L_1 + \frac{\rho}{2c}(L_4 + L_5) = S_{C1} + \frac{\rho}{2c}(S_{C4} + S_{C5}) \qquad (7\text{-}30)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_4 - L_5) = \frac{1}{2}(S_{C4} - S_{C5}) \qquad (7\text{-}31)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + L_3 = S_{C3} \qquad (8\text{-}33)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + L_2 = S_{C2} \qquad (8\text{-}34)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho c}{2}(L_4 + L_5) = \frac{\rho c}{2}(S_{C4} + S_{C5}) \qquad (7\text{-}32)$$

For left side wall

$$L_4^* = L_5 + S_{C4} - S_{C5}$$

For right side wall

$$L_5^* = L_4 - S_{C4} + S_{C5}$$

$$L_2^* = L_3^* = 0$$

$$S_{C2}^* = S_{C3}^* = 0$$

$$\hat{S}_V^* = \frac{1}{J}\underline{P}S_C^* + \left[E\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_x}{J}\right) + F\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_y}{J}\right) + G\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi_z}{J}\right) + \frac{\partial\hat{F}}{\partial\eta} + \frac{\partial\hat{G}}{\partial\zeta} \right] \qquad (7\text{-}33)$$

보정된 각각의 값을 지배 방정식 식(8-39)에 연속 방정식과 에너지 방정식만대입하고 각 방향의 운동량 방정식의 속도가 0으로 설정하고 벽면에서 지배방정식을 풀 수 있다.

제 8 절 인공 감쇄항

공력소음을 해석하기 위해서는 시간과 공간에 대해서 높은 차수의 방법을 사용하고 높은 해상도를 얻을 수 있는 반면 소산오차와 확산오차가 발생한다. 현재 인공 감쇄항으로 많이 사용하고 있는 인공 감쇄항 중 Tam[12]이 개발한 Artificial selective damping 모델과 Jameson[13]이 개발한 모델이 있지만 본 연구에서는 두 가지 모델의 장점을 살려서 개발한 Kim&Lee [14]가 제안한 Adaptive nonlinear artificial dissipation model을 사용하였다. 이 모델의 특징은 낮은 파동수 성분의 감쇄가 억제되어 선형파에 대해 영향을 거의 미치지 않고 contact surface 에 대한 해상도가 높고 특히 충격파 근처의 수치적인 진동을 효과적으로 제어 할 수 있는 장점이 있다. 유동의 조건에 따라서 2차와 4차의 인공 감쇄항 계수가 자동으로 부여된다. 3차원 일반좌표계에서 인공 감쇄항은 다음과 같다.

$$\left.\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right|_{i,j,k} + \left.\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi}\right|_{i,j,k} + \left.\frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta}\right|_{i,j,k} + \left.\frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta}\right|_{i,j,k} = \hat{S}_V + \hat{D}^{\xi}_{i,j,k} + \hat{D}^{\eta}_{i,j,k} + \hat{D}^{\zeta}_{i,j,k} \qquad (8\text{-}1)$$

$\hat{D}^{\xi}_{i,j,k}, \hat{D}^{\eta}_{i,j,k}, \hat{D}^{\zeta}_{i,j,k}$ 는 각각 ξ, η, ζ 방향의 ANAD 항이다.

$$\hat{D}^{\xi}_{i,j,k} = \frac{d_{i+\frac{1}{2},j,k} - d_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta \xi} \qquad (8\text{-}2)$$

$$\hat{d}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\left|\lambda\right|^{stencil}_{i+\frac{1}{2}}}{J_{i+\frac{1}{2},j,k}} \Big\{ \varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k} \left(Q_{i+1,j,k} - Q_{i,j,k}\right) + \varepsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j,k} \left[b_1\left(Q_{i+1,j,k} - Q_{i,j,k}\right) + b_2\left(Q_{i+2,j,k} - Q_{i-1,j,k}\right) + b_3\left(Q_{i+3,j,k} - Q_{i-2,j,k}\right) \right] \Big\} \qquad (8\text{-}3)$$

3차원 stencil의 고유값은 다음과 같이 구해진다.

$$|\lambda|_{i,j,k}^{stencil} = \sum_{m=-2}^{3} \max\left(|\lambda|_{i+m,j,k}\right) - \sum_{m=-2}^{3} \min\left(|\lambda|_{i+m,j,k}\right) \qquad (8\text{-}4)$$

$$|\lambda|_{i,j,k} = \left(\left|U + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}\right|\right)_{i,j,k} \qquad (8\text{-}5)$$

중간노드의 산술적 평균값은 다음과 같다.

$$J_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{J_{i+1,j,k} + J_{i,j,k}}{2} \qquad (8\text{-}6)$$

Shock detector 와 2차 및 4차의 계수는 다음과 같다.

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(2)} = \kappa_{j,k}^{(2)} \sum_{m=-2}^{3} \max\left(\nu_{i+m,j,k}\right) \qquad (8\text{-}7)$$

$$\nu_{i,j,k} = \frac{\left|p_{i-1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}\right|}{p_{i-1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}} \qquad (8\text{-}8)$$

각종조건에 따라 자동적으로 전체계수의 양을 결정하는 적응제어 상수는 다음과 같다.

$$\kappa_{j,k}^{(2)} = \kappa_{j,k}^{(4)} = \frac{1}{\sigma_{j,k}^{R_{j,k}}}\left[1 + \left(\sigma_{j,k} - 1\right)\tanh\left(\frac{\alpha_{j,k}}{\beta_{j,k}} - 1\right)\right]\left(\sqrt{\hat{\alpha}_{j,k}\hat{\beta}_{j,k}}\right)^{1+\tanh(\sigma_{j,k}-1)} \qquad (8\text{-}9)$$

$$\sigma_{j,k} = \frac{p_{j,k}^{\max}}{p_{j,k}^{\min}} \quad \alpha_{j,k} = \frac{|\lambda|_{j,k}^{\max}}{|\lambda|_{j,k}^{\min}} \quad \beta_{j,k} = \frac{\left(|\lambda|/J\right)_{j,k}^{\max}}{\left(|\lambda|/J\right)_{j,k}^{\min}} \quad R_{j,k} = \frac{\alpha_{j,k} + \beta_{j,k}}{2\alpha_{j,k}\beta_{j,k}}$$

$$\hat{\alpha}_j = \frac{\alpha_{j,k} + 1}{\alpha_{j,k} - 1}\tanh\left(\alpha_{j,k} - 1\right) \quad \hat{\beta}_j = \frac{\beta_{j,k} + 1}{\beta_{j,k} - 1}\tanh\left(\beta_{j,k} - 1\right)$$

$$f_{j,k}^{\max} = \sum_{i=1}^{i\max} \max\left(f_{i,j,k}\right) \quad f_{j,k}^{\min} = \sum_{i=1}^{i\max} \min\left(f_{i,j,k}\right)$$

- *3*차원 해석을 위한 *ANAD* 모델

2차원 해석을 위한 ANAD 모델은 충격파 같은 불연속면을 감지하여 불연속면에서 발생하는 수치적 진동을 감쇄시키는 2 차항과 metric 전체 걸쳐 나타나는 작은 크기의 오류에 발생하는 수치적 진동을 제거하는 4 차항으로 구성되어있다. 만약 2차원 모델을 그대로 적용하게 되면 수치적 진동에 의해 발산을 하게 되므로 안정적인 해를 위해서는 4 차항에 대해서 보정을 해주어야 한다. $|\lambda^{stencil}|$은 $\sqrt{\xi_x^2+\eta_y^2+\zeta_z^2}$ 에 의해 영향을 받게 되고 4 차항의 크기가 metric 분포에 따라 다른 값으로 결정된다. 특히 $\sqrt{\xi_x^2+\eta_y^2+\zeta_z^2}$ 값이 작아지면 감쇄하는 부분이 감소되므로 어느 정도 크기의 값을 보정해주어서 수치해를 구해야 한다. 보정된 식은 다음과 같다.

