2023년 8월
박사학위 논문

사상 관계를 이용한 새로운 기구학 해석방법

조선대학교 대학원

기계시스템미래자동차공학과

김 상 형

사상 관계를 이용한 새로운 기구학 해석방법

A new kinematics analysis method using a mapping relationship

2023 년 8 월 25 일

조선대학교 대학원

기계시스템미래자동차공학과

김 상 형

사상 관계를 이용한 새로운 기구학 해석방법

지도교수 조 창 현

이 논문을 공학 박사학위신청 논문으로 제출함

2023년 4월

조선대학교 대학원

기계시스템미래자동차공학과

김 상 형

김상형의 박사학위논문을 인준함

위원장	조선대학교 교수	이 성 준 (印)
위 원	조선대학교 교수	조 창 현 (印)
위 원	조선대학교 교수	박 정 우 (印)
위 원	고려대학교 교수	김 승 종 (印)
위 원	목포대학교 교수	변 경 석 (印)

2023년 6월

조선대학교 대학원

목 차

LIST OF TABLES

LIST OF FIGURES

NOMENCLATURE

C_i	Number of possible joint motions for a link i
$\mathbf{C}$	Mapping matrix
$\mathbf{C}^T$	Transpose of a mapping matrix
$\hat{\mathbf{C}}_i$	Motion matrix for a link i
$diag[x_1,\cdots, x_n]$	$n \times n$ diagonal matrix
g	Gravity
$\mathbf{g}$	Gravitational vector
$\mathbf{J}$	Jacobian matrix
$\mathbf{J}_D$	Displacement jacobians
$\mathbf{J}_R$	Rotational jacobians
l_i	Length of a link i
l_{ig}	Distance of the center of mass of a link i
m_i	Mass of a link i
M_i	Mobility of a link i
PE	Normalized potential energy
${}^0\mathbf{P}_i$	The position of the center of mass of link i with respect to the {0} frame
s_i (or c_i)	$\sin(\theta_i)$ (or $\cos(\theta_i)$)
$\mathbf{S}(\cdot)$	Skew-symmetric matrix

V_k	Potential energy of spring
V_m	Potential energy of mass
θ_i	Rotation angle of a i^{th} joint
θ_{gi}	Rotation angle of a i^{th} unit gravity compensator
$\boldsymbol{\theta}$	Joint space
$\boldsymbol{\theta}_g$	Gravity compensator space
$\boldsymbol{\theta}_i$	Solution set of the rotation angle of a i^{th} joint
ϕ_i	The i^{th} phase angle
$\boldsymbol{\phi}$	The vector of a phase angle
${}^u\boldsymbol{\phi}$	Unit phase angle vector
${}^u\boldsymbol{\Phi}_x$	Phase angle matrix of the x-axis rotation matrix
${}^u\boldsymbol{\Phi}_y$	Phase angle matrix of the y-axis rotation matrix
${}^u\boldsymbol{\Phi}_z$	Phase angle matrix of the z-axis rotation matrix
${}^u\boldsymbol{\Phi}_{AB}$	Phase angle matrix of successive rotation A-B

ABSTRACT

A new kinematics analysis method using a mapping relationship

Sanghyung Kim
Advisor: Prof. Changhyun Cho, Ph.D.
Department of Mechanical System and
Automotive Engineering,
Graduate School of Chosun University

With the increasing demand for robotic manipulators in various industries, kinematic analysis has become increasingly important. Since the kinematic analysis of a manipulator determines the position, orientation, and velocity of the end-effector of the manipulator, kinematic analysis is necessary to control the manipulator. There are two types of kinematic analysis for manipulators: forward kinematics and inverse kinematics. Forward kinematics represents the position and direction of the end effector given the manipulator's joint variables. Inverse kinematics is the opposite of the concept of forward kinematics, given a desired position and orientation of an end effector, it computes the joint angles required to achieve that position, and which is broadly divided into closed form and numerical methods. In order to obtain an inverse kinematic solution, a forward kinematic analysis of the manipulator is required. Since forward kinematics analysis results are affected by the kinematic configuration of the manipulator (e.g., link length and joints), it is difficult to predict the form of the forward kinematic equation using previous kinematics analysis methods based on mathematical languages (e.g., screw theory, POE, CGA) or description methods (e.g., D-H parameter and Rodrigues formula). As a result, it is difficult to symbolize the closed-form inverse kinematic solution based on the engineer's knowledge when performing kinematic analysis on manipulators

every time.

To overcome the difficulties of previous kinematic analysis methods, this paper proposes a new method of kinematic analysis using a mapping relationship. In the forward kinematic analysis of a manipulator, the direction cosine, a component of the successive rotation matrix, exhibits a complicated equation form combined with cosine–sine functions. The direction cosine in a complicated form can be redescribed using the sum of simple cosine functions. As such, the mapping relationship between the angle of the simple cosine functions and the rotation angle vector of a successive rotation matrix (in other words, the mapping matrix and phase angle vector) can be defined.

In this study, based on the mapping relationship, a successive rotation matrix can be directly expressed without multiplication of rotation matrices according to rotation order. That is, the form of the forward kinematic equation for the manipulator can be predicted using the mapping matrix and the phase angle vector for the target manipulator. Based on this, this paper proposes a generalized inverse kinematic analysis method for 3-DOF successive rotation matrices using the mapping relationship, and perform inverse kinematic analysis using the mapping relationship for various 6-DOF manipulators with revolute joints that satisfy specific kinematic configuration conditions (i.e., three consecutive revolute joint axes intersect at a common point or three consecutive revolute joint axes are parallel).

제 1 장 서론

제 1 절 연구배경

로봇 매니퓰레이터는 4차 산업혁명에 맞추어 제조, 의료, 농업, 건설, 물류 및 창고와 같이 다양한 산업에서 사용되고 있다. 로봇 매니퓰레이터의 주요 장점은 높은 수준의 정밀도와 정확도로 반복 작업이 가능하다는 것이다. 이를 통해, 생산성과 효율성이 크게 향상됨과 동시에 작업자의 부상 위험도 감소할 수 있다. 다양한 산업 분야에서 로봇 매니퓰레이터에 대한 수요가 증가함에 따라 로봇 매니퓰레이터에 대한 기구학 해석이 중요한 측면이 되었다. 로봇 매니퓰레이터에 대한 기구학 해석은 마찰이나 중력과 같은 외력을 고려하지 않고 로봇 시스템의 움직임을 설명하는 것을 말한다. 매니퓰레이터에 대한 기구학 해석을 통해, 매니퓰레이터의 끝단에 부착된 도구 또는 그리퍼인 로봇 엔드 이펙터의 위치, 방향 및 속도를 결정한다. 이를 바탕으로 엔드 이펙터의 움직임을 계획하여, 픽 앤 플레이스 작업, 조립 및 용접과 같은 특정 작업을 정밀하게 제어할 수 있도록 프로그래밍한다. 따라서, 매니퓰레이터의 움직임과 구성을 결정하고 복잡한 환경에서 매니퓰레이터의 동작을 이해하는 데 핵심적인 역할을 한다.

로봇 매니퓰레이터에 대한 기구학 해석에는 순기구학과 역기구학 두가지가 존재한다. Fig. 1-1은 순기구학과 역기구학의 관계를 나타낸다. 순기구학은 매니퓰레이터의 관절 변수가 주어지면 매니퓰레이터에 끝단의 위치와 방향을 관절 변수들로 나타내는 것이며, $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$와 같이 표현할 수 있다. 여기에서, $\boldsymbol{\theta}$는 관절변수들의 집합(즉, 관절 공간) $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]^T \in R^{n\times1}$이며, $\mathbf{X}$는 직교좌표 변수 벡터 $\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, O_\alpha, O_\beta, O_\gamma]^T \in R^{6\times1}$이다. P_x, P_y 그리고 P_z (또는 O_α, O_β 그리고 O_γ)는 기준 좌표계 {0}에 관하여 매니퓰레이터의 끝단 위치 (또는 방향)를 나타내는 변수이다. 즉, 순기구학 해석은 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$를 찾는 것이다. 역기구학은 매니퓰레이터에 끝단의 위치와 방향이 주어

졌을 때, 이를 달성하는데 필요한 매니퓰레이터에 관절변수를 계산하는 것이며, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{X})$와 같이 표현할 수 있다. 즉, 역기구학 해석은 $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{X})$를 찾는 것이다.

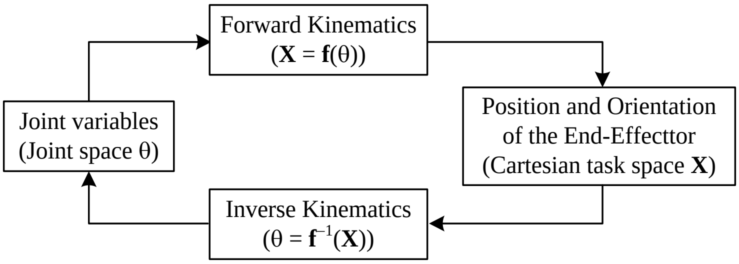


Fig. 1-1. Relationship between forward kinematics and inverse kinematics.

로봇 매니퓰레이터의 역기구학 문제에 대한 솔루션은 크게 닫힌 형태 방법(cloused-form method)와 수치적 방법(numerical method)의 두 가지 범주로 나뉜다[1]. 닫힌 형태 방법은 관절 각도를 주어진 매니퓰레이터의 끝단의 위치와 방향에 직접적으로 연관시켜 수학적으로 표현하기 때문에 역기구학 문제에 대한 정확한 솔루션를 제공할 수 있다. 그러나, 특정 기구학적 구성에만 닫힌 형태 해가 존재한다. 6 자유도 매니퓰레이터가 닫힌 형태의 역기구학 솔루션을 가질 수 있는 기구학적 구성의 조건은 다음과 같다[2]-[4].

1. 3개의 연속된 회전 관절의 축이 공통점에서 교차
2. 3개의 연속된 회전 관절의 축이 평행

반면에, 수치적 방법은 주어진 매니퓰레이터의 역기구학 문제에 대한 닫힌 형태 해가 존재하지 않은 경우 사용된다. 수치적 방법은 기구학적 구성에 관계없이 복잡한 매니퓰레이터에 대한 역기구학 문제를 해결할 수 있지만, 해에 수렴하기 위해 여러 계산이 필요하기 때문에 닫힌 형태 해에 비교해서 일반적으로 느리다. 특히, 다중

솔루션 또는 특이점이 있는 매니퓰레이터의 경우 수치 방법이 항상 해로 수렴되지 않을 수 있다. 수치적 방법은 기호 제거 방법(symbolic elimination method)[5]-[7], 계속 방법(continuation method)[8]-[9] 그리고 반복 방법(iterative method)[10]-[12]와 같은 하위 범주를 가진다.

로봇 매니퓰레이터의 기구학 해석을 수행하기 위해서, 다양한 수학적 프레임워크 및 접근방법이 개발되었다. 총 4개의 매개변수(D-H 매개변수)로 두개의 링크 간에 관계를 4 × 4 homogeneous transformation matrix 형태로 표현하는 방법이 제안되었으며[13], 이 제안된 방법은 다양한 직렬 매니퓰레이터에 적용되었다[4], [14]-[15]. Screw theory에 기반한 기구학 해석 방법이 제안되었다[16]-[17]. Screw theory는 로봇 매니퓰레이터의 기구학 해석 시, 강체가 한 위치에서 다른 위치로 어떻게 변위되는지에 관계없이 변위는 어떤 축에 대한 회전 및 병진으로 간주될 수 있다는 개념을 사용한다[17]. Featherstone는 screw theory을 확장하여 강체 운동의 선형 및 각도 측면을 결합한 6-D vector notation을 제시하여, 강체 시스템으로 표현된 로봇 메커니즘에 대한 동역학을 계산하는 효율적인 알고리즘을 제안하였다[18]-[19]. R. W. Brockett는 Lie group theory의 개념에 기초하여 직렬 매니퓰레이터의 순기구학을 행렬 지수의 곱으로 최초로 나타내었으며, Lie algebra를 이용하여 고전 screw theory을 현대적인 기하학적으로 접근할 수 있음을 보여주었다[20]. R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry[21], K. M. Lynch and F. C. Park[22] 그리고 J. Selig[23]는 POE를 이용한 다양한 로봇 기구학 해석을 논의하였다. F. C. Park, J. E. Bobrow, and S. R. Ploen[24]의 연구에서는 Lie group theory와 Lie algebra를 이용하여 open chain 매니퓰레이터에 대한 recursive inverse dynamics algorithm을 제시하였다. 최근에 Conformal Geometric Algebra (CGA)를 이용한 로봇 기구학 해석 방법에 제안되었다[25]. CGA는 3차원 유클리드 기하대수의 기저 벡터에 3차원 공간의 원점과 무한한 점을 표현하는 기저 벡터 두 가지를

추가하여, 유클리드 기하(Euclidean geometry)와 투영 기하(projective geometry)를 통합된 방식으로 표현할 수 있는 수학적 프레임워크다.

기구학 해석 시 사용된 수학적 프레임워크 및 접근방법을 기준으로, 6자유도 직렬형 매니퓰레이터에 대한 단힌 형태 역기구학 솔루션의 참고문헌들은 Table 1와 같이 정리된다.

Table 1. Various solutions for the inverse kinematics of serial manipulator based on the closed-form method.

프레임워크 및 접근방법	참고문헌	특징
D-H parameters	J. J. Craig [4]	산업용 로봇에 대한 솔루션 제시
	M. A. Ali et al. [14]	휴머노이드 로봇들이 가진 공통적인 기구학적 구성에 대한 솔루션 제시
	F. Xiao et al. [15]	기구학 체인 내에서 두 개의 절단점을 적용하고 재연결에서 나오는 방정식을 비교하여 솔루션을 유도
POE	R. M. Murray et al. [21]	subproblem 개념을 제시하여, 특정 매니퓰레이터에 대한 솔루션 유도
	J. Selig [23]	elbow manipulator에 대한 솔루션 제시
	J. M. Pardos-Gotor [26]	[21]의 subproblem을 확장 또는 추가로 subproblem을 제시하였으며, 주어진 기구학적 구성에 따른 subproblem을 선택하여 솔루션 유도
	I.-M. Chen and G. Yan [27]	
CGA	I. Zaplana et al. [28]	기하학적 구형 손목을 가진 6 또는 7자유도 직렬 매니퓰레이터의 솔루션 유도를 위한 기하학적 전략을 제안
Rodrigues formula	R. Diankov [3]	구형 관절을 가진 6자유도 매니퓰레이터에 대한 FKE(forward kinematic equations)의 reference frame을 변경하면서, 수치적 복잡성을 평가하여 풀이할 변수의 솔루션 세트를 선택한다.

제 2 절 연구목표

역기구학 솔루션을 얻기 위해서는 순기구학 해석이 선행되어야 한다. 순기구학 해석 결과는 매니퓰레이터의 링크 길이 및 회전순서에 영향을 받는다. 기존 CGA 또는 Screw theory 기반의 POE를 이용한 직렬 매니퓰레이터의 역기구학 해석은 기하학적 접근으로 역기구학 솔루션을 찾기 때문에, 순기구학 결과 식의 형태를 예측하기 힘들다. 그로 인해, 기존 방법은 순기구학 결과 식의 형태를 엔지니어가 보고 판단하여 닫힌 형태 방식의 역기구학 해석을 수행하였다. IKfast 알고리즘[3] 경우, 3개의 연속된 회전 관절의 축이 공통점에서 교차한 6자유도 매니퓰레이터에 대해서 일반화된 닫힌 형태 역기구학 솔루션을 제공해준다. 본 연구는 사상 관계를 이용한 새로운 기구학적 해석 방법을 제안한다. 이번 논문에서 제안한 방법은 기구학 해석 시 주어진 매니퓰레이터에 대한 사상 관계(즉, 사상 행렬과 위상각 벡터)로부터 순기구학의 결과 식의 형태를 예측한다. 이를 바탕으로, 닫힌 형태 방식의 역기구학 솔루션을 제안하였다. 하지만, 순기구학 결과식의 복잡성으로 인해 특정 기구학 구성에 대해서만 적용하였다.

다자유도 매니퓰레이터에 대한 기구학 해석 시, 회전 행렬의 구성 요소인 방향 코사인은 코사인-사인 함수들로 조합된 복잡한 형태를 가지며, 또한 직접 계산하기 어려우므로 일반적으로 연속 회전 행렬로 계산한다. 복잡한 형태의 방향 코사인은 단순한 코사인 함수들의 합의 형태로 다시 기술할 수 있다. 이때, 단순한 코사인 함수들의 각도와 연속 회전 행렬에 대한 회전 각도 벡터 사이에 사상 관계 (즉, 사상 행렬과 위상각 벡터)를 정의할 수 있다. 본 논문에서는 사상 행렬과 위상각 벡터를 이용하여 주어진 매니퓰레이터에 대한 방향 코사인을 회전 행렬의 곱셈 없이 직접 기술하는 방법을 제시한다. 즉, 해당 매니퓰레이터에 관한 사상 행렬과 위상각 벡터가 주어진다면 복잡한 형태의 방향 코사인의 식 형태는 예측 가능하다. 해

당 매니퓰레이터에 대한 방향 코사인의 식 형태가 예측 가능함을 이용하여, 3자유도 연속 회전 행렬에 대한 일반화된 역기구학 솔루션을 제안한다. 회전관절로만 이루어져 있으며 제한된 기구학적 구성 조건[2]-[4] (즉, 3개의 연속된 회전 관절의 축이 공통점에서 교차 또는 3개의 연속된 회전 관절의 축이 평행)을 가진 다양한 6자유도 매니퓰레이터에 대하여, 사상 관계를 이용한 기구학 해석을 수행하여 각각의 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 역기구학 솔루션을 제시한다

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장은 사상 관계 및 사상 관계의 결정방법에 대해서 간략히 소개한다. 3장 1절은 매니퓰레이터의 사상 관계를 이용한 회전행렬의 기술방법을 설명한다. 3장 2절 1에서는 3장 1절의 순기구학 해석(즉, 사상 관계)을 바탕으로 3자유도 연속 회전 행렬에 대한 역기구학 솔루션을 일반화시키며, 3장 2절 2는 회전관절로 구성된 4자유도와 6자유도 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석을 수행한다. 4장에선 사상 관계를 이용한 자코비안의 기술에 대해 토의한다. 마지막으로 5장에서 결론을 기술한다.

제 2 장 사상 관계

이번 장에서는 중력보상기 설계기법으로써 사용된 사상 관계[29]와 [29]에 사상 관계 유도과정의 문제점을 해결하기 위해서 제안한 방법들[30]-[31]에 대해서 소개한다. [29]는 매니퓰레이터의 중력토크에 대한 관절공간과 보상토크에 대한 1자유도 단위 중력보상기 공간 사이의 사상 관계(즉, 사상 행렬과 위상각 벡터)로부터 해당 기구에 대한 중력보상기를 설계할 수 있음을 보였다. [29]에서 사상 관계를 얻기 위해서는 일련의 계산 과정(해당 매니퓰레이터의 포텐셜 에너지 및 고유값의 분해)을 수행하였다. 해당 매니퓰레이터의 자유도가 높아질수록, 사상 관계를 얻기 위한 계산 과정은 어려워진다. 이러한 문제를 해결하기 위해서, 운동행렬을 이용한 사상 행렬의 결정방법[30]과 단위 위상각 벡터를 이용한 위상각 벡터의 결정방법[31]을 제안하였다.

2장 1절에서는 중력보상기 설계 기법에서 사용된 사상 관계[29]의 개념 및 유도과정을 간단히 소개한다. 2장 2절에서는 운동행렬의 개념 및 사상 행렬의 결정방법[30]을 2장 3절에서는 위상각 벡터의 결정방법[31]를 소개한다.

제 1 절 정의

사상 관계 개념은 중력보상기 설계기법에서 사용되었다[29]. 이번 절에서는 [29]에서 사상 관계의 정의를 소개하며, 간단한 예를 이용하여 [29]에서 제시된 사상 행렬과 위상각 벡터의 계산과정을 보인다. 사상 관계를 이용한 중력보상기 설계방법에 대한 자세한 설명은 [29]를 참고하기 바란다.

관절 공간 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_n]^T \in R^{n\times1}$을 가진 n자유도 매니퓰레이터를 고려해보자. 여기에서, θ_i과 n은 각각 i번째 관절의 회전각도와 관절의 수를 나타낸다. 주어진 매

니퓰레이터에 대한 중력보상기를 m개의 1자유도 단위 중력보상기들로만 구성한다면, 중력보상기 공간 $\boldsymbol{\theta}_g$은 $\boldsymbol{\theta}_g = [\theta_{g1}, \theta_{g2},\ldots, \theta_{gm}]^T \in R^{m\times1}$이라고 결정할 수 있다. 여기에서, θ_{gj}는 j번째 1자유도 단위 중력보상기의 회전 각도를 의미하며, m은 1자유도 단위 중력보상기의 개수를 나타낸다. 주어진 매니퓰레이터의 자세에 의해서, 1자유도 단위 중력보상기의 회전 각도는 수동적으로 결정되므로, 관절 공간 $\boldsymbol{\theta} \in R^{n\times1}$과 중력보상기 공간 $\boldsymbol{\theta}_g \in R^{m\times1}$사이에 식 (2-1)과 같은 선형 관계 (즉, 사상 관계)가 존재한다.

$$\boldsymbol{\theta}_g = \mathbf{C}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\phi} \tag{2-1}$$

여기에서, $\mathbf{C} \in R^{m\times n}$는 관절 공간 $\boldsymbol{\theta} \in R^{n\times1}$과 중력보상기 공간 $\boldsymbol{\theta}_g \in R^{m\times1}$사이에서 사상 행렬을 의미하며, $\boldsymbol{\phi} \in R^{m\times1}$ 는 일정한 위상각의 벡터를 나타낸다 ([29]에서 사상 행렬을 기호 **J**로 표기하였지만, 본 논문에서는 자코비안과 혼선을 피하기 위해서 사상 행렬을를 기호 **C**로 대체하여 표기함). 사상 행렬 $\mathbf{C} \in R^{m\times n}$의 k번째 행 벡터는 주어진 매니퓰레이터에 부착될 k번째 1자유도 단위 중력 보상기의 위치를 나타내며, 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi} \in R^{m\times1}$의 k번째 요소는 i번째 1자유도 단위 중력 보상기의 초기 회전 각도를 나타냅니다. 즉, 공간 사상 기법에서 사상 관계는 주어진 매니퓰레이터의 완전한 중력 보상기 설계 시 필요한 정보를 제공한다 (즉, 완전한 중력보상 달성하기 위해 필요한 중력 보상기의 위치와 개수).

Fig. 2-1는 z_0-y_1-y_2-y_3 회전을 가진 4자유도 3링크 매니퓰레이터를 나타낸다. Fig. 2-1에서 θ_1, θ_2, θ_3 그리고 θ_4는 각각 z_0, y_1, y_2 그리고 y_3 축에서 회전 각도들이며 (즉, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T \in R^{4\times1}$), 중력 벡터 $\mathbf{g}$는 $\mathbf{g} = [g, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$으로 주어진다. m_i와 l_i는 각각 링크 i의 질량과 길이를 나타내며, l_{ig}는 좌표계 $\{i\}$의 원점에서부터 링크 i의 질량 중심까지의 거리를 의미한다. 각 링크의 질량 중심은 x_i축 상에 위치한다.

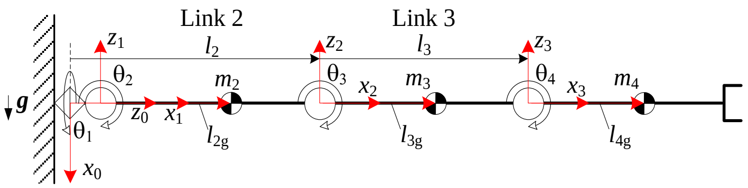


Fig. 2-1. Schematic of the 4-DOF and 3-link manipulator.

