２００８년　８월

教育學碩士(數學敎育)學位論文

離散數學에서의 *Graph*領域의 指導方案 硏究

－ 實生活 問題를 中心으로 －

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李　賢　貞

離散數學에서의 *Graph*領域의 指導方案 研究

- 實生活 問題를 中心으로 -

A study of teaching methods of Graph
in discrete mathematics
- focused on problems of real life -

2008년 8월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 賢 貞

離散數學에서의 *Graph*領域의 指導方案 研究

指導教授　韓 承 局

이 論文을 教育學碩士(數學教育)學位 請求論文으로 提出함.

2008년　4월

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

李　賢　貞

李賢貞의 教育學 碩士學位 論文을 認准함.

審查委員長 朝鮮大學校 敎授 안 영 준 교수님 印

審 查 委 員 朝鮮大學校 敎授 한 승 국 교수님 印

審 查 委 員 朝鮮大學校 敎授 강 은 실 교수님 印

2008년 6월

朝鮮大學校 敎育大學院

- 목　　　차-

ABSTRACT

A study of teaching methods of graph in discrete mathematics - focused on problems of real life -

Lee Hyun-Jeong
Advisor : Prof. Han Seung-gook Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In the reform of 7th curriculum, discrete mathematics is one out of five deeper selection subject which can be selected by the second and the third grade high school student. But most of the high school does not designates discrete mathematics with deepen selection subject. The purpose of this study is come true curriculum which right in gist of discrete mathematics 7th curriculum.

The efficient study method of discrete mathematics suggests to accomplish many more succeeding research.

Ⅰ. 서　　론

A. 연구의 목적

수학은 크게 연속성의 미・적분 개념의 수학과 이산적 속성의 이산수학으로 나눠 볼 수 있는데 이산수학은 유한개의 원소를 갖는 집합과 체계에 대하여 수학적 성질을 연구하는 학문이다. 이산수학은 이산적인 대상과 유한 과정의 절차로 나타나기 때문에 정보화된 지식을 다루기에 적합하며, 수학의 본질을 반영하면서도, 수학적 개념에 관한 흥미를 쉽게 유발할 수 있고, 컴퓨터의 원리를 이해하는데 필요한 기초적인 수학적 지식과 소양을 갖추게 하는데 유용 하다.[12]

이산수학을 학습하는데 특정한 수학적 지식을 요구하지 않기 때문에 많은 수학경시대회에서 참가자들의 수학적 능력을 측정하기 위하여 이산수학 문제가 출제되고 있다. 같은 이유로, 초, 중등 학생들을 위한 전국의 수학영재교육센터에서도 이산수학 문제를 사용하여 학생들을 교육시키고 있다. 또한 이산수학의 문제들은 실생활과 밀접하게 관련되어 있기 때문에, 복잡한 계산 문제와 같이 틀에 박힌 수학 문제로 인하여 수학에 대한 흥미를 잃은 학생들에게도 이산수학문제를 통하여 수학에 대한 의미와 흥미를 제공할 수 있을 뿐만 아니라 자신이 실제상황에 처해있다고 상상하면서 서로 협동하여 문제를 풀도록 유도하기 때문에 다양한 문제풀이 전략들을 개발시킬 수 있고 학생들의 언어와 구술능력을 발달시킬 수 있으며 논리 전개 단계에서 서로의 생각이 맞는지 검증하도록 함으로써 정밀한 사고와 추론을 할 수 있도록 만든다. [10]

실생활에서 수학적 개념을 접하게 되는 것 중에서 하나의 예를 들면 어릴적 구슬치기나 공기놀이가 있는데, 이런 놀이를 하면서 놀이 방법이나 승패를 결정하는 일정한 규칙을 정하거나 규칙적으로 발생하는 각 경우를 이해하

고 있어야 한다. 이때, 실제로는 무질서한 상황으로 보일지라도 그 안에는 일정한 질서와 규칙을 담고 있는 경우가 많다. 이와 같이 무질서하게 보여도 그 안에 내재되어 있는 질서와 규칙을 찾아 수학적인 체계로 담아내는 과정을 이산수학에서 학습하고자 한다. 이러한 학습과정에 의하여 학생들은 자연스럽게 상황을 분석할 수 있는 분석 능력을 기를 수 있고, 분석 과정에서 얻은 정보를 정리하여 전체적인 상황을 판단할 수 있는 이해능력을 기르며, 이러한 이해와 판단 하에서 상황에 적절한 해결방법을 찾을 수 있는 창의력을 배양할 수 있다. [5]

NCTM(1989)은 9-12학년의 수학교육과정은 12번째 규준으로서 이산수학을 설정하고 그 필요성을 언급하고 있는데 그 구체적 내용은 다음과 같다.

21C로 가는 시점에 있어서 정보와 정보의 교환은 최소한, 물건의 생산만큼 중요한 것이 되었다. 물리적 또는 물질세계는 미적분과 대수, 기하, 삼각함수의 필수 아이디어인 연속성에 의해 흔히 모델화되는 반면, 정보처리라는 비물질 세계는 이산(불연속)수학의 사용을 요구한다. 컴퓨터 공학 역시 수학이 사용되고 창조되는 방법에 점차 강하게 영향을 미치고 있다. 컴퓨터는 본질적으로 유한이고 이산적인 기계이다. 따라서 이산수학으로부터의 내용은 컴퓨터를 사용하는 문제해결에 필수적이다. 이런 점에서 모든 학생들로 하여금 이산수학의 개념과 방법을 경험하게 하는 것은 중요하다.

이산수학을 배움으로써 그 결과 학생들은

- 유한 그래프, 행렬, 수열과 재귀관계와 같은 이산구조를 사용하여 문제상황을 표현할 수 있어야 한다.
- 행렬을 사용하여 유한 그래프를 표현하고 분석할 수 있어야 한다.
- 알고리즘을 개발하고 분석할 수 있어야 한다.

그리고 대학 진학 학생들은

- 선형 프로그래밍과 계차방정식을 이용하여 문제를 표현하고 해결할 수 있어야 한다.

- 알고리즘의 응용과 컴퓨터 타당화 과정과 관련되어 생기는 문제상황을 탐구할 수 있어야 한다.

또한, Hart는 이산수학의 필요성을 다음과 같이 언급하고 있다.

첫째, 이산수학은 학생들에게 수학은 살아 움직이는 과목이라는 신념을 넣어 줄 수 있다. 둘째, 이산수학은 학생들의 문제 해결과 수학적 모델링 능력을 향상시킨다. 특히, 그래프와 행렬은 많은 흥미 있는 문제의 모델링에 사용될 수 있고, 수학의 지도에 많은 활동 무대를 제공할 수 있다. 셋째, 이산수학은 실생활에서 넓게 사용된다. 특히 그래프이론은 수학의 여러 분야에서 자주 이용됨은 물론 컴퓨터공학, 화학, 심리학, 사회학, 생태학, 유전학 등의 학문에서도 널리 쓰이는 중요한 항목이다. 반도체, 네트워크, 비행항로 등과 같이 컴퓨터과학과 관련된 분야에서는 여러 가지 복잡한 문제들을 그래프로 나타내고 그래프의 성질을 이용하여 해결하는 경우가 많다. 또 요즈음에는 도시계획이나 교통 문제 등과 같은 현대생활의 중요한 문제에서도 그래프가 자주 쓰이고 있다. 넷째, 이산수학은 학생들의 수학적 흥미를 고취하기 좋은 내용이 많다. 예를 들면, 하노이 탑의 문제, 성냥개비 옮기기 문제, 배추, 양, 늑대 옮기기 문제가 있으며, 이들 문제의 대부분은 추론 과정에서 복잡한 수학을 필요로 하지 않기 때문에 쉽게 받아들일 수 있다.[12]

이렇듯 이산수학은 정보화 시대에서 요구하는 창의적 사고 능력, 논리적 분석능력, 체계적 이해능력 및 응용능력을 갖추기 위해 필요한 과목임에 틀림이 없다. 이에 발맞춰 우리나라도 제7차 교육과정에서 심화 선택 과목으로 이산수학을 개설 하였지만, 우리나라 교육특성상 이산수학을 선택하는 학생이 많지 않은 이유로 곧 학교수업에 반영될 개정교육과정에는 이산수학과목이 삭제되고 그 일부 내용만이 '수학 I '과 선택과목인 '수학의 활용'으로 축소하여 옮겨질 것으로 예상되어진 상태이다.

본 논문은 이에 안타까움을 가지고, '수학 I '으로 축소하여 옮겨지는 이산수학의 내용 중 그래프영역을 보다 쉽게 많은 학생들이 접할 수 있도록 프로이

덴탈의 수학화 교수학습론을 적용한 지도방향을 제시하였다. 이를 바탕으로 그래프영역을 효율적으로 교수할 수 있도록 돕는 자료가 되고자 한다.

B. 연구의 내용 및 제한점

제 7 차 교육과정(교육부 고시 제 1997-15호)에서 『'이산수학'의 내용은 이산적인 상황에 맞는 사고의 적용을 강조하여 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사 결정과 최적화 등의 4개 영역으로 하고, 수학의 이산적 상황의 문제를 쉽고 흥미롭게 학습할 수 있도록 다양한 실생활을 소재로 하여 구성하였다. '이산수학'의 학습에서는 수학 학습에서 습득된 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 이산적인 상황을 수학적으로 간결히 표현하고 처리 할 수 있도록 하는 데 중점을 둔다. 또, 전 영역에 걸쳐서 복잡한 계산이나 문제해결을 위하여 계산기나 컴퓨터를 적극적으로 활용한다.』로 언급하고 있다.

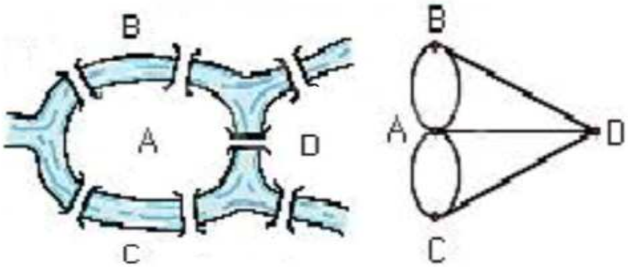
본 논문은 제 7 차 교육과정에서 언급하고 있는 '이산수학'의 영역 중 실생활과 연관이 많은 그래프의 영역만 다뤘다.