$$\hat{d}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{|\lambda|^{stencil}_{i+\frac{1}{2},j,k}\,\varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{J_{i+\frac{1}{2},j,k}}\left(Q_{i+1,j,k}-Q_{i,j,k}\right)+\frac{\varepsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{J_{i+\frac{1}{2},j,k}}\left(|\lambda|^{stencil}_{i+\frac{1}{2},j,k}+|\lambda|^{base}\right)$$
$$\left[b_1\left(Q_{i+1,j,k}-Q_{i,j,k}\right)+b_2\left(Q_{i+2,j,k}-Q_{i-1,j,k}\right)+b_3\left(Q_{i+3,j,k}-Q_{i-2,j,k}\right)\right] \qquad (8\text{-}10)$$

$$|\lambda|^{base} = k\sqrt{\left.|\lambda|^{stencil}\right|_{\max}\times\left.|\lambda|^{stencil}\right|_{\min}}\,\tanh\left(\frac{J_{\max}}{J_{\min}}-1\right)$$

k:입류 조건에 따른 상수

제 9 절 *Nonreflecting Zonal Characteristic Boundary Condition*

높은 에너지구조를 가지고 있는 vortex와 같은 유동이 벽면을 빠져나가게 되면 비물리적 반사파가 발생한다. 이러한 반사파가 최소가 되어서 물리적 도메인에 영향을 미치지 않게 하기 위해서는 비물리적 도메인이 필요하다. 최근 여러 학자들에 의해 다양한 방법으로 연구가 되고 있다. 본 논문에서는 Richard D.Sandberg and Neil D. Sandham [15]이 연구한 Zonal Characteristic Boundary Condition을 사용하고자 한다. 특성치의 파동방정식의 특성은 고유 속도에 따라서 음향, 와류, 엔트로피 등이 들어오거나 나가게 된다.$\lambda_i = u - c$ 의 속도를 갖는 특성치 값은 다른 4개의 항과는 반대방향으로 들어오거나 나가게 된다. $\lambda_i < 0$일 경우 아래와 같은 식을 적용하게 되면 특성파의 크기가 점점 작아지면서 비물리적인 반사를 줄이게 된다.

$$\tilde{L}_i = b(x) \cdot L_i$$

$$b(x) = 0.5\left\{1 + \cos\left[\frac{\pi(x - x_b)}{(x_p - x_b)}\right]\right\}$$

x_b: buffer zone 이 시작 되는 점

x_p: 물리적 zone 이 끝나는 점

제 3 장 병렬처리기법

공력 음향 해석을 하기 위해서는 고차 및 고해상도 기법을 사용함으로써 많은 격자계와 장시간 계산을 하게 된다. 특히 고차의 공간 차분화를 수행하기 때문에 이를 해결하기 위해서는 반드시 코드의 병렬화가 필요하다. 최근 사용되는 병렬처리 기법으로는 공유메모리를 이용하고 상대적으로 쉽게 프로그램을 작성 할 수 있는 OpenMP 와 분산메모리 에서 사용 할 수 있는 MPI (Message Passing Interface) 및 등이 있다. 본 연구에서는 이 두 가지 방법을 이용하여 고차 및 고해상도 기법을 이용한 압축성 Navier-Stokes 식을 사용하여 Circular cylinder 에서의 음향 해석을 하였다. Open MP를 사용해서 Serial 코드와의 수행시간 및 효율성을 비교 검토 하였다. MPI (Message Passing Interface) 방법을 이용하여 각 process에 따른 Serial 코드와의 상대적인 수행속도 및 효율성에 대해서 분석을 하였다. Open MP 와 MPI 에 대한 수행시간 및 효율성을 통해서 음향 해석에 보다 더 효율적인 병렬처리 방법을 알 수 있었다. 실린더 문제는 과거에는 주로 실험에 의해 수행이 되었지만 현재는 컴퓨터 및 수치기법의 발달로 많은 연구가 시도되고 있다. 실린더를 지나는 유동 및 소음은 Reynolds 수에 의해서 각기 다른 특성을 갖게 된다. 실린더의 해석을 위해서 비정상 압축성 Navier-Stokes 식을 사용하였고 $Re_D = 400, M_\infty = 0.3$인 경우를 O 형 그리드를 이용하여 해석하였다. 계산 영역은 실린더 지름의 40배이고 격자계수는 $200 \times 141 \times 21$ 이다.

공력 음향 해석을 위해서는 고차 및 고해상도 기법을 사용하므로 많은 격자가 필요하게 된다. 일반적인 유동해석을 하는 것 보다 많은 계산 시간과 용량이 필요하다. 이와 같은 이유로 3차원 실린더의 공력해석을 위해서는 병렬화가 필요하다. 병렬화 방법에는 Open MP 방법과 MPI (Message Passing Interface) 방법 그리고 이 두 가지의 방법을 결합시킨 하이브리드 병렬 방법(Cluster Open Mp)등이 있다. 본 연구에서는 Open MP방법과 MPI(Message Passing Interface)을 이용하여 처리속도와 효율성을 비교해보았다. 각 프로세스 마다 독립된 메모리를 가지고 프로세서 사이에 통신을 하는 MPI (Message Passing Interface)을 이용할 경우 공간 차분화를 위해 Penta-Diagonal 행렬을 풀어야 하므로 프로세스 간의 자료전달을 위해서는 각 프로세스마다 정보를 받아야 하므로 통신량의 급격히 증가로 인한 통신 부하를 가져오게 되고 전체적인 처리속도를 감소하게 되는 결과를 가져 오게 된다. 본 논문에서 사용하는

MPI (Message Passing Interface) 방법은 프로세스가 증가 할수록 처리 속도 빨라짐을 알 수 있었고, Iteration을 500번 수행 했을 때의 처리속도에 대한 결과는 그림1과 같다. CPU 수가 증가함에 따라 Serial 코드 보다 처리속도가 빨라짐을 알 수 있음을 확인 할 수 있었다. 각 프로세서에서 데이터 통신을 하는 과정은 그림 2와 같다. 본 논문에서 데이터 통신량이 가장 많았던 부분인 공간 차분화 부분에서는 많은 양의 데이터가 전송됨을 확인할 수 있었고 프로세스가 증가 할수록 데이터 전송시간은 감소함을 알 수 있었다. Serial code와 MPI code의 profiling 결과를 보면 병렬처리를 수행했을 경우 각 루프문 에서 CPU time 이 감소함을 알 수 있었다. 결과적으로 process가 증가 할수록 전체 수행 속도가 빨라짐을 알 수 있었다.

제 *1* 절 *OpenMP*

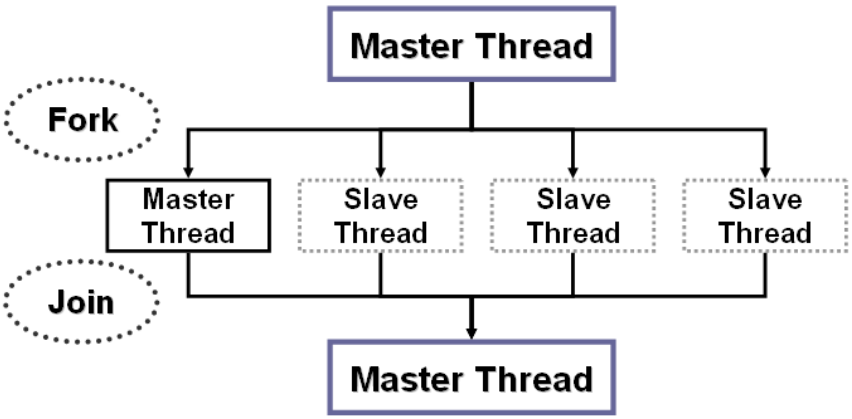

Fig.3.1.1 Parallel computing using OpenMP

Fig.3.1.1은 OpenMp의 전반 적인 개요를 나타내고 있다. OpenMp는 스레드(thread)를 기반으로 하는 공유메모리 프로그래밍 모델이며 기존의 코드에 지시어만 간단하게 삽입함으로써 프로그램을 작성할 수 있다. 대부분의 수치해석 문제들은 순환문 (Loop)에서 많은 시간의 계산 시간을 소비하게 된다. 이러한 점을 착안하여 순환문을 여러개의 CPU에 분산 처리를 함으로써 프로그램의 계산시간을 단축 시킬 수 있는 병렬처

리 기법 중 한 가지이다. OpenMP 의 성능을 test 하기위하여 threads 수 별로 계산을 해 보았다. Fig.3.1.2 와 Fig.3.1.3은 순차 코드에 비해서 계산시간이 향상됨을 확인 할 수 있었다. 특히 병렬화를 시작하기 전에 Serial 코드의 최적화 작업이 필요하다. 반복문에 의한 Cache miss를 줄임으로써 반복문 내의 처리속도를 향상시킬 수 있었다. 이는 계산 속도에 상당한 영향을 주는 인자로 작용함을 알 수 있었다. 아래 그림은 serial code와 OpenMP code로 계산을 수행 했을 경우에 총 계산시간과 성능 향상도를 나타낸 것이다.r 계산을 위해 Xeon CPU 2.13 Ghz를 사용하였다. Thread가 증가하면서 계산시간이 감소하여야 하지만 실제 계산에서는 공간 차분화를 할 때 Pentadiagnal Matrix를 이용하여 값을 계산하면서 각 thread에 전달해야하는 데이터의 양이 많아서 실제로 2개 이상에서는 계산 속도에 영향을 주지 않음을 알 수 있었다.