Fig. 2-1의 매니퓰레이터를 예로들어 [29]에서 사상 관계의 계산과정은 다음과 같다: 1) 질량의 포텐셜 에너지 V_m을 계산한다. Fig. 2-1의 매니퓰레이터 경우, 질량의 포텐셜 에너지 V_m는 식 (2-2)와 같이 계산된다.

$$V_m = -g\left(m_2 l_{2g} + \left(m_3 + m_4\right) l_2\right) c_1 c_2 - g\left(m_3 l_{3g} + m_4 l_3\right) c_1 c_{2+3} - m_4 g l_{4g} c_1 c_{2+3+4} \tag{2-2}$$

여기에서, c_1 (또는 s_1)과 c_{1+2} (또는 s_{1+2})는 각각 $\cos(\theta_1)$(또는 $\sin(\theta_1)$)와 $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ (또는 $\sin(\theta_1 + \theta_2)$)를 의미한다; 2) 질량의 포텐셜 에너지 V_m의 편미분을 계산한다. $\partial V_m/\partial\boldsymbol{\theta}$은 식 (2-2)로부터 식 (2-3)와 같이 계산된다.

$$\frac{\partial V_m}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} s_1 c_2 & 0 & s_1 c_{2+3} & s_1 c_{2+3+4} \\ 0 & c_1 s_2 & c_1 s_{2+3} & c_1 s_{2+3+4} \\ 0 & 0 & c_1 s_{2+3} & c_1 s_{2+3+4} \\ 0 & 0 & 0 & c_1 s_{2+3+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V}_{m\_\max} \tag{2-3}$$

여기에서, M_1, M_2 그리고 M_3은 각각 $g(m_2 l_{2g} + (m_3 + m_4) l_2$, $g(m_3 l_{3g} + m_4 l_3)$ 그리고 $m_4 g l_{4g}$이다; 3) $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$의 고유값 $\boldsymbol{\lambda}$을 계산한다. 식 (2-3)에 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$의 고유값 $\boldsymbol{\lambda}$은 $[s_1 c_2,\ c_1 s_2,\ c_1 s_{2+3},\ c_1 s_{2+3+4}]^T \in R^{4\times1}$와 같이 계산된다; 4) 고유값들을 식 (2-4)와 같이 분해한다.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= s_1 c_2 = \left(s_{1+2} + s_{1-2}\right)/2 \\
\lambda_2 &= c_1 s_2 = \left(s_{1+2} - s_{1-2}\right)/2 \\
\lambda_3 &= c_1 s_{2+3} = \left(s_{1+(2+3)} - s_{1-(2+3)}\right)/2 \\
\lambda_4 &= c_1 s_{2+3+4} = \left(s_{1+(2+3+4)} - s_{1-(2+3+4)}\right)/2
\end{aligned} \tag{2-4}$$

식 (2-4)와 같이, 고유값들을 분해하기 위해서는 6개의 기본 함수가 필요하다 (즉, s_{1+2}, s_{1-2}, $s_{1+(2+3)}$, $s_{1-(2+3)}$, $s_{1+(2+3+4)}$, $s_{1-(2+3+4)}$). 따라서, 완전한 중력보상을 위해서는 6개의 1자유도 단위 중력보상기가 필요하다. 6개의 기본함수에서 사상 행렬 **C**와 위상각 벡터 **ϕ**는 식 (2-5)와 같이 결정된다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in R^{6\times 4}, \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{6\times 1} \tag{2-5}$$

제 2 절 사상 행렬의 결정방법

매니퓰레이터의 자유도가 높아질수록, [29]에서 제시된 사상 관계의 계산과정은 어려워진다. 이러한 문제를 해결하기 위해서, 저자는 운동행렬로부터 사상 관계에서 사상 행렬을 유도하는 방법을 제시하였다[30]. 이번 절에서는 운동행렬의 개념과 운동행렬을 이용하여 사상 관계에서 사상 행렬의 유도방법에 대해서 간략히 소개한다. 간단한 3자유도 1링크 매니퓰레이터를 예제로 사용하여, 기존 사상 행렬의 계산방법[29]과 운동행렬을 이용한 사상 행렬 결정방법[30]의 결과를 비교한다. 운동행렬을 이용한 사상 행렬의 유도방법에 대한 자세한 설명은 [30]을 참고하기 바란다.

가능한 관절 운동의 수 C_i는 링크 i의 운동성(mobility) M_i의 ($0 \le C_i \le M_i$)으로 결정할 수 있다. 예를 들어, 회전 조인트와 연결된 1링크-3자유도 매니퓰레이터를 고려해보자 (즉, 링크 1과 2의 길이 l_1과 l_2는 0이다). 링크 3의 운동성(mobility)은 $M_3 = 3$이다. 따라서, C_3은 $C_3 = \{0, 1, 2, 3\}$으로 결정된다. C_3에서 경우 '0'은 모든 관절이 고정됨을 나타낸다 (즉, 1링크-3링크 매니퓰레이터가 구조가 된다). '1'은 하나의 관절만 사용할 수 있고 나머지 관절은 고정되어 있음을 나타낸다. '2'는 두 개의 관절만 사용할 수 있고 나머지는 고정되어 있음을 나타낸다. '3' 모든 관절을 사용할 수 있음을 나타낸다. 관절 공간 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T \in R^{3\times1}$을 가지며 공간 운동이 가능한 1링크-3링크 매니퓰레이터를 고려해보자. 링크 3에 대한 운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}_3$은 관절 운동의 가능한 조합을 고려하여 식 (2-6)과 같이 결정할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{C}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0 & \pm1 \end{bmatrix}^T \in R^{27\times3} \tag{2-6}$$

식 (2-6)의 운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}_3$ 경우, 8개 종류의 행 벡터가 관찰되며, 각 행 벡터에 대한 '±1'의 개수는 $C_3 = \{0, 1, 2, 3\}$의 값을 가진다. 예를 들어, 4, 6, 7번째 행 벡터에 대한 '±1'의 개수는 2 이다. 따라서, 4, 6, 7번째 행 벡터는 C_3에서 2의 가능한 관절 동작을 나타낸다. 4번째(또는 7번째) 행 벡터의 경우, 링크 3은 θ_2와 θ_3(또는 θ_1과 θ_3)으로 움직인다.

회전 관절을 가진 n자유도 매니퓰레이터의 관절 공간은 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n]^T \in R^{n\times1}$를 고려해보자. 관절 i에 대해 가능한 운동 집합은 {0(고정), 1(정회전), −1(역회전)}의 요소를 가진다. n자유도 매니퓰레이터의 일반적인 운동 조합은 n-튜플(반복 순열)로 결정할 수 있다. 즉, {0, +1, −1}의 운동 집합에서 n개의 요소를 순서대로 선택하여 반복이 허용되도록 한다. 따라서, n자유도 매니퓰레이터의 총 관절 운동 수는

$_3\Pi_n = 3^n$으로 계산된다. n자유도 매니퓰레이터에 대한 일반화된 운동 행렬은 Fig. 2-2와 같다. 즉, 운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}$은 매니퓰레이터에 관절 운동의 조합을 나타낸다. 예를 들어 Fig. 2-2의 첫 번째 행 벡터는 모든 관절이 고정되어 있음을 나타낸다(즉, 모든 관절에 대해 {0}가 선택됨).

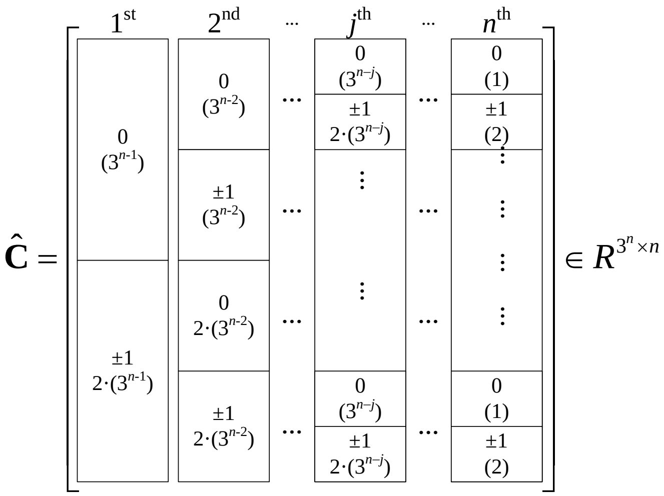


Fig. 2-2. The generalized motion matrix for the n-DOF manipulator.

운동행렬은 가능한 관절 운동만 나타내기 때문에, 병렬 관절 구성을 제외한 동일한 자유도에 대해 동일한 운동행렬을 얻을 수 있다는 점을 유념해야 한다. [30]에 요약한 수정규칙은 다음과 같다:

1. 절대 운동 개념에서, 운동행렬의 첫 번째 열 벡터의 성분은 ‘1’이어야 한다. 즉, 첫 번째 성분이 ‘0’과 ‘–1’인 행 벡터는 삭제된다.
2. 포텐셜 에너지 개념에서;
   A. 모든 관절 운동에 대하여, 회전축이 항상 중력 방향과 평행한 관절은 관절 공간에서 제거되어야 하며, 제거된 관절과 관련된 운동

행렬의 열 벡터도 제거되어야 한다.

B. 링크 i의 질량 중심이 관절 i의 회전 축에 위치하면, m_i와 θ_i의 포텐셜 에너지에 해당하는 행 벡터가 운동행렬에서 삭제된다.

C. 해당 매니퓰레이터의 링크 i가 존재하지 않는 경우 (즉, $l_i = l_{ig} = m_i = 0$), m_i의 포텐셜 에너지에 해당하는 행 벡터가 운동행렬에서 삭제된다.

3. 운동성 개념에서, j번째 행 벡터의 구성 요소 중에서 '0'이 연속적으로 존재할 때 j번째 행 벡터가 삭제된다.

4. 인접한 축이 평행한 경우, 인접한 모든 축을 하나의 병합된 축으로 간주할 수 있다. 평행한 축들의 부분 정보를 가진 모든 행 벡터는 평행 축의 모든 정보를 가진 행 벡터로 병합된다.

Fig. 2-3는 3자유도 1링크 매니퓰레이터들을 나타낸다. Fig. 2-3에서 중력 벡터 $\mathbf{g} = [g, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$이며, 링크의 질량 중심은 x_i축 상에 위치한다. Fig. 2-3(a) (또는 (b))는 y_0-x_1-y_2 (또는 z_0-y_1-x_2) 회전 순서를 가진 3자유도 1링크 매니퓰레이터를 나타낸다.

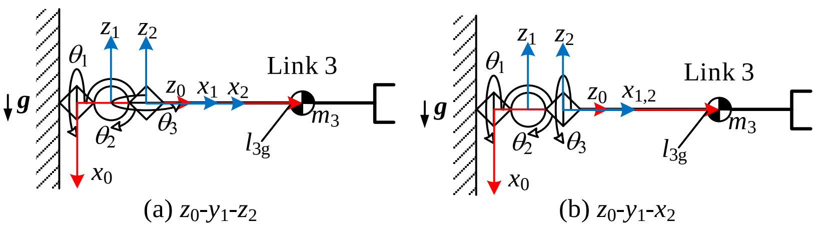


Fig. 2-3. 3-DOF and 1-link manipulators.

운동행렬로부터 사상 행렬을 유도 시, 간단한 예로써 Fig. 2-3의 매니퓰레이터들을 사용하여 운동행렬의 수정규칙이 어떻게 사용되는지 소개한다. 운동행렬을 이용한

사상 행렬 결정방법[30]과 기존 사상 관계 계산방법[29]의 결과를 비교하기 위해서, 기존 사상 관계 계산방법[29]을 이용하여 Fig. 2-3의 매니퓰레이터들에 대한 사상 행렬을 얻는다. Table 2는 Fig. 2-3(a)와 Fig. 2-3(b)의 매니퓰레이터에 대한 사상 행렬 유도과정 및 결과를 나타낸다.

Table 2. Induction process of mapping matrices for manipulators in Fig. 2-3.

Induction process	Fig. 2-3(a)	Fig. 2-3(b)
(1). V_m	$V_m = -m_3 g l_{3g}\left(c_1c_2c_3 - s_1s_3\right)$	$V_m = -m_3 g l_{3g} c_1 c_2$
(2). $\partial V_m/\partial\boldsymbol{\theta}$	$\begin{bmatrix} c_1s_3 & s_1c_2c_3 & 0 \\ 0 & c_1s_2c_3 & 0 \\ s_1c_3 & 0 & c_1c_2s_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_3gl_{3g} \\ m_3gl_{3g} \\ m_3gl_{3g} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_1c_2 & 0 \\ 0 & c_1s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_3gl_{3g} \\ m_3gl_{3g} \end{bmatrix}$
(3). Eigenvalues $\boldsymbol{\lambda}$ of $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$	$[c_1s_3,\ c_1s_2c_3,\ c_1c_2s_3]^T \in R^{3\times1}$	$[s_1c_2,\ c_1c_2]^T \in R^{2\times1}$
(4). Eigenvalue decomposition	$\lambda_1 = c_1s_3 = \left(s_{1+3} + s_{1-3\pm\pi}\right)/2$ $\lambda_2 = c_1s_2c_3 = \left(s_{1+2+3} + s_{1+2-3} - s_{1-2+3} - s_{1-2-3}\right)/4$ $\lambda_3 = c_1c_2s_3 = \left(s_{1+2+3} - s_{1+2-3} + s_{1-2+3} - s_{1-2-3}\right)/4$	$\lambda_1 = s_1c_2 = \left(s_{1+2} + s_{1-2}\right)/2$ $\lambda_2 = c_1s_2 = \left(s_{1+2} - s_{1-2}\right)/2$
(5). Mapping relationship	$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

운동행렬의 수정규칙 2-B는 포텐셜 에너지 개념에서 링크 i의 질량 중심이 관절 i의 회전 축에 위치하였을 때, 운동행렬의 수정방법을 요약한 것이다. Fig. 2-3(b)의 매니퓰레이터에서 링크 3의 질량 중심이 관절 3의 회전 축에 위치하므로, m_3의 포텐셜 에너지는 θ_1과 θ_2의 관절 각도에 따라서만 달라짐을 Table 2에서 Fig. 2-3(b)

의 V_m 계산식을 통해서 알 수 있다. 따라서, [30]에서 요약된 수정규칙 2-B는 다음과 같이 보완되어야 한다.

> 2-B. 링크 i의 질량 중심이 관절 i의 회전 축에 위치하면, m_i와 θ_i의 포텐셜 에너지에 해당하는 행 벡터가 운동행렬에서 삭제된다. m_i의 포텐셜 에너지는 θ_i가 제거된 관절 공간에 의해서 변화한다.

Fig. 2-4(a)(또는 (b))는 식 (2-6)의 운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}_3$로부터 Fig. 2-3(a)(또는 (b))의 매니퓰레이터들에 대한 사상 행렬이 유도되는 과정을 나타낸다. Fig. 2-4에서 삭제되는 행에 표시된 번호는 운동행렬 수정방법 요약의 번호이다. 절대 운동 개념에서 운동행렬의 첫 번째 열 벡터의 성분은 ‘1’이어야 하므로, 수정규칙 1번에 의해서 Fig. 2-4(a)와 (b)에서 $\hat{\mathbf{C}}_3$에 [0, 0, 0], [0, 0, ±1], [0, ±1, 0], [0, ±1, ±1], [−1, 0, ±1], [−1, ±1, 0] 그리고 [−1, ±1, ±1] 행 벡터들이 공통적으로 삭제된다. Fig. 2-3의 매니퓰레이터들은 링크 1과 2는 고려하지 않는다 (즉, $l_1 = l_{1g} = m_1 = l_2 = l_{2g} = m_2 = 0$). 따라서, Fig. 2-3(a)에서 $\hat{\mathbf{C}}_3$의 [1, 0, 0]과 [1, ±1, 0] 행 벡터들이 수정규칙 2-C번에 의해서 삭제된다. 여기에서, [1, 0, 0] (또는 [1, ±1, 0]) 행 벡터는 링크 1 (또는 2)의 질량의 포텐셜 에너지에 해당한다.

$$\hat{\mathbf{C}}_3 = \begin{bmatrix} \overbrace{0 & 0 & 0 & 0}^{1} & \overbrace{\boxed{\pm1} & \boxed{\pm1} & \boxed{\pm1} & \boxed{\pm1}}^{1} \\ 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 & \pm1 & \underbrace{0}_{\text{2-C}} & \pm1 & \underbrace{0}_{\text{2-C}} & \pm1 \end{bmatrix}^T \in R^{27\times3} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm1 \\ 1 & \pm1 & \pm1 \end{bmatrix} \in R^{6\times3}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_3 = \begin{bmatrix} \overbrace{0 & 0 & 0 & 0}^{1} & \overbrace{\boxed{\pm1} & \boxed{\pm1} & \boxed{\pm1} & \boxed{\pm1}}^{1} \\ 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 & \pm1 & \underbrace{0}_{\text{2-C}} & \underbrace{\pm1}_{\text{2-B}} & 0 & \underbrace{\pm1}_{\text{2-B}} \end{bmatrix}^T \in R^{27\times3} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \pm1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{2\times3}$$

Fig. 2-4. The process of deriving the mapping matrices for Fig.2-3 from the motion matrix $\hat{\mathbf{C}}_3$.

Fig. 2-4(b)에서 m_3과 θ_3의 포텐셜 에너지에 해당하는 $\hat{\mathbf{C}}_3$의 [1, 0, ±1]과 [1, ±1, ±1] 행 벡터들이 운동행렬의 수정규칙 2-B번에 의해서 삭제된다. Fig. 2-4(b)에서 $\hat{\mathbf{C}}_3$의 [1, 0, 0]과 [1, ±1, 0] 행 벡터들은 수정규칙 2-C에 의해서 삭제되어야 하지만, [1, ±1, 0] 행 벡터는 수정규칙 2-B에 의해서 존재해야 한다.

운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}$는 매니퓰레이터가 가진 관절들의 모든 운동 조합으로 이루어졌다. 운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}$에 중력보상의 특징들을(즉, 운동행렬의 수정규칙)을 적용하면, 수정된 운동행렬 $\mathbf{C}$가 유도된다. 수정된 운동행렬 $\mathbf{C}$는 매니퓰레이터의 관절들이 가능한 운동 조합을 나타내며, [29]에서 계산된 사상 행렬과 일치한다. 그러므로, 사상 관계는 매니퓰레이터의 가능한 관절 운동의 조합과 관절 공간 사이에 대한 정의를 나타낸다.

제 3 절 위상각 벡터의 결정방법

매니퓰레이터의 자유도가 높아질수록, [29]에서 제시된 사상 관계의 계산과정은 어려워진다. 이러한 문제를 해결하기 위해서, 저자는 단위 위상각 벡터를 이용하여 사상 관계에서 위상각 벡터를 얻는 방법을 제시하였다[31]. 이번 절에서는 간단한 예제를 이용하여, 단위 위상각 벡터를 이용하여 위상각 벡터의 유도방법에 대해서 간략히 소개한다.

관절 공간 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n] \in R^{n\times1}$을 가진 n자유도 매니퓰레이터를 고려해보자. 해당 매니퓰레이터에 대한 사상 행렬 $\mathbf{C} \in R^{m\times n}$ (또는 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi} \in R^{m\times1}$)의 행 벡터(또는 요소)들을 자유도 기준으로 구분하여, 사상 행렬 (또는 위상각 벡터)을 $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_q] \in R^{m\times n}$ (또는 $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1; \boldsymbol{\phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\phi}_q] \in R^{m\times1}$)와 같이 기술할 수 있다. 여기에서, n과 m는 각각 관절 공간과 1자유도 중력보상기 공간의 크기를 나타낸다. $\mathbf{C}_i$ (또는 $\boldsymbol{\phi}_i$)는 i번째 부분 사상 행렬 (또는 부분 위상각 벡터)를 의미하며, q는 부분 사상

행렬 (또는 부분 위상각 벡터)의 총 개수를 나타낸다. n자유도 매니퓰레이터에 대한 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi} \in R^{m\times 1}$를 결정하기 위해서는 부분 위상각 벡터들을 $\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{C}_i{}^u\boldsymbol{\phi}_i$ for $i = 1, 2, \ldots, q$와 같이 계산해야한다. 부분 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi}_i$ 계산 시 필요한 단위 위상각 벡터 ${}^u\boldsymbol{\phi}_i$를 회전 순서 기반으로 유도한다.

일반적인 회전(예, z_0-y_1-z_2 rotations)에 대한 위상각 행렬로부터 단위 위상각 벡터를 얻는다. 여기에서, 일반적인 회전에 대한 위상각 행렬은 x, y 그리고 z축 회전의 위상각 행렬들을 조합하여 유도한다. x, y 그리고 z축 회전행렬(즉, $\mathbf{R}_x(\alpha)$, $\mathbf{R}_y(\beta)$ 그리고 $\mathbf{R}_z(\gamma)$)의 위상각 행렬(즉, ${}^u\boldsymbol{\Phi}_x$, ${}^u\boldsymbol{\Phi}_y$ 그리고 ${}^u\boldsymbol{\Phi}_z$)은 각각 식 (2-7)-(2-9)와 같다.

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \in R^{3\times 3} \rightarrow {}^u\boldsymbol{\Phi}_x = \begin{bmatrix} Null & \times & \times \\ \times & 0 & \pi/2 \\ \times & -\pi/2 & 0 \end{bmatrix} \in R^{3\times 3} \tag{2-7}$$

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \in R^{3\times 3} \rightarrow {}^u\boldsymbol{\Phi}_y = \begin{bmatrix} 0 & \times & -\pi/2 \\ \times & Null & \times \\ \pi/2 & \times & 0 \end{bmatrix} \in R^{3\times 3} \tag{2-8}$$

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{3\times 3} \rightarrow {}^u\boldsymbol{\Phi}_z = \begin{bmatrix} 0 & \pi/2 & \times \\ -\pi/2 & 0 & \times \\ \times & \times & Null \end{bmatrix} \in R^{3\times 3} \tag{2-9}$$

연속 회전 A-B에 대한 단위 위상각 벡터를 유도하는 과정은 Fig. 2-5와 같다. 간단한 예로서, z_0-y_1 회전을 가진 2자유도 1링크 매니퓰레이터를 고려한다. 링크의 질량 중심이 x_i축상에 위치할 때, 예에 대한 사상 행렬 $\mathbf{C}$과 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi}$는 각각 $\mathbf{C} = [1, 1; 1, -1] \in R^{2\times 2}$와 $\boldsymbol{\phi} = [0, 0]^T \in R^{2\times 1}$이다[29]. 예의 단위 위상각 벡터를 유도하는 과정은 다음과 같다;

1) 중력의 방향과 질량 중심의 위치에 해당하는 ${}^u\boldsymbol{\Phi}_z$의 행 벡터와 ${}^u\boldsymbol{\Phi}_y$의 열 벡터를 선택한다. z_0-y_1 회전을 가진 매니퓰레이터에 대해서, 중력 벡터 $\mathbf{g}$가 $\mathbf{g}$

$= [g, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$로 주어지고 링크의 질량 중심이 x_i축 상에 위치한다고 가정한다 (즉, ${}^2\mathbf{P} = [l_{2g}, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$). 이때, 질량의 위치 에너지가 $m\mathbf{g}\cdot{}^0\mathbf{P}_i = m\mathbf{g}^T\mathbf{R}_z\mathbf{R}_y{}^2\mathbf{P}$로 계산되기 때문에, ${}^u\mathbf{\Phi}_z$의 행 벡터와 ${}^u\mathbf{\Phi}_y$의 열 벡터는 각각 ${}^u\mathbf{\Phi}_z(1,:) = [0, \pi/2, \times] \in R^{1\times3}$와 ${}^u\mathbf{\Phi}_y(:,1) = [0, \times, \pi/2]^T \in R^{3\times1}$가 선택된다.

2) 선택한 벡터들을 $[{}^u\mathbf{\Phi}_z(1, :), {}^u\mathbf{\Phi}_y(:,1)^T] = [0, \pi/2, \times; 0, \times, \pi/2] \in R^{2\times3}$으로 결합한다.

3) Step 2에서 새로 유도된 행렬에서 $\times$를 포함하는 벡터를 삭제한다. 이 경우, 나머지 단위 위상각 벡터는 ${}^u\boldsymbol{\phi} = [0, 0]^T \in R^{2\times1}$이며, z_0-y_1회전에 대한 2자유도 위상각 행렬 ${}^u\mathbf{\Phi}_{zy}$의 (1,1) 요소에 해당한다 (즉, ${}^u\mathbf{\Phi}_{zy}(1,1) = [0, 0]^T \in R^{2\times1}$).