그래프영역은 그래프, 수형도, 여러 가지 회로, 그래프의 활용으로 분류되는데 각 내용마다 중요한 실생활문제위주로 다뤘다. 하지만 구체적으로 현실에 효과적인 교수자료가 될 것인지는 확인되지 않아 부족한부분이 있을 것으로 예상된다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. 이산수학에서의 위상적성질인 그래프 이론[8][1)]

쾨니히스버그는 18세기 당시 동부 프러시아의 수도였다. 이 도시를 지나는 프레겔 강은 그 가운데에 있는 섬을 주위로 하여 두 지류로 나뉘어져 흐르고 도시는 네 구역으로 구획되어있다. 이 도시에 7개의 다리가 설치되어 강을 건너 네 구역 A, B, C, D를 왕래할 수 있었다. 그 당시 사람들은 한 구역에서 출발하여 7개의 다리를 꼭 한 번씩 건너 다시 출발점으로 되돌아 올 수 있는지 알고 싶어 했다.



오일러는 이 문제를 해결하기 위하여 위의 그림과 같이 핵심적인 부분만을 살려 네 구역은 점으로 나타내고 7개의 다리는 선(직선 또는 곡선)으로 나타내고 강은 무시하였다. 이와 같이 점과 선으로 이루어진 것을 그래프라고 한다면, 본래의 문제는 이 그래프에서 적당한 한 점을 택하여 이 점으로부터 출발하여 7개의 선을 한 번씩 모두 거쳐 출발점으로 되돌아 올 수 있는지를 묻는 문제로 바뀐다. 그 후 이 방법이 그래프 이론의 시발점이 되었다.

---

1) 여기에서는 박승안『이산수학』, 경문사(2006)의 내용을 중심으로 서술하였다.

1. 그래프

두 집합 V, E에 대하여 다음이 성립할 때, $G=(V, E)$를 **그래프**라고 한다.

i) V는 공집합이 아닌 유한 집합이다.

ii) E는 $\{v, w\}$ $(v, w \in V)$들로 이루어진 유한 집합이다.

그리고 V의 원소를 **꼭지점** 라 하고, E의 원소 $\{v, w\}$를 **모서리** 또는 **변** 또는 **가지**라고 한다. 또, 모서리 $\{v, w\}$를 두 꼭지점 v, w를 **이은 모서리**라 하고 v, w를 이 모서리의 **끝점**이라고 한다.($\{v, w\} = \{w, v\}$) 모서리 $\{v, w\}$ 에서 $v = w$일수도 있으며 이러한 모서리를 **고리**라고 한다. 또, 모서리 $\{v, w\}$가 두 개 이상 존재할 수 있으며 이러한 경우에 이 모서리를 **다중 모서리**라고 한다.

[정의1.1] 그래프 $G=(V, E)$에서 고리도 없고 다중 모서리도 없는 경우에 이 그래프를 **단순그래프**라고 한다.

한편, 그래프 G에 고리 또는 다중 모서리가 있는 경우에 G를 **다중그래프**라고 한다.

[정의1.2] 그래프 $G=(V, E)$에 대하여, 다음과 같이 정의된 그래프 $G'=(V', E')$를 G의 **부분그래프**라고 한다.

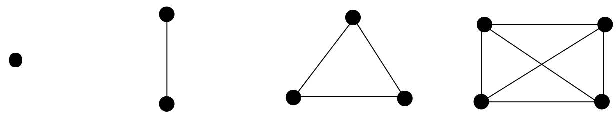
i) $\varnothing \neq V' \subset V$, $\varnothing \neq E' \subset E$

ii) E'에 속하는 모서리의 끝점은 모두 V'에 속한다.

[정의1.3] 그래프 $G=(V, E)$에서 두 꼭지점 v, w를 이은 모서리 $\{v, w\} \in E$가 존재할 때 v, w를 서로 **인접한 꼭지점** 또는 **이웃한꼭지점**이라

고 한다. 또, 꼭지점 $v \in V$에 대하여 v를 끝점으로 갖는 모서리의 개수를 v의 **차수**라 하고 $\deg v$로 나타낸다. 이 때, 모서리가 고리인 경우에는 이 모서리를 2회 세기로 한다.

[정의1.4] 단순그래프 $G=(V, E)$에서 집합 V의 원소의 개수를 $|V|$라 할 때, $n=|V| \geq 1$이고 또 임의의 서로 다른 두 꼭지점을 이은 모서리가 꼭 한 개씩 존재할 때, 그래프 G를 **완전그래프**라 하고 이 그래프를 K_n 으로 나타낸다.



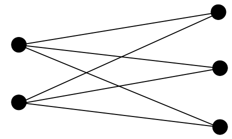
K_1 K_2 K_3 K_4

[정의1.5] 단순그래프 $G=(V, E)$에서 다음 두 조건을 만족시키는 V의 공집합이 아닌 부분집합 V_1, V_2가 존재할 때, 그래프 G를 **이분그래프**라고 한다.

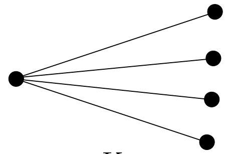
i) $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

ii) 모든 모서리의 한 끝점은 V_1 에 속하고 다른 한 끝점은 V_2 에 속한다.

더욱이, 임의의 꼭지점 $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$에 대하여 v_1, v_2를 끝점으로 가지는 모서리 $\{v_1, v_2\}$가 꼭 한 개씩 존재할 때 G를 **완전 이분그래프**라 하고, 특히 $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ 일때 이 완전 이분그래프를 $K_{m,n}$ 또는 $K_{n,m}$ 으로 나타낸다.



$K_{2,3}$



$K_{1,4}$

[정의1.6] 그래프 $G=(V, E)$에서 꼭지점 v의 차수 $\deg v$가 짝수일 때 v를 **짝수점**이라 하고 $\deg v$가 홀수일 때 v를 **홀수점**이라고 한다.
특히, $\deg v = 1$인 경우에 v를 **나뭇잎** 또는 **매달린 꼭지점**이라 하고, $\deg v = 0$일 때 v를 **고립점**이라고 한다. 그리고, 그래프 G의 모든 꼭지점의 차수가 같을 때 G를 **정칙그래프**라 하고, 특히 모든 꼭지점의 차수가 r일 때 이 그래프를 r**차의 정칙그래프**라고 한다.

[정리1.7](Euler) 그래프 $G=(V, E)$에서 모든 꼭지점에 대한 차수 전체의 합은 모서리의 개수의 두 배이다. 즉, 다음 등식이 성립한다.

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

증명) 다음 집합의 원소의 개수를 두 가지 방법으로 계산한다.

$$S = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in V,\ e \in E\},\ e = \{v, w\},\ w \in V$$

먼저 각 꼭지점 $v \in V$에 대하여 v를 끝점으로 가지는 모서리의 개수는 $\deg v$이므로 $|S| = \sum_{v \in V} \deg v$ 이다. 한편, 각 모서리 $e \in E$에 대하여 e의 끝점인 꼭지점의 개수는 2이므로 $\sum_{v \in V} \deg v = |S| = 2|E|$ 이다.

[따름정리1.8] 그래프 $G=(V, E)$에서 홀수점 전체의 개수는 짝수이다. (0을 포함하여)

증명) 홀수점 전체로 이루어진 집합과 짝수점 전체로 이루어진 집합을 각각 V_1, V_2 라고 하면, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ 이므로 [정리1.7]에 의하여 다음 등식이 성립한다. $\sum_{v \in V_1} \deg v + \sum_{w \in V_2} \deg w = 2|E|$ 한편, 모든 $w \in V_2$ 에 대하여 $\deg w$ 는 짝수이므로 $\sum_{w \in V_2} \deg w$ 는 짝수이고, 따라서 위의 등식에 의하여 $\sum_{v \in V_1} \deg v$ 는 짝수이다. 그런데, 모든 $v \in V_1$ 에 대하여 $\deg v$ 는 홀수이므로 $|V_1|$ 은 짝수이어야 하고, 따라서 홀수점의 개수는 짝수이다.

2. 동형인 그래프와 인접행렬

두 그래프 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ 에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 사상 $\varnothing : V_1 \rightarrow V_2$ 를 **동형사상**이라고 한다.

i) $\varnothing$ 는 일대일 대응이다.

ii) $\{v_i, v_j\} \in E_1$ 일 때 그리고 이때에만 $\{\varnothing(v_i), \varnothing(v_j)\} \in E_2$ 이다.

그리고, 이와 같은 동형사상 $\varnothing : V_1 \rightarrow V_2$가 존재할 때, G_1 과 G_2 는 서로 **동형인 그래프**라고 한다.

[정의2.1] 그래프 $G = (V, E)$에서, 모든 꼭지점의 차수를 큰 것부터 차례로 늘어놓은 유한수열을 G의 **차수수열**이라고 한다.

[정의2.2] 그래프 $G = (V, E)$에서 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $|V| = n$ 일 때, 다음과 같이 정의된 n차의 행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 를 G의 **인접행렬**이라고 한다.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = (v_i,\ v_j \text{를 이은 모서리의 개수})$$

3. 오일러 회로와 해밀턴 순환로

그래프 $G=(V,E)$에서

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \cdots, \{v_{k-1}, v_k\} \quad (k \geq 1) \qquad (*)$$

와 같이 k개의 연이은 모서리로 이루어진 열을 길이 k인 **길**이라 하고 이때 v_0, v_k를 이 길의 **끝점**이라고 한다.

길 $(*)$에서 꼭지점 $v_0, v_1, \cdots, v_k$가 모두 서로 다를 때, 이 길을 v_0에서 v_k까지의 **경로**라고 한고, 꼭지점 $v_0 = v_k$일 때, 이 길은 **닫혀 있다**고 한다. 그리고 모서리가 모두 서로 다르고 $v_0 = v_k$일 때, 이것을 **회로**라 하고 v_0를 이 회로의 **끝점**이라고 한다. 또한 회로인 동시에 $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$이 서로 다르고 또 $v_0 = v_k$일 때, 이것을 **순환로**라 하고 v_0를 이 순환로의 **끝점**이라고 한다.