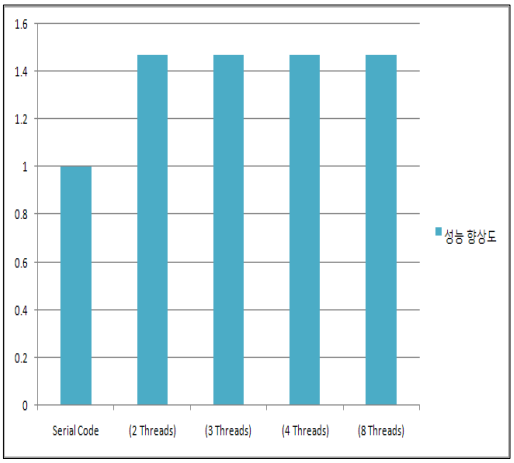

Fig.3.1.2 OpenMP using performance improvement (itr=300)

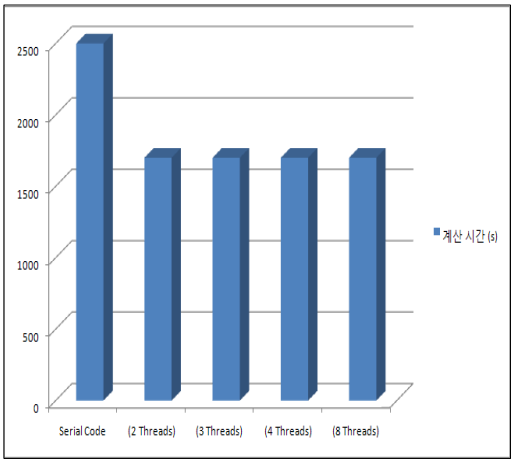

Fig.3.1.3 OpenMp using calculated time (itr=300)

제 2 절 *Cluster OpenMp*

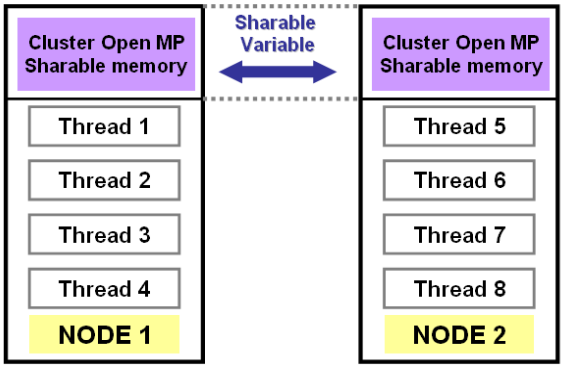

Fig.3.2.1 Parallel computing using Cluster OpenMP

Cluster OpenMp는 OpenMp와 MPI 방법의 장점을 이용하여 병렬처리를 하는 방법으로써 각 thread 는 한 개의 노드에서 계산을 수행하게 되고 각 노드간의 통신은 공통 변수를 사용함으로써 데이터의 정보를 주고 받는다. MPI 방법에 비해서 간단하게 프로그램화를 할 수 있는 장점이 있다. 병렬처리의 특성을 알아 보기 위하여 thread 수 별로 성능 테스트를 한 결과는 다음과 같다. 본 연구에서 사용하고 있는 코드는 공간 차분화를 위해서 각 노드간의 정보를 교환해야 하는 단점을 가지고 있다, 아래 그림에서 알 수 있듯이 Thread수가 증가 할수록 효율이 상당히 저하됨을 알 수 있었다.

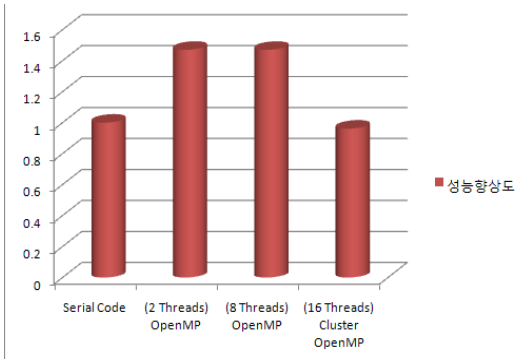

Fig.3.2.2 Cluster OpenMP using perfomance improvement (itr=300)

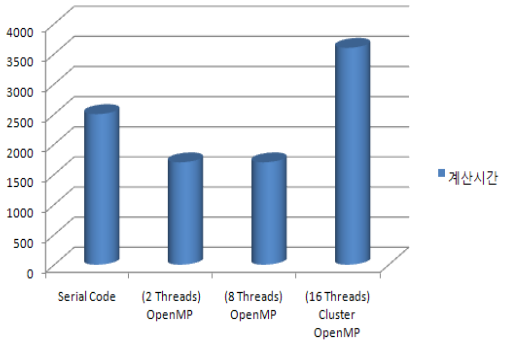

Fig.3.2.3 Cluster OpenMP using calculated time (itr=300)

제 3 절 *MPI (Message Passing Interface)*

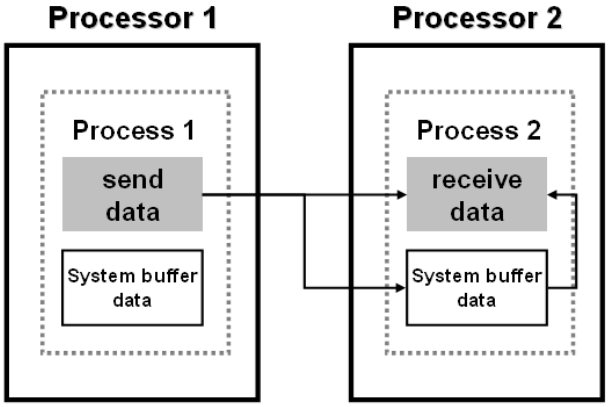

Fig.3.3.1 Parallel computing using MPI

수치해석적인 계산 수행에 있어서 하나의 작업을 여러 개의 node에 분산시켜서 작업을 하는 병렬처리 기법으로써 프로세스들 사이의 통신을 메시지들의 송신과 수신에 의해서만 병렬처리를 하는 기법이다. 본 연구에서 사용하는 프로그램의 효율성을 알아보기 위하여 node수에 따른 효율을 나타내면 다음과 같다. 계산에 사용된 격자계수는 595,161개를 사용하였다 node 수가 증가 할수록 계산 속도와 효율이 상대적을

빨라지지만 12개 이상의 노드를 사용할 경우는 거의 비슷하거나 오히려 처리 속도가 늦어짐을 확인할 수 있었다.

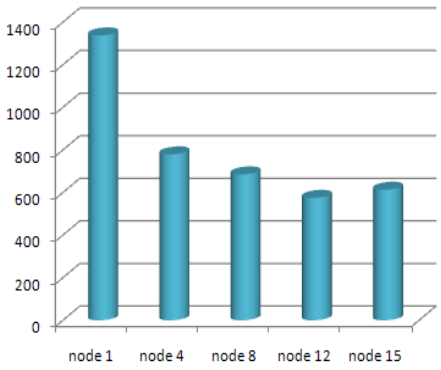

Fig.3.3.2 MPI using calculated time (itr=100)

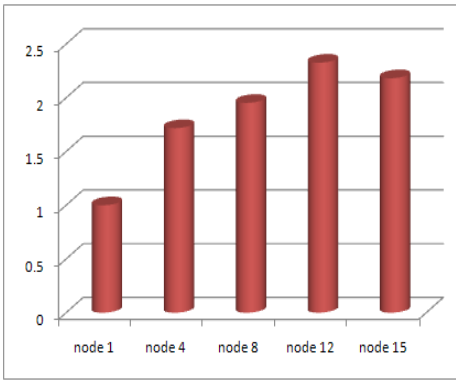

Fig.3.3.3 MPI using perfomance improvement time (itr=100)

제 4 장 계산 결과 및 검토

제 1 절 격자계

앞에서 고찰한 수치기법들을 적용하여 공력음향 및 유동해석에 대하여 3차원으로 계산을 수행하여 그 결과를 비교하였다.