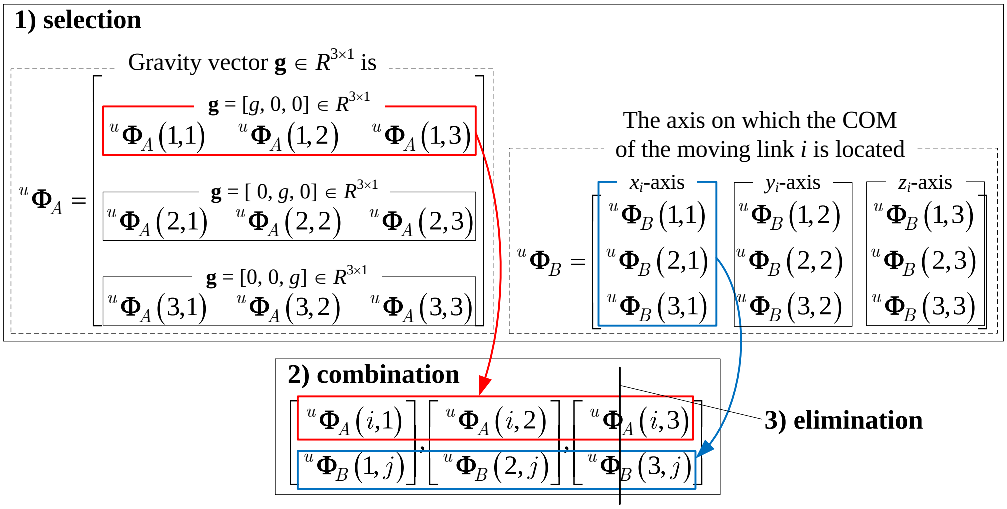


Fig. 2-5. A method of deriving a new unit phase angle vector based on successive rotations.

$$
{}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy} = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & -\pi/2 & \times \\ 0 & \times & \pi/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\pi/2 & \times \\ \times & Null & \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\pi/2 & \times \\ -\pi/2 & \times & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 & \times \\ 0 & \times & \pi/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 & \times \\ \times & Null & \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 & \times \\ -\pi/2 & \times & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \times & \times & Null \\ 0 & \times & \pi/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \times & \times & Null \\ \times & Null & \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \times & \times & Null \\ -\pi/2 & \times & 0 \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow$$

$$
{}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy} = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \pi/2 \\ Null \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi/2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ Null \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} Null \\ \pi/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \times \\ \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Null \\ 0 \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

Fig. 2-6. Induction process of all components in ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}$.

전체 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}$는 Fig. 2-6과 같다. 위에서 설명한 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}(1,1)$의 유도 과정과 유사하게 다양한 $\mathbf{g}$와 ${}^{2}\mathbf{P}$를 적용하여 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}$의 모든 성분을 얻을 수 있다. 위상각 벡터는 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{C}{}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{yz}(1,1) = [0, 0]^{T} \in R^{2\times1}$로 계산되며 [29]에서 계산된 위상각 벡터와 일치한다.

예를 들어, z_0-y_1-z_2 회전에 대한 위상각 행렬 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zyz}$에서 (1,1) 요소의 단위 위상각 벡터를 유도하는 과정은 다음과 같다:

1) ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}$의 1st 행 벡터와 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{z}$의 1st 열 벡터는 각각 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}(1,:) = [0, \pi/2, 0; 0, Null, -\pi/2]\ R^{2\times3}$와 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{z}(:,1) = [0, -\pi/2, \times]^{T} \in R^{3\times1}$를 선택한다

2) 선택한 벡터들을 $[{}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}(1, :), {}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{z}(:,1)^{T}] = [0, \pi/2, 0; 0, Null, -\pi/2; 0, -\pi/2, \times] \in R^{3\times3}$으로 결합한다

3) 새로 유도된 행렬 $[{}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}(1, :), {}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{z}(:,1)^{T}]$에서 ×를 포함하는 벡터를 삭제한다(즉, ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zyz}(1,1) = [0, 0, 0; \pi/2, Null, -\pi/2]^{T} \in R^{3\times2}$).

Fig. 2-3(a)의 3자유도 1링크 매니퓰레이터에 대한 위상각 벡터를 고려해보자. Fig. 2-3(a)에서 중력 벡터 **g**는 **g** = $[g, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$이며, 링크의 질량 중심이 x_i축 상에 위치한다. Fig. 2-3(a)에 대한 사상 행렬 **C**은 **C** = $[1, 0, \pm1; 1, \pm1, \pm1] \in R^{6\times3}$이다. 자유도를 기준으로 사상 행렬 $\mathbf{C} \in R^{6\times3}$의 행 벡터들을 $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2] \in R^{6\times3}$와 같이 구분할 수 있다. 여기에서, $\mathbf{C}_1$와 $\mathbf{C}_2$는 각각 $\mathbf{C}_1 = [1, 0, \pm1] \in R^{2\times3}$와 $\mathbf{C}_2 = [1, \pm1, \pm1] \in R^{4\times3}$이다. Fig. 2-3(a)에 대한 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1; \boldsymbol{\phi}_2] \in R^{6\times1}$의 부분 위상각 벡터들은 $\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{C}_i{}^u\boldsymbol{\phi}_i$ for i = 1, 2와 같이 계산한다. ${}^u\boldsymbol{\Phi}_{zyz}(1,1)$의 단위 위상각 벡터들을 이용하여, 부분 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi}_1$과 $\boldsymbol{\phi}_2$를 계산한다. 단위 위상각 벡터에서, *Null*은 사상 관계에서 아무런 영향을 미치지 않는 단위 위상각을 의미한다. 따라서, ${}^u\boldsymbol{\Phi}_{zyz}(1,1)$에서 단위 위상각 벡터 $[\pi/2, Null, -\pi/2]^T \in R^{3\times1}$에 관한 부분 사상 행렬은 2nd 열 벡터의 요소가 '0'으로만 구성된 $\mathbf{C}_1$이다. Fig. 2-3(a)에 대한 부분 위상각 벡터들은 식 (2-10)과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi/2 \\ Null \\ -\pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\phi}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-10}
$$

위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1; \boldsymbol{\phi}_2] = [0, \pi, 0, 0, 0, 0] \in R^{6\times1}$은 Table 2에서 기존 사상 관계 계산방법으로 얻은 위상각 벡터와 일치한다.

제 3 장 사상 관계를 이용한 기구학 해석

2장에서는 사상 관계를 이용한 중력보상기 설계에 관한 이전 연구들을 소개하였다. 이번 장에서는 본 연구에서 처음 시도되는 사상 관계를 이용한 기구학 해석 방법을 제안한다. 3장 1절에서는 사상 관계를 이용하여 연속 회전 행렬을 일반화하여 기술한다. 즉, 회전 순서를 기반으로 회전 행렬들을 곱하는 연산 없이, 연속 회전 행렬을 직접 표현할 수 있다. 간단한 3자유도 매니퓰레이터를 이용하여, 사상 관계를 이용한 순기구학 해석을 소개한다. 3장 2절에서는 사상 관계를 이용하여 4자유도와 6자유도 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석을 수행한다.

제 1 절 순기구학

이번 절에서는 사상 관계를 이용하여 회전 행렬 기술 방법을 제안한다. 복잡한 형태의 방향 코사인은 단순한 코사인 함수들의 합의 형태로 다시 기술할 수 있다. 이때, 단순한 코사인 함수들의 각도와 연속 회전 행렬에 대한 회전 각도 벡터 사이에 사상 관계 (즉, 사상 행렬과 위상각 벡터)가 존재한다. 사상 행렬과 위상각 벡터가 주어진다면 복잡한 형태의 방향 코사인의 식 형태는 예측 가능하다. 즉, 사상 관계를 이용하여 해당 방향 코사인을 직접 계산할 수 있다.

예를 들어 z_0-y_1-z_2 회전에서, 고정 프레임의 좌표 x축에 대한 단위 벡터 ${}^0\mathbf{x}$와 회전 프레임의 좌표 y축에 대한 단위 벡터 ${}^3\mathbf{y}$사이의 방향 코사인은 내적 ${}^0\mathbf{x}\cdot{}^3\mathbf{y}$으로 계산된다. 복잡한 회전인 경우, 방향 코사인 ${}^0\mathbf{x}\cdot{}^3\mathbf{y}$은 직접 계산하기 어렵다. 따라서, 일반적으로 연속 회전 ${}^0\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_z(\theta_1)\mathbf{R}_y(\theta_2)\mathbf{R}_z(\theta_3)$을 통해 계산한다. 여기에서, ${}^0\mathbf{R}_3 \in R^{3\times3}$은 식 (3-1)과 같다.

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_3 &= \mathbf{R}_z(\theta_1)\mathbf{R}_y(\theta_2)\mathbf{R}_z(\theta_3) \\
&= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1c_2s_3 - s_1c_3 & c_1s_2 \\ s_1c_2c_3 + c_1s_3 & -s_1c_2s_3 + c_1c_3 & s_1s_2 \\ -s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 \end{bmatrix} \in R^{3\times 3}
\end{aligned} \tag{3-1}
$$

여기에서, c_1 (또는 s_1)은 $\cos(\theta_1)$ (또는 $\sin(\theta_1)$)을 의미한다. 즉, z_0-y_1-z_2 회전에서 방향 코사인 ${}^{0}\mathbf{x}\cdot{}^{3}\mathbf{y}$은 식 (3-1)의 ${}^{0}\mathbf{R}_3$에 (1,2) 요소이다 (즉, ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,2)$).

복잡한 코사인-사인 함수들로 조합된 형태를 가진 방향 코사인을 단순한 코사인 함수들의 합으로 다시 기술한다. 예를 들어 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$, ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,3)$ 그리고 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$들은 식 (3-2)과 같이 기술할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_3(1,1) &= c_1c_2c_3 - s_1s_3 \\
&= \left(c_{1+3} + c_{1-3\pm\pi}\right)/2 + \left(c_{1+2+3} + c_{1+2-3} + c_{1-2+3} + c_{1-2-3}\right)/4 \\
{}^{0}\mathbf{R}_3(1,3) &= c_1s_2 = \left(c_{1+2-\pi/2} + c_{1-2+\pi/2}\right)/2 \\
{}^{0}\mathbf{R}_3(2,3) &= s_1s_2 = \left(c_{1+2\pm\pi} + c_{1-2}\right)/2
\end{aligned} \tag{3-2}
$$

여기에서, $c_{1\pm2}$ (또는 $s_{1\pm2}$)은 $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$ (또는 $\sin(\theta_1 \pm \theta_2)$)을 의미한다. 식 (3-2)에 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$ 경우, 코사인 함수의 각도들은 각각 $\theta_1 + \theta_3$, $\theta_1 - \theta_3 \pm \pi$, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, $\theta_1 + \theta - \theta_3$, $\theta_1 - \theta_2 + \theta_3$ 그리고 $\theta_1 - \theta_2 - \theta_3$이다. 따라서, 식 (3-2)에 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$은 3개의 독립 변수 (즉, θ_1, θ_2 그리고 θ_3)로 계산되며, 식 (3-2)에 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$의 코사인 함수들의 각도들은 $\mathbf{C}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\phi}$ 와 같이 기술할 수 있다. 여기에서, $\mathbf{C} = [1, 0, 1; 1, 0, -1; 1, 1, 1; 1, 1, -1; 1, -1, 1; 1, -1, -1] \in R^{6\times3}$, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T \in R^{3\times1}$ 그리고 $\boldsymbol{\phi} = [0, \pm\pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$이다. 즉, $\mathbf{C} \in R^{6\times3}$는 식 (3-2)에 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$의 독립 변수들 (즉, θ_1, θ_2 그리고 θ_3)의 선형 조합을 표현하는 사상 행렬이며, $\boldsymbol{\phi} \in R^{6\times1}$는 식 (3-2)에 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$의 코사인 함수들의 일정한 위상

각의 벡터이다. 식 (3-2)에 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,3)$과 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$ 같이 2개의 독립 변수(즉, θ_1과 θ_2)로 계산되는 경우, 두 구성 요소에 대한 사상 행렬 $\mathbf{C}$는 $\mathbf{C}$ = [1, 1, 0; 1, −1, 0] $\in R^{2\times3}$ 로 결정되며, 위상각 벡터는 각각 $\boldsymbol{\phi} = [-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$과 $\boldsymbol{\phi} = [\pm\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$ 이다.

$$
{}^{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{1\times3} \qquad
{}^{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{2\times3} \qquad
{}^{C}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in R^{2\times3} \qquad
{}^{D}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in R^{6\times3}
$$

Fig. 3-1. Different types of mapping matrices that can be considered in successive rotation matrix, ${}^{0}\mathbf{R}_3 \in R^{3\times3}$.

유사하게, ${}^{0}\mathbf{R}_3$에 모든 요소들을 식 (3-2)과 같이 표현하면, ${}^{0}\mathbf{R}_3$에서 존재하는 사상 행렬들은 Fig. 3-1과 같이 총 네 가지이다. 따라서, 회전 행렬의 구성 요소 (즉, 방향 코사인) 계산 시, 필요한 독립 변수의 개수에 의해서 사상 행렬의 형태가 결정된다. 또한, 위상각 벡터는 다양한 값을 갖는다. 12가지 오일러 각도 회전 행렬의 모든 구성 요소를 식 (3-2)와 같이 기술 시, 계산된 위상각 벡터들은 Table 15에 기술하였다.

방향 코사인은 사상 관계 (즉, $\mathbf{C}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\phi}$)를 기반으로, 식 (3-3)와 같이 일반화하여 기술할 수 있다.

$$
\sum_{j=1}^{m} d_j \cos\left(\mathbf{C}_j\boldsymbol{\theta} + \phi_j\right) \tag{3-3}
$$

여기에서, m은 사상 행렬 $\mathbf{C}$의 행 벡터 수를 의미하며, $\mathbf{C}_j$는 사상 행렬 $\mathbf{C}$의 j번째 행 벡터를 나타낸다. ϕ_j는 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi}$의 j번째 요소이며, d_j는 스케일링 계수로써 $2^{-(s-1)}$와 같이 결정된다. 여기에서, s는 0을 제외한 $\mathbf{C}_j$의 구성 요소의 수를 의미한다. 식 (3-3)을 기반으로, 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_i \in R^{3\times3}$을 식 (3-4)과 같이 표현한다.

$$
{}^{0}\mathbf{R}_{i}=\begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{x}\cdot{}^{i}\mathbf{x} & {}^{0}\mathbf{x}\cdot{}^{i}\mathbf{y} & {}^{0}\mathbf{x}\cdot{}^{i}\mathbf{z} \\ {}^{0}\mathbf{y}\cdot{}^{i}\mathbf{x} & {}^{0}\mathbf{y}\cdot{}^{i}\mathbf{y} & {}^{0}\mathbf{y}\cdot{}^{i}\mathbf{z} \\ {}^{0}\mathbf{z}\cdot{}^{i}\mathbf{x} & {}^{0}\mathbf{z}\cdot{}^{i}\mathbf{y} & {}^{0}\mathbf{z}\cdot{}^{i}\mathbf{z} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{{}^{x}m_{x}} {}^{x}d_{x,j}\cos\left({}^{x}\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{x}\phi_{x,j}\right) & \sum_{j=1}^{{}^{x}m_{y}} {}^{x}d_{y,j}\cos\left({}^{x}\mathbf{C}_{y,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{x}\phi_{y,j}\right) & \sum_{j=1}^{{}^{x}m_{z}} {}^{x}d_{z,j}\cos\left({}^{x}\mathbf{C}_{z,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{x}\phi_{z,j}\right) \\ \sum_{j=1}^{{}^{y}m_{x}} {}^{y}d_{x,j}\cos\left({}^{y}\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{y}\phi_{x,j}\right) & \sum_{j=1}^{{}^{y}m_{y}} {}^{y}d_{y,j}\cos\left({}^{y}\mathbf{C}_{y,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{y}\phi_{y,j}\right) & \sum_{j=1}^{{}^{y}m_{z}} {}^{y}d_{z,j}\cos\left({}^{y}\mathbf{C}_{z,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{y}\phi_{z,j}\right) \\ \sum_{j=1}^{{}^{z}m_{x}} {}^{z}d_{x,j}\cos\left({}^{z}\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{z}\phi_{x,j}\right) & \sum_{j=1}^{{}^{z}m_{y}} {}^{z}d_{y,j}\cos\left({}^{z}\mathbf{C}_{y,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{z}\phi_{y,j}\right) & \sum_{j=1}^{{}^{z}m_{z}} {}^{z}d_{z,j}\cos\left({}^{z}\mathbf{C}_{z,j}\boldsymbol{\theta}+{}^{z}\phi_{z,j}\right) \end{bmatrix} \quad (3\text{-}4)
$$

예를 들어, ${}^{0}\mathbf{y}\cdot{}^{i}\mathbf{x}$에서 사상 행렬과 위상각 벡터는 각각 ${}^{y}\mathbf{C}_{x}$과 ${}^{y}\boldsymbol{\phi}_{x}$이며, 크기는 각각 ${}^{y}m_{x}\times i$과 ${}^{y}m_{x}\times 1$이다. ${}^{y}\mathbf{C}_{x,j}$는 ${}^{y}\mathbf{C}_{x}$의 j번째 행 벡터, 그리고 ${}^{y}\phi_{x,j}$는 ${}^{y}\boldsymbol{\phi}_{x}$의 j번째 요소를 의미하며, ${}^{y}d_{x,j}$는 스케일링 계수이다.

회전 행렬의 ${}^{0}\mathbf{R}_{i}(1,1)$은 벡터 ${}^{0}\mathbf{x}$와 벡터 ${}^{i}\mathbf{x}$의 내적으로 표현된다. 여기에서, ${}^{j}\mathbf{x}$는 좌표계 $\{j\}$의 x_j축 나타내는 단위 벡터이다. 즉, ${}^{0}\mathbf{R}_{i}(1,1)$는 ${}^{0}\mathbf{R}_{i}(1,1)={}^{0}\mathbf{x}\cdot{}^{i}\mathbf{x}=\cos(\gamma)$으로 표현된다. 여기에서, γ는 ${}^{0}\mathbf{x}$와 ${}^{i}\mathbf{x}$ 사이의 각도이다. 질량의 포텐셜 에너지 V_m은 $V_m = -m_i\mathbf{g}\cdot{}^{0}\mathbf{P}_{i} = -m_i|\mathbf{g}||{}^{0}\mathbf{P}_{i}|\cos(\gamma)$로 계산된다. 여기에서, $\mathbf{g}$와 ${}^{0}\mathbf{P}_{i}$는 좌표계 $\{0\}$에서 표현되는 질량 m_i의 중력 벡터와 위치 벡터를 각각 나타내며, $\cos(\gamma)$는 단위 중력벡터$(\mathbf{g}/|\mathbf{g}|)$와 질량의 단위 위치 벡터$({}^{0}\mathbf{P}_{i}/|{}^{0}\mathbf{P}_{i}|)$의 내적으로 계산된다 (즉, $(\mathbf{g}/|\mathbf{g}|)\cdot({}^{0}\mathbf{P}_{i}/|{}^{0}\mathbf{P}_{i}|)=\cos(\gamma)$). 즉, [30]에서는 좌표계 $\{0\}$의 단위 벡터 ${}^{0}\mathbf{u}$와 좌표계 $\{i\}$의 단위 벡터 ${}^{i}\mathbf{u}$의 방향 코사인 $\cos(\gamma)$를 사상 관계(즉, 사상 행렬과 위상각 벡터) 개념으로 기술하였다. 여기에서, 사상 관계는 매니퓰레이터의 가능한 관절 운동의 조합과 관절 공간 사이에 대한 정의를 나타냄을 이전 연구[30]의 결과를 통해서 알 수 있다. 그러므로, 식 (3-4)와 같이 사상 관계를 이용하여 연속 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_{i}\in R^{3\times 3}$을 기술 시, 필요한 사상 행렬들과 위상각 벡터들은 2장 2절과 2장 3절에 각각 소개된 사상 행렬의 계산방법[30]

과 위상각 벡터의 계산방법[31]을 이용하여 얻는다.

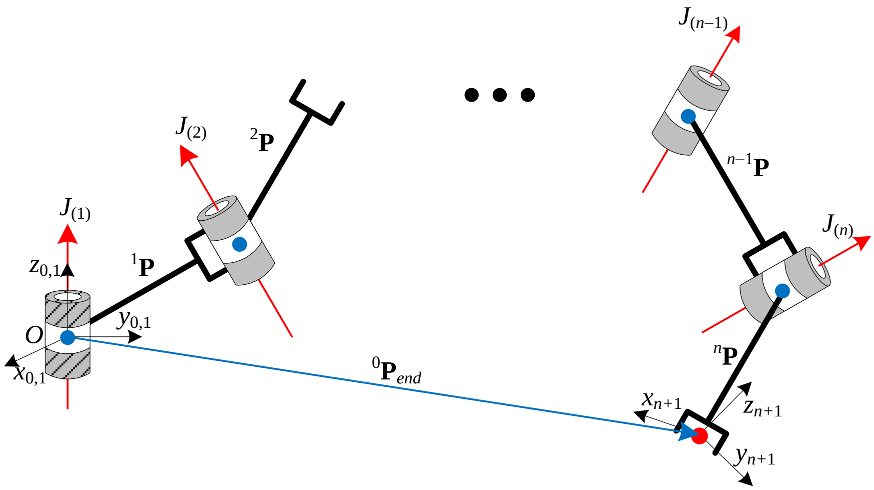


Fig. 3-2. *n*-DOF manipulators

Fig. 3-2과 같이 관절 공간 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]^T \in R^{n\times 1}$을 가진 n자유도 매니퓰레이터를 고려해보자. Fig. 3-2에서 $J_{(i)}$는 i번째 회전관절의 회전축을 나타내며, $^{i}\mathbf{P}$는 좌표계 $\{i\}$의 원점에 관하여 좌표계 $\{i+1\}$의 원점까지 오프셋을 나타낸다. 고정 좌표계 $\{0\}$에 관하여 n자유도 매니퓰레이터의 끝단에 대한 위치벡터 $^{0}\mathbf{P}_{end}$는 식 (3-5)와 같이 계산된다.

$$^{0}\mathbf{P}_{end} = \sum_{i=1}^{n} {}^{0}\mathbf{R}_i \, {}^{i}\mathbf{P} \tag{3-5}$$

여기에서, $^{i}\mathbf{P}$는 $^{i}\mathbf{P} = [l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}]^T \in \mathrm{R}^{3\times 1}$이며, 연속 회전 행렬 $^{0}\mathbf{R}_i$은 식 (3-4)와 같이 사상행렬과 위상각 벡터를 이용하여 기술한다. 추후 순기구학 계산시에는 계산된 사상행렬과 위상각 벡터를 사용한다.

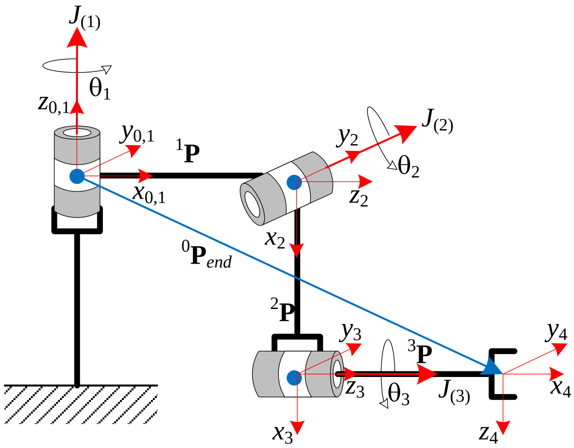


Fig. 3-3. A 3-DOF manipulator

예를 들어 Fig. 3-3과 같이 초기자세(즉, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$ 그리고 $\theta_3 = 0$)를 가진 3자유도 매니퓰레이터를 고려해보자. Fig. 3-3에서 관절의 회전 방향과 오프셋은 Table 3와 같다.