[정의3.1] 그래프 $G=(V,E)$가 단순그래프이거나 또는 다중 모서리가 없는 경우에, 두 꼭지점을 이은 모서리는 유일하게 결정되므로 길 $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \cdots, \{v_{k-1}, v_k\}$을 간단히 $v_0, v_1, \cdots, v_k$로 나타낸다.

[정의3.2] 그래프 $G=(V,E)$에서 서로 다른 두 꼭지점 $v, w \in V$에 대하여 v에서 w까지의 경로 $v_0, v_1, \cdots, v_k$가 존재할 때, v와 w는 **연결되어 있다**고 한다. 여기서, 꼭지점 $v, v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}, w$는 모두 서로 다르다. 또, 그래프 G에서 $|V| = 1$이거나 또는 임의의 서로 다른 두

꼭지점이 연결되어 있을 때 G를 **연결그래프**라고 한다.

[정의3.3] 그래프 $G=(V,E)$에서 모든 모서리를 한 번씩만 포함하는 길이 존재할 때, 이 길을 **오일러 길**이라고 한다. 특히, 모든 모서리를 한 번씩만 포함하는 회로 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ ($v_0 = v_k$)가 존재할 때, 이 회로를 **오일러 회로**라고 한다. 여기서 오일러 길과 오일러 회로는 한 꼭지점을 여러번 포함하여도 좋다.

[정리3.4] 연결그래프 $G=(V,E)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) G의 서로 다른 두 꼭지점 v, w에 대하여 v에서 w까지의 오일러 길이 존재하기 위한 필요충분조건은 v와 w는 홀수점이고 나머지 꼭지점은 모두 짝수점인 것이다.

(2) G에 오일러 회로가 존재하기 위한 필요충분조건은 G의 모든 꼭지점이 짝수점인 것이다.

증명) (1)($\Rightarrow$) 연결그래프 $G=(V,E)$에 오일러길이 존재한다고 가정하면, 오일러 길을 운행할 때 서로 다른 두 모서리가 같은 꼭지점을 만나게 되는데 이 꼭지점이 처음 꼭지점이거나 마지막 꼭지점이 아니라면 도착되는 모서리외에 출발하는 모서리가 존재한다. 따라서 길의 중간점에 있는 꼭지점은 두 개의 모서리에 연결된다. 그러므로 길의 양 끝에 해당되는 두 개의 꼭지점을 제외하고는 모든 꼭지점의 차수는 짝수이다. 이 때 오일러 길의 양쪽 끝에 있는 두 개의 꼭지점이 다르면 이 두 개의 꼭지점만이 홀수의 차수를 갖는다.

($\Leftarrow$) 모든 꼭지점의 차수가 짝수인 경우를 생각하자. 출발점으로 임의의 꼭지점 v를 선택하면 v에 근접하는 모서리의 수는 짝수이므로, 하나의 모서리을 따라 출발하면 v에 도착할 모서리가 적어도 하나 존재한다. v

를 출발하여 그래프의 길을 선택하면서 사용된 모서리을 제거하자. 이와 같은 과정이 끝나고 모든 모서리를 포함하면 오일러 회로가 존재한다. 이와 같은 과정이 v에서 끝나고 모든 모서리가 포함되지 않았다면 이미 형성된 회로와 공통된 꼭지점 u가 남아 있는 그래프에 존재한다. u로부터 모든 모서리가 포함될때까지 위와 같은 과정을 반복하면 오일러 회로가 형성된다. 차수가 홀수인 두 개의 꼭지점이 존재할 경우는 두 꼭지점을 오일러 길의 시작과 끝이 되도록 구성하여 오일러 길을 만들 수 있다.

(2) 오일러 회로일 때는 (1)에서의 오일러 길이 시작점과 끝점이 같아야 하므로 각각 홀수차수가 되었던 시작점과 끝점이 한 꼭지점으로서 차수가 짝수가 되어 모든 꼭지점의 차수가 짝수가 된다.

[정의3.5] 그래프 $G=(V,E)$에서 모든 꼭지점을 포함하는 순환로 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ $(v_0 = v_n)$가 존재할 때, 이 순환로를 **해밀턴순환로**라고 한다.

4. 수형도

연결그래프 G에 순환로가 없을 때, 이 그래프를 **수형도**라고 한다.

[정리4.1] 단순그래프 G에 대하여 다음 두 조건은 서로 동치이다.

(1) G는 수형도이다.

(2) 임의의 서로 다른 두 꼭지점 v, w에 대하여 v에서 w까지의 경로가 단 하나 존재한다.

증명) $(1) \Rightarrow (2)$ 단순그래프 G가 수형도라 하고 v, w를 서로 다른 두 꼭지점이라고 하자. 이 때, G는 연결그래프이므로 v에서 w까지의 경로

가 존재한다. 그리고, v 에서 w 까지의 경로가 두 개 존재한다면, G에 순환로가 존재하게 되어 G가 수형도라는 사실에 모순된다. 따라서 v 에서 w 까지의 경로는 단 하나 존재한다.

$(2) \Rightarrow (1)$ 가정에 의하여 G는 연결그래프이고 또 G에는 다중모서리와 고리가 없으므로, G에 순환로가 존재 한다면, 이 순환로는 적어도 3개의 꼭지점 u, v, w 를 포함하고 이때, 예를 들어 u 에서 w 까지의 경로는 두 개가 있게 되어 모순이 생긴다. 그러므로 G는 수형도이다.

[정리4.2] 단순 연결그래프 $G = (V, E)$에 대하여 다음 두 조건은 서로 동치이다.

(1) G는 수형도이다.

(2) $|E| = |V| - 1$

증명) $(1) \Rightarrow (2)$ G가 수형도라 하고 한 꼭지점 v_0를 뿌리로 택하면, v_0가 아닌 꼭지점 v 에 대하여 v 의 깊이가 결정된다. 그리고, G에는 고리가 없으므로 각 모서리의 끝점은 2개 있다. 이제 각 모서리 $e \in E$에 대하여 이 모서리의 두 끝점 중에서 그 깊이가 큰 꼭지점을 대응시키면, 이 대응은 집합 E 에서 집합 $V - \{v_0\}$로의 일대일 대응이다. 따라서 $|E| = |V| - 1$ 이다.

$(2) \Rightarrow (1)$ $|E| = |V| - 1$ 일 때, G에 순환로가 존재한다고 가정하고, $v_1, \cdots, v_k, v_1$ 를 G의 한 순환로이라고 하자.

이 때, G에는 고리도 없고 다중 모서리도 없으므로 $k \geq 3$ 이다. 또한, $e = \{v_1, v_2\}$, $E = E - \{e\}$ 라고 하면, G의 부분그래프 $G_1 = (V, E_1)$은 연결그래프이고 위의 순환로를 포함하지 않는다. 실제로, v, w 가 서로 다른 두 꼭지점일 때, G는 연결그래프이므로 G에는 v 에서 w 까지의 경로가 존재한다. 한편, 이 경로가 e를 포함하지 않으면, 이 경로는 G_1

에서의 경로이고, 이 경로가 e를 포함하면 e 를 v_1 v_k v_{k-1} ... v_3 v_2 로 바꾸어 놓아 만든 경로는 G_1 에서의 v 에서 w 까지의 경로이다.

따라서 G_1 은 연결그래프이다. 또, $|E_1| = |E| - 1 = |V| - 2$ 이다.

이와 같이 G에서 꼭지점은 그대로 둔 채 순환로를 모두 제거하여 얻은 부분그래프를 $G' = (V, E')$ 이라고 하면, G'은 연결그래프이므로 G' 은 수형도이고 또 $|E'| < |V| - 1$ 로 되어 (1)⇒(2)에 모순이 생긴다.

따라서 G 에는 순환로가 없으므로, G는 수형도이다.

[따름정리4.3] 수형도 $G = (V, E)$에서 인접하지 않은 두 꼭지점을 모서리로 이으면 순환로가 생긴다.

증명) 수형도 G에서 인접하지 않은 두 곡지점 v, w 에 모서리 e 를 추가하여 $E' = E \cup \{e\}$라고 하면, $G' = (V, E')$은 단순 연결그래프이다.

한편, [정리4.2]에 의하여 $|E| = |V| - 1$이므로 $|E'| = |E| + 1 = |V|$ 이고, 따라서 G'은 수형도가 아니다. 그러므로 G'에는 순환로가 존재한다. 따라서 정리가 성립한다.

5. 생성수형도

연결그래프 $G = (V, E)$에서 꼭지점은 모두 그대로 둔 채 적당한 모서리를 제거하여 얻게 되는 수형도 $G' = (V, E')$을 G의 **생성수형도**라고 한다.

[정리5.1] 연결그래프 $G = (V, E)$의 생성수형도는 존재한다.

증명) 연결그래프 G에서 꼭지점은 모두 그대로 둔 채 고리가 존재한다면

고리를 모두 제거한다. 또 서로 다른 두 꼭지점을 이은 다중 모서리가 존재한다면 모서리 중에서 하나만 남기고 나머지를 모두 제거한다. 이렇게 하여 얻은 G의 부분그래프를 $G_1 = (V, E_1)$ 이라고 하면 G_1은 단순 연결그래프이다.

G_1에 순환로가 존재한다고 가정하고 $v_1\ v_2\ \cdots\ v_k\ v_1$를 G_1의 한 순환로 라고 하자. 이 때, $e = \{v_1, v_2\}$라 하고 $E_2 = E_1 - \{e\}$라고 하면, 그래프 G_1에서 꼭지점은 그대로 둔 채 모서리 e만을 제거하여 얻은 부분그래프 $G_2 = (V, E_2)$는 연결그래프이고 또 순환로 $v_1\ v_2\ \cdots\ v_k\ v_1$ 을 포함하지 않는다.

이와 같이 G_1에서 꼭지점은 모두 그대로 둔 채 순환로를 모두 제거하여 얻은 부분그래프를 $G' = (V, E')$이라고 하면, G'은 연결그래프이므로 G'은 수형도이고 따라서 G'은 G의 생성수형도이다.

[따름정리5.2] 연결그래프 $G = (V, E)$에 대하여 $G' = (V, E')$이 G의 생성수형도이면, G'은 $|V|$개의 꼭지점과 $|V| - 1$개의 모서리로 이루어진 수형도이다.