- Circluar cylinder diameter =1
- Reynolds number=400
- Mach Number=0.3

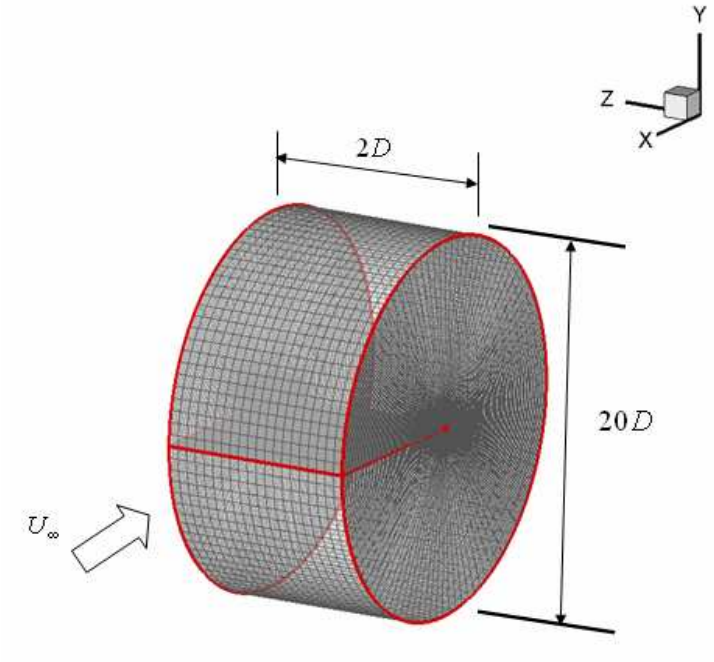

Fig.4.1.1 Computational grid for three dimensional circular cylinder

제 2 절 경계조건이 잘못 적용된 경우의 음향 해석

본 연구에서는 High Order Compact Scheme 를 적용했을 때 발생하는 문제점에 대해서 서술하고자 한다. 특히 고차 미분항을 풀게 되면 경계면에서 차수가 2차로 내려가면서 수치적 오차를 유발하게 되고 해의 안정성에 큰 영향을 주게 된다. Fig.4.2.1 와 Fig.4.2.2는 경계조건이 잘 못 되었을 때 발생되는 수치적 진동에 의해서 해가 발산하는 과정을 나타내고 있다. Fig.4.2.1 ~ Fig.4.2.4는 입류 와 출류 벽면 모근 경계면에서 수치적인 에러가 발생하고 있음을 보여주고 있다. 경계면에서의 수치적 진동을 제거 하지 않으면 경계면 바깥에서 들어오는 수치적 진동이 시간이 지나면서 계속 안쪽으로 들어오게 되고 경계면에서 일정하게 유지 되어야 할 압력값이 증가하거나 감소하면서 해가 발산하게 된다. Fig.4.2.3 과 Fig.4.2.4는 벽면에서 압력 및 밀도 값을 나타낸 것이다. 벽면 조건에서는 조건이 잘 못 주어지는 경우에 미분에 의한 진동이 많이 진행됨을 확인 할 수 있었다.

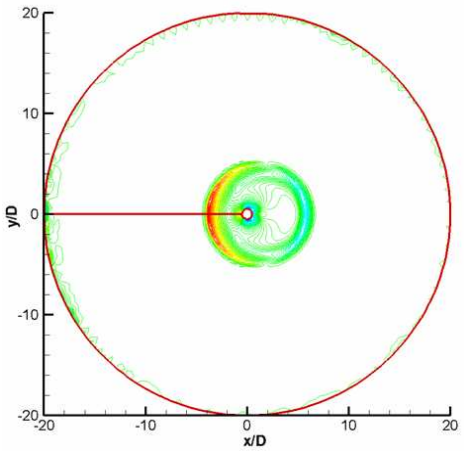

Fig.4.2.1 Pressure contour of circular cylinder at boundary condition

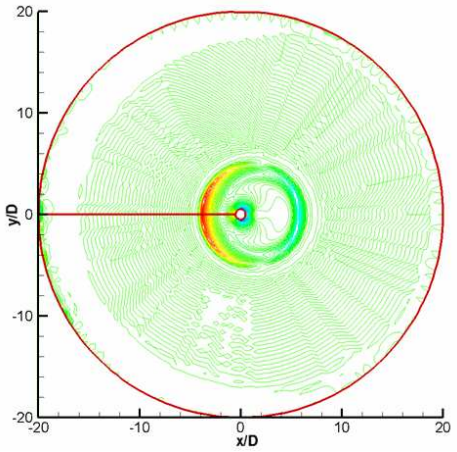

Fig.4.2.2 Pressure contour of circular cylinder at boundary condition

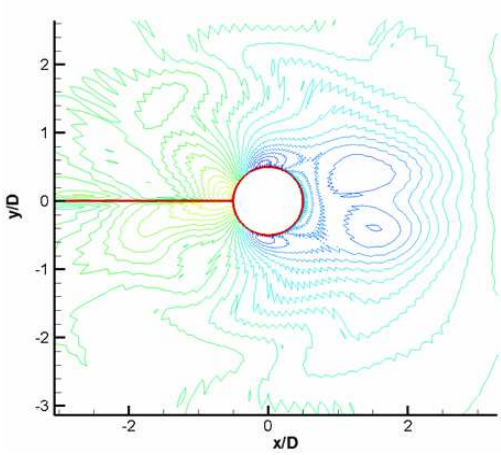

Fig4.2.3 Pressure contour of circular cylinder at wall condition

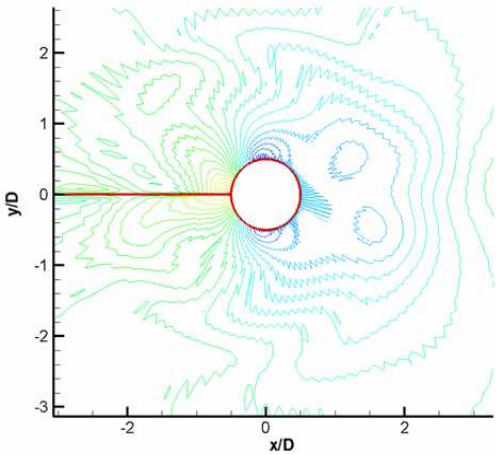

Fig4.2.4 Density contour of circular cylinder at wall boundary

- 입류 경계면에서 수치적 진동이 발생하는 경우

고차 미분을 이용한 공력음향을 해석하기 위해서는 Artificial dissipation term은 물론 특성치 경계조건에 알맞은 경계조건을 부여 해주어야 한다. 특성치 경계조건을 위해서 $P_\infty, \rho_\infty, \overrightarrow{V_\infty}$값을 다시 설정해주어 한다. Fig.4.2.5 ~Fig.4.2.8은 출류조건에서는 경계조건이 잘 적용이 됐지만 입류 조건에서 조건이 잘못 되어 해가 발산하는 것임을 확인 할 수 있었다. 만약 미분에서 발생한 오차이면 계산 전 영역에서 수치적 에러가 발생해야 되지만 그림에서 볼 수 있듯이 입류 경계면 조건에서 값들이 일정하게 유지되지 않음을 Fig.4.2.7을 통해서 확인 할 수 있다. ξ 방향으로 첫 번째 격자점과 마지막 격자점에서 압력의 크기가 커짐을 알 수 있는데 경계면에 차분화를 할 때 정확도가 상대적으로 낮게 되므로 값이 커지는 것이 오차 때문에 발생하는 것으로 생각 된다. 이는 식 8-19~8-22에서 적용 되어지는 식에서 발생하는 오차들에 의해 발생되는 진동인 것으로 사료된다. 경계면에서 압력이 일정하지 않으면 해의 안정성에 좋지 않는 영향을 주게 되고 결국 발산하게 된다. Fig.4.2.8를 보면 경계면에서 압력 값이 변화하면서 계산영역안으로 비물리적 반사가 들어옴을 확인 할 수 있었다.