Table 3. Rotation directions and offsets in Fig. 3-3

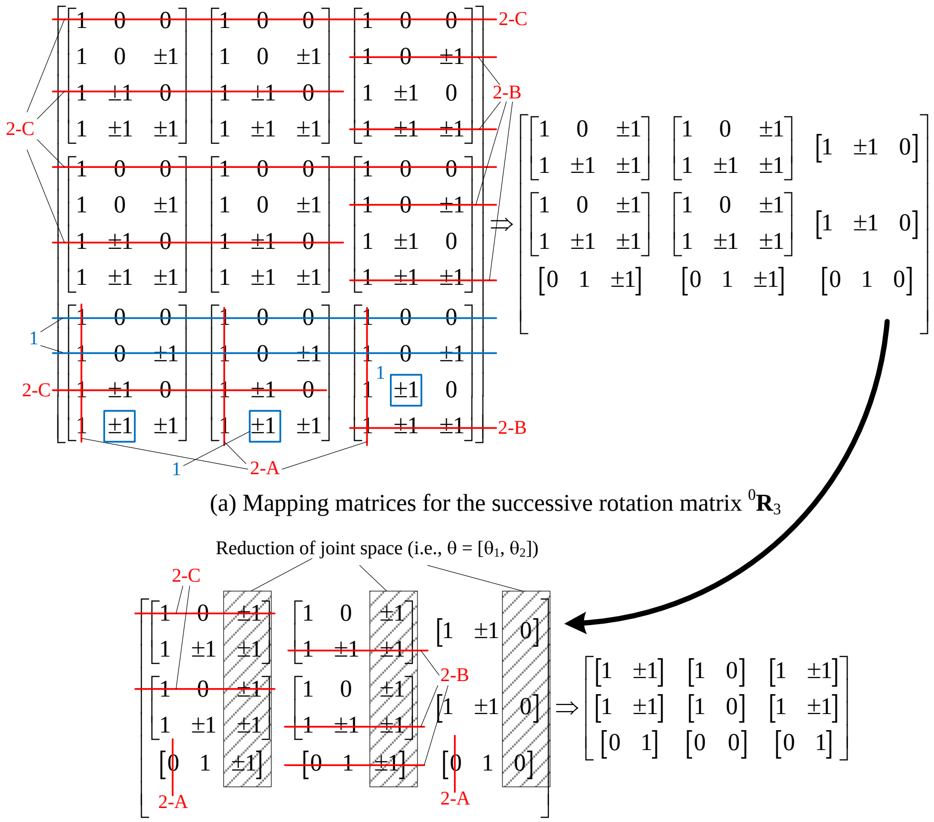
i	$J_{(i)}$	$^i\mathbf{P}$
1	z_0 direction	$[l_{x1}, 0, 0]^T$
2	y_1 direction	$[l_{x2}, 0, 0]^T$
3	z_2 direction	$[0, 0, l_{z3}]^T$

$$\hat{\mathbf{C}}_3 = \begin{bmatrix} \overbrace{0 & 0 & 0 & 0}^{1} & \overbrace{\pm1 & \boxed{\pm1} & \boxed{\pm1} & \boxed{\pm1}}^{1} \\ 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0 & \pm1 \end{bmatrix}^T \in R^{27\times3} \Rightarrow \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \pm1 \\ 1 & \pm1 & 0 \\ 1 & \pm1 & \pm1 \end{bmatrix} \in R^{9\times3}$$

Fig. 3-4. Induction process of the modified motion matrix $\mathbf{C}_3$.

식 (2-6)의 운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}_3$로부터 연속 회전 행렬 $^0\mathbf{R}_3$를 기술 시, 필요한 사상 행렬들을 유도한다. 효율적으로 연속 회전 행렬 $^0\mathbf{R}_3$에 관한 사상 행렬들을 유도하기

위해서, 운동행렬 $\hat{\mathbf{C}}_3$에 수정규칙 1번을 적용하여 수정된 운동행렬 $\mathbf{C}_3$을 얻는다. Fig. 3-4는 $\hat{\mathbf{C}}_3$로부터 $\mathbf{C}_3$을 유도하는 과정을 나타낸다.



(a) Mapping matrices for the successive rotation matrix ${}^0\mathbf{R}_3$

(b) Mapping matrices for the successive rotation matrix ${}^0\mathbf{R}_2$

Fig. 3-5. Induction process of mapping matrices for successive rotation matrices ${}^0\mathbf{R}_2$ and ${}^0\mathbf{R}_3$.

Fig. 3-4의 수정된 운동행렬 $\mathbf{C}_3$로부터, 연속 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$에 관한 사상 행렬 유도한다. Fig. 3-5(a)는 $\mathbf{C}_3$로부터 ${}^0\mathbf{R}_3$에 관한 사상 행렬들을 유도하는 과정을 나타낸다. 예를 들어, ${}^0\mathbf{R}_3(3,1)$은 ${}^0\mathbf{R}_3(3,1)$ = ${}^0\mathbf{z}\cdot{}^3\mathbf{x}$이다. ${}^0\mathbf{R}_3(3,1)$에 관한 사상 행렬의 유도 순서는 다음과 같다; 1) 관절 1의 회전축이 ${}^0\mathbf{z}$ 방향과 평행하기 때문에, 수정규칙 2-A에 의해서 1st 열 벡터를 제거한다. 여기에서, 사상 관계를 이용한 방향 코사인 계산 시 ${}^0\mathbf{R}_3$의 독립변수 집합(즉, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T \in R^{3\times1}$)의 차원을 고려하여, 1st 열 벡터는 '0'

으로 처리한다; 2) ${}^{0}\mathbf{R}_{3}$에 관한 사상 행렬 유도 시 링크 2는 고려 대상이 아니므로, 수정규칙 2-C에 의해서 [0, ±1, 0] 행 벡터를 삭제한다; 3) 수정규칙 1에 의해서 [0, 0, 0], [0, 0, ±1] 그리고 [0, –1, ±1] 행 벡터들을 삭제한다 (즉, 유도과정 (1)에서 1st 열 벡터는 제거되었기 때문에 2nd 열 벡터의 성분이 '1'이어야 함). 따라서, ${}^{0}\mathbf{R}_{3}(3,1)$에 관한 사상 행렬은 [0, 1, ±1] 이다. Fig. 3-5(a)에서 ${}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,3)$은 ${}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,3) = {}^{0}\mathbf{x}\cdot{}^{3}\mathbf{z}$이다. ${}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,3)$에 관한 사상 행렬의 유도 순서는 다음과 같다; 1) ${}^{3}\mathbf{z}$는 관절 3의 회전 축에 위치하기 때문에, 운동행렬 수정규칙 2-B에 의해서 [1, 0, ±1]과 [1, ±1, ±1] 행 벡터들을 삭제되며, ${}^{3}\mathbf{z}$의 가능한 관절 운동 조합은 θ_3이 제거된 관절 공간 (즉, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T \in R^{2\times1}$)에서 존재한다; 2) 수정규칙 2-B와 2-C에 의해서 [1, 0, 0] 행 벡터만 추가로 삭제된다.

Fig. 3-5(b)는 ${}^{0}\mathbf{R}_{3}$에 관한 사상 행렬들로부터 ${}^{0}\mathbf{R}_{2}$에 관한 사상 행렬들은 유도하는 과정을 나타낸다. ${}^{0}\mathbf{R}_{2}$의 독립변수 집합에서 θ_3은 존재하지 않으므로(즉, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T \in R^{2\times1}$), ${}^{0}\mathbf{R}_{3}$에 관한 사상 행렬들의 3rd 열 벡터는 제거된다. 예를 들어, Fig. 3-5(b)에서 ${}^{0}\mathbf{R}_{2}(2,1)$은 ${}^{0}\mathbf{R}_{2}(2,1) = {}^{0}\mathbf{y}\cdot{}^{2}\mathbf{x}$이다. 운동행렬의 수정규칙 2-C에 의해서 [1, 0] 행 벡터를 제거한다 (즉, 링크 1에 해당하는 행 벡터).

연속 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_{2}$ (또는 ${}^{0}\mathbf{R}_{3}$)에 관한 위상각 벡터들은 Fig. 2-6의 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zy}$ (또는 Fig. 3-6의 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zyz}$)와 Fig. 3-5(b)의 ${}^{0}\mathbf{R}_{2}$(또는 Fig. 3-5(a)의 ${}^{0}\mathbf{R}_{3}$)에 관한 사상 행렬들을 이용하여 결정한다. ${}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,1)$에 대한 위상각 벡터는 Fig. 3-6의 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zyz}(1,1)$를 이용하여 식 (2-10)과 같이 계산하였다. ${}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,2)$에 대한 위상각 벡터 경우, Fig. 3-6의 ${}^{u}\boldsymbol{\Phi}_{zyz}(1,2)$를 이용하여 계산한다. 자유도를 기준으로, ${}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,2)$에 대한 사상 행렬 $\mathbf{C} \in R^{6\times3}$의 행 벡터들을 $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1; \mathbf{C}_2] \in R^{6\times3}$와 같이 구분할 수 있다. 여기에서, $\mathbf{C}_1$와 $\mathbf{C}_2$는 각각 $\mathbf{C}_1 = [1, 0, \pm1] \in R^{2\times3}$와 $\mathbf{C}_2 = [1, \pm1, \pm1] \in R^{4\times3}$이다. $\mathbf{R}_3(1,2)$에 대한 위상각 벡터 $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1; \boldsymbol{\phi}_2] \in R^{6\times1}$의 부분 위상각 벡터들은 $\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{C}_i{}^{u}\boldsymbol{\phi}_i$ for i = 1, 2와 같이 계산한다. 단위 위상각 벡터에

서, *Null*은 사상 관계에서 아무런 영향을 미치지 않는 단위 위상각을 의미한다. 따라서, ${}^{u}\mathbf{\Phi}_{zyz}(1,2)$에서 단위 위상각 벡터 $[\pi/2, Null, 0]^T \in R^{3\times1}$에 관한 부분 사상 행렬은 2nd 열 벡터의 요소가 '0'으로만 구성된 $\mathbf{C}_1$이다. 따라서, ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,2)$에 대한 부분 위상각 벡터들은 식 (3-6)와 같이 계산된다.

$$
{}^{u}\mathbf{\Phi}_{zyz} = {}^{u}\mathbf{\Phi}_{zy}\,{}^{u}\mathbf{\Phi}_{z} =
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \\ 0 & Null & -\pi/2 \\ \hdashline 0 & -\pi/2 & \times \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \\ 0 & Null & -\pi/2 \\ \hdashline \pi/2 & 0 & \times \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & \pi/2 & 0 \\ 0 & Null & -\pi/2 \\ \hdashline \times & \times & Null \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 & -\pi/2 \\ 0 & Null & -\pi/2 \\ \hdashline 0 & -\pi/2 & \times \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 & -\pi/2 \\ 0 & Null & -\pi/2 \\ \hdashline \pi/2 & 0 & \times \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 & -\pi/2 \\ 0 & Null & -\pi/2 \\ \hdashline \times & \times & Null \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} Null & \times & Null \\ \pi/2 & \times & 0 \\ \hdashline 0 & -\pi/2 & \times \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} Null & \times & Null \\ \pi/2 & \times & 0 \\ \hdashline \pi/2 & 0 & \times \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} Null & \times & Null \\ \pi/2 & \times & 0 \\ \hdashline \times & \times & Null \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow$$

$$
{}^{u}\mathbf{\Phi}_{zyz} =
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & \pi/2 \\ 0 & Null \\ 0 & -\pi/2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & \pi/2 \\ 0 & Null \\ \pi/2 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 \\ -\pi/2 \\ Null \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 \\ 0 & Null \\ 0 & -\pi/2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 \\ 0 & Null \\ \pi/2 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \\ Null \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} Null \\ \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} Null \\ \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} Null \\ 0 \\ Null \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
$$

Fig. 3-6. Induction process of all components in ${}^{u}\mathbf{\Phi}_{zyz}$

${}^{0}\mathbf{R}_3(1,3)$ (또는 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$)에 대한 위상각 벡터는 Fig. 3-6의 ${}^{u}\mathbf{\Phi}_{zyz}(1,3)$(또는 ${}^{u}\mathbf{\Phi}_{zyz}(2,3)$)를 이용하여 식 (3-7)(또는 식 (3-8))와 같이 결정한다. 위에서 설명한 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,2)$, ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,3)$ 그리고 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$에 대한 위상각 벡터들의 유도 과정과 유사하게, Fig. 2-6의 ${}^{u}\mathbf{\Phi}_{zy}$ (또는 Fig. 3-6의 ${}^{u}\mathbf{\Phi}_{zyz}$)와 Fig. 3-5(b)의 ${}^{0}\mathbf{R}_2$(또는 Fig. 3-5(a)의 ${}^{0}\mathbf{R}_3$)에 관한 사상 행렬들을 이용하여 ${}^{0}\mathbf{R}_2$ (또는 ${}^{0}\mathbf{R}_3$)에 관한 모든 위상각 벡터들은 Table 4와 같이 얻을 수 있다.

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi/2 \\ Null \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ -\pi/2 \\ \pi/2 \\ -\pi/2 \end{bmatrix} \tag{3-6}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi/2 \\ Null \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} \tag{3-7}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \\ Null \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-8}$$

Table 4. Mapping matrices and phase angle vectors in ${}^{0}\mathbf{R}_2$ and ${}^{0}\mathbf{R}_3$.

Component	${}^{0}\mathbf{R}_2$		${}^{0}\mathbf{R}_3$	
	Mapping matrix	Phase angle vector	Mapping matrix	Phase angle vector
(1,1)	[1, ±1]	$[0, 0]^T$	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]	$[0, \pi, 0, 0, 0, 0]^T$
(1,2)	[1, 0]	$[\pi/2]$	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T$
(1,3)	[1, ±1]	$[-\pi/2, \pi/2]^T$	[1, 1, 0; 1, −1, 0]	$[-\pi/2, \pi/2]^T$
(2,1)	[1, ±1]	$[-\pi/2, -\pi/2]^T$	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T$
(2,2)	[1, 0]	[0]	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]	$[0, 0, 0, -\pi, 0, -\pi]^T$
(2,3)	[1, ±1]	$[-\pi, 0]^T$	[1, 1, 0; 1, −1, 0]	$[-\pi, 0]^T$
(3,1)	[0, 1]	$[\pi/2]$	[0, 1, 1; 0, 1, −1]	$[\pi/2, \pi/2]^T$
(3,2)	[0, 0]	-	[0, 1, 1; 0, 1, −1]	$[\pi, 0]^T$
(3,3)	[0, 1]	[0]	[0, 1, 0]	[0]

식 (3-4)과 같이 연속 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_2$과 ${}^{0}\mathbf{R}_3$을 기술 시, 필요한 사상 행렬과 위상각 벡터는 Table 4와 같다. Table 4에서 ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$, ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,3)$ 그리고 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$에 해당하는 사상 관계를 식 (3-4)에 대입하면, ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,1)$, ${}^{0}\mathbf{R}_3(1,3)$ 그리고 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$들은 각각 식 (3-9)-(3-11)과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,1) &= \sum_{j=1}^{{}^{x}m_{x}} {}^{x}d_{x,j}\cos\left({}^{x}\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta} + {}^{x}\phi_{x,j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos\big([1,0,1]\boldsymbol{\theta}+0\big)+\cos\big([1,0,-1]\boldsymbol{\theta}+\pi\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos\big([1,1,1]\boldsymbol{\theta}+0\big)+\cos\big([1,1,-1]\boldsymbol{\theta}+0\big) \\ +\cos\big([1,-1,1]\boldsymbol{\theta}+0\big)+\cos\big([1,-1,-1]\boldsymbol{\theta}+0\big) \end{pmatrix} \\
&= c_{1+\pi/2}c_{3-\pi/2} + \frac{1}{2}\left(c_{1+2}+c_{1-2}\right)c_{3} \\
&= -s_{1}s_{3} + c_{1}c_{2}c_{3}
\end{aligned} \tag{3-9}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_{3}(1,3) &= \sum_{j=1}^{{}^{x}m_{z}} {}^{x}d_{z,j}\cos\left({}^{x}\mathbf{C}_{z,j}\boldsymbol{\theta} + {}^{x}\phi_{z,j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos\big([1,1,0]\boldsymbol{\theta}-\pi/2\big)+\cos\big([1,-1,0]\boldsymbol{\theta}+\pi/2\big)\Big) \\
&= c_{1}c_{2-\pi/2} = c_{1}s_{2}
\end{aligned} \tag{3-10}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_{3}(2,3) &= \sum_{j=1}^{{}^{y}m_{z}} {}^{y}d_{z,j}\cos\left({}^{y}\mathbf{C}_{z,j}\boldsymbol{\theta} + {}^{y}\phi_{z,j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos\big([1,1,0]\boldsymbol{\theta}-\pi\big)+\cos\big([1,-1,0]\boldsymbol{\theta}\big)\Big) \\
&= c_{1-\pi/2}c_{2-\pi/2} = s_{1}s_{2}
\end{aligned} \tag{3-11}
$$

사상 관계를 기반으로 계산된 식 (3-9)-(3-11)의 방향 코사인의 결과가 회전 순서를 기반으로 회전 행렬들을 곱하여 얻은 식 (3-2)과 일치한다.

회전 순서 z_0-y_1를 기반으로 ${}^{0}\mathbf{R}_2$은 ${}^{0}\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_z(\theta_1)\mathbf{R}_y(\theta_2) = [c_1c_2, -s_1, c_1s_2; s_1c_2, c_1, s_1s_2; -s_2, 0, c_2] \in R^{3\times3}$와 같이 계산된다. Table 4에서 ${}^{0}\mathbf{R}_2(1,1)$과 ${}^{0}\mathbf{R}_2(2,2)$에 해당하는 사상 관계를 식 (3-4)에 대입하면, ${}^{0}\mathbf{R}_2(1,1)$과 ${}^{0}\mathbf{R}_2(2,2)$들은 각각 식 (3-8)-(3-9)과 같이 계산된다. 마찬가지로, 사상 관계를 기반으로 계산된 식 (3-8)과 식 (3-9)는 각각 이 회전 순서를 기반으로 회전 행렬들을 곱하여 얻은 ${}^{0}\mathbf{R}_2(1,1)$과 ${}^{0}\mathbf{R}_2(2,2)$에 일치한다.

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_2(1,1) &= \sum_{j=1}^{{}^{x}m_x} {}^{x}d_{x,j}\cos\left({}^{x}\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta} + {}^{x}\phi_{x,j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\left([1,1]\boldsymbol{\theta}+0\right)+\cos\left([1,-1]\boldsymbol{\theta}+0\right)\right) \\
&= c_1c_2
\end{aligned}
\tag{3-12}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_3(2,1) &= \sum_{j=1}^{{}^{y}m_x} {}^{y}d_{x,j}\cos\left({}^{y}\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta} + {}^{y}\phi_{x,j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\left([1,1]\boldsymbol{\theta}-\pi/2\right)+\cos\left([1,-1]\boldsymbol{\theta}-\pi/2\right)\right) \\
&= c_{1-\pi/2}c_2 = s_1c_2
\end{aligned}
\tag{3-13}
$$

Fig. 3-3에서 위치벡터 ${}^{0}\mathbf{P}_{end}$는 식 (3-14)와 같이 계산된다.

$$
{}^{0}\mathbf{P}_{end} = \sum_{i=1}^{3} {}^{0}\mathbf{R}_i\, {}^{i}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_{x1}c_1 + l_{x2}c_1c_2 + l_{z3}c_1s_2 \\ l_{x1}s_1 + l_{x2}s_1c_2 + l_{z3}s_1s_2 \\ l_{z3}c_2 - l_{x2}s_2 \end{bmatrix} \in R^{3\times 1}
\tag{3-14}
$$

회전 순서를 기반으로 회전 행렬들을 곱하여 연속 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_i$를 계산 시, ${}^{0}\mathbf{R}_i$에 요소들의 함수 형태를 사전에 예측할 수 없다. 반면에, 식 (3-4)과 같이 사상 관계를 기반으로 ${}^{0}\mathbf{R}_i$를 기술 시, ${}^{0}\mathbf{R}_i$에 관한 사상 행렬들을 통해서 ${}^{0}\mathbf{R}_i$에 요소들의 함수 형태를 예측할 수 있다. 예를 들어, Fig. 3-5(a)에서 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$에 대한 사상 행렬 $[1, \pm 1, 0] \in R^{2\times 3}$만 주어진다면, 식 (3-4)에 의해서 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3)$은 ${}^{0}\mathbf{R}_3(2,3) = (\cos(\theta_1 + \theta_2 + {}^{y}\phi_{z,1}) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + {}^{y}\phi_{z,2}))/2$와 같이 함수 형태를 가진다. Fig. 3-5(a)에서 ${}^{0}\mathbf{R}_3(3,3)$에 대한 사상 행렬 $[0, 1, 0]$만 주어진다면, ${}^{0}\mathbf{R}_3(3,3)$은 ${}^{0}\mathbf{R}_3(3,3) = (\cos(\theta_2 + {}^{z}\phi_{z,1})$의 함수 형태를 가진다.

본문에 3장 2절에서, 식 (3-4)와 같이 사상 관계를 기반으로 연속 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_i$을 직접 기술 시, 필요한 사상 행렬들로부터 ${}^{0}\mathbf{R}_i$에 모든 요소의 함수 형태를 예측 가능함을 이용하여 역기구학 솔루션을 유도한다.

제 2 절 역기구학

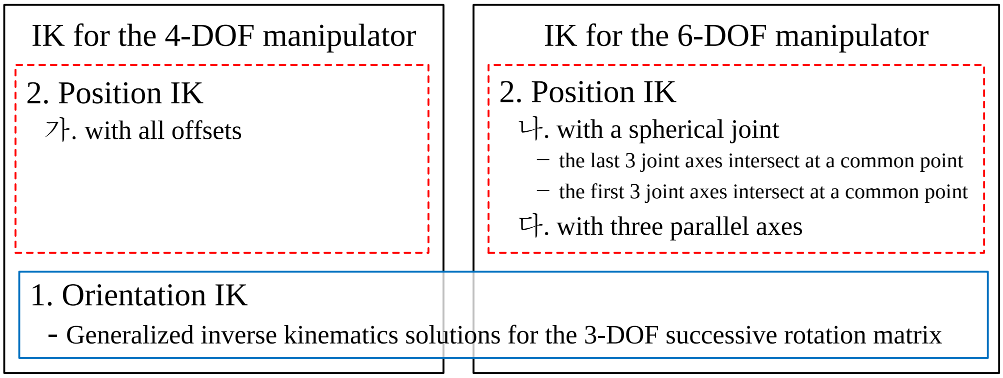


Fig. 3-7. Overview of Section 2 in Chapter 3

Fig. 3-7는 이번 절의 개요를 나타낸다. 이번 절에서는 사상 관계(즉, 사상 행렬과 위상각 벡터)를 이용하여 4자유도와 6자유도 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석을 수행한다. 제 3장 2절 1에서는 제 3장 1절의 순기구학 해석 결과를 바탕으로 (즉, 주어진 매니퓰레이터에 대한 사상 행렬과 위상각 벡터), 3자유도 연속 회전 행렬에 대한 일반화된 역기구학 솔루션을 제시한다. 제 3장 2절 2. 가에서는 사상 관계를 이용하여 모든 오프셋을 가진 4자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태의 역기구학 솔루션을 일반화시킨다. 제 3장 2절 2. 나 (또는 다)에서는 3개의 연속된 회전 관절의 축이 공통점에서 교차(또는 또는 3개의 연속된 회전 관절의 축이 평행)하는 6자유도 매니퓰레이터들에 대한 역기구학 해석을 수행한다. 그 결과들을 바탕으로, 사상 관계(즉, 사상 행렬과 위상각 벡터)를 이용하여 제한된 다양한 6자유도 매니퓰레이터들에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 제시한다.

1. Orientation

회전 행렬의 구성 요소인 방향 코사인은 두 단위 벡터 사이의 내적으로 정의된다. 다자유도 매니퓰레이터에 대한 기구학 해석 시, 방향 코사인은 코사인-사인 함수들로 조합된 복잡한 형태를 가지며, 또한 직접 계산하기 어려우므로 일반적으로 연속 회전 행렬로 계산한다. 연속 회전 행렬의 계산 결과는 회전 순서에 의해서 결정되며, 방향 코사인의 식 형태를 예측할 수 없다. 따라서, 3자유도 연속 회전 행렬의 역기구학 시 12가지 오일러 각도 회전 행렬에 대한 역기구학 솔루션들이 요구된다.

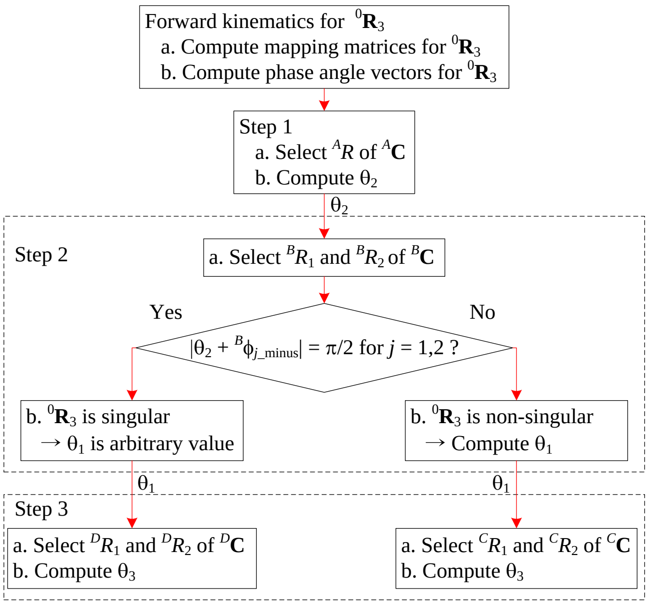


Fig. 3-8. Flow chart of the generalized inverse kinematic analysis process for the three-DOF successive rotation matrix ${}^{0}\mathbf{R}_3 \in R^{3\times3}$.