증명) G'의 꼭지점의 개수는 $|V|$이고, G'은 수형도이므로 [정리4.2]에 의하여 $|E'| = |V| - 1$이다.

6. 평면그래프

그래프 $G = (V, E)$을 평면 위에 어느 두 모서리도 꼭지점이 아닌 점에서 교차하지 않도록 굽은 선 또는 곧은 선으로 그릴 수 있을 때, G를 **평면그래프**라고 한다.

[정리6.1](오일러) 연결그래프 $G=(V,E)$가 평면그래프인 경우에, 이 그래프를 평면 위에 어느 두 모서리도 서로 교차하지 않도록 그렸을 때 생기는 면의 개수를 f라고 하면 다음 등식이 성립한다.

$$|V|-|E|+f=2$$

증명) 이 정리를 모서리의 개수 $|E|$에 관한 귀납법으로 증명한다. 먼저 $|E|=1$이면, $|V|=2$, $f=1$이므로 $|V|-|E|+f=2$이다.

이제 $G=(V,E)$가 정리의 조건을 만족시키는 평면그래프라 하고, 단순연결그래프이면서 평면그래프인 그래프 중에서 모서리의 개수가 $|E|-1$일 때 정리의 등식이 성립한다고 가정하자. 먼저 G에 순환로가 존재하지 않으면, G는 수형도 이므로 [따름정리5.2]에 의하여 $|E|=|V|-1$이고 또 면의 개수는 1이므로 다음 등식이 성립한다.

$|V|-|E|+f=|V|-|V|+1+1=2$

이제 G에 순환로 $v_1\ v_2\ \cdots\ v_k\ v_1$이 존재한다고 하자. 이 때, $e=\{v_1,v_2\}$라 하고 $e'\in E-\{e\}$라고 하면, 부분그래프 $G'=(V,E')$은 단순 연결그래프이고 $|E'|=|E|-1$이다. 한편, 분명히 G'의 면의 개수는 $f-1$이므로 귀납법 가정에 의하여 $|V|-|E'|+f-1=2$이므로 $|V|-|E|+1+f-1=2$ 즉, $|V|-|E|+f=2$이다.

[정리6.2] 완전 이분그래프 $K_{3,3}$는 평면그래프가 아니다.

증명) 그래프 $K_{3,3}$는 6개의 꼭지점과 9개의 모서리로 이루어진 단순 연결 그래프이다. 이제 $K_{3,3}$가 평면그래프라고 가정하고, 또 이 그래프를 평면 위에 어느 두 모서리도 서로 교차하지 않도록 그렸을 때 생기는 면의 개수를 f라고 하자. 이 때, [정리6.1]에 의하여 $6-9+f=2$이므로 $f=5$이다. 또, 각 영역의 경계를 이루는 모서리 개수의 합을 m이라고

하면, 각 모서리는 2번 이상 중복되지 않으므로 $m \leq 2\times 9 = 18$이고, $K_{3,3}$는 이분그래프이므로 그 부분그래프 중에는 K_3와 동형인 것이 없으므로 각 영역의 경계는 4개 이상의 모서리로 이루어져 있다.
따라서 $m \geq 4f \geq 4\times 5 = 20$이므로 모순이 생긴다. 그러므로 $K_{3,3}$는 평면그래프가 아니다.

[정리6.3] 단순연결그래프 $G=(V,E)$가 평면그래프일 때, $|V| \geq 3$ 이면 $|E| \leq 3|V| - 6$이다.

증명) 먼저 $|V| = 3$이면, 분명히 $|E| \leq 3$이므로 다음이 성립한다.

$$|E| \leq 3 = 3|V| - 6$$

이제 $|V| \geq 3$이라고 하자. 이 때, $3|V| - 6 \geq 3\times 3 - 6 = 3$이므로 $|E| \leq 2$이면 $|E| \leq 3|V| - 6$이다. 다음에 $|E| \geq 3$인 경우에 이 그래프를 평면 위에 어느 두 모서리도 서로 교차하지 않도록 그렸을 때 생기는 면의 개수를 f라 하고, 경계를 이루는 모서리 전체의 개수를 m이라고 하자. 각 모서리는 1개 또는 2개의 면의 경계에 속하므로 $m \leq 2|E|$이다. 그런데, 각 경계는 적어도 3개의 모서리로 이루어져 있으므로 $m \geq 3f$이고 따라서 다음이 성립한다.

$$3f \leq m \leq 2|E|.$$

한편, [정리6.1]에 의하여 $|V| - |E| + f = 2$ 이므로
$6 = 3|V| - 3|E| + 3f \leq 3|V| - 3|E| + 2|E| = 3|V| - |E|$
이고, 따라서 $|E| \leq 3|V| - 6$이다.

[정리6.4] 완전그래프 K_5는 평면그래프가 아니다.

증명) 그래프 K_5는 5개의 꼭지점과 10개의 모서리로 이루어져 있는 단순

연결그래프이고 또 $3|V|-6 = 3\times 5-6 = 9 < 10 = |E|$이므로, [정리6.3]에 의하여 K_5는 평면그래프가 아니다.

[정리6.5] 그래프 $G=(V, E)$가 평면그래프이면, G의 꼭지점 중에는 $\deg v \le 5$인 꼭지점 v가 적어도 하나 존재한다.

증명) 모든 $v \in V$에 대하여 $\deg v \ge 6$이면, [정리1.7]에 의하여 $2|E| = \sum_{v \in V} \deg v = 6|V|$이므로 $|E| \ge 3|V| > 3|V| - 6$이고 이것은 [정리6.3]에 모순된다. 따라서 G는 $\deg v \le 5$인 꼭지점 v가 적어도 하나 존재한다.

7. 색칠하기

그래프 $G=(V, E)$에서 각 꼭지점마다 색을 지정하되 서로 이웃하는 꼭지점에 다른 색이 지정되도록 하는 것을 **색칠하기**라고 한다. 그리고, 그래프 G의 색칠하기에 사용되는 색의 최소 개수를 G의 **색채수**라 하고, 이것을 $\chi(G)$로 나타낸다.

[정리7.1] 그래프 $G=(V, E)$가 이분그래프이면, $\chi(G) = 2$이다.
특히, 완전 이분그래프 $K_{m,n}$에 대하여 $\chi(K_{m,n}) = 2$이다.

증명) 가정에 의하여 다음의 두 조건을 만족시키는 V의 공집합이 아닌 두 부분집합 V_1, V_2가 존재한다.

i) $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

ii) 모든 모서리의 한 끝점은 V_1에 속하고 다른 한 끝점은 V_2에

속한다.

이 때, V_1 에 속하는 모든 꼭지점에 한 색을 지정하고 V_2 에 속하는 모든 꼭지점에 다른 한 색을 지정하면 되므로 $\chi(G) \leq 2$ 이다. 한편, 한 모서리의 두 끝점이 각각 $v \in V_1$, $w \in V_2$ 이면, 이 두 끝점에 서로 다른 색을 지정해야 하므로 $\chi(G) = 2$ 이다. 특히, $\chi(K_{m,n}) = 2$ 이다.

[정리7.2] 그래프 $G = (V, E)$에서 $\Delta(G)$를 G의 꼭지점 전체에 대한 차수의 최대값이라고 하자. 즉, $\Delta(G) = \max\{\deg v \mid v \in V\}$.

이때, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$이다.

증명) 꼭지점의 개수 $|V|$에 대한 귀납법으로 이 정리를 증명한다. 먼저 $|V| = 1$일 때, 분명히 $\Delta(G) = 0$, $\chi(G) = 1$ 이므로 이 경우에 $\chi(G) = 1 + \Delta(G)$이다.

다음에 k가 양의 정수일 때, 꼭지점의 개수가 k인 모든 그래프에 대하여 정리가 성립한다고 가정하고, $G = (V, E)$를 $|V| = k + 1$인 그래프라고 하자.

이 때, 임의의 꼭지점 $v \in V$에 대하여 v와 이 꼭지점을 끝점으로 가지는 모서리를 모두 제거시킨 부분그래프를 $G' = (V - \{v\}, E')$이라고 하면, $\Delta(G') \leq \Delta(G)$이고 또 G'의 꼭지점 전체 개수는 k이므로 귀납법가정에 의하여 $\chi(G') \leq 1 + \Delta(G')$이다.

따라서 $\chi(G') \leq 1 + \Delta(G)$이므로 G'의 모든 꼭지점에 $1 + \Delta(G)$개 이하의 색을 지정하여 구별할 수 있다. 한편, $\deg v \leq \Delta(G)$ 이므로 v와 이웃하는 꼭지점의 개수는 $\Delta(G)$이하이므로 $1 + \Delta(G)$개 이하의 색 중 이웃하는 꼭지점에 지정된 색과 다른 하나를 v에 지정하여 G의 모든 꼭지점을 구별할 수 있다. 그러므로 $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$이다.