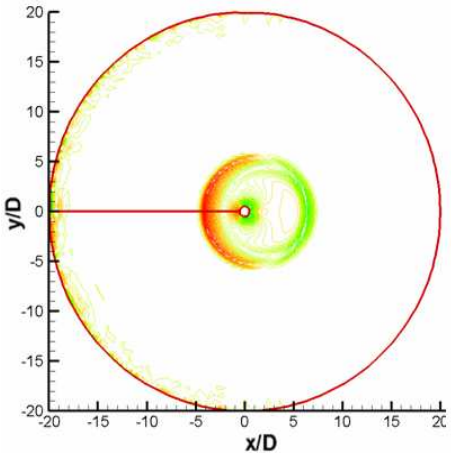

Fig4.2.5 Pressure contour of circular cylinder at inflow condition

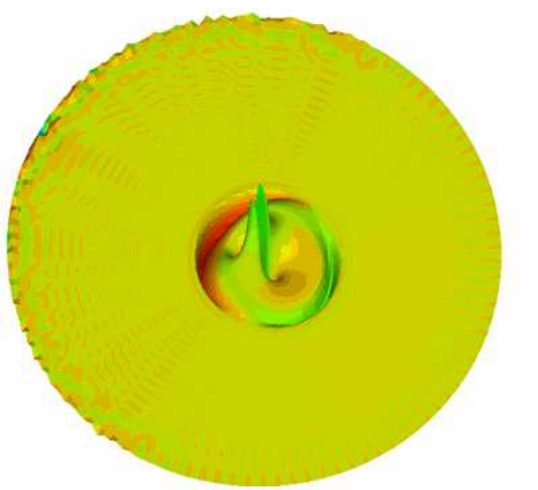

Fig4.2.6 Three Dimensional Pressure contour of circular cylinder at inflow boundary condition

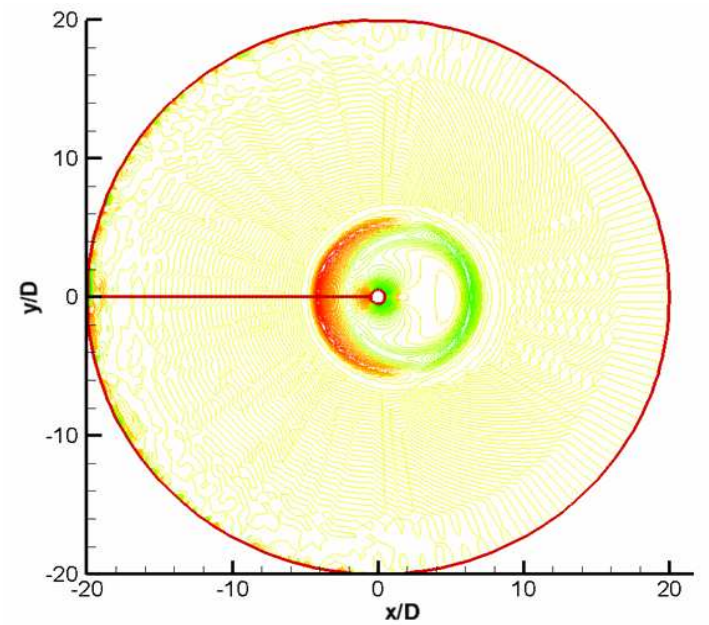

Fig.4.2.7 Density contour of inflow condition

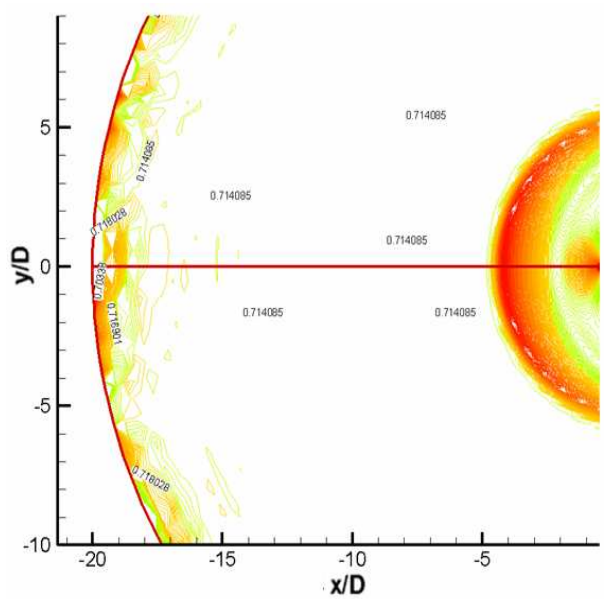

Fig.4.2.8 Pressure contour and incoming wave at inflow condition

- 벽면 및 경계면의 유동과 음향파

아래 그림은 시간이 진행함에 따라 유동 및 음향파가 진행하는 모습을 나타내고 있다. 압력과 밀도가 경계면에 도달하기 전까지는 높은 해상도를 유지하면서 출류쪽으로 수치적 진동이 없이 잘 흘러가고 있지만 (Fig.4.2.9 및 Fig.4.2.10) 압력파가 경계면을 통과하면서 수치적 비 물리적 반사파가 계산 영역안으로 들어오게 되고 계산 전 영역에 영향을 주어 해가 발산하는 큰 원인을 제공함을 알 수 있다.이러한 진동의 원인은 수직인 방향의 유동조건을 구하는 과정에서 보정값에서 수치적 에러가 발생하여 생성된 것으로 추측이 된다. 특히 벽면에서 Fig.4.2.11 및 Fig.4.2.12는 시간의 진행에 따라 진동이 크게 발생하여 계산영역 전체에 영향을 주어 안정된 해를 구할 수 없는 주요 원인이 됨을 알 수 있다. 이러한 경우 입출류조건이 부정확성으로 인하여 far-field에서 소음 해석 뿐만 아니라 near-field에서도 해석이 불가능함을 알 수 있었다.

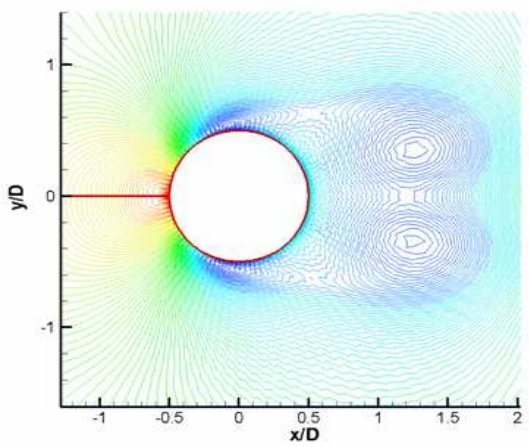

Fig.4.2.9 Density contour at wall condition (t=5)

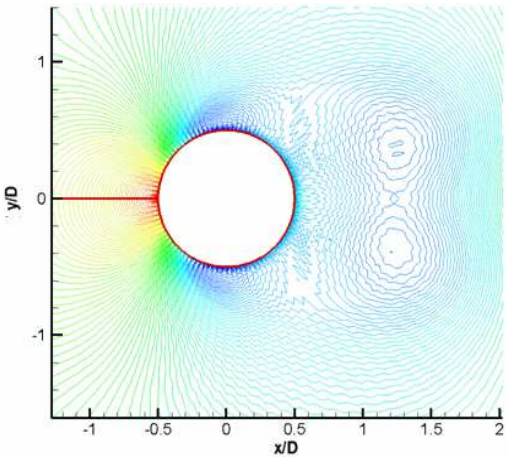

Fig.4.2.10 Density contour after t=15 at wall condition

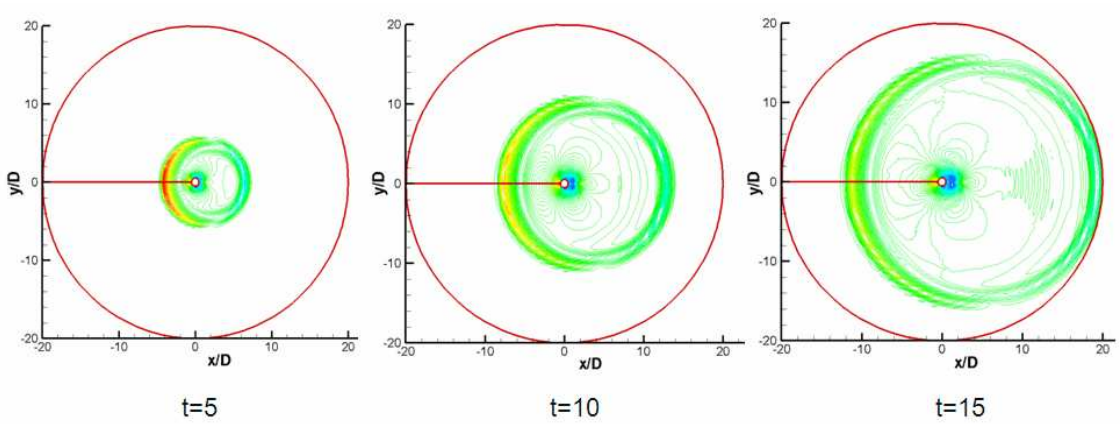

Fig.4,2.11 Contours of Pressure at computational domain (t=5, 10 and 15)