이번 장에서는 사상 관계를 이용한 회전 행렬의 순기구학을 기반으로 3자유도 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_3 \in R^{3\times3}$에 대한 일반화된 역기구학 솔루션을 제시한다. Fig. 3-8은 이번 장에서 제시한 역기구학 해석 방법의 진행 과정을 나타낸다. Fig. 3-8의 역기구학 해

석 시, 사용되는 연속 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_3 \in R^{3\times3}$에 대한 사상 행렬과 위상각 벡터들은 순기구학 과정에서 결정된 값이다. Fig. 3-8의 Step 1, 2 그리고 3에서 수행되는 자세한 계산 과정은 제 3 장제 2 절1.가, 제 3 장제 2 절1.나 그리고 제 3 장제 2 절1.다에서 각각 기술하였다.

가. Step 1: computation of θ_2

Fig. 3-8의 Step 1에서 ${}^{A}\mathbf{C}$는 Fig. 3-1의 사상 행렬 ${}^{A}\mathbf{C} = [0, 1, 0] \in R^{1\times3}$이다. ${}^{0}\mathbf{R}_3$에서 ${}^{A}\mathbf{C}$ (즉, 독립 변수 θ_2)로 계산된 구성 요소 ${}^{A}R$를 선택한다. 또한, ${}^{0}\mathbf{R}_3$에서 구성 요소 ${}^{A}R$가 (1,3) 요소인 경우(즉, ${}^{A}R = {}^{0}\mathbf{R}_3(1,3)$), 계산된 위상각 벡터들 중에서 ${}^{0}\mathbf{R}_3$에서 (1,3) 요소에 관한 위상각 벡터 ${}^{A}\boldsymbol{\phi} = [{}^{A}\phi_1]$를 선택한다. 식 (3-3)에 ${}^{A}\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\theta}$, 그리고 ${}^{A}\boldsymbol{\phi}$를 대입하면, ${}^{A}R$은 $\cos(\theta_2 + {}^{A}\phi_1)$로 표현된다. 12가지 오일러 각도의 3자유도 회전 행렬에 모든 구성요소에 대한 위상각 벡터는 Table 15에 정리하였다. Table 15을 통해서, ${}^{A}R$과 같이 1개의 독립 변수로 계산된 방향 코사인이 가질 수 있는 위상각은 $\pm\pi/2$과 0임을 알 수 있다. ${}^{A}\phi_1$가 ${}^{A}\phi_1 = \pm\pi/2$ 일 때, $\sin(\theta_2) = \mp{}^{A}R$이며 $\cos(\theta_2) = \pm sqrt(1 - ({}^{A}R)^2)$이다. ${}^{A}\phi_1$가 ${}^{A}\phi_1 = 0$ 일 때, $\cos(\theta_2) = {}^{A}R$이며 $\sin(\theta_2) = \pm sqrt(1 - ({}^{A}R)^2)$이다. 따라서, 회전 각도 θ_2는 $ATAN2(y, x)$ 함수를 이용하여 식 (3-15)과 같이 계산할 수 있다.

$$\theta_2 = \begin{cases} ATAN2\left(-sign\left({}^{A}\phi_1\right){}^{A}R, \pm\sqrt{1-\left({}^{A}R\right)^2}\right) & \text{if } \left|{}^{A}\phi_1\right| = \pi/2 \\ ATAN2\left(\pm\sqrt{1-\left({}^{A}R\right)^2}, {}^{A}R\right) & \text{else} \end{cases} \tag{3-15}$$

여기에서, θ_2는 $\pm sqrt(1 - ({}^{A}R)^2)$에 의해 두 개의 해를 갖는다. 실시간 역기구학 계산 시, 식 (3-15)로부터 계산된 두가지 솔루션 중에서 이전 회전 각도 값에 인접한 솔루션을 선택한다.

나. Step 2: computation of θ_1

Fig. 3-8의 Step 2에서 ${}^B\mathbf{C}$는 Fig. 3-1의 사상 행렬 ${}^B\mathbf{C} = [1, 1, 0; 1, -1, 0] \in R^{2\times3}$이다. ${}^0\mathbf{R}_3$에서 ${}^B\mathbf{C} \in R^{2\times3}$ (즉, 독립 변수 θ_1과 θ_2)로 계산된 구성 요소 두 개 ${}^BR_1$과 ${}^BR_2$를 선택한다. 또한, ${}^0\mathbf{R}_3$에서 구성 요소 ${}^BR_1$ (또는 ${}^BR_2$)가 (2,3) (또는 (3,3)) 요소인 경우, 계산된 위상각 벡터들 중에서 ${}^0\mathbf{R}_3$에서 (2,3) (또는 (3,3)) 요소에 관한 위상각 벡터 ${}^B\boldsymbol{\phi}_1 = [{}^B\phi_{1,1}, {}^B\phi_{1,2}]^T \in R^{2\times1}$ (또는 ${}^B\boldsymbol{\phi}_2 = [{}^B\phi_{2,1}, {}^B\phi_{2,2}]^T \in R^{2\times1}$)를 선택한다. 식 (3-3)에 ${}^B\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\theta}$, 그리고 ${}^B\boldsymbol{\phi}_1$ (또는 ${}^B\boldsymbol{\phi}_2$)를 대입하면, ${}^BR_1$ (또는 ${}^BR_2$)는 $(\cos(\theta_1 + \theta_2 + {}^B\phi_{1,1}) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + {}^B\phi_{1,2}))/2$ (또는$(\cos(\theta_1 + \theta_2 + {}^B\phi_{2,1}) + \cos(\theta_1 - \theta_2 + {}^B\phi_{2,2}))/2$)과 같이 표현되므로, $\cos(\theta_1 + {}^B\phi_{1\_add})\cos(\theta_2 + {}^B\phi_{1\_sub})$ (또는 $\cos(\theta 1 + {}^B\phi_{2\_add})\cos(\theta_2 + {}^B\phi_{2\_sub})$)와 같이 다시 기술할 수 있다. Table 15에서 ${}^B\mathbf{C}$로 계산된 방향 코사인의 위상각 벡터들을 관찰하였을 때, $[{}^B\phi_{1_add}, {}^B\phi_{2_add}]$이 가질 수 있는 위상각은 $[0, \pm\pi/2]$과 $[\pm\pi/2, 0]$임을 알 수 있다. 따라서, 회전 각도 θ_1는 $ATAN2(y, x)$ 함수를 이용하여 식 (3-16)과 같이 계산할 수 있다.

$$\theta_1 = \begin{cases} ATAN2\left(-sign\left({}^B\phi_{1\_add}\right)A, B\right) & \text{if } \left|{}^B\phi_{1\_add}\right| = \pi/2 \\ ATAN2\left(-sign\left({}^B\phi_{2\_add}\right)B, A\right) & \text{else.} \end{cases} \tag{3-16}$$

여기에서, A (또는 B)는 ${}^BR_1/\cos(\theta_2 + {}^B\phi_{1\_sub})$ (또는 ${}^BR_2/\cos(\theta_2 + {}^B\phi_{2\_sub})$)이며, ${}^B\phi_{1_add}$과 ${}^B\phi_{1\_sub}$ (또는 ${}^B\phi_{2_add}$과 ${}^B\phi_{2\_sub}$)는 각각 $({}^B\phi_{1,1} + {}^B\phi_{1,2})/2$과 $({}^B\phi_{1,1} - {}^B\phi_{1,2})/2$ (또는$({}^B\phi_{2,1} + {}^B\phi_{2,2})/2$과 $({}^B\phi_{2,1} - {}^B\phi_{2,2})/2$) 이다.

Fig. 3-8의 Step 2에서 $|\theta_2 + {}^B\phi_{1\_sub}|$ (또는$|\theta_2 + {}^B\phi_{2_sub}|$) $= \pi/2$인 경우, 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$은 singular이다. 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$이 singular인 경우에는 식 (3-16)로부터 회전 각도 θ_1을 계산할 수 없다. J. J. Craig [4]에서는 관습적으로 θ_1은 0으로 선택하였다. 본 논문에서는 회전 각도 θ_1은 임의의 값을 선택하여, 실시간 역기구학 계산 시 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$이 singular인 경우에 회전 각도 θ_1을 이전 회전 각도 값으로 결정한다.

다. Step 3: computation of θ_3

회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$가 non-singular인 경우, Fig. 3-8의 Step 3에서 ${}^C\mathbf{C}$는 Fig. 3-1의 사상 행렬 ${}^C\mathbf{C} = [0, 1, 1; 0, 1, -1] \in R^{2\times3}$이다. ${}^0\mathbf{R}_3$에서 ${}^C\mathbf{C} \in R^{2\times3}$ (즉, 독립 변수 θ_2과 θ_3)로 계산된 구성 요소 두 개 ${}^CR_1$와 ${}^CR_2$를 선택한다. 또한, ${}^0\mathbf{R}_3$에서 구성 요소 ${}^CR_1$ (또는 ${}^CR_2$)가 (1,2) (또는 (1,3)) 요소인 경우, 계산된 위상각 벡터들 중에서 ${}^0\mathbf{R}_3$에서 (1,2) (또는 (1,3)) 요소에 관한 위상각 벡터 ${}^C\boldsymbol{\phi}_1 = [{}^C\phi_{1,1}, {}^C\phi_{1,2}]^T \in R^{2\times1}$ (또는 ${}^C\boldsymbol{\phi}_2 = [{}^C\phi_{2,1}, {}^C\phi_{2,2}]^T \in R^{2\times1}$)를 선택한다. Step 2와 유사한 방법으로, 회전 각도 θ_3는 $ATAN2(y, x)$ 함수를 이용하여 식 (3-17)과 같이 계산할 수 있다.

$$\theta_3 = \begin{cases} ATAN2\left(-sign\left({}^C\phi_{1\_\mathrm{sub}}\right)C, D\right) & \text{if } \left|{}^C\phi_{1\_\mathrm{sub}}\right| = \pi/2 \\ ATAN2\left(-sign\left({}^C\phi_{2\_\mathrm{sub}}\right)D, C\right) & \text{else.} \end{cases} \tag{3-17}$$

여기에서, C (또는 D)는 ${}^CR_1/\cos(\theta_2 + {}^B\phi_{1\_\mathrm{add}})$ (또는 ${}^CR_2/\cos(\theta_2 + {}^B\phi_{2\_\mathrm{add}})$ 이다.

회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$가 singular인 경우, Fig. 3-8의 Step 3에서 ${}^D\mathbf{C}$는 Fig. 3-1의 사상 행렬 ${}^D\mathbf{C} = [1, 0, 1; 1, 0, -1; 1, 1, 1; 1, 1, -1; 1, -1, 1; 1, -1, -1] \in R^{6\times3}$이다. ${}^0\mathbf{R}_3$에서 ${}^D\mathbf{C} \in R^{6\times3}$ (즉, 독립 변수 θ_1, θ_2 그리고 θ_3)로 계산된 구성 요소 두 개 ${}^DR_1$와 ${}^DR_2$를 선택한다. 여기에서, 선택된 구성 요소 ${}^DR_1$와 ${}^DR_2$는 행 (또는 열)의 숫자가 같다. 또한, ${}^0\mathbf{R}_3$에서 구성 요소 ${}^DR_1$ (또는 ${}^DR_2$)가 (2,2) (또는 (2,3)) 요소인 경우, 계산된 위상각 벡터들 중에서 ${}^0\mathbf{R}_3$에서 (2,2) (또는 (2,3)) 요소에 관한 위상각 벡터 ${}^D\boldsymbol{\phi}_1 = [{}^D\phi_{1,1}, \ldots, {}^D\phi_{1,6}]^T \in R^{6\times1}$ (또는 ${}^D\boldsymbol{\phi}_2 = [{}^D\phi_{2,1}, \ldots, {}^D\phi_{2,6}]^T \in R^{6\times1}$)를 선택한다. 식 (3-3)에 ${}^D\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\theta}$, 그리고 ${}^D\boldsymbol{\phi}_1$ (또는 ${}^D\boldsymbol{\phi}_2$)를 대입하면, ${}^DR_1$ (또는 ${}^DR_2$)는 $X_1\cos(\theta_3) + Y_1\sin(\theta_3)$ (또는 $X_2\cos(\theta_3) + Y_2\sin(\theta_3)$)와 같이 기술된다. 여기에서, X_j와 Y_j는 식 (3-18)과 같다.

$$X_j = \sum_{k=1}^{6} d_k \cos\left({}^D\mathbf{J}_k \boldsymbol{\theta}^* + {}^D\phi_{j,k} \right)$$
$$Y_j = -\sum_{k=1}^{6} {}^D J_{k,3} d_k \sin\left({}^D\mathbf{J}_k \boldsymbol{\theta}^* + {}^D\phi_{j,k} \right) \tag{3-18}$$

여기에서, ${}^D\mathbf{C}_k$는 ${}^D\mathbf{C}$의 k번째 행 벡터를 의미하며, ${}^DC_{k,3}$는 ${}^D\mathbf{C}$의 $(k, 3)$ 요소를 나타낸다. ${}^D\phi_{j,k}$는 위상각 벡터 ${}^D\boldsymbol{\phi}_j$의 k번째 요소이며, d_k는 스케일링 벡터 $\mathbf{d} = [1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4]^T \in R^{6\times1}$의 k번째 요소이다. $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1, \theta_2, 0]^T \in R^{3\times1}$이며, θ_1과 θ_2는 각각 Fig. 3-8의 Step 2와 Step 1에서 각각 결정된 회전 각도 값이다. ${}^DR_1$와 ${}^DR_2$는 행렬 형태로 $\mathbf{Ax} = \mathbf{R}$과 같이 기술한다. 여기에서, $\mathbf{x} = [c_3, s_3]^T \in R^{2\times1}$과 $\mathbf{R} = [{}^DR_1, {}^DR_2]^T \in R^{2\times1}$이며 $\mathbf{A} = [X_1, Y_1; X_2, Y_2] \in R^{2\times2}$ 이다. 벡터 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}$와 같이 결정하며, 회전 각도 θ_3은 $ATAN2(x_2, x_1)$와 같이 계산할 수 있다. 여기에서, 항상 행렬 $\mathbf{A}$의 행렬식 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$임을 부록에서 증명하였다.

라. 예제

(1) z_0-y_1-z_2 rotations

z_0-y_1-z_2 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$를 고려한다. 오일러 각도로 표현된 z_0-y_1-z_2 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_3$은 ${}^0\mathbf{R}_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{R}_z(\theta_1)\mathbf{R}_y(\theta_2)\mathbf{R}_z(\theta_3) = [c_1c_2c_3 - s_1s_3, -c_1c_2s_3 - s_1c_3, c_1s_2; s_1c_2c_3 + c_1s_3, -s_1c_2s_3 + c_1c_3, s_1s_2; -s_2c_3, s_2s_3, c_2] \in R^{3\times3}$이다. J. J. Craig [4]에서는 회전 각도(즉, θ_1, θ_2 그리고 θ_3)들 식 (3-19)와 같이 계산하였다.

$$\theta_2 = ATAN2\left(\pm\sqrt{R(3,1)^2 + R(3,2)^2}, R(3,3)\right)$$
$$\theta_1 = ATAN2\left(R(2,3)/s_2, R(1,3)/s_2\right) \tag{3-19}$$
$$\theta_3 = ATAN2\left(R(3,2)/s_2, -R(3,1)/s_2\right)$$

$^0\mathbf{R}_3$이 singular인 경우 (즉 $\theta_2 = \pi$), 회전 각도 θ_1은 임의로 설정할 수 있다 [4]. 편의상 $\theta_1 = 0$으로 설정하면, 회전 각도 θ_3는 식 (3-20)과 같이 계산할 수 있다.

$$\theta_3 = ATAN2\left(R(1,2), -R(1,1)\right) \tag{3-20}$$

본문에 제 3 장제 2 절1에서 제시한 역기구학 해석 방법을 적용한다. $^0\mathbf{R}_3$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 [$^D\mathbf{C}$, $^D\mathbf{C}$, $^B\mathbf{C}$; $^D\mathbf{C}$, $^D\mathbf{C}$, $^B\mathbf{C}$; $^C\mathbf{C}$, $^C\mathbf{C}$, $^A\mathbf{C}$]와 같으며, 위상각 벡터는 Table 15의 z_0-y_1-z_2 회전에 기술되었다. Fig. 3-8의 Step 1에서, 구성 요소 ^AR는 $^0\mathbf{R}_3$의 (3,3)요소이며, (3,3)요소에 대한 위상각 벡터는 [0]이다. 식 (3-15)에 의해서, 회전 각도 θ_2는 $\theta_2 = ATAN2(\pm sqrt(1 - R(3,3)^2), R(3,3))$으로 계산된다. 회전 행렬의 직교성에 의해서 $R(3,1)^2 + R(3,2)^2 + R(3,3)^2 = 1$이므로, 식 (3-15)로부터 유도된 결과식은 식 (3-19)의 θ_2 계산식과 동일하다.

Fig. 3-8의 Step 2에서, 구성 요소 $^BR_1$와 $^BR_2$는 각각 $^0\mathbf{R}_3$의 (1,3)와 (2,3)요소이며, (1,3)와 (2,3)요소에 관한 위상각 벡터는 각각 $^B\boldsymbol{\phi}_1 = [-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$과 $^B\boldsymbol{\phi}_2 = [-\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$이다. $^B\phi_{1_add}$과 $^B\phi_{1\_sub}$ (또는 $^B\phi_{2_add}$과 $^B\phi_{2\_sub}$)는 각각 0과 $-\pi/2$ (또는 $-\pi/2$과 $-\pi/2$) 이므로, 식 (3-16)에 의해서 회전 각도 θ_1는 $ATAN2(R(2,3)/\cos(\theta_2 - \pi/2), R(1,3) /\cos(\theta_2 - \pi/2))$으로 계산된다. 따라서, 결과식은 식 (3-19)의 회전 각도 θ_1 계산식과 동일하다.

non-singular인 경우 (즉, $|\theta_2 + {}^B\phi_{1\_sub}|$ (또는 $|\theta_2 + {}^B\phi_{2\_sub}|) \neq \pi/2$), Fig. 3-8의 Step 3에서, 구성 요소 $^CR_1$와 $^CR_2$는 각각 $^0\mathbf{R}_3$의 (3,1)와 (3,2)요소이며, (3,1)와 (3,2)요소에 관한 위상각 벡터는 각각 $^C\boldsymbol{\phi}_1 = [\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$과 $^C\boldsymbol{\phi}_2 = [\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$이다. $^C\phi_{1_add}$과 $^C\phi_{1\_sub}$ (또는 $^C\phi_{2_add}$과 $^C\phi_{2\_sub}$)는 각각 $\pi/2$과 0 (또는 $\pi/2$과 $\pi/2$)이므로, 식 (3-17)에 의해서 회전 각도 θ_3는 $ATAN2(-R(3,2)/\cos(\theta_2 + \pi/2), R(3,1)/\cos(\theta_2 + \pi/2))$으로 계산된다. 따라서, 결과식은 식 (3-19)의 회전 각도 θ_3 계산식과 동일하다.

singular인 경우 (즉, $\theta_2 = \pi$), 식 (3-20)의 조건과 동일하게 $\theta_1 = 0$으로 설정한다. Fig. 3-8의 Step 3에서, 구성 요소 ${}^{D}R_1$와 ${}^{D}R_2$는 각각 ${}^{0}\mathbf{R}_3$의 (1,1)와 (1,2)요소이며, (1,1)와 (1,2)요소에 관한 위상각 벡터는 각각 ${}^{D}\boldsymbol{\phi}_1 = [0, \pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$과 ${}^{D}\boldsymbol{\phi}_2 = [\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$이다. θ_1, θ_2, ${}^{D}\mathbf{C}$ 그리고 ${}^{D}\boldsymbol{\phi}_1$ (또는 ${}^{D}\boldsymbol{\phi}_2$)를 식 (3-18)에 대입하면, $X_1 = -1$과 $Y_1 = 0$ (또는 $X_2 = 0$과 $Y_2 = 1$)이다. (1,1)와 (1,2)요소는 행렬 형태 $\mathbf{Ax} = \mathbf{R}$과 같이 기술 시, 행렬 $\mathbf{A}$는 $\mathbf{A} = [-1, 0; 0, 1] \in R^{2\times2}$ 이며 벡터 $\mathbf{R} = [R(1,1), R(1,2)]^T \in R^{2\times1}$이다. 벡터 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{x} = [-R(1,1), R(1,2)]^T \in R^{2\times1}$으로 결정되므로, 회전 각도 θ_3은 $\theta_3 = ATAN2(R(1,2), -R(1,1))$으로 계산된다. 따라서, 결과시은 식 (3-20)의 회전 각도 θ_3 계산식과 동일하다.

(2) z_0-y_1-x_2 rotations

z_0-y_1-x_2 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_3$를 고려한다. 오일러 각도로 표현된 z_0-y_1-z_2 회전 행렬 ${}^{0}\mathbf{R}_3$은 ${}^{0}\mathbf{R}_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{R}_z(\theta_1)\mathbf{R}_y(\theta_2)\mathbf{R}_x(\theta_3) = [c_1c_2, c_1s_2s_3 - s_1c_3, c_1s_2c_3 + s_1s_3; s_1c_2, -s_1s_2s_3 + c_1c_3, -s_1s_2c_3 - c_1s_3; -s_2, c_2s_3, c_2c_3] \in R^{3\times3}$이다. J. J. Craig [4]에서는 회전 각도(즉, θ_1, θ_2 그리고 θ_3)들 식 (3-21)과 같이 계산하였다.

$$
\begin{aligned}
\theta_2 &= ATAN2\left(-R(3,1), \pm\sqrt{\left(R(1,1)\right)^2 + \left(R(2,1)\right)^2}\right) \\
\theta_1 &= ATAN2\left(R(2,1)/c_2, R(1,1)/c_2\right) \\
\theta_3 &= ATAN2\left(R(3,2)/c_2, R(3,3)/c_2\right)
\end{aligned}
\tag{3-21}
$$

${}^{0}\mathbf{R}_3$이 singular인 경우 (즉 $\theta_2 = \pi/2$), 회전 각도 θ_1은 임의로 설정할 수 있다 [4]. 편의상 $\theta_1 = 0$으로 설정하면, 회전 각도 θ_3는 식 (3-22)과 같이 계산할 수 있다.

$$\theta_3 = ATAN2\left(R(1,2), R(2,2)\right) \tag{3-22}$$

3장 1절에서 제시한 역기구학 해석 방법을 적용한다. ${}^0\mathbf{R}_3$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 [${}^B\mathbf{C}$, ${}^D\mathbf{C}$, ${}^D\mathbf{C}$; ${}^B\mathbf{C}$, ${}^D\mathbf{C}$, ${}^D\mathbf{C}$; ${}^A\mathbf{C}$, ${}^C\mathbf{C}$, ${}^C\mathbf{C}$]와 같으며, 위상각 벡터는 Table 15의 z_0-y_1-x_2 회전에 기술되었다. Fig. 3-8의 Step 1에서, 구성 요소 ${}^AR$는 ${}^0\mathbf{R}_3$의 (3,1)요소이며, (3,1)요소에 대한 위상각 벡터는 [$\pi/2$]이다. 식 (3-15)에 의해서, 회전 각도 θ_2는 $\theta_2 = ATAN2(-R(3,1), \pm sqrt(1 - R(3,1)^2))$으로 계산된다. 여기에서, 회전 행렬의 직교성에 의해서 $R(1,1)^2 + R(2,1)^2 + R(3,1)^2 = 1$이다. 따라서, 결과식은 식 (3-21)의 θ_2 계산식과 동일하다.