B. 프로이덴탈의 수학화 교수학습론

1. 프로이덴탈의 수학화 이론[7]

프로이덴탈은 수학을 인간의 정신적 활동이라고 할 때, 수학적 활동의 본질적인 특징을 수학화 활동이라고 보고 있다. 수학화는 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하며 이런 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준 상승이 이루어지는 불연속성 과정이다. 수학화 과정은 현실을 수학화하는 것을 출발점으로 해서 수학 자체의 수학화로 이어지며, 처음에는 국소적으로 나중에는 전반적으로 진행된다. 따라서 수학화 활동은 수학적 내용의 표현이든, 일상 용어로 표현된 소박하고 직관적인 현실적 체험이든지 간에 모든 수학적인 조직화 활동을 의미한다. 수학화란 말 그대로 좀 더 수학적인 것 즉, 수학의 일반성, 확실성, 정확성과 간결성을 지닌 것이 되게 하는 것을 뜻한다. 또, 아직까지 알려지지 않은 규칙과 관계, 구조를 발견하기 위해서 자신이 이미 알고 있는 지식과 능력을 이용하여 조직화 및 구조화하는 활동을 의미한다. 수학화는 문제 장면을 수학적 문제로 변형하는 과정과 수학적 체계 내에서의 처리 과정의 차이를 위해 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분할 수 있다. 수평적 수학화란 관찰, 실험, 귀납 추론 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 수학적인 방법을 이용할 수 있도록 변형하는 과정 즉, 모델 형성, 도식화, 기호화를 통해 수학으로 향하는 길을 여는 것을 말하여, 수직적 수학화란 수평적 수학화 이후에 따라오는 수학적 과정, 문제를 풀고 일반화하고 형식화하는 것과 관련된 과정 즉, 수학적 처리 과정과 탐구 중인 문제 장면의 구조화 속에서의 수준 상승 과정과 관련이 있다. 수평적 수학화 특성이 강한 활동은 일반적 맥락에서 구체적인 수학을 인식하는 활동, 도식화활동, 문제를 여러 가지로 명확히 표현하고 시각화하는 활동, 관계를 발견하는 활동, 규칙성을 발견하는 활동, 서로 다른 문제의 공통적 요소를 인식하

는 활동, 실세계 문제를 수학적 문제로 변형하는 활동, 실세계 문제를 기지의 수학적 모델로 변형하는 활동이다. 그리고 수직적 수학화의 특성이 강한 활동은 관계를 공식으로 표현하는 활동, 규칙성을 증명하는 활동, 모델 자체를 다듬고 변형하는 활동, 다른 모델을 사용하는 활동, 모델을 결합하고 통합하는 활동, 새로운 수학적 개념을 명확히 표현하는 활동, 일반화 활동이 있다.

프로이덴탈은 수학화가 수학교육에서 중요한 과정인 이유로 두 가지를 들고 있다. 첫 번째 이유는 수학화는 수학자의 주된 활동일 뿐 아니라 학생들이 일상생활상황에 대한 수학적 접근에 친숙하도록 한다. 두 번째 이유는 재발명의 아이디어와 관련된다. 수학에서, 마지막 단계는 공리화의 방법으로 형식화된다. 이 마지막 지점이 우리가 가르치는 수학의 시작점이어서는 안된다.

2. 수학화이론에 바탕을 둔 수학학습 지도원리

a. 안내된 재발명[7]

프로이덴탈은 사고는 정신적으로 지속되는 행동이며, 행동을 학습하는 최선의 방법은 그것을 수행하는 것이라고 하여, 학습자에게 수학적 활동의 재발명을 경험시키는 학습지도방법을 주장한다. 재발명 방법은 전통적인 연역적 형태의 수학 수업에 대한 대안으로 제기되어 거듭 논의되어 온 발생적 원리의 연장선상에서 살펴볼 수 있다. 발생적 원리는 지식이 인간의 경험과 별개로 세상밖에 존재하는 것이 아니라 인간 스스로 구성하는 것이라는 입장을 바탕으로 한다. 아동의 정신 발달은 역사를 그대로 반복하는 것이 아니라 아동의 현실을 바탕으로 해서 수학자들이 이미 발명한 수학을 아동 스스로 개선된 방법으로 재창조해 나가는 것이다.

이러한 재발명이 가능하기 위해서는 '사고 실험'이 중요하다. 프로이덴탈은 안내된 재발명의 방법에 의한 지도에 앞서 가상의 학생을 상대로 가르치고

학생들의 반응을 상상하여 대응방안을 준비하는 사고실험을 할 것을 강조하고 있다. 사고실험은 두 가지 측면에서 고려될 수 있다. 첫째는 수업장면과 관련된 것으로 교사나 교과서 저자가 한 학생 또는 그룹의 학생들의 가능한 반응에 따라 반응하면서 가르치거나 저술하는 태도를 의미한다. 둘째는 수업내용과 관련된 것으로 어떤 것을 발명했거나 어떤 방법을 개선한 개인 수학자의 마음속에 어떤 일이 일어났는지에 대해 추측하는 것이다. 그러므로 프로이덴탈은 재발명을 위해서 학생의 입장과 반응을 고려함과 동시에 개인 수학자의 마음에 대해 추측하는 사고실험이 중요함을 강조하고 있다.

교사가 안내된 재발명을 위해서 수학적 내용의 필요성을 인식하여 수학적 내용의 필요성이 재발명을 자극하도록 하는 상황을 창출해야 하며 수학적 내용이 점차 세련되어 갈 수 있도록 하는 전략을 만들어야 한다. 또한 인위적인 구체물보다는 자연스러운 상황과 아동들이 현실적이고 구체적으로 받아들일 수 있는 맥락이 제시되어야 하며 학습자의 현실에서 출발하여 안내에 의해 수학화 경험을 할 수 있도록 해야한다.

재발명의 방법을 두둔하는 교육적 근거는 다음과 같다. 첫째, 학습자 자신에 의해 획득되는 능력과 지식은 다른 사람에 의해 부과되는 것보다 파지가 용이하고 전이가 잘 이루어진다. 둘째, 발명은 즐거운 것이고, 따라서 재발명에 의한 학습의 동기를 부여한다. 셋째, 재발명학습은 인간활동으로서의 수학, 즉 수학화의 태도를 길러준다. 이것이 프로이덴탈의 교육 이념 및 철학이며 수학교육의 대중화를 뒷받침하는 근거이다.

재발명의 원리는 장기간의 학습과정을 의미한다. 학습경로가 분리된 학습단계로 나누어져있는 학습 계열과 다르게 재발명 과정은 점진적인 변화의 과정으로 전개된다. 중간단계 그 자체가 목표가 아니고 항상 장기간의 관점으로 보아야 하며 수준이론의 개념과 부합하여 안내된 탐구를 강조해야한다.

b. 반성적 사고[13]

프로이덴탈은 수학적 사고 수준을 크게 ‘바닥 수준’과 ‘탐구 수준’으로 구분하면서 바닥 수준을 무시하는 것이 전통적인 수학교육의 가장 커다란 오류임을 지적하였다. 프로이덴탈은 바닥 수준으로부터의 점진적인 수학화를 주장하는바, 바닥 수준에서 활동을 탐구 수준의 활동과 구분하여 비수학적인 활동으로 보아서는 안 되며, 실제 수학을 하는 것은 아니지만 탐구 수준에서의 수학적 활동을 준비하는 예비 수학적 활동으로 파악해야 한다는 것이다. 바닥 수준의 활동이 탐구 수준에서 반성됨으로써 비로소 학생의 학습과정에서 수학이 시작되는 바, 바닥 수준의 활동이 필수적이라는 것이다. 이것이 바로 학생의 현실적 경험을 수학화하는 것이며, 바닥 수준에서의 수학화 활동이 계속적인 수준의 비약에 의해서 좀 더 세련된 수학으로 발달하는 것이다.

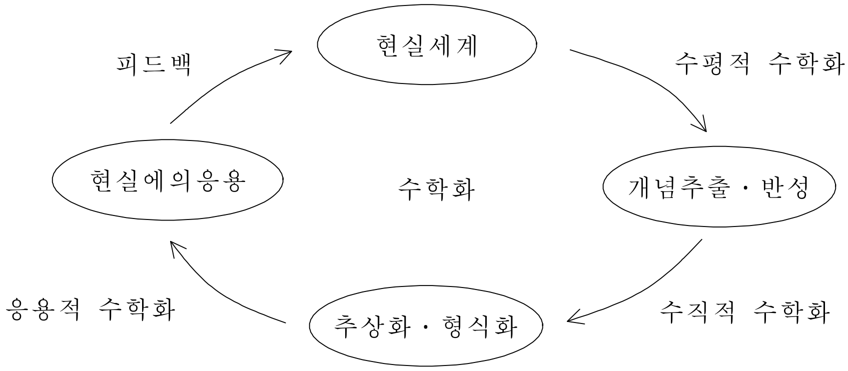
프로이덴탈은 수학화 과정에서 근본적으로 수준의 상승을 가능하게 하는 중요한 정신적 활동이 바로 반성적 사고라고 보았다. 그러므로 반성적 사고를 통해 학습자로 하여금 자신의 사고와 행동에 대해 당연하다고 생각했던 부분에 대해 의문을 제기하게 함으로써, 학습자 자신의 사고와 행동을 의식하고 확실성을 추구하는 수학적 태도를 길러 주는 것이 중요하다.

c. 현실과 결부된 수학[13]

수학은 수학화를 통해 발생하며, 수학화는 현실을 수학화하는 것으로부터 시작된다. 그러므로, 재발명 방법은 학생들에게 무엇보다도 현실을 수학화하는 경험을 우선적으로 제공해야 한다. 학생들에게 제공되는 현실은 생명력 있는 원초적인 현실이어야 한다. 현실 세계를 수학화한다는 것은 수학적으로 가공되지 않은 원재료로서 원초적인 현실에서 즉, 여러 소음이 혼합되어 있는 상황에서 여러 가지 비본질적인 요소를 제거해 나가면서, 점진적으로 수

학적 본질을 찾고, 메시지를 감지하며, 조직화해 나아가는 것이다.

현실과의 밀접한 관련성을 유지하기 위해서는 수학적으로 정련된 설명과 단순한 수학적인 문제 풀이 위주의 수업이 아니라 풍부한 문맥을 학생들에게 제시해야 하며 이를 기반으로 수학화가 이루어질 수 있도록 하는 것이 중요하다. 여기에서 풍부한 문맥은 전반적인 수업과정에서 다루어져야 하는바, 그 단계는 다음과 같다.



<수업에서의 수학화 과정>

첫 번째 단계는, 현실 세계의 문맥을 직관적으로 탐구하는 단계이다. 이것은 문제의 수학적 측면들을 알아내고 규칙성을 발견하는 것을 의미한다. 두 번째 단계는 학생들 간의 상호 작용, 학생들과 교사와의 상호 작용 그리고 학생들의 형식화・추상화 능력과 같은 요인에 의존해서, 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 수평적 수학화의 단계인데, 여기에서는 수학화 과정에 대한 반성이 필수적이다. 세 번째 단계는 형식화와 추상화가 중심인 수직적 수학화의 단계로서, 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다. 네 번째 단계는, 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 응용적 수학화의 단계이다. 이와 같은 단계를 거쳐 해결된 문제는 현실 세계에 대한 학생들의 관점

에 영향을 미치게 될 것이다.
수학화 과정에서 중요한 것은 학생들 스스로 활동할 기회를 제공하는 것이 우선되어야 하고, 교사는 적절한 순간에 적절한 발문을 통해서 사고 활동을 촉진시키고 학생들이 자신의 활동을 반성하게 하고 종합할 수 있도록 안내해야 한다는 것이다.