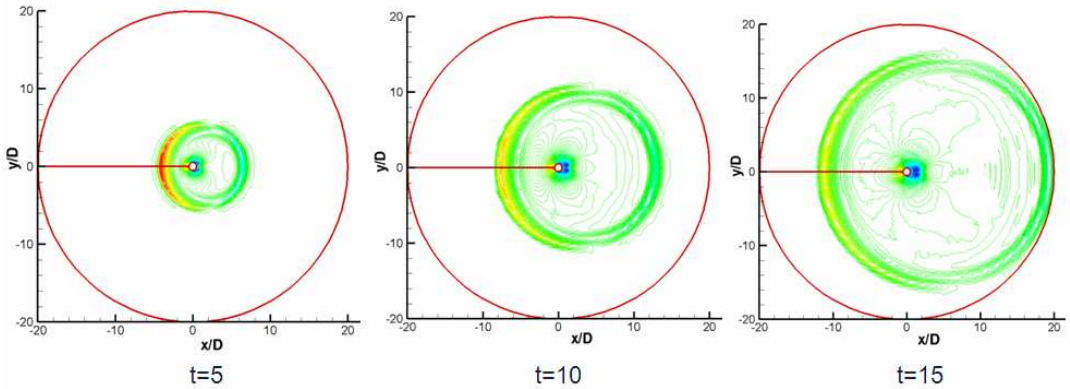

Fig.4.2.12 Contours of Density at computational domain(t=5,10 and 15)

- *Reynolds=400, Mach Number=0.5*인 실린더 유동

Mach Number에 따른 유동 및 공력 특성을 알아보기 위하여 Mach Number를 변화시켜서 유동 및 공력음향 특성을 살펴보았다. 경계면에서 입, 출류시 압력의 수치적 에러가 증가함을 알 수 있다. 압력파가 경계면을 통과 할 때 Fig.4.2.13~Fig.4.2.14 까지는 고유속도에 따라 대류항이 잘 빠져 나가지만 시간이 흘러 경계면을 통과함과 동시에 수치적 비 반사가 되면서 Fig.4.2.16 처럼 경계면을 통해서 계산 영역 안쪽으로 들어오는 것을 확인 할 수 있다. 80초 이후에는 경계면의 수치적 진동이 많이 발생 하면서 계산 영역 전체에 영향을 주게 되고 결국 발산 하게 되는 것을 Fig.4.2.17을 통해서 확인할 수 있었다. 반사파가 들어오기 전까지의 유동특성이 잘 나타나지만 경계면을 통과하고 일정시간이 지난 (t=80)에서 부터는 유동의 특성을 구별하기가 쉽지 않음을 확인할 수 있다. 마하수나 레이놀즈수에 의한 영향은 발산하기 전까지는 확인 할 수 있으나 steady 상태까지 계산 수렴이 되어야 정확한 유동 및 공력소음에 대해서 확인할 수 있을 것 이다.

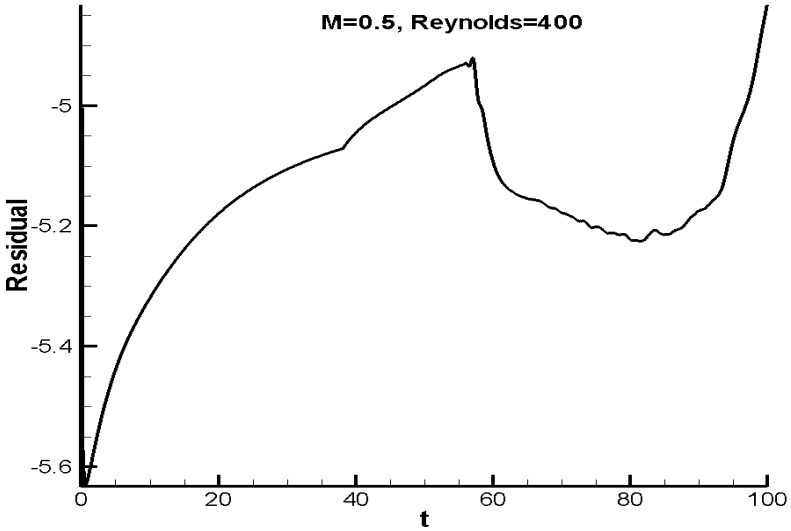

Fig.4.2.13 Residual history for three dimensional circular cylinder

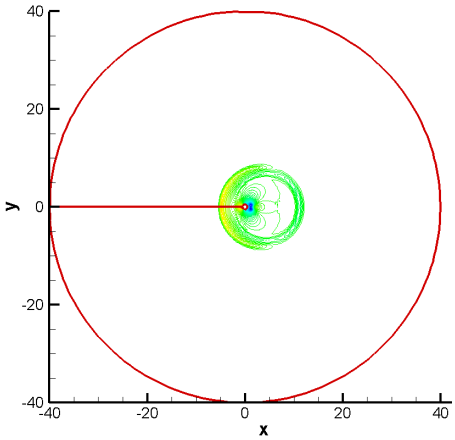

Fig.4.2.14 Contours of Pressure at computational domain (t=20)

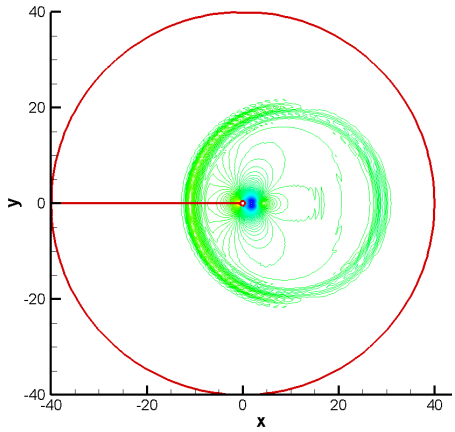

Fig.4.2.15 Contours of Pressure at computational domain (t=50)

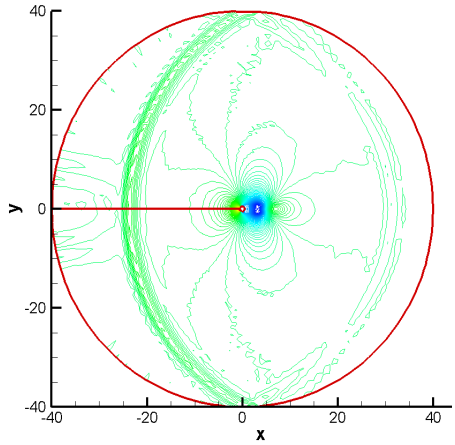

Fig.4.2.16 Contours of Pressure at computational domain (t=80)

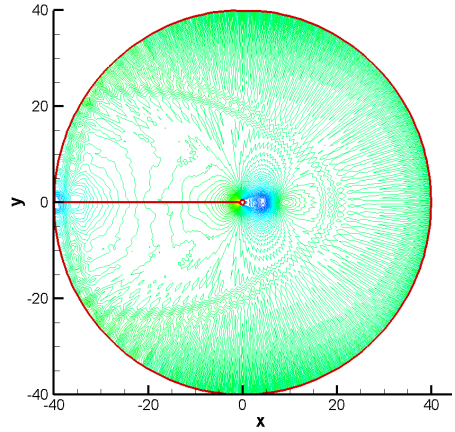

Fig.4.2.17 Contours of Pressure at computational domain (t=100)

- *Reynolds=2000, Mach Number=0.3*인 실린더 유동

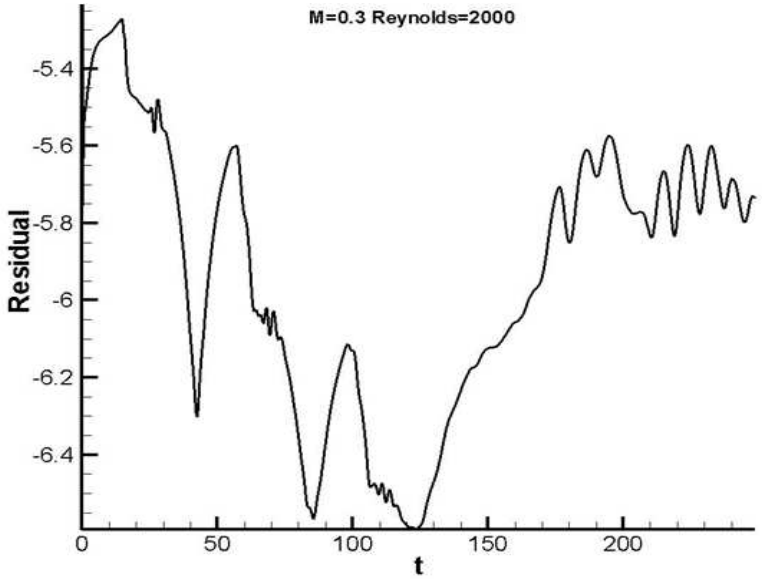

Fig.4.2.18 Residual history for three dimensional circular cylinder

특성치 경계조건 적용 후 직접적으로 원거리 조건을 부여한 경우에 대하여 해석을 해보았다. 직접 경계조건을 부여 하였을 때는 경계면에서 수치적인 에러가 발생하지 않고 계산이 잘 수행됨을 알 수 있었다. Fig.4.2.18 을 보면 실린더 후류 부분에서 vortex shedding에 의한 진동이 발생함을 알 수 있다.특히 비 물리적인 반사 발생하지 않고 vortex가 잘 빠져 나가는 것을 확인 할 수 있었다. vortex가 경계면을 통과 하면서 강한 압력장이 발생하고 그 압력장은 경계면 전체에 영향을 주어 계산 영역 전체에 영향을 주어 정확한 해를 구할 수 없음을 Fig.4.2.19와 Fig.4.2.20을 통하여 알 수 있었다. 시간이 지남에 따라 vortex가 경계면을 통과한 후 에 압력장이 전체적으로 계산 영역 안으로 들어오는 것을 확인 할 수가 있었다.