Fig. 3-8의 Step 2에서, 구성 요소 ${}^BR_1$와 ${}^BR_2$는 각각 ${}^0\mathbf{R}_3$의 (1,1)와 (2,1)요소이며, (1,1)과 (2,1)요소에 관한 위상각 벡터는 각각 ${}^B\boldsymbol{\phi}_1 = [0, 0]^T \in R^{2\times1}$과 ${}^B\boldsymbol{\phi}_2 = [-\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$이다. ${}^B\phi_{1_add}$과 ${}^B\phi_{1\_sub}$ (또는 ${}^B\phi_{2_add}$과 ${}^B\phi_{2\_sub}$) 각각 0과 0 (또는 $-\pi/2$과 0)이므로, 식 (3-16)에 의해서 회전 각도 θ_1는 $ATAN2(R(2,1)/\cos(\theta_2), R(1,1)/\cos(\theta_2))$으로 계산된다. 따라서, 결과식은 식 (3-21)의 회전 각도 θ_1 계산식과 동일하다.

non-singular인 경우 (즉, $|\theta_2 + {}^B\phi_{1\_sub}|$ (또는 $|\theta_2 + {}^B\phi_{2\_sub}|) \neq \pi/2$), Fig. 3-8의 Step 3에서, 구성 요소 ${}^CR_1$와 ${}^CR_2$는 각각 ${}^0\mathbf{R}_3$의 (3,2)와 (3,3)요소이며, (3,2)와 (3,3)요소에 관한 위상각 벡터는 각각 ${}^C\boldsymbol{\phi}_1 = [-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$과 ${}^C\boldsymbol{\phi}_2 = [0, 0]^T \in R^{2\times1}$이다. ${}^C\phi_{1_add}$과 ${}^C\phi_{1\_sub}$ (또는 ${}^C\phi_{2_add}$과 ${}^C\phi_{2\_sub}$)는 각각 0과 $-\pi/2$ (또는 0과 0)이므로, 식 (3-17)에 의해서 회전 각도 θ_3는 $ATAN2(R(3,2)/\cos(\theta_2), R(3,3)/\cos(\theta_2))$으로 계산된다. 따라서, 결과식은 식 (3-21)의 회전 각도 θ_3 계산식과 동일하다.

singular인 경우 (즉, $\theta_2 = \pi/2$), 식 (3-22)의 조건과 동일하게 $\theta_1 = 0$으로 설정한다. Fig. 3-8의 Step 3에서, 구성 요소 ${}^DR_1$와 ${}^DR_2$는 각각 ${}^0\mathbf{R}_3$의 (1,2)와 (2,2)요소이며, (1,2)와 (2,2)요소에 관한 위상각 벡터는 각각 ${}^D\boldsymbol{\phi}_1 = [\pi/2, \pi/2, -\pi, 0, 0, \pi]^T \in R^{6\times1}$과 ${}^D\boldsymbol{\phi}_2 = [0, 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$이다. θ_1, θ_2, ${}^D\mathbf{C}$ 그리고 ${}^D\boldsymbol{\phi}_1$ (또는 ${}^D\boldsymbol{\phi}_2$)를 식 (3-18)에 대입

하면, $X_1 = 0$과 $Y_1 = 1$ (또는 $X_2 = 1$과 $Y_2 = 0$)이다. (1,2)와 (2,2)요소는 행렬 형태 $\mathbf{Ax} = \mathbf{R}$과 같이 기술 시, 행렬 $\mathbf{A}$는 $\mathbf{A} = [0, 1; 1, 0] \in R^{2\times2}$ 이며 벡터 $\mathbf{R} = [R(1,2), R(2,2)]^T \in R^{2\times1}$이다. 벡터 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{x} = [R(1,1), R(1,2)]^T \in R^{2\times1}$으로 결정되므로, 회전 각도 θ_3은 $\theta_3 = ATAN2(R(2,2), R(1,2))$으로 계산된다. 따라서, 결과식은 식 (3-22)의 회전 각도 θ_3 계산식과 동일하다.

2. Position

역기구학 해석 시 자주 계산되는 방정식과 솔루션을 정리한다. 일반 4차 방정식 $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0$의 해는 식 (3-23)와 같다.

$$\mathbf{t} = \left[-\sigma_3 - \frac{b}{4a} \pm \sigma_2 , \sigma_3 - \frac{b}{4a} \pm \sigma_1 \right] \in R^{4\times1} \tag{3-23}$$

여기에서, σ_1, σ_2 그리고 σ_3은 식 (3-24)과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{\sqrt{-9\sigma_6^{2/3}\sqrt{\sigma_5} - 12\sigma_8\sqrt{\sigma_5} - \sigma_9^2\sqrt{\sigma_5} - 3\sqrt{6}\sigma_{10}K - 12\sigma_9\sigma_6^{1/3}\sqrt{\sigma_5}}}{\sigma_4} \\
\sigma_2 &= \frac{\sqrt{3\sqrt{6}\sigma_{10}K - 12\sigma_8\sqrt{\sigma_5} - \sigma_9^2\sqrt{\sigma_5} - 9\sigma_6^{2/3}\sqrt{\sigma_5} - 12\sigma_9\sigma_6^{1/3}\sqrt{\sigma_5}}}{\sigma_4} \\
\sigma_3 &= \frac{\sqrt{\sigma_5}}{6\sigma_6^{1/6}} \\
\sigma_4 &= 6\sigma_6^{1/6}\sigma_5^{1/4} \\
\sigma_5 &= \sigma_9^2 + 9\sigma_6^{2/3} - 6\sigma_9\sigma_6^{1/3} + \frac{12e}{a} - \frac{9b^4}{64a^4} + \frac{3b^2c}{4a^3} - \frac{3bd}{a^2} \\
\sigma_6 &= \frac{\sigma_{10}^2}{2} - \frac{4\sigma_9\sigma_8}{3} + \frac{\sigma_9^3}{27} + \frac{\sqrt{3}\sigma_7}{18} \\
K &= \sqrt{27\sigma_{10}^2 - 72\sigma_9\sigma_8 + 2\sigma_9^3 + 3\sqrt{3}\sigma_7} \\
\sigma_7 &= \sqrt{27\sigma_{10}^4 - 256\sigma_8^3 - 16\sigma_9^4\sigma_8 + 4\sigma_9^3\sigma_{10}^2 + 128\sigma_9^2\sigma_8^2 - 144\sigma_9\sigma_{10}^2\sigma_8} \\
\sigma_8 &= \frac{e}{a} - \frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} \\
\sigma_9 &= \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2} \\
\sigma_{10} &= \frac{d}{a} + \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2}
\end{aligned} \tag{3-24}$$

삼각함수 방정식 $B_1\cos(\theta) + B_2\sin(\theta) + B_3 = 0$에서 θ는 식 (3-25)와 같이 계산된다.

$$\theta = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1^{\,2}+B_2^{\,2}-B_3^{\,2}}}{-B_3}\right) \tag{3-25}$$

가. 4-DOF manipulator with all offsets

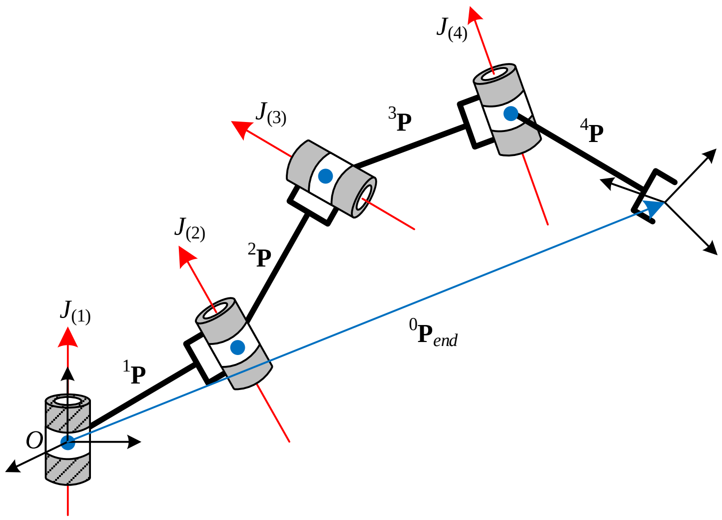


Fig. 3-9. General 4-DOF manipulator (i.e., $J_{(1)}\perp J_{(2)}\perp J_{(3)}\perp J_{(4)}$).

Fig. 3-9은 각 관절의 회전축이 서로 직교하는 일반적인 4자유도 매니퓰레이터를 나타낸다. Fig. 3-9에서 $J_{(i)}$는 i번재 회전관절의 회전축을 나타내며, $^i\mathbf{P}$는 좌표계 $\{i\}$에 관한 오프셋을 의미한다. 예를 들어 Fig. 3-9의 4자유도 매니퓰레이터가 z_0-y_1-x_2-y_3 회전 순서를 가진 경우를 고려해보자. 해당 매니퓰레이터의 목표 orientation (즉, $^0\mathbf{R}_{4,known} = [r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}; r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3}; r_{3,1}, r_{3,2}, r_{3,3}] \in R^{3\times3}$), 목표 position (즉, $^0\mathbf{P}_{end} = [P_x, P_y, P_z]^T \in R^{3\times1}$) 그리고 관절간의 오프셋 거리 (즉, $^i\mathbf{P} = [l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}]^T \in R^{3\times1}$ for $i = 1, \ldots, 4$)를 이용하여 해당 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석을 수행한다. 해당 매니퓰레이터의 끝단에 대한 위치벡터 $^0\mathbf{P}_{end}$는 식 (3-26)과 같다.

$$
{}^{0}\mathbf{P}_{end} = \sum_{i=1}^{4} {}^{0}\mathbf{R}_{i}\,{}^{i}\mathbf{P} \tag{3-26}
$$

목표 orientation ${}^{0}\mathbf{R}_{4,known}$으로부터, 회전행렬 ${}^{1}\mathbf{R}_{4}$는 식 (3-27)과 같이 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\mathbf{R}_{4,known} &= {}^{0}\mathbf{R}_{1}\,{}^{1}\mathbf{R}_{4} \\
{}^{0}\mathbf{R}_{1}^{-1}\,{}^{0}\mathbf{R}_{4,known} &= {}^{1}\mathbf{R}_{4}
\end{aligned} \tag{3-27}
$$

식 (3-26)과 식 (3-27)를 이용하여 해당 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석에서 필요한 관계식 $LHS(\theta_1) = RHS(\theta_2, \theta_3)$을 식 (3-28)와 같이 유도할 수 있다.

$$
\begin{gathered}
LHS(\theta_1) = RHS(\theta_2, \theta_3) \\
{}^{0}\mathbf{R}_{1}^{-1}\left({}^{0}\mathbf{P}_{end} - \left({}^{0}\mathbf{R}_{4,known}\,{}^{4}\mathbf{P} + {}^{0}\mathbf{R}_{1}\,{}^{1}\mathbf{P}\right)\right) = {}^{0}\mathbf{R}_{1}^{-1}\left(\sum_{i=2}^{3} {}^{0}\mathbf{R}_{i}\,{}^{i}\mathbf{P}\right)
\end{gathered} \tag{3-28}
$$

Table 5. Mapping matrices in ${}^{1}\mathbf{R}_{3}$ and ${}^{1}\mathbf{R}_{4}$ for Fig. 3-9

Component	${}^{1}\mathbf{R}_{3}$	${}^{1}\mathbf{R}_{4}$
(1,1)	[1, 0]	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]
(1,2)	[1, ±1]	[1, 1, 0; 1, –1, 0]
(1,3)	[1, ±1]	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]
(2,1)	[0, 0]	[0, 1, 1; 0, 1, –1]
(2,2)	[0, 1]	[0, 1, 0]
(2,3)	[0, 1]	[0, 1, 1; 0, 1, –1]
(3,1)	[1, 0]	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]
(3,2)	[1, ±1]	[1, 1, 0; 1, –1, 0]
(3,3)	[1, ±1]	[1, 0, ±1; 1, ±1, ±1]

식 (3-27)에 ${}^{1}\mathbf{R}_{4}(= \mathbf{R}_{y}(\theta_2)\mathbf{R}_{x}(\theta_3)\mathbf{R}_{y}(\theta_4))$과 식 (3-28)의 $RHS(\theta_2, \theta_3)$에 ${}^{1}\mathbf{R}_{3}\ (= \mathbf{R}_{y}(\theta_2)\mathbf{R}_{x}(\theta_3))$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 5과 같으며, 식 (3-27)에 ${}^{1}\mathbf{R}_{4}$의 위상각 벡터는 Table 15의 y_0-x_1-y_2 회전에 기술되었다.

Table 5에서 ${}^{1}\mathbf{R}_{4}(2,2)$의 사상 행렬은 [0, 1, 0] 이므로, 식 (3-4)에 의해서 ${}^{1}\mathbf{R}_{4}(2,2)$는 $\pm c_3$(또는 $\pm s_3$)임을 예측할 수 있다(즉, $\pm c_3$(또는 $\pm s_3$) = $({}^{0}\mathbf{R}_{1}{}^{-1}){}^{0}\mathbf{R}_{4,known}(2,2)$). ${}^{1}\mathbf{R}_{3}(2,1)$의 사상 행렬은 [0, 0] 이므로, 식 (3-4)에 의해서 ${}^{1}\mathbf{R}_{3}(2,1)$는 0이다. y_3축 중심으로 회전하기 때문에 ${}^{1}\mathbf{R}_{4}$와 ${}^{1}\mathbf{R}_{3}$의 두번째 열 벡터은 동일하다 (즉, ${}^{1}\mathbf{R}_{4}(2,2)$와 ${}^{1}\mathbf{R}_{3}(2,2)$는 같다). 따라서, ${}^{1}\mathbf{R}_{3}(2,3)$은 회전행렬의 직교성에 의해서 $\pm s_3$(또는 $\pm c_3$)이어야 한다. 또한, 식 (3-28)에 $RHS(\theta_2, \theta_3)$의 두번째 요소는 독립변수 θ_3에 관한 삼각함수 c_3와 s_3만 가진다. 이를 바탕으로, c_3와 s_3는 식 (3-29)와 같이 독립변수 θ_3에 관하여 기술할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\pm c_3(\text{or } \pm s_3) = \left({}^{0}\mathbf{R}_{1}{}^{-1}\right){}^{1}\mathbf{R}_{4,known}(2,2) \\
&\pm s_3(\text{or } \pm c_3) = \frac{\left(LHS(\theta_1)_2 - RHS(\theta_2,\theta_3)_2 + {}^{3}\mathbf{P}(3)\left(\pm s_3(\text{or } c_3)\right)\right)}{{}^{3}\mathbf{P}(3)}
\end{aligned}
\tag{3-29}
$$

식 (3-29)로부터 θ_3에 대한 피타고라스의 삼각함수 항등식(Pythagorean trigonometric identity (즉, $c_3^2 + s_3^2 - 1 = 0$))을 유도하여, half tangent formula (즉, $c_1 = (1 - t_1^2)/(1 + t_1^2)$, $s_1 = 2t_1/(1 + t_1^2)$ and $t_1 = \tan(\theta_1/2)$)을 적용할 수 있다. 즉, t_1에 대한 4차 방정식 $at_1^4 + bt_1^3 + ct_1^2 + dt_1 + e = 0$을 얻을 수 있다. 여기에서, a, b, c, d 그리고 e는 각각 식 (3-30)-(3-34)과 같다.

$$
\begin{aligned}
a = {} & P_y^{\,2} - 2P_y l_{x4} r_{2,1} + 2P_y l_{y1} + 2P_y l_{y2} - 2P_y l_{y3} r_{2,2} - 2P_y l_{y4} r_{2,2} - 2P_y l_{z4} r_{2,3} + l_{x4}{}^2 r_{2,1}{}^2 \\
& -2l_{x4} l_{y1} r_{2,1} - 2l_{x4} l_{y2} r_{2,1} + 2l_{x4} l_{y3} r_{2,1} r_{2,2} + 2l_{x4} l_{y4} r_{2,1} r_{2,2} + 2l_{x4} l_{z4} r_{2,1} r_{2,3} + l_{y1}{}^2 + 2l_{y1} l_{y2} \\
& -2l_{y1} l_{y3} r_{2,2} - 2l_{y1} l_{y4} r_{2,2} - 2l_{y1} l_{z4} r_{2,3} + l_{y2}{}^2 - 2l_{y2} l_3 r_{2,2} - 2l_{y2} l_{y4} r_{2,2} - 2l_{y2} l_{z4} r_{2,3} + l_{y3}{}^2 r_{2,2}{}^2 \\
& +2l_{y3} l_{y4} r_{2,2}{}^2 + 2l_{y3} l_z r_{2,2} r_{2,3} + l_{y4}{}^2 r_{2,2}{}^2 + 2l_{y4} l_{z4} r_{2,2} r_{2,3} + l_{z3}{}^2 r_{2,2}{}^2 - l_{z3}{}^2 + l_{z4}{}^2 r_{2,3}{}^2
\end{aligned}
\tag{3-30}
$$

$$
\begin{aligned}
b = {} & 4P_xP_y + 4P_xl_{y1} + 4P_xl_{y2} + 4l_{x4}{}^2r_{1,1}r_{2,1} + 4l_{y3}{}^2r_{1,2}r_{2,2} + 4l_{y4}{}^2r_{1,2}r_{2,2} + 4l_{z3}{}^2r_{1,2}r_{2,2} \\
& + 4l_{z4}{}^2r_{1,3}r_{2,3} - 4P_xl_{x4}r_{2,1} - 4P_yl_{x4}r_{1,1} - 4P_xl_{y3}r_{2,2} - 4P_xl_{y4}r_{2,2} - 4P_yl_{y3}r_{1,2} - 4P_yl_{y4}r_{1,2} \\
& - 4P_xl_{z4}r_{2,3} - 4P_yl_{z4}r_{1,3} - 4l_{x4}l_{y1}r_{1,1} - 4l_{x4}l_{y2}r_{1,1} - 4l_{y1}l_{y3}r_{1,2} - 4l_{y1}l_{y4}r_{1,2} - 4l_{y2}l_{y3}r_{1,2} \\
& - 4l_{y2}l_{y4}r_{1,2} - 4l_{y1}l_{z4}r_{1,3} - 4l_{y2}l_{z4}r_{1,3} + 4l_{x4}l_{y3}r_{1,1}r_{2,2} + 4l_{x4}l_{y3}r_{1,2}r_{2,1} + 4l_{x4}l_{y4}r_{1,1}r_{2,2} \\
& + 4l_{x4}l_{y4}r_{1,2}r_{2,1} + 8l_{y3}l_{y4}r_{1,2}r_{2,2} + 4l_{x4}l_{z4}r_{1,1}r_{2,3} + 4l_{x4}l_{z4}r_{1,3}r_{2,1} + 4l_{y3}l_{z4}r_{1,2}r_{2,3} + 4l_{y3}l_{z4}r_{1,3}r_{2,2} \\
& + 4l_{y4}l_{z4}r_{1,2}r_{2,3} + 4l_{y4}l_{z4}r_{1,3}r_{2,2}
\end{aligned}
\tag{3-31}
$$

$$
\begin{aligned}
c = {} & 4P_x{}^2 - 8P_xl_{x4}r_{1,1} - 8P_xl_{y3}r_{1,2} - 8P_xl_{y4}r_{1,2} - 8P_xl_{z4}r_{1,3} - 2P_y{}^2 + 4P_yl_{x4}r_{2,1} + 4P_yl_{y3}r_{2,2} \\
& + 4P_yl_{y4}r_{2,2} + 4P_yl_{z4}r_{2,3} + 4l_{x4}{}^2r_{1,1}{}^2 - 2l_{x4}{}^2r_{2,1}{}^2 + 8l_{x4}l_{y3}r_{1,1}r_{1,2} - 4l_{x4}l_{y3}r_{2,1}r_{2,2} + 8l_{x4}l_{y4}r_{1,1}r_{1,2} \\
& - 4l_{x4}l_{y4}r_{2,1}r_{2,2} + 8l_{x4}l_{z4}r_{1,1}r_{1,3} - 4l_{x4}l_{z4}r_{2,1}r_{2,3} + 2l_{y1}{}^2 + 4l_{y1}l_{y2} + 2l_{y2}{}^2 + 4l_{y3}{}^2r_{1,2}{}^2 - 2l_{y3}{}^2r_{2,2}{}^2 \\
& + 8l_{y3}l_{y4}r_{1,2}{}^2 - 4l_{y3}l_{y4}r_{2,2}{}^2 + 8l_{y3}l_{z4}r_{1,2}r_{1,3} - 4l_{y3}l_{z4}r_{2,2}r_{2,3} + 4l_{y4}{}^2r_{1,2}{}^2 - 2l_{y4}{}^2r_{2,2}{}^2 \\
& + 8l_{y4}l_{z4}r_{1,2}r_{1,3} - 4l_{y4}l_{z4}r_{2,2}r_{2,3} + 4l_{z3}{}^2r_{1,2}{}^2 - 2l_{z3}{}^2r_{2,2}{}^2 - 2l_{z3}{}^2 + 4l_{z4}{}^2r_{1,3}{}^2 - 2l_{z4}{}^2r_{2,3}{}^2
\end{aligned}
\tag{3-32}
$$

$$
\begin{aligned}
d = {} & 4P_xl_{y1} - 4P_xP_y + 4P_xl_{y2} - 4l_{x4}{}^2r_{1,1}r_{2,1} - 4l_{y3}{}^2r_{1,2}r_{2,2} - 4l_{y4}{}^2r_{1,2}r_{2,2} - 4l_{z3}{}^2r_{1,2}r_{2,2} \\
& - 4l_{z4}{}^2r_{1,3}r_{2,3} + 4P_xl_{x4}r_{2,1} + 4P_yl_{x4}r_{1,1} + 4P_xl_{y3}r_{2,2} + 4P_xl_{y4}r_{2,2} + 4P_yl_{y3}r_{1,2} + 4P_yl_{y4}r_{1,2} \\
& + 4P_xl_{z4}r_{2,3} + 4P_yl_{z4}r_{1,3} - 4l_{x4}l_{y1}r_{1,1} - 4l_{x4}l_{y2}r_{1,1} - 4l_{y1}l_{y3}r_{1,2} - 4l_{y1}l_{y4}r_{1,2} - 4l_{y2}l_{y3}r_{1,2} \\
& - 4l_{y2}l_{y4}r_{1,2} - 4l_{y1}l_{z4}r_{1,3} - 4l_{y2}l_{z4}r_{1,3} - 4l_{x4}l_{y3}r_{1,1}r_{2,2} - 4l_{x4}l_{y3}r_{1,2}r_{2,1} - 4l_{x4}l_{y4}r_{1,1}r_{2,2} \\
& - 4l_{x4}l_{y4}r_{1,2}r_{2,1} - 8l_{y3}l_{y4}r_{1,2}r_{2,2} - 4l_{x4}l_{z4}r_{1,1}r_{2,3} - 4l_{x4}l_{z4}r_{1,3}r_{2,1} - 4l_{y3}l_{z4}r_{1,2}r_{2,3} - 4l_{y3}l_{z4}r_{1,3}r_{2,2} \\
& - 4l_{y4}l_{z4}r_{1,2}r_{2,3} - 4l_{y4}l_{z4}r_{1,3}r_{2,2}
\end{aligned}
\tag{3-33}
$$

$$
\begin{aligned}
e = {} & P_y{}^2 - 2P_yl_{x4}r_{2,1} - 2P_yl_{y1} - 2P_yl_{y2} - 2P_yl_{y3}r_{2,2} - 2P_yl_{y4}r_{2,2} - 2P_yl_{z4}r_{2,3} + l_{x4}{}^2r_{2,1}{}^2 \\
& + 2l_{x4}l_{y1}r_{2,1} + 2l_{x4}l_{y2}r_{2,1} + 2l_{x4}l_{y3}r_{2,1}r_{2,2} + 2l_{x4}l_{y4}r_{2,1}r_{2,2} + 2l_{x4}l_{z4}r_{2,1}r_{2,3} + l_{y1}{}^2 + 2l_{y1}l_{y2} \\
& + 2l_{y1}l_{y3}r_{2,2} + 2l_{y1}l_{y4}r_{2,2} + 2l_{y1}l_{z4}r_{2,3} + l_{y2}{}^2 + 2l_{y2}l_{y3}r_{2,2} + 2l_{y2}l_{y4}r_{2,2} + 2l_{y2}l_{z4}r_{2,3} \\
& + l_{y3}{}^2r_{2,2}{}^2 + 2l_{y3}l_{y4}r_{2,2}{}^2 + 2l_{y3}l_{z4}r_{2,2}r_{2,3} + l_{y4}{}^2r_{2,2}{}^2 + 2l_{y4}l_{z4}r_{2,2}r_{2,3} + l_{z3}{}^2r_{2,2}{}^2 - l_{z3}{}^2 + l_{z4}{}^2r_{2,3}{}^2
\end{aligned}
\tag{3-34}
$$

식 (3-23)에 근거하여 계산된 $\mathbf{t}_1 = [t_{1,1}, t_{1,2}, t_{1,3}, t_{1,4}]^T \in R^{4\times1}$로부터 $\theta_{1,i} = 2\tan^{-1}(t_{1,i})$ for $i = 1,\dots,4$ 을 결정한다 (즉, $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{1,3}, \theta_{1,4}]^T \in R^{4\times1}$). 식 (3-29)에서 ${}^3\mathbf{P}(3) = 0$이라면, 식 (3-28)의 관계식에서 두번째 요소는 $A_1\cos(\theta_1) + A_2\sin(\theta_1) + A_3 = 0$와 같은 θ_1에 대한 식으로 표현된다. 이때, 회전각도 θ_1는 식 (3-35)과 같이 결정할 수 있다.