Ⅲ. 그래프

*A. 7*차 교육과정[2]

제 7차 교육 과정 교육부 고시 제 1997-15 호 (별책 8)에서는 이산수학의 내용을 다음과 같이 언급하고 있다.

1. 성격

'이산수학'은 10단계 수학에 도달 여부에 관계없이 학생들이 선택 할 수 있는 과목으로서, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 유한이나 불연속의 이산 상황의 문제를 수학적으로 분류하고, 논리적으로 사고하여 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르게 한다. 이 과목은 수학에서 이산적인 내용의 학습을 경험하고자 하는 모든 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.
'이산수학'의 내용은 이산적인 상황에 맞는 사고의 적용을 강조하여 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사결정과 최적화 등의 4개 영역으로 하고, 수학의 이산적인 상황의 문제를 쉽고 흥미롭게 학습할 수 있도록 다양한 실생활을 소재로 하여 구성한다.
'이산수학'의 학습에서는 수학 학습에서 습득된 지식과 기능을 활용하여 실생활의

여러 가지 이산적인 상황을 수학적으로 간결이 표현하고 처리할 수 있도록 하는데 중점을 둔다. 또, 전 영역에 걸쳐서 복잡한 계산이나 문제 해결을 위하여 계산기나 컴퓨터를 적극적으로 활용한다.

2. 목표

수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고, 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있다.

a. 일상적인 정보에서 수량적인 관계나 법칙을 계산기나 컴퓨터를 이용하여 이해하고 활용할 수 있다.

b. 세기의 기본이 되는 방법과 집합이나 자연수를 나누는 방법을 이해하고 이를 이용하여 실생활에서 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있다.

c. 사물의 현상을 그래프와 행렬 등을 이용하여 조직·해석하고, 이를 활용할 수 있다.

d. 여러 가지 문제를 알고리즘적으로 사고하고 처리하는 능력을 기른다.

e. 다양한 의사 결정과정과 상충적인 상황에서 합리적이고 논리적인 사고를 하여 문제를 해결할 수 있다.

3. 내용 체계

영 역	내 용	
선택과 배열	순열과 조합	• 순열 • 조합
	세기의 방법	• 배열의 존재성 • 포함배제의 원리 • 집합의 분할 • 수의 분할 • 여러 가지 분배의 수
그 래 프	그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프
	수형도	• 여러 가지 수형도 • 생성 수형도
	여러 가지 회로	• 오일러 회로 • 해밀턴 회로
	그래프의 활용	• 행렬의 뜻 • 그래프와 행렬 • 색칠 문제
알고리즘	수와 알고리즘	• 수와 규칙성 • 수와 알고리즘
	점화 관계	• 두 항 사이의 관계식 • 세 항 사이의 관계식
의사결정의 최적화	의사결정과정	• 2×2 게임 • 선거와 정당성
	최적화와 알고리즘	• 계획 세우기 • 그래프와 최적화

4. 그래프의 내용

a. 그래프

(1) 그래프의 뜻을 알고, 여러 가지 용어를 안다.

(2) 임의의 그래프에서 꼭지점의 차수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다.

(3) 여러 가지 그래프를 이해한다.

b. 수형도

(1) 수형도에서 꼭지점의 수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다.

(2) 주어진 그래프의 생성 수형도를 찾을 수 있다.

c. 여러 가지 회로

(1) 오일러회로와 해밀턴회로의 뜻을 알고, 간단한 그래프에서 오일러회로와 해밀턴회로를 찾을 수 있다.

(2) 그래프에서 오일러회로가 존재하기 위한 필요충분조건을 이해한다.

(3) 간단한 그래프에서 해밀턴회로가 존재하기 위한 필요조건을 이해한다.

d. 그래프의 활용

(1) 행렬의 뜻을 알고, 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있다.

(2) 그래프를 행렬로 나타내고, 그 성질을 알 수 있다.

(3) 색칠 문제 등의 실생활 문제를 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.

<용어와 기호> 그래프, 꼭지점, 변, 꼭지점의 차수, 경로, 회로, 수형도, 생성수형도, 오일러회로, 해밀턴회로, 인접행렬

<학습 지도상의 유의점>

1. 한 꼭지점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 한 쌍의 꼭지점 사이에 많아야 한 변이 있는 단순 그래프를 주로 다루도록 한다.
2. 그래프이론은 많은 문제를 표현할 수 있는 수학적 모형임을 인식시키고, 주변에서 그래프로 나타낼 수 있는 상황을 문제화하는 경험을 가지도록 지도한다.

B. 그래프의 지도방안 (실생활 문제를 중심으로)

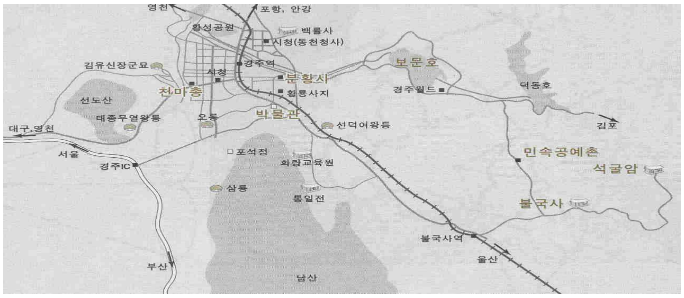
여기에서는 그래프, 수형도, 여러 가지 회로, 그래프의 활용 등의 각 영역의 학습목표를 달성하기위해 프로이덴탈의 수학화 교수학습론을 적용하여 실생활 문제[2)]를 중심으로 구성하였고, 각 문제에 대한 지도방향을 설명하였다. 그리고 이를 바탕으로 그래프의 소단원 중 한차시의 지도안의 예를 제시하였다.

1. 그래프

<답사 계획의 문제>

※ 다음은 경주 부근의 지도이다. 각 모둠별로 답사하고 싶은 곳 7개를 정한 후, 답사할 곳과 길을 간단히 나타내는 방법에 대하여 알아보자.
(준비물: 투명지)

2) 실생활 문제는 강원대학교 국정도서편찬위원회,『이산수학』, 교육인적자원부(2006)을 기초로 하여 적절하게 재구성하였다.



(1) 위의 지도에서 답사할 곳 7개를 정한 후 빈칸에 나열하여보자.

문자	A	B	C	D	E	F	G
답사할 곳							

(2) 투명지를 이용하여 답사할 곳에 점을 찍고, (1)에서 각각 해당되는 곳에 대한 문자를 표시하고, 두 지점 사이에 연결된 도로를 선으로 표시하여 보자.

(3) (2)에서 그려진 그림을 더욱더 간결하게 나타낼 수 있는지 각 모둠별로 토의 해보자.

<지도방향>

- 달성할 목표: 그래프의 뜻을 알고, 여러 가지 용어를 안다.
- 주어진 지도에 나와 있는 여러 지점 중에서 답사할 곳과 경로를 간단히 계획하는 문제를 바탕으로 간단히 그래프화 함으로써 그래프의 뜻을 쉽게 이해할 수 있도록 지도한다.
- 현실 세계의 문맥을 직관적으로 탐구하여 수평적 수학화를 할 수 있도록 기반을 다진 후, 문제로부터 얻어진 그래프에서 꼭지점과 변의 뜻을 쉽게 받아들일 수 있도록 지도한다.
- 수학적 지식이 추상화•형식화 된 후에는 학생들 스스로 여행 목적지를 정하게 하여 자신이 방문하고자 하는 곳들을 직접 그래프로 나타낼 수

있도록 지도함으로써 응용적 수학화를 할 수 있도록 기회를 제공해준다.

<악수 나누기의 문제>

※다음과 같이 영호, 철수, 광수, 인철, 민호가 악수를 나누었다고 하자.

	영호	철수	광수	인철	민호
영호		○		○	
철수	○				
광수					○
인철	○				○
민호			○	○	

(1) 위의 결과를 각 사람을 꼭지점으로 하고 악수한 두 사람을 변으로 연결하여 그래프로 나타내어보자.

(2) 앞의 그래프에서 한 꼭지점에 이어진 변의 개수는 몇 개이고, 이는 무엇을 의미하는가?

(3) 앞의 그래프에서 모든 변의 개수는 몇 개이고, 이는 무엇을 의미하는가?

(4) 앞 (2), (3)에 의해 모든 변의 개수와 각 꼭지점에서의 변의 개수의 합과는 어떤 관계가 있는가?

<지도방향>

- 달성할 목표: 임의의 그래프에서 꼭지점의 차수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다.
- 악수를 나누는 상황을 통해 그래프에서 꼭지점의 차수의 뜻과 의미를 수평적 수학화가 되도록 지도한다.
- 이를 바탕으로 그래프에서의 꼭지점의 차수를 쉽게 구할 수 있고, 그래프의 모든 꼭지점의 차수의 합은 그래프의 변의 개수의 2배가 됨을 즉,

수직적 수학화가 되도록 안내해 준다.

<스포츠 경기에서 리그전의 문제>

※ 여섯 개의 농구 팀이 서로 다른 팀과 한 번씩 경기를 갖는 리그전을 벌인다고 하자. 이 때, 총 몇 번의 경기가 이루어 져야 하는가?

(1) 농구 팀의 수가 각각 2, 3, 4, 5, 6 일때 각 농구 팀을 꼭지점으로 하고 두 팀이 경기를 하는 경우를 변으로 나타내어 그래프를 완성하여라.

(2) 위 (1)에서 완성한 그래프를 살펴보고 팀의 수에 대한 총 시합의 횟수를 구하여라.

팀의 수	2	3	4	5	6
총 시합의 횟수					

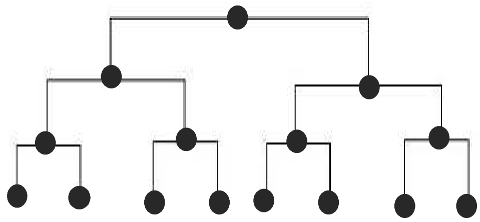
<지도방향>

- 달성할 목표: 여러 가지 그래프를 이해한다.
- 경기에 참여한 모든 팀이 다른 모든 팀과 꼭 한 번씩 경기 하는 것의 대진표를 활용하여 모든 꼭지점 사이에 변이 있는 그래프로 표현될 수 있는 완전 그래프에 대하여 쉽게 이해할 수 있게 함으로써 수평적 수학화를 할 수 있도록 지도한다.