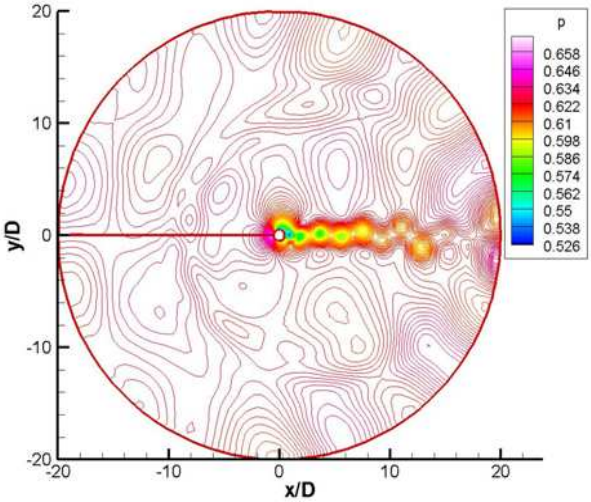

Fig.4.2.19 Contours of Pressure for Vortex Problem(t=200)

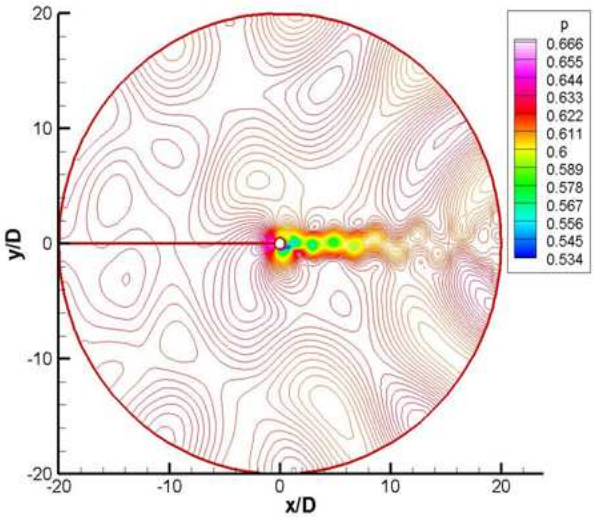

Fig.4.2.20 Contours of Pressure for Vortex Problem (t=210)

제 3 절 정상 경계조건에 의한 해석 결과

- *Reynolds = 2000, Mach number = 0.3*

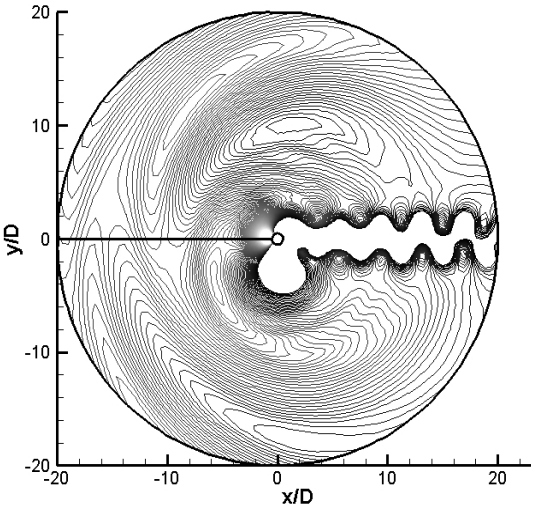

Fig.4.3.1 Contour of dipole sound field (pressure contour)

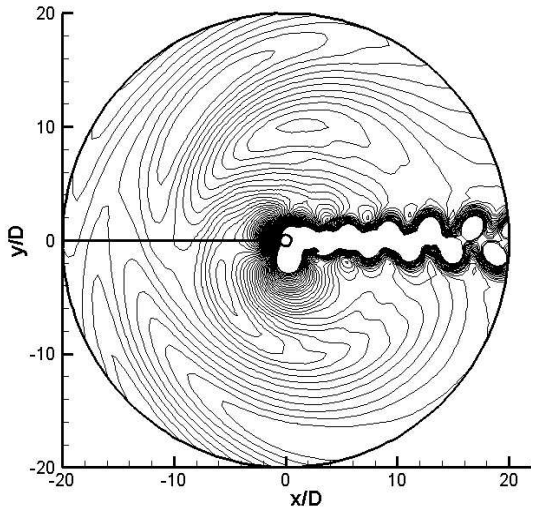

Fig.4.3.2 Contour of density entire field

정상적인 경계조건을 적용할 경우에는 Fig.4.3.1과 Fig.4.3.2에 볼 수 있듯이 벽면과 경계면에서 반사가 발생하지 않고 dipole sound 를 전 영역에서 관찰 할 수 있었다. Fig.4.3.3과 Fig.4.3.4는 각각 마하수와 vorex를 나타내고 있다.특히 전영역에 걸쳐 일정한 값을 가지며 계산 영역을 빠져 나감을 알 수 있었고. vortex가 경계면을 빠져나갈 때 수치적 진동이 없이 수치 계산이 잘 수행됨을 알 수 있었다.

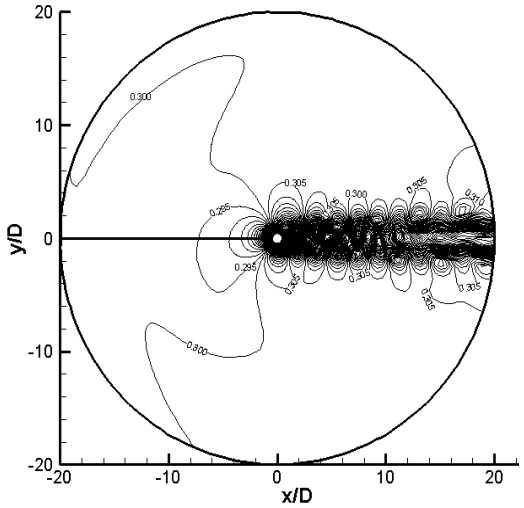

Fig.4.3.3 Contour of Mach number

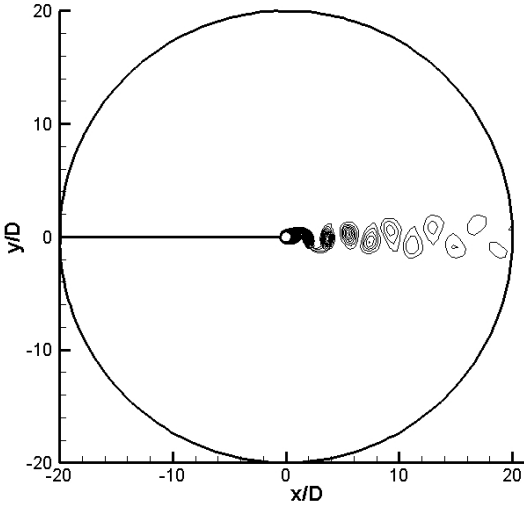

Fig.4.3.4 Contour of vortex

Fig.4.3.5는 x/D=5 인 지점에서의 압력값으로 어느 일정한 시간이 되면 일정하게 압력이 유지가 되지만, 보다 정확한 값을 얻기 위해서는 SPL 분석이 필요할 것으로 사료된다.