$$
\theta_1 = ATAN2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 - A_3{}^2}}{-A_3}\right)
\tag{3-35}
$$

여기에서, $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$은 식 (3-36)와 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= P_y - l_{x4}r_{2,1} - l_{y4}r_{2,2} - l_{z4}r_{2,3} \\ A_2 &= l_{x4}r_{1,1} - P_x + l_{y4}r_{1,2} + l_{z4}r_{1,3} \\ A_3 &= -l_{y2} - l_{y3}\left(r_{2,3}c_1 - r_{1,3}s_1\right) - l_{y1} \end{aligned} \tag{3-36}$$

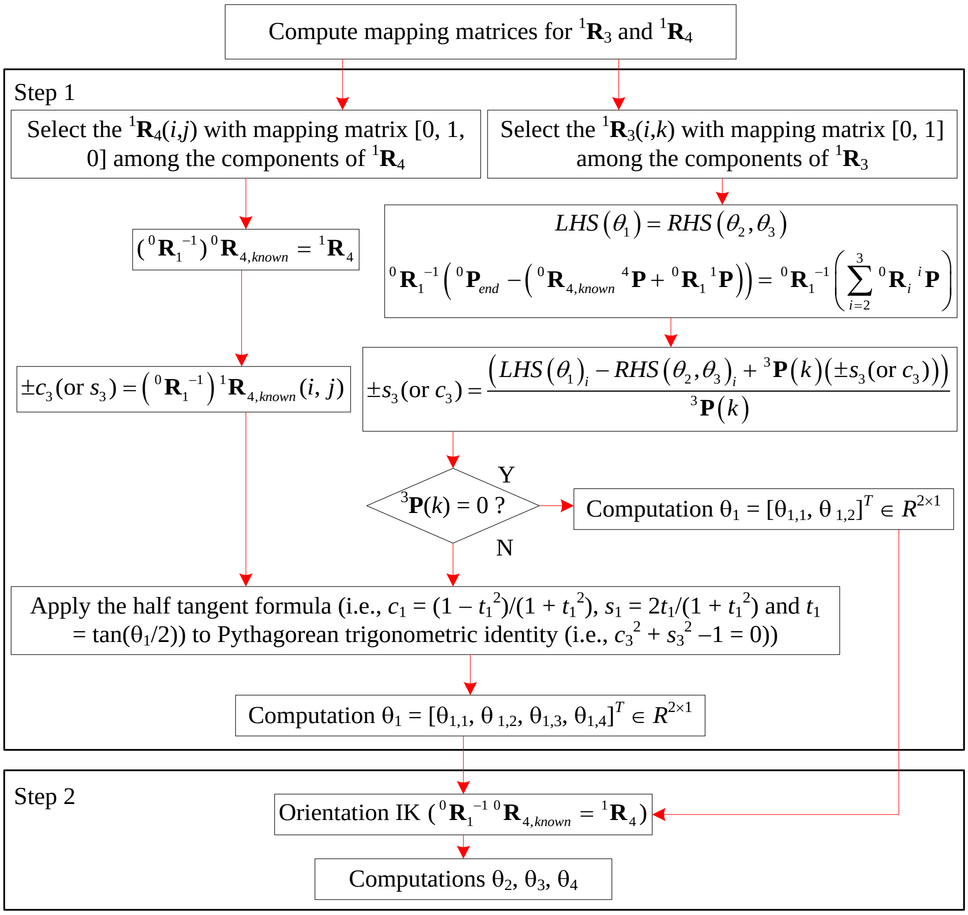


Fig. 3-10. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-9.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-9의 4자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-10와 같이 정리할 수 있다. Step1에서, 회전각도 θ_1의 솔루션를 계산하기 위해 ${}^1\mathbf{R}_4$의 구성요소들 중에서 사상 행렬 [0, 1, 0]을

가진 ${}^{1}\mathbf{R}_4(i,j)$와 ${}^{1}\mathbf{R}_3$의 구성 요소들중에서 사상 행렬 [0, 1]을 가진 ${}^{1}\mathbf{R}_3(i,k)$요소를 선택한다. 이때, ${}^{3}\mathbf{P}(k)$가 ${}^{3}\mathbf{P}(k) = 0$을 만족하는지 확인한다. 계산한 회전각도 θ_1의 솔루션 $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{1,3}, \theta_{1,4}]^T \in R^{4\times1}$ (또는 $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}]^T \in R^{2\times1}$)을 각각 식 (3-27)에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방볍을 통해서 회전각도 θ_2, θ_3 그리고 θ_4를 결정한다.

나. 6-DOF manipulator with a speherical joint

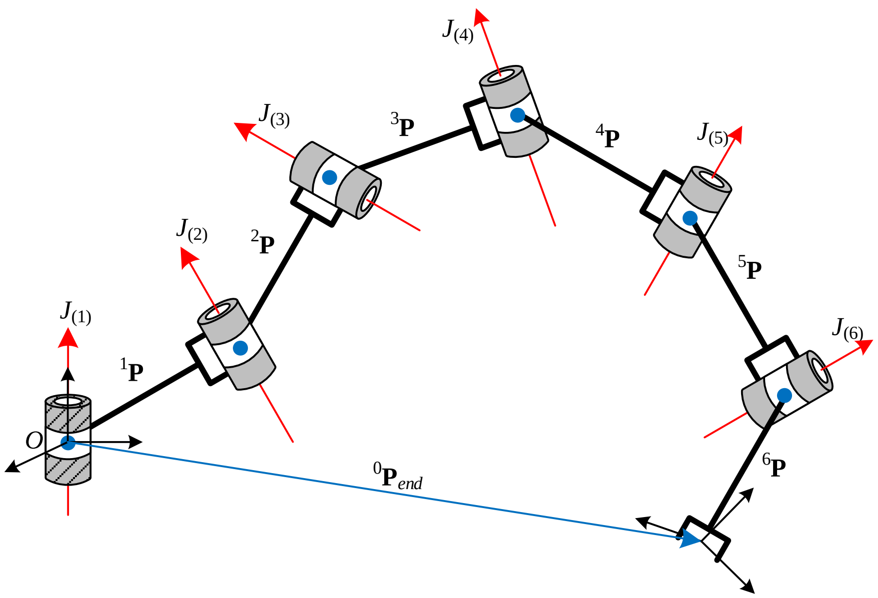


Fig. 3-11. General 6-DOF manipulators

Fig. 3-11은 관절간에 오프셋이 존재하며 회전관절의 회전축이 서로 직교하는 일반적인 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다. 제한된 기구학적 구성의 조건 [2]-[4] (즉, 3개의 연속된 회전 관절의 축이 공통점에서 교차 또는 3개의 연속된 회전 관절의 축이 평행)을 만족하는 다양한 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방식의

역기구학 해석을 수행한다. 여기에서, 역기구학 해석 시 사용된 매니퓰레이터의 관절 구성은 Table 6와 같다.

Table 6. Joint configulations that satisfy the kinematic conditions [2]-[4]

No.	Joint configulation	Offset between joints					
		$^{1}\mathbf{P}$	$^{2}\mathbf{P}$	$^{3}\mathbf{P}$	$^{4}\mathbf{P}$	$^{5}\mathbf{P}$	$^{6}\mathbf{P}$
1	$J_{(1)}\perp J_{(2)}\perp J_{(3)}\perp J_{(4)}\perp J_{(5)}\perp J_{(6)}$	O	O	O	-	-	O
2	$J_{(1)}\|J_{(2)}\perp J_{(3)}\perp J_{(4)}\perp J_{(5)}\perp J_{(6)}$	O	O	O	-	-	O
3	$J_{(1)}\perp J_{(2)}\|J_{(3)}\perp J_{(4)}\perp J_{(5)}\perp J_{(6)}$	O	O	O	-	-	O
4	$J_{(1)}\perp J_{(2)}\perp J_{(3)}\perp J_{(4)}\perp J_{(5)}\perp J_{(6)}$	-	-	O	O	O	O
5	$J_{(1)}\perp J_{(2)}\perp J_{(3)}\perp J_{(4)}\|J_{(5)}\perp J_{(6)}$	-	-	O	O	O	O
6	$J_{(1)}\perp J_{(2)}\perp J_{(3)}\perp J_{(4)}\perp J_{(5)}\|J_{(6)}$	-	-	O	O	O	O
7	$J_{(1)}\perp J_{(2)}\|J_{(3)}\|J_{(4)}\perp J_{(5)}\perp J_{(6)}$	O	O	O	O	O	O
8	$J_{(1)}\perp J_{(2)}\perp J_{(3)}\|J_{(4)}\|J_{(5)}\perp J_{(6)}$	O	O	O	O	O	O

(1) the last 3 joint axes intersect at a common point

General

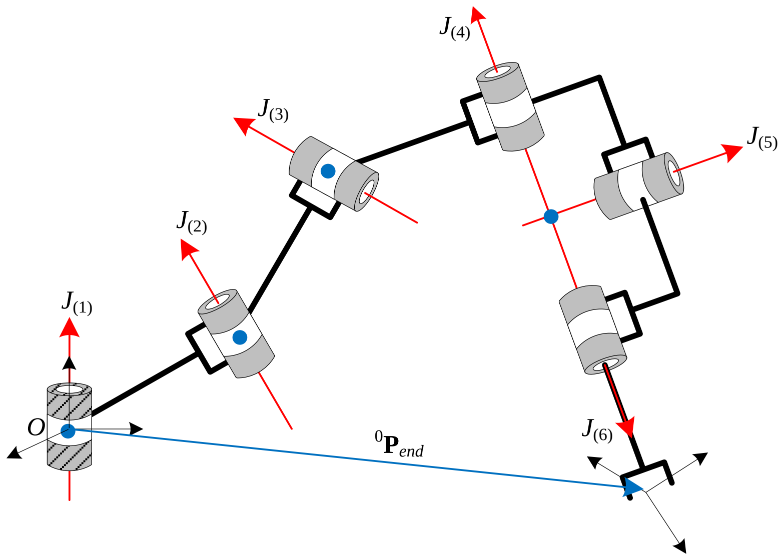


Fig. 3-12. 6-DOF manipulator with the last three joints axes intersect at a common point.

Fig. 3-12은 마지막에서 3개의 회전관절의 회전축이 교차하여 공통점을 가진 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, $^4\mathbf{P} = {}^5\mathbf{P} = [0, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$). 예를 들어 Fig. 3-12의 6자유도 매니퓰레이터가 z_0-y_1-x_2-y_3-x_4-y_5 회전 순서를 가진 경우를 고려해보자. 해당 매니퓰레이터의 목표 orientation (즉, $^0\mathbf{R}_{6,known} = [r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}; r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3}; r_{3,1}, r_{3,2}, r_{3,3}] \in R^{3\times3}$), 목표 position (즉, $^0\mathbf{P}_{end} = [P_x, P_y, P_z]^T \in R^{3\times1}$) 그리고 관절간의 오프셋 거리 (즉, $^i\mathbf{P} = [l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}]^T \in R^{3\times1}$ for $i = 1, 2, 3, 6$)를 이용하여 해당 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석을 수행한다. 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석 시 필요한 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$을 식 (3-37)과 같이 유도한다.

$$LHS(\theta_1,\theta_2) = RHS(\theta_3)$$
$$^0\mathbf{R}_2^{-1}\left({}^0\mathbf{P}_{end} - \left({}^0\mathbf{R}_{6,known}\,{}^6\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{2}{}^0\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P}\right)\right) = {}^0\mathbf{R}_2^{-1}\sum_{i=3}^{5}{}^0\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P} \tag{3-37}$$

Table 7. Mapping matrices in ${}^{2}\mathbf{R}_3$ and ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$ for Fig. 3-12

Component	${}^{2}\mathbf{R}_3$	${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$
(1,1)	[0]	[1, ±1]
(1,2)	[0]	[1, ±1]
(1,3)	[0]	[0, 1]
(2,1)	[0]	[1, 0]
(2,2)	[1]	[1, 0]
(2,3)	[1]	[0, 0]
(3,1)	[0]	[1, ±1]
(3,2)	[1]	[1, ±1]
(3,3)	[1]	[0, 1]

식 (3-37)에서, ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$와 ${}^{2}\mathbf{R}_3$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 7와 같다. Table 7에서 ${}^{2}\mathbf{R}_3$의 첫번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수 θ_3에 관한 삼각함수를 가진다. ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$의 구성요소에 대한 사상 행렬들 중에서 사상 행렬 [1, ±1]로부터, 식 (3-37)의 $LHS(\theta_1, \theta_2)$에 삼각함수의 복잡성(예, c_1c_2, c_1s_2, s_1c_2, s_1s_2)을 예측할 수 있다. 따라서, 식 (3-37)의 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$에서 첫번째 요소는 $LHS(\theta_1, \theta_2) = const$이다. 또한, ${}^{2}\mathbf{R}_3$의 직교성에 의해서 $RHS(\theta_3)^T RHS(\theta_3) = const$이다. 식 (3-37)의 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$로부터 식 (3-38)과 같은 연립방정식을 유도한다.

$$\begin{gathered} LHS(\theta_1,\theta_2)_1 - RHS(\theta_3)_1 = 0 \\ LHS(\theta_1,\theta_2)^T LHS(\theta_1,\theta_2) - RHS(\theta_3)^T RHS(\theta_3) = 0 \end{gathered} \tag{3-38}$$

식 (3-38)에 독립변수 θ_1과 θ_2에 관한 삼각함수만 존재하므로, 식 (3-38)은 c_1과 s_1에 대한 연립방정식으로 식 (3-39)와 같이 다시 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
A_{1,1}c_1 + A_{1,2}s_1 + A_{1,3} = 0 \\
A_{2,1}c_1 + A_{2,2}s_1 + A_{2,3} = 0
\end{aligned}
\tag{3-39}
$$

벡터 $\mathbf{x}$가 $\mathbf{x} = [c_1,\ s_1]^T \in R^{2\times 1}$ 이라면, 식 (3-39)로부터 벡터 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{x} = -[A_{1,1},\ A_{1,2};\ A_{2,1},\ A_{2,2}]^{-1}[A_{1,3};\ A_{2,3}]$와 같이 결정할 수 있다. 여기에서, $\mathbf{A} = [A_{1,1},\ A_{1,2},\ A_{1,3};\ A_{2,1},\ A_{2,2},\ A_{2,3}]$은 식 (3-40)와 같다.

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= \left(P_x - l_{x6}r_{1,1} - l_{y6}r_{1,2} - l_{z6}r_{1,3}\right)c_2 \\
A_{1,2} &= \left(P_y - l_{x6}r_{2,1} - l_{y6}r_{2,2} - l_{z6}r_{2,3}\right)c_2 \\
A_{1,3} &= -l_{x2} - l_{x3} - l_{x1}c_2 + \left(l_{z1} - P_z + l_{x6}r_{3,1} + l_{y6}r_{3,2} + l_{z6}r_{3,3}\right)s_2 \\
A_{2,1} &= 4l_{x1}r_{1,1} - 2P_y l_{y1} - 2P_y l_{y2} - 2P_x l_{x1} + 2l_{x1}r_{1,2} + 6l_{x1}r_{1,3} + 4l_{y1}r_{2,1} + 2l_{y1}r_{2,2} + 4l_{y2}r_{2,1} \\
&\quad + 6l_{y1}r_{2,3} + 2l_{y2}r_{2,2} + 6l_{y2}r_{2,3} + \left(4l_{x2}r_{1,1} - 2P_x l_{x2} + 2l_{x2}r_{1,2} + 6l_{x2}r_{1,3}\right)c_2 \\
&\quad + \left(4l_{z2}r_{1,1} + 2l_{z2}r_{1,2} + 6l_{z2}r_{1,3} - 2P_x l_{z2}\right)s_2 \\
A_{2,2} &= 2P_x l_{y1} - 2P_y l_{x1} + 2P_x l_{y2} + 4l_{x1}r_{2,1} + 2l_{x1}r_{2,2} + 6l_{x1}r_{2,3} - 4l_{y1}r_{1,1} - 2l_{y1}r_{1,2} - 4l_{y2}r_{1,1} \\
&\quad - 6l_{y1}r_{1,3} - 2l_{y2}r_{1,2} - 6l_{y2}r_{1,3} + \left(4l_{x2}r_{2,1} + 2l_{x2}r_{2,2} + 6l_{x2}r_{2,3} - 2P_y l_{x2}\right)c_2 \\
&\quad + \left(4l_{z2}r_{2,1} + 2l_{z2}r_{2,2} + 6l_{z2}r_{2,3} - 2P_y l_{z2}\right)s_2 \\
A_{2,3} &= \left(2P_z l_{x2} + 2l_{x1}l_{z2} - 2l_{x2}l_{z1} - 4l_{x2}r_{3,1} - 2l_{x2}r_{3,2} - 6l_{x2}r_{3,3}\right)s_2 \\
&\quad + \left(2l_{z1}l_{z2} - 2P_z l_{z2} + 2l_{x1}l_{x2} + 4l_{z2}r_{3,1} + 2l_{z2}r_{3,2} + 6l_{z2}r_{3,3}\right)c_2 \\
&\quad + P_x{}^2 - 4P_x r_{1,1} - 2P_x r_{1,2} - 6P_x r_{1,3} + P_y{}^2 - 4P_y r_{2,1} - 2P_y r_{2,2} - 6P_y r_{2,3} + P_z{}^2 - 2P_z l_{z1} \\
&\quad - 4P_z r_{3,1} - 2P_z r_{3,2} - 6P_z r_{3,3} + l_{x1}{}^2 + l_{x2}{}^2 - l_{x3}{}^2 + l_{y1}{}^2 + 2l_{y1}l_{y2} + l_{y2}{}^2 - l_{y3}{}^2 + l_{z1}{}^2 \\
&\quad + 4l_{z1}r_{3,1} + 2l_{z1}r_{3,2} + 6l_{z1}r_{3,3} + l_{z2}{}^2 - l_{z3}{}^2 + 4r_{1,1}{}^2 + 4r_{1,1}r_{1,2} + 12r_{1,1}r_{1,3} + r_{1,2}{}^2 + 6r_{1,2}r_{1,3} \\
&\quad + 9r_{1,3}{}^2 + 4r_{2,1}{}^2 + 4r_{2,1}r_{2,2} + 12r_{2,1}r_{2,3} + r_{2,2}{}^2 + 6r_{2,2}r_{2,3} + 9r_{2,3}{}^2 + 4r_{3,1}{}^2 + 4r_{3,1}r_{3,2} \\
&\quad + 12r_{3,1}r_{3,3} + r_{3,2}{}^2 + 6r_{3,2}r_{3,3} + 9r_{3,3}{}^2
\end{aligned}
\tag{3-40}
$$

식 (3-39)로부터 계산된 $\mathbf{x}$를 피타고라스의 삼각함수 항등식(Pythagorean trigonometric identity (i.e., $c_1^2 + s_1^2 - 1 = 0$))에 대입하여 half tangent formula (i.e., $c_2 = (1 - t_2^2)/(1 + t_2^2)$, $s_1 = 2t_2^2/(1 + t_2^2)$ and $t_2 = \tan(\theta_2/2)$)에 적용하면, t_2에 대한 4차 방정식 $at_2^4 + bt_2^3 + ct_2^2 + dt_2 + e = 0$을 얻을 수 있다. 여기에서, a, b, c, d 그리고 e는 식 (3-41)과 같다.

$$\begin{aligned} a &= A_{1,1}{}^2 - 2A_{1,1}A_{1,3} + A_{1,3}{}^2 + A_{2,1}{}^2 - 2A_{2,1}A_{2,3} + A_{2,3}{}^2 - 1 \\ b &= 4A_{1,2}A_{1,3} - 4A_{1,1}A_{1,2} - 4A_{2,1}A_{2,2} + 4A_{2,2}A_{2,3} \\ c &= -2A_{1,1}{}^2 + 4A_{1,2}{}^2 + 2A_{1,3}{}^2 - 2A_{2,1}{}^2 + 4A_{2,2}{}^2 + 2A_{2,3}{}^2 + 2 \\ d &= 4A_{1,1}A_{1,2} + 4A_{1,2}A_{1,3} + 4A_{2,1}A_{2,2} + 4A_{2,2}A_{2,3} \\ e &= A_{1,1}{}^2 + 2A_{1,1}A_{1,3} + A_{1,3}{}^2 + A_{2,1}{}^2 + 2A_{2,1}A_{2,3} + A_{2,3}{}^2 - 1 \end{aligned} \tag{3-41}$$

따라서, 식 (3-23)에 근거하여 계산된 $\mathbf{t}_2 = [t_{2,1}, t_{2,2}, t_{2,3}, t_{2,4}]^T \in R^{4\times1}$로부터 $\theta_{2,i} = 2\tan^{-1}(t_{2,i})$ for $i = 1,\ldots,4$ 을 얻을 수 있다(즉, $\boldsymbol{\theta}_2 = [\theta_{2,1}, \theta_{2,2}, \theta_{2,3}, \theta_{2,4}]^T \in R^{4\times1}$).

관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$의 첫번째 요소 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_1 = RHS(\theta_3)_1$)에 회전각도 θ_2의 솔루션 $\boldsymbol{\theta}_2 = [\theta_{2,1}, \theta_{2,2}, \theta_{2,3}, \theta_{2,4}]^T \in R^{4\times1}$의 요소들을 각각 대입하면, $B_1\cos(\theta_1) + B_2\sin(\theta_1) + B_3 = 0$와 같은 θ_1에 대한 식이 유도된다. 유도된 식으로부터 θ_1는 식 (3-42)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_1 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1{}^2 + B_2{}^2 - B_3{}^2}}{-B_3}\right) \tag{3-42}$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-43)와 같다.

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(P_x - r_{1,1} - r_{1,2} - 2r_{1,3}\right)c_2 \\ B_2 &= \left(P_y - r_{2,1} - r_{2,2} - 2r_{2,3}\right)c_2 \\ B_3 &= -l_{x2} - l_{x3} - l_{x1}c_2 + \left(r_{3,1} + r_{3,2} + 2r_{3,3} - P_z + l_{z1}\right)s_2 \end{aligned} \tag{3-43}$$

식 (3-37)의 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$에서 첫번째 요소를 제외한 나머지 요소들을 합한 방정식 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_2 + LHS(\theta_1, \theta_2)_3 = RHS(\theta_3)_2 + RHS(\theta_3)_3$)에 계산된 θ_1과 θ_2를 대입하면, $C_1\cos(\theta_3) + C_2\sin(\theta_3) + C_3 = 0$와 같이 θ_3에 대한 식을 유도할 수 있다. 유도된 식으로부터 θ_3는 식 (3-44)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_3 = ATAN2\left(\frac{C_1}{C_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{C_1^{\ 2} + C_2^{\ 2} - C_3^{\ 2}}}{-C_3}\right) \tag{3-44}$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3]$은 식 (3-45)와 같다.

$$\begin{aligned}
&C_1 = -l_{y3} - l_{z3} \\
&C_2 = l_{z3} - l_{y3} \\
&C_3 = -l_{y2} - l_{z2} - l_{y1} + \left(P_y - r_{2,1} - r_{2,2} - 2r_{2,3}\right)c_1 + \left(r_{1,1} + r_{1,2} + 2r_{1,3} - P_x\right)s_1 \\
&\quad + \left(P_z - l_{z1} - r_{3,1} - r_{3,2} - 2r_{3,3}\right)c_2 - l_{x1}s_2 + \left(P_x - r_{1,1} - r_{1,2} - 2r_{1,3}\right)c_1 s_2 \\
&\quad + \left(P_y - r_{2,1} - r_{2,2} - 2r_{2,3}\right)s_1 s_2
\end{aligned} \tag{3-45}$$

계산된 회전 각도 θ_1, θ_2 그리고 θ_3을 $({}^0\mathbf{R}_3{}^{-1}){}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^3\mathbf{R}_6$에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 θ_4, θ_5 그리고 θ_6을 결정한다.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-12의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-13와 같이 정리할 수 있다. Step 1에서, 회전각도 θ_2의 솔루션을 계산하기 위해 ${}^2\mathbf{R}_3$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-37)의 관계식에서 i번째 요소를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_i - RHS(\theta_3)_i = 0$). Step 2에서, 회전각도 θ_3의 솔루션을 계산하기 위해 식 (3-37)의 관계식에서 i번째 요소를 제외한 나머지를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_j + LHS(\theta_1, \theta_2)_k = RHS(\theta_3)_j + RHS(\theta_3)_k$).