2. 수형도

<토너먼트 경기의 문제>

※ A, B, C, D 4팀에서 한 팀당 2명씩 뽑아서 경기를 하려고 한다. 다음과 같이 경기 계획을 작성하였다.



(1) 위 그림을 간단하게 그래프로 나타내어 보아라.

(2) 위(1)의 그래프에서 꼭지점의 수는 몇 개 인가?

(3) 위 (1)의 그래프에서 변의 수 는 몇 개 인가?

(4) 위 (2), (3)을 통해서 꼭지점의 수와 변의 수 사이의 관계를 생각해보자.

<지도방향>

- 달성할 목표: 수형도의 뜻을 알고, 수형도에서 꼭지점의 수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다.
- 토너먼트 경기의 문제를 통해 꼭지점의 수와 변의 수를 헤아려 보게 함으로써 수형도의 꼭지점의 수와 변의 수의 관계를 쉽게 이해할 수 있게 하여 수직적 수학화를 할 수 있도록 지도한다.
- 뿐만 아니라, 스포츠나 오락 경기 등에서 횟수를 거듭할 때마다 패자는 탈락해 나가고, 최후에 남는 두 사람 또는 두 팀으로 하여금 우승을 결정하게 하는 시합의 대진표를 작성해보도록 기회를 제공하여 응용적 수학화를 할 수 있도록 지도한다.

<배구네트 자르기의 문제>

※ 직사각형 격자로 되어 있는 배구 네트가 있다. 연결성을 유지하면서 네트를 자른다면, 어떻게 실을 끊어야 되는가?

<지도방향>

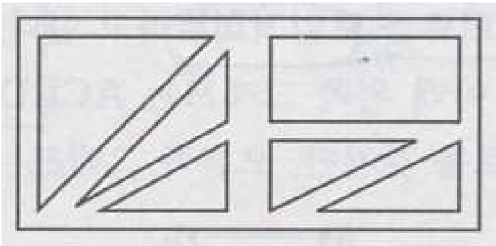
- 달성할 목표: 주어진 그래프의 생성 수형도를 찾을 수 있다.

- 배구네트의 문제를 통해 연결된 채로 최대한 몇 개의 변을 제거할 수 있는가를 생각하도록 하여 가능한 변을 제거함으로써 생성수형도의 개념을 수직적 수학화를 할 수 있도록 지도한다.

3. 여러 가지 회로

<배달문제>

※ 신문 배달 아르바이트를 하려고 한다. 다음 그림은 배달 지역의 지도인데 모든 길을 반드시 지나가야하고, 지나갔던 길을 다시 지나가지 않고 신문배달을 효율적으로 하려한다.



(1) 지나갔던 길을 다시 지나가지 않고 신문 배달을 마칠 수 있는 방법을 알기 위해 배달 지역을 그래프로 나타내려고 한다. 이때, 얻어지는 그래프를 그려 보아라.

(2) 위 (1)의 그래프를 이용하여 한 번 지나갔던 길을 다시 지나가지 않으면서 배달을 모두 마칠 수 있는 방법이 있는지 알아보아라.[1]

<지도방향>

- 달성할 목표: 오일러회로와 해밀턴회로의 뜻을 알고, 간단한 그래프에서 오일러회로와 해밀턴회로를 찾을 수 있다.
- 배달 지역의 지도를 보면서 모든 길을 반드시 지나가야만 할 때, 지나갔던 길을 다시 지나지 않고 배달을 할 수 있는가를 묻는 문제나 청소

차량이동 경로 등 생활 문제를 활용하면 오일러 회로, 해밀턴회로를 직관적으로 이해할 수 있도록 수평적 수학화를 할 수 있게 지도한다.

- 광주에서 사업을 하는 사람이 서울, 대구, 부산, 제주, 청주, 인천을 방문하고 다시 광주로 돌아와야 한다는 상황에서 각 도시별 이동할 수 있는 경로를 고려하여 그래프화 했을때 모든 꼭지점을 오직 한 번씩만 지나고 시작점으로 돌아오는 회로를 생각하게 해 봄으로써 해밀턴회로를 응용적 수학화를 할 수 있게 지도한다.

4. 그래프의 활용

<동물원청소 계획 세우기의 문제>

※ 동물원에서는 정기적으로 원숭이 우리를 청소한다. 청소할 동안에는 원숭이들을 작은 방으로 이동시켜야 하는데 어떤 원숭이들은 서로 사이가 좋지 않아서 좁은 곳에서는 잘 싸운다. 서로 사이가 좋지 않은 원숭이들의 표가 아래와 같을 때, 방을 최소 몇 개 준비하여야 하는가?[1]

원숭이 이름	사이가 안 좋은 원숭이
일남이	이순이, 오남이
이순이	일남이, 삼남이
삼남이	이순이, 오남이
사순이	오남이
오남이	일남이, 삼남이, 사순이

(1) 각 원숭이에 대응하도록 꼭지점을 그려보고, 사이가 좋지 않은 원숭이를 변으로 연결하여라.

(2) 주어진 그래프에서 꼭지점을 색칠할 때, 인접한 꼭지점끼리는 서로 다른색을 칠하여 보자.

(3) 각자 색칠한 것을 보고 원숭이들이 들어갈 방을 정해 보자.

(4) 원숭이를 이동 시킬 최소의 방의 개수를 구하여라.

<지도방향>

- 달성할 목표: 색칠 문제 등의 실생활 문제를 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.
- 각 원숭이를 꼭지점으로 하고 사이가 좋지 않은 두 원숭이에 대응하는 꼭지점을 변으로 연결하여 그래프로 나타내고 그래프를 적절하게 색칠하여 원숭이를 넣을 수 있는 최소의 방의 개수를 구할 수 있게 함으로써 응용적 수학화를 할 수 있다.

5. 지도안 예

a. 지도계획

<table>
<tr><td>교재</td><td colspan="4">이산수학 (강원대학교 국정 도서 편찬 위원회), 교육인적자원부</td></tr>
<tr><td>단원의 소개</td><td>대단원</td><td>Ⅱ. 그래프</td><td>소단원</td><td>1.1 그래프의 뜻</td></tr>
<tr><td>학습주제</td><td colspan="4">그래프의 뜻</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="4">• 그래프의 뜻을 알고, 여러 가지 용어를 안다.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">학습전략</td><td>학습모형</td><td colspan="3">모둠별 발표수업</td></tr>
<tr><td>학습방법</td><td colspan="3">학생활동을 통한 문제 해결 및 수업진행</td></tr>
<tr><td rowspan="2">학습자료</td><td>학생</td><td colspan="2">교과서, 노트, 연필, 투명지</td></tr>
<tr><td>교사</td><td colspan="2">색분필, 개별 활동지</td></tr>
<tr><td>유의사항
및
주안점</td><td colspan="4">• 그래프의 뜻을 이해할 수 있도록 한다.
• 방문할 목적에 따라 다양한 경로가 있을 수 있음에 유의하여 지도한다.
• 꼭지점의 위치를 바꾸거나 변을 구부리거나 늘이거나 줄여서 두 그래프가 같은 그림으로 그려질 수 있으면 두 그래프는 같음을 알도록 지도한다.
• 프로이덴탈의 학습지도원리에 입각하여 응용적 수학화를 할 수 있도록 기회를 제공한다.</td></tr>
</table>

b. 학습지도안

학습 단계	중심 요소	교수•학습 활동: 교사	교수•학습 활동: 학생활동	시간	자료 및 주안점
도입	동기 유발	• 출석점검 • 친구들과 여행을 간다고 상상하게 하여, 여행을 가기 전에 무엇을 해야 하는지 생각해보도록 한다.	• 각자 생각한 것을 말한다.	5분	
		• 여행을 가기 전에 여행할 장소를 정하고 그곳을 답사해야 경비를 절약할 수 있음을 인지하도록 함으로써 답사할 길을 간단히 나타내는 방법에 대하여 흥미를 갖도록 유도한다.	• 단원의 학습할 내용인지		
		• 학습목표를 다 같이 읽어보도록 한다.	• 학습목표인지		
전개	현실 세계 탐색	• 문제제시 하여 모둠으로 협동하여 풀어보게 한다. (활동지)	• 친구와 협동하여 풀어본다.	40분	• 현실세계를 탐색 하도록 한다.
	개념 추출 및 반성	• 모둠별로 푼 내용을 발표 하도록 한다.	• 모둠별로 발표하고 각 모둠에서의 방문할 목적에 따라 다양한 경로가 있을 수 있음을 인지하도록 지도한다.		• 수평적 수학화를 할수 있도록 한다.
		• 위 문제지를 통해 만들어낸 점과 선으로 이루어	• 그래프의 뜻을 알고, 꼭지점과 변의 용		

		진 그림을 **그래프**임을 알도록 한다. • 그래프에서 점을 **꼭지점**이라 하고, 꼭지점을 연결한 선을 **변**이라고 함을 인지시킨다.	어를 안다.		
	추상화 • 형식화	• 각 모둠별로 그린 그래프중 하나를 선택하여 적절히 변형 시켜 그려 보여주고, 두 그래프는 같은 그래프임을 알도록 지도한다.	• 꼭지점의 위치를 바꾸거나 변을 구부리거나 늘이거나 줄여서 두 그래프가 같은 그림으로 그려질 수 있으면 두 그래프는 같음을 안다.		• 수직적 수학화를 할 수 있도록 한다.
		• 문제를 제시하여 수학적 개념에 대한 엄격하고 형식적인 정의를 확실히 알도록 지도한다. (문제지)	• 문제지를 각자 풀어보고 다 푼 후 친구와 맞혀 본다.		
정리 및 과제 제시	현실에의 응용	• 과제제시 [각자 가족여행을 간다고 상상해 보도록 하여 답사할 곳과 길을 간단히 나타내어 보도록 한다.]	• 새로운 현실상황에서도 적용해 볼 수 안다.	5분	• 응용적 수학화를 할수 있도록 한다.
	피드백	• 본시학습 정리	• 그래프의 뜻과 여러 가지 용어를 정확하게 인지한다.		• 피드백을 함으로써 새로운 현실세계에 적용해 볼 수 있도록 한다.
		• 차시예고			

활동지

※ 다음은 경주 부근의 지도이다. 각 모둠별로 답사하고 싶은 곳 7개를 정한 후, 답사할 곳과 길을 간단히 나타내는 방법에 대하여 알아보자.(준비물: 투명지)

(1) 위의 지도에서 답사할 곳 7개를 정한 후 빈칸에 나열하여보자.