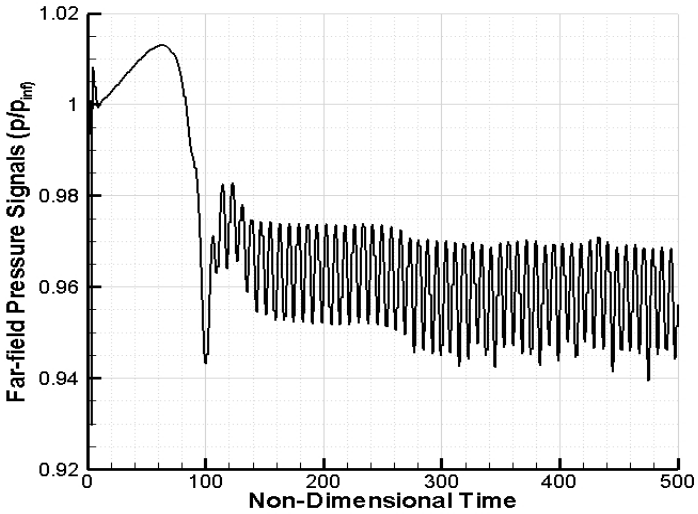

Fig.4.3.5 Acoustic signal at the far-field

제 13 장 결 론

본 연구는 고차 고해상도를 이용하여 원형 실린더의 유동 및 음향 해석에 대하여 고찰하였다. 공력음향 모사를 정확하게 하기 위하여 경계조건에 대한 연구를 수행 하였으며 특히 특성치 경계조건에서 발생하는 수치적 에러에 대한 연구 및 분석을 통하여 현재 가장 부합되는 경계조건을 통하여 안정되게 수치 계산을 수행하였으나 정확한 분석을 수행하지 못하였다. 추후 연구를 통하여 실험 결과의 비교를 통해 검증을 해야 할 것으로 생각된다.

고차 미분항에서 발생하는 dissipation error와 dispersion error를 감소 시키는 방법으로 인공점쇄항을 적용하여 성공적으로 수치계산을 안정적으로 수행할 수 있었다. 공력음향을 해석하기 위해서는 장시간 계산이 필요하므로 이를 해결하기 위해서는 병렬처리 기법이 필요하다. 본 연구에서는 3가지 병렬처리 기법을 통하여 가장 현재 수행하고 있는 연구에 적합한 모델을 제시하였다. 특히 MPI 방법은 많은 격자수가 요구될 때 다른 방법 보다 효과적으로 계산을 수행 할 수 있었지만 격자수가 적을 때는 OpenMP 방법이 계산 수행속도가 빠름을 확인 할 수 있었다.

현재 계산수행에 있어 Strouhal 수, 항력 계수 및 양력 계수에 대한 분석이 수행 되지 않아 실린더에 작용하는 정확한 유동 및 음향장에 대한 분석이 요구된다. 향후 보다 신뢰성 있는 결론을 도출하기 위해서는 far-filed 영역에 대한 주파수 분석이 필요하고 주파수 분석 검증을 통하여 3차원 원형 실린더에서 발생하는 모드 불안정성에 대하여 연구를 수행 할 예정이다.

참고문헌

[1] Norberg, C., "Fluctuating Lift on a Circular Cylinder: Review and New Measurements." J. of Fluids and Structures, Vol.17, 2003, pp.57-96

[2] Jordan, S.K., Fromm, J.E, "Ocillatory Drag, Lift, and Torque on a Cylinder in a Uniform Flow," Physics of Fluids, Vol.15, 1972, pp.371-376

[3] Williamson, C.H.K.," The existence of two stages in the transition to three dimensionality of a cylinder wake.",Phys. Fluids, vol.31,1988, pp 3165~

[4] Williamson, C.H.K.," Vortex dynamics in the cylinder wake.",Ann. Rev. Fluid Mech.328, 1996,345

[5] Charles Hirsh, Numerical Computation of Internal and External Flows, John Wiley & Son,1988

[6] Hoffmann, K. C. & Chiang, S. T. "Computational Fluid Dynamics for Engineers",Engineering Education System USA, 1993, Vol.1 pp. 237

[7] Kim, J. W. , and Lee, D. J., "Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution," AIAA Journal, Vol.34, No.5,1996, pp.887-893

[8] Poinsot, T.J., and Lele, S. K., "Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flow," Journal of Computational Physics, Vol.101,No. 1, 1992, pp.104-129

[9] R. Vichnevetsky and J. B. Bowles, Fourier Analysis of Numerical Approximations Of Hyperbolic Equations (SIAM, Philadelphia, 1982)

[10] Kim, J. W., and Lee, D. J., "Generalized characteristic boundary condition for computational aeroacoustics," AIAA Journal, Vol. 38, No.11, 2000, pp.2040-2049

[11] Kim, J. W., and Lee, D. J., "Generalized characteristic boundary condition for computational aeroacoustics,Part2," AIAA Journal, Vol.42, 2004, No.1, pp.47-55

[12] Tam, C.K.W.,and Shen, H., "Direct computation of nonlinear acoustics pulses using high-order finite difference scheme,"AIAA paper 93-4325

[13] Jameson, A., "Transonic airfoil calculations using the euler equations," Numerical Methods in Aeronautical Fluid dynamics, New York, Academic Press,1982

[14] Kim, J. W., and Lee, D. J., "Adaptive nonlinear artificial dissipation model for computational aeroacoustics,"AIAA Journal, Vol. 39, No.5, 2001, pp.810-818

[15] R.D. Sandberg and N.D. Sandham, Nonreflecting Zonal Characteristic Boundary Condition for direct numerical simulation of aerodynamic sound, AIAA Journal,44(2),2006,402

감사의 글

2년이라는 시간이 화살처럼 너무도 빠르게 지나가버린 것 같습니다. 열심히 하겠다는 결심을 한지가 엊그제 같은데 시간이 지나 어느덧 감사의 글을 쓰고 있습니다. 많은 분들의 도움으로 이렇게 작은 결실을 맺게 되었습니다.

홀로 막내아들 뒷바라지를 해주신 아버님께 정말 감사에 말씀과 사랑한다는 말을 전해드리고 싶습니다. 학부 때부터 많은 지도와 격려를 해주시고 학문적인 사고뿐만 아니라 항상 따뜻한 마음으로 도움을 주신 김재수 교수님께 진심으로 머리숙여 감사드립니다. 다른 학문을 하고 계시지만 항상 도움을 주신 이상기 교수님, 정동규 교수님, 공창덕 교수님, 김우영 교수님께도 감사드립니다. 10년 동안 한결처럼 제 옆에서 힘이 되어주고 헌신적인 사랑으로 지금 제가 이 자리 에 있게 만들어준 승경이에게 정말 고맙다는 말과 사랑한다는 말을 전하고 싶습니다. 어머니에 빈자리를 따듯하게 채워 주신 미래의 장모님께도 머리 숙여 감사드립니다. 학부 시절부터 어려운 일과 즐거운 일을 함께 나눈 십년지기 친구 태훈이, 항상 나에게 도움을 많이 준 홍일이, 좋은 이야기를 많이 해준 영광이형, 형규형, 학부시절 부터 항상 같이 하던 중연이, 철희, 현범, 재휘 모두 건강하고 소원 성치하기를 간절히 바랍니다. 실험실의 일들을 마다하지 않고 도와준 현식, 태수, 창희, 윤언, 바울, 언제나 친형처럼 나를 도와준 명국이 에게도 감사하는 말을 전하고 싶습니다. 멀리 사천에서 저에게 도움을 주신 KHP 비행조종팀의 김철호 팀장님과 팀원들에게도 감사에 말씀을 전하고 싶습니다. 너무 많은 분들이 도와주셨기에 비록 작은 결과이지만 성과를 이룰 수 있었다고 생각합니다.

새로운 시작점에 서있는 저에게 비록 짧은 시간이었지만 너무도 소중한 것들을 얻게 되었습니다. 저를 도와주신 모든 분들께 다시 한번 머리 숙여 감사하다는 말씀을 전해드리고 보다 더 열심히 노력하는 모습을 감사의 마음에 보답하겠습니다. 항상 건강하시고 소원 성취하시기 바랍니다.

저작물 이용 허락서

학 과	항공우주공학과	학 번	20067084	과 정	석사, 박사
성 명	한글: 이 상 수 한문 : 李 相 洙 영문 : LEE SANG SOO				
주 소	광주광역시 광산구 소촌동 497-4				
연락처	E-MAIL : lssff@koreaaero.com				
논문제목	한글 : 비정상 3차원 Navier-Stokes 식을 이용한 원형 실린더 주위의 공력음향 해석 영문 : Acoustics Analysis of Circular cylinder using Unsteady Three Dimensional Navier-Stokes Equation				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집·형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포·전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송·출력을 허락함.

2007 년 12월 10일

저작자: 이 상 수 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하