문자	A	B	C	D	E	F	G
답사할 곳							

(2) 투명지를 이용하여 답사할 곳에 점을 찍고, (1)에서 각각 해당되는 곳에 대한 문자를 표시하고, 두 지점 사이에 연결된 도로를 선으로 표시하여보자.

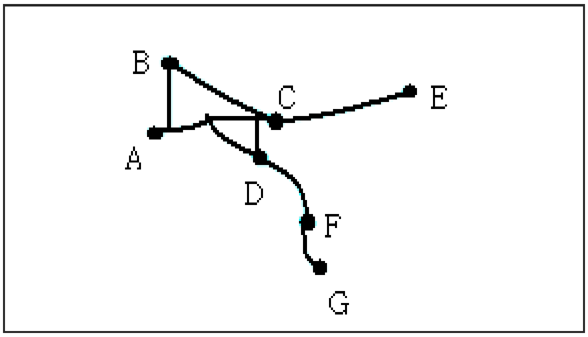
(3) (2)에서 그려진 그림을 더욱더 간결하게 나타낼 수 있는지 각 모둠별로 토의해보자.

활동지 - 문제해결

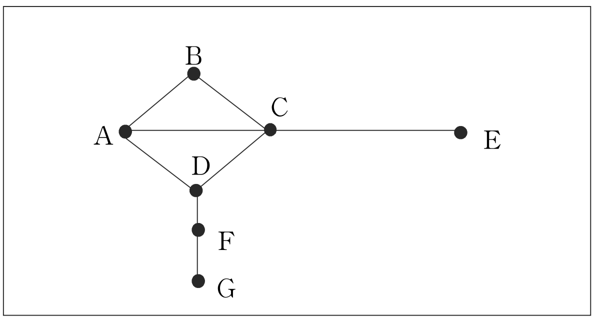
(1) 위의 지도에서 답사할 곳 7개를 정한 후 빈칸에 나열하여보자.

문자	A	B	C	D	E	F	G
답사할 곳	천마총	황성공원	분황사	박물관	보문호	화랑교육원	통일전

(2) 투명지를 이용하여 답사할 곳에 점을 찍고, (1)에서 각각 해당되는 곳에 대한 문자를 표시하고, 두 지점 사이에 연결된 도로를 선으로 표시하여보자.



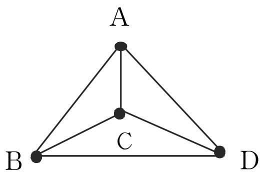
(3) (2)에서 그려진 그림을 더욱더 간결하게 나타낼 수 있는지 각 모둠별로 토의해보자.



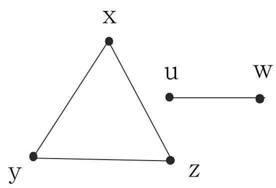
문제지

(1) 다음 각 그래프에서 꼭지점과 변의 집합을 구하여라.

가.

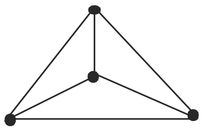


나.

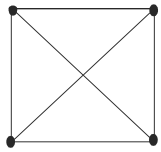


(2) 다음 그래프 중 같은 그래프인 것을 찾아라.

a.

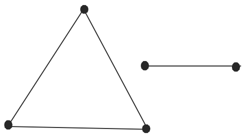


b.



c.

d.



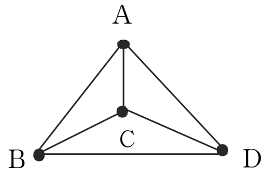
과제

※ 여러분은 가족여행을 가려고 합니다. 가고자하는 곳에 대한 장소를 지정해보고, 지정한 장소에 대한 답사할 곳과 길을 간단히 나타내어 보세요.

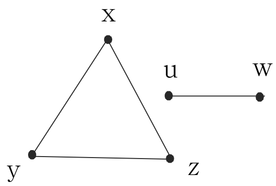
문제지 - 문제해결

(1) 다음 각 그래프에서 꼭지점과 변의 집합을 구하여라.

가.



나.



가. 꼭지점의 집합 ={A, B, C, D}

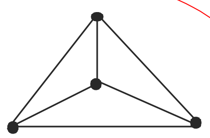
변의 집합 = {AB, BD, DA, AC, CB, CD}

나. 꼭지점의 집합 ={x, y, z, u, w}

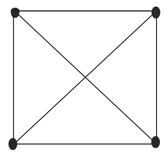
변의 집합 = {xy, yz, zx, uw}

(2) 다음 그래프 중 같은 그래프인 것을 찾아라.

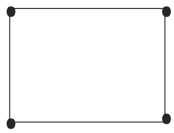
a.



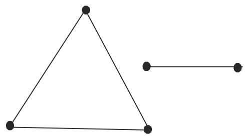
b.



c.



d.



즉, a와 b가 같은 그래프이다.

Ⅳ. 결론 및 제언

수학교육의 새로운 방향인 수학적 힘을 기르기 위한 도구로서 이산수학은 적절한 요소들을 많이 가지고 있다. 이산수학은 필요한 지식을 상황에 맞게 원하는 형태로 쉽게 만들어 내고 이용할 수 있는 사고력과 독창적인 창의력을 고양시킬 수 있는 다양한 요소를 가지고 있어서, 수학적인 활동을 보다 실험적이고, 수치적이며, 알고리즘적인 것으로 만들었다. 특히, 이산수학에서 그래프 이론은 수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 문제를 수학적으로 표현하고 해결할 수 있도록 하는데 중점을 두고 있다.

이렇듯 이산수학은 정보화 시대에서 요구하는 창의적 사고 능력, 논리적 분석능력, 체계적 이해능력 및 응용능력을 갖추기 위해 필요한 과목이므로 더욱 관심을 가져야한다고 생각된다. 하지만 곧 학교수업에 반영될 개정교육과정에는 이산수학과목이 삭제되고 그 일부 내용만이 '수학Ⅰ'과 선택과목인 '수학의 활용'으로 축소하여 옮겨짐으로써 많은 내용을 접할 수 없더라도 많은 학생들이 이산수학을 좀 더 쉽게 접할 수 있도록 세심한 관심이 필요하다고 생각되어 이산수학의 내용 중에서 그래프이론을 학생들이보다 효율적으로 접할 수 있도록 하는데 도움이 되고자 하였다. 그래서 이산수학의 그래프이론과 프로이덴탈의 수학화 교수학습론을 살펴보고, 제 7차 교육과정에서의 이산수학에 대하여 이산수학의 성격, 목표, 체계, 그래프 내용을 제시하였고, 특히 프로이덴탈의 수학화이론을 바탕으로 그래프 이론을 재구성하여 실생활과 관련된 내용을 분석하여 지도방향을 제시함으로써 수업을 준비하는 교사들에게 도움이 되고자 하였다.

7차 교육과정에서 선택과목으로 채택된 이산수학은 현재 나와 있는 교과서가 한 가지 뿐이므로 그 교과서만을 토대로 하여 분석하한 것이라 부족한 부분이 있을 것이라 생각되지만, 차후 더 많은 연구가 진행될 수 있는 계기가 되었으면 한다.

참 고 문 헌

[1] 강원대학교 국정 도서 편찬 위원회,『이산수학』, 교육인적자원부 (2006)

[2] 교육인적자원부,『수학과 교육과정 제 7차 교육과정』, 교육부 고시 제 1997-15호 [별책8]

[3] 교육인적자원부,『중학교 교육과정 해설』, 교육부 고시 1997-15호

[4] 교육인적자원부,『고등학교 교육과정 해설』, 교육부 고시 1997-15호

[5] 김서령외,『이산수학의 이해와 적용--그래프이론을 중심으로』, 수학사랑

[6] 노용숙,『중등학교 수학에 관련된 위상의 다양한 문제들』, 중앙대학교 교육대학원 (2004)

[7] 류희찬,『 프로이덴탈의 수학화 이론과 현실적 수학교육』,학술저널 한국교원대학교 수학교육연구소 (2002)

[8] 박승안, 『이산수학』, 경문사 (2006)

[9] 박신영, 『이산수학의 효율적인 지도-그래프이론-』, 경성대학교 교육대학원 수학교육전공 (2005)

[10] 박윤근, 『제7차 교육과정의 이산수학 연구-고등학교 수학교사의 이산수학 이해와 연구-』, 경희대학교 교육대학원 수학교육전공 (2002)

[11] 신준국,『중학교 수학에서의 위상기하 영역에 관한 지도 내용 연구 및 지도방안 -도형의 관찰 중심으로-』, 충남대학교 (1998)

[12] 심은영,『이산수학에 관한 연구-그래프 이론을 중심으로-』, 서강대학교 교육대학원 수학교육전공 (2005)

[13] 황혜정외,『수학교육학신론』, 문음사 (2007)

저작물 이용 허락서

<table>
<tr><td>학 과</td><td>수학교육</td><td>학 번</td><td>20058245</td><td>과 정</td><td>석사</td></tr>
<tr><td>성 명</td><td colspan="5">한글: 이 현 정 한문: 李 賢 貞 영문: Lee Hyun-Jeong</td></tr>
<tr><td>주 소</td><td colspan="5">광주광역시 농성 1동 107번지</td></tr>
<tr><td>연락처</td><td colspan="5">E-MAIL: did-2 @hanmail.net</td></tr>
<tr><td>논문제목</td><td colspan="5">이산수학에서의 그래프영역의 지도방안연구
- 실생활문제를 중심으로 -
영문 : A study of teaching methods of Graph in Discrete Mathematics. - focused on problems of real life -</td></tr>
</table>

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

\- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2008년 8월 일

저작자: 이 현 정 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하