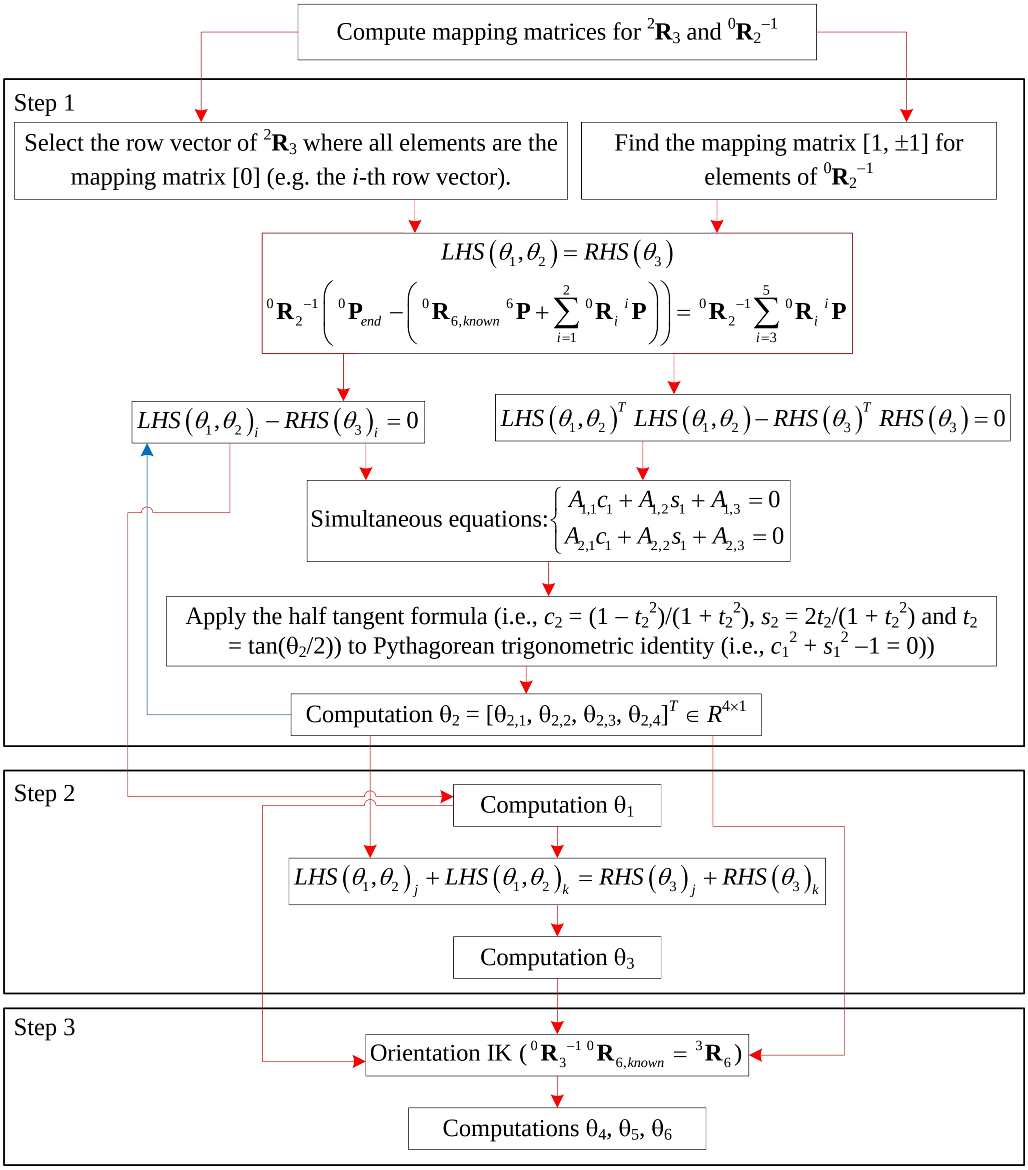


Fig. 3-13. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-12.

Two parallel axes I(x_0-z_1-z_2-y_3-x_4-y_5)

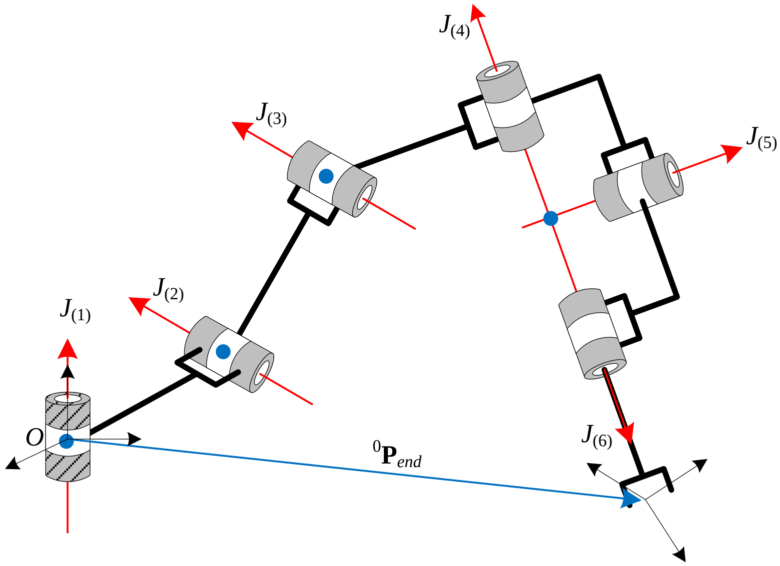


Fig. 3-14. 6-DOF manipulators with the last three joints axes intersect at a common point, where the two consecutive joints axes $J_{(2)}$ and $J_{(3)}$ are parallel (i.e., $J_{(2)} \| J_{(3)}$).

Fig. 3-14은 회전관절 2과 3의 회전축이 서로 평행하며 (즉, $J_{(2)} \| J_{(3)}$), 마지막에서 3개의 회전관절의 회전축이 교차하여 공통점을 가진 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, ${}^{4}\mathbf{P} = {}^{5}\mathbf{P} = [0, 0, 0]^{T} \in R^{3\times1}$). 예를 들어 Fig. 3-14의 6자유도 매니퓰레이터가 x_0-z_1-z_2-y_3-x_4-y_5 회전 순서를 가진 경우, 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석에서 필요한 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$을 식 (3-46)과 같이 유도한다.

$$LHS\left(\theta_1,\theta_2\right) = RHS\left(\theta_3\right)$$
$$ {}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}\left({}^{0}\mathbf{P}_{end} - \left({}^{0}\mathbf{R}_{6,known}\,{}^{6}\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{2} {}^{0}\mathbf{R}_i\,{}^{i}\mathbf{P}\right)\right) = {}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}\sum_{i=3}^{5} {}^{0}\mathbf{R}_i\,{}^{i}\mathbf{P} \tag{3-46}$$

식 (3-46)에서, ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$와 ${}^{2}\mathbf{R}_3$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 8와 같다. Table 8에서 ${}^{2}\mathbf{R}_3$의 세번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수 θ_3에 관한

삼각함수를 가진다. ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$의 구성요소에 대한 사상 행렬들 중에서 사상 행렬 [1, ±1]로부터, 식 (3-46)의 $LHS(\theta_1, \theta_2)$에 삼각함수의 복잡성(예, c_1c_2, c_1s_2, s_1c_2, s_1s_2)을 예측할 수 있다. 따라서, 식 (3-46)의 관계식에서 세번째 요소는 $LHS(\theta_1) = const$이다. 또한, ${}^{2}\mathbf{R}_3$의 직교성에 의해서 $RHS(\theta_3)^T RHS(\theta_3) = const$이다.

Table 8. Mapping matrices in ${}^{2}\mathbf{R}_3$ and ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$ for Fig. 3-14

Component	${}^{2}\mathbf{R}_3$	${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$
(1,1)	[1]	[0, 1]
(1,2)	[1]	[1, ±1]
(1,3)	[0]	[1, ±1]
(2,1)	[1]	[0, 1]
(2,2)	[1]	[1, ±1]
(2,3)	[0]	[1, 0]
(3,1)	[0]	[0, 0]
(3,2)	[0]	[1, 0]
(3,3)	[0]	[1, 0]

식 (3-46)의 관계식에서 세번째 요소부터(즉, $LHS(\theta_1) = const$), $A_1\cos(\theta_1) + A_2\sin(\theta_1) + A_3 = 0$와 같은 θ_1에 대한 식을 유도한다. 유도한 식으로부터 θ_1는 식 (3-47)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_1 = ATAN2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}}{-A_3}\right) \tag{3-47}$$

여기에서, $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$은 식 (3-48)와 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= P_z - l_{x6} r_{3,1} - l_{y6} r_{3,2} - l_{z6} r_{3,3} \\ A_2 &= l_{x6} r_{2,1} - P_y + l_{y6} r_{2,2} + l_{z6} r_{2,3} \\ A_3 &= -l_{z1} - l_{z2} - l_{z3} \end{aligned} \tag{3-48}$$

식 (3-46)의 관계식 $LHS(\theta_1,\theta_2) = RHS(\theta_3)$로부터, 유도한 식 $LHS(\theta_1, \theta_2)^T LHS(\theta_1, \theta_2) - RHS(\theta_3)^T RHS(\theta_3) = 0$에 식 (3-47)에서 계산된 회전 각도 θ_1를 대입한다. 이때, $B_1\cos(\theta_2) + B_2\sin(\theta_2) + B_3 = 0$와 같이 θ_2에 대한 식으로 표현된다. 따라서, θ_2는 식 (3-49)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_2 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1^{\,2} + B_2^{\,2} - B_3^{\,2}}}{-B_3}\right) \tag{3-49}$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-50)와 같다.

$$
\begin{aligned}
B_1 &= 2l_{x1}l_{x2} - 2P_x l_{x2} + 2l_{y1}l_{y2} + 2l_{x2}l_{x6}r_{1,1} + 2l_{x2}l_{y6}r_{1,2} + 2l_{x2}l_{z6}r_{1,3} \\
&\quad + \left(2l_{x6}l_{y2}r_{2,1} - 2P_y l_{y2} + 2l_{y2}l_{y6}r_{2,2} + 2l_{y2}l_{z6}r_{2,3}\right)c_1 \\
&\quad + \left(2l_{x6}l_2 r_{3,1} + 2l_{y2}l_{y6}r_{3,2} + 2l_{y2}l_{z6}r_{3,3} - 2P_z l_{y2}\right)s_1 \\
B_2 &= 2P_x l_{y2} - 2l_{x1}l_{y2} + 2l_{x2}l_{y1} - 2l_{x6}l_{y2}r_{1,1} - 2l_{y2}l_{y6}r_{1,2} - 2l_{y2}l_{z6}r_{1,3} \\
&\quad + \left(2l_{x2}l_{x6}r_{2,1} - 2P_y l_{x2} + 2l_{x2}l_{y6}r_{2,2} + 2l_{x2}l_{z6}r_{2,3}\right)c_1 \\
&\quad + \left(2l_{x2}l_{x6}r_{3,1}\, 2P_z l_{x2} + 2l_{x2}l_{y6}r_{3,2} + 2l_{x2}l_{z6}r_{3,3}\right)s_1 \\
B_3 &= \left(2l_{x6}l_{y1}r_{2,1} - 2P_y l_{y1} - 2P_z l_{z1} - 2P_z l_{z2} + 2l_{x6}l_{z1}r_{3,1} + 2l_{x6}l_{z2}r_{3,1} + 2l_{y1}l_{y6}r_{2,2}\right)c_1 \\
&\quad + \left(2l_{y1}l_{z6}r_{2,3} + 2l_{y6}l_{z1}r_{3,2} + 2l_{y6}l_{z2}r_{3,2} + 2l_{z1}l_{z6}r_{3,3} + 2l_{z2}l_{z6}r_{3,3}\right)c_1 \\
&\quad + \left(2P_y l_{z1} + 2P_y l_{z2} - 2P_z l_{y1} + 2l_{x6}l_{y1}r_{3,1} - 2l_{x6}l_{z1}r_{2,1} - 2l_{x6}l_{z2}r_{2,1} + 2l_{y1}l_{y6}r_{3,2}\right)s_1 \\
&\quad + \left(2l_{y1}l_{z6}r_{3,3} - 2l_{y6}l_{z1}r_{2,2} - 2l_{y6}l_{z2}r_{2,2} - 2l_{z1}l_{z6}r_{2,3} - 2l_{z2}l_{z6}r_{2,3}\right)s_1 \\
&\quad + P_x^2 - 2P_x l_{x1} - 2P_x l_{x6}r_{1,1} - 2P_x l_{y6}r_{1,2} - 2P_x l_{z6}r_{1,3} + P_y^2 - 2P_y l_{x6}r_{2,1} - 2P_y l_{y6}r_{2,2} \\
&\quad - 2P_y l_{z6}r_{2,3} + P_z^2 - 2P_z l_{x6}r_{3,1} - 2P_z l_{y6}r_{3,2} - 2P_z l_{z6}r_{3,3} + l_{x1}^2 + 2l_{x1}l_{x6}r_{1,1} + 2l_{x1}l_{y6}r_{1,2} \\
&\quad + 2l_{x1}l_{z6}r_{1,3} + l_{x2}^2 - l_{x3}^2 + l_{x6}^2 r_{1,1}^2 + l_{x6}^2 r_{2,1}^2 + l_{x6}^2 r_{3,1}^2 + 2l_{x6}l_{y6}r_{1,1}r_{1,2} + 2l_{x6}l_{y6}r_{2,1}r_{2,2} \\
&\quad + 2l_{x6}l_{y6}r_{3,1}r_{3,2} + 2l_{x6}l_{z6}r_{1,1}r_{1,3} + 2l_{x6}l_{z6}r_{2,1}r_{2,3} + 2l_{x6}l_{z6}r_{3,1}r_{3,3} + l_{y1}^2 + l_{y2}^2 - l_{y3}^2 \\
&\quad + l_{y6}^2 r_{1,2}^2 + l_{y6}^2 r_{2,2}^2 + l_{y6}^2 r_{3,2}^2 + 2l_{y6}l_{z6}r_{1,2}r_{1,3} + 2l_{y6}l_{z6}r_{2,2}r_{2,3} + 2l_{y6}l_{z6}r_{3,2}r_{3,3} + l_{z1}^2 \\
&\quad + 2l_{z1}l_{z2} + l_{z2}^2 - l_{z3}^2 + l_{z6}^2 r_{1,3}^2 + l_{z6}^2 r_{2,3}^2 + l_{z6}^2 r_{3,3}^2
\end{aligned}
\tag{3-50}
$$

식 (3-46)의 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$에서 세번째 요소를 제외한 나머지 요소들을 합한 방정식 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_1 + LHS(\theta_1, \theta_2)_3 = RHS(\theta_3)_1 + RHS(\theta_3)_3$)에 계산된 θ_1과 θ_2를 대입하면, $C_1\cos(\theta_2 + \theta_3) + C_2\sin(\theta_2 + \theta_3) + C_3 = 0$와 같은 $\theta_2 + \theta_3$에 대한 식을 유도할 수 있다. 유도된 식으로부터 $\theta_2 + \theta_3$는 식 (3-51)과 같이 결정할 수 있다.

$$
\theta_2 + \theta_3 = ATAN2\left(\frac{C_1}{C_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}}{-C_3}\right) \tag{3-51}
$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3]$은 식 (3-52)와 같다.

$$
\begin{aligned}
&C_1 = -l_{x3} - l_{y3} \\
&C_2 = l_{y3} - l_{x3} \\
&C_3 = P_x - l_{x1} - l_{y1} - l_{x6}r_{1,1} - l_{y6}r_{1,2} - l_{z6}r_{1,3} + \left(P_y - l_{x6}r_{2,1} - l_{y6}r_{2,2} - l_{z6}r_{2,3}\right)c_1 \\
&\quad + \left(P_z - l_{x6}r_{3,1} - l_{y6}r_{3,2} - l_{z6}r_{3,3}\right)s_1 - \left(l_{x2} + l_{y2}\right)c_2 + \left(l_{y2} - l_{x2}\right)s_2
\end{aligned}
\tag{3-52}
$$

회전 각도 θ_3은 식 (3-51)의 $\theta_2 + \theta_3$에서 식 (3-49)의 θ_2을 뺌으로써 결정된다. 계산된 회전 각도 θ_1, θ_2 그리고 θ_3을 $({}^0\mathbf{R}_3^{-1}){}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^3\mathbf{R}_6$에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 θ_4, θ_5 그리고 θ_6을 결정한다.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-14의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-15와 같이 정리할 수 있다. Step 1에서, ${}^2\mathbf{R}_3$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. ${}^0\mathbf{R}_2^{-1}$의 i번째 행 벡터의 요소에 대한 사상 행렬들 중에서 사상 행렬 [1, ±1]를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-46)의 관계식에서 i번째 요소를 선택하여 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_i - RHS(\theta_3)_i = 0$), 회전각도 θ_2의 솔루션을 계산한다. Step 2에서, 회전각도 θ_3의 솔루션을 계산하기 위해 식 (3-46)의 관계식에서 i번째 요소를 제외한 나머지를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_j + LHS(\theta_1, \theta_2)_k = RHS(\theta_3)_j + RHS(\theta_3)_k$).

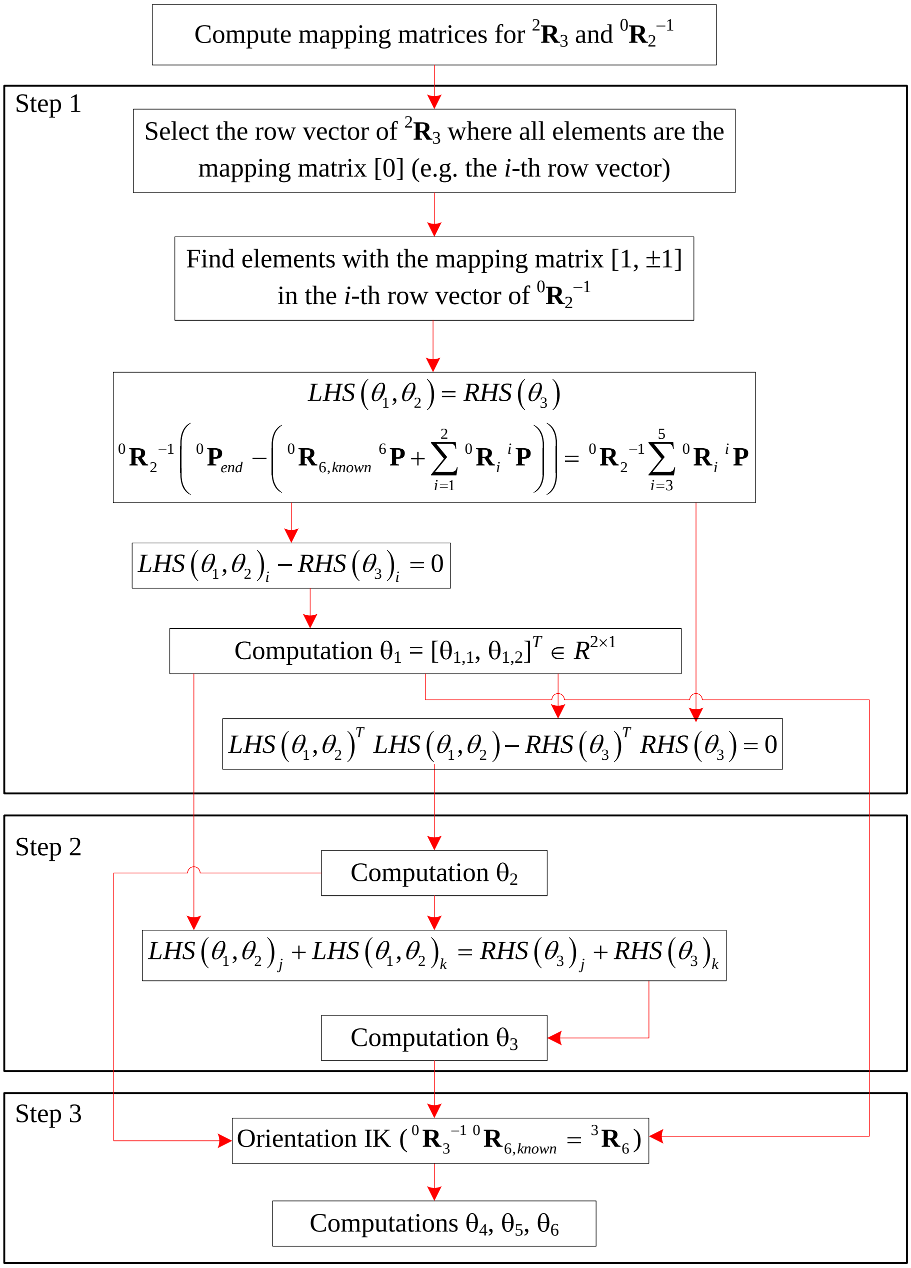


Fig. 3-15. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-14.

Two parallel axes II(z_0-z_1-x_2-y_3-x_4-y_5)

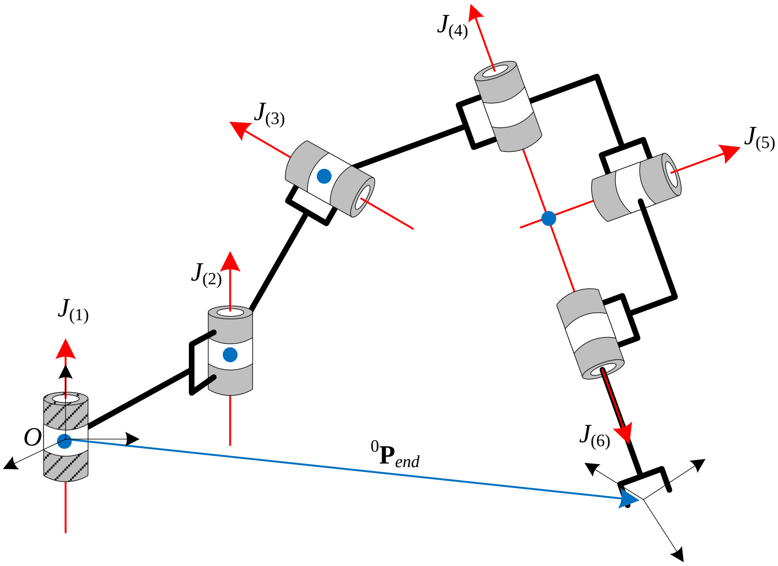


Fig. 3-16. 6-DOF manipulators with the last three joints axes intersect at a common point, where the two consecutive joints axes $J_{(1)}$ and $J_{(2)}$ are parallel (i.e., $J_{(1)}||J_{(2)}$).

Fig. 3-16은 회전관절 1과 2의 회전축이 서로 평행하며 (즉, $J_{(1)}||J_{(2)}$), 마지막에서 3개의 회전관절의 회전축이 교차하여 공통점을 가진 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, $^4\mathbf{P} = {}^5\mathbf{P} = [0, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$). 예를 들어 Fig. 3-16의 6자유도 매니퓰레이터가 z_0-z_1-x_2-y_3-x_4-y_5 회전 순서를 가진 경우, 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석에서 필요한 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$을 식 (3-53)과 같이 유도한다.

$$LHS(\theta_1,\theta_2) = RHS(\theta_3)$$
$$^0\mathbf{R}_2^{-1}\left({}^0\mathbf{P}_{end} - \left({}^0\mathbf{R}_{6,known}\,{}^6\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{2} {}^0\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P} \right) \right) = {}^0\mathbf{R}_2^{-1} \sum_{i=3}^{5} {}^0\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P} \tag{3-53}$$

식 (3-53)에서, $^0\mathbf{R}_2^{-1}$와 $^2\mathbf{R}_3$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 9와 같다. Table 9에서 $^2\mathbf{R}_3$의 첫번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수 θ_3에 관한

삼각함수를 가진다. ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$의 세번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수 θ_1과 θ_2에 관한 삼각함수를 가진다. ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$의 구성요소에 대한 사상 행렬들 중에서 사상 행렬 [1, 1]로부터, 식 (3-53)의 $LHS(\theta_1,\theta_2)$에 삼각함수의 복잡성(예, c_{1+2}와 s_{1+2})을 예측할 수 있다. 즉, 식 (3-53)의 관계식에서 세번째 요소는 $const = RHS(\theta_3)$다. 또한, ${}^{2}\mathbf{R}_3$의 직교성에 의해서 $RHS(\theta_3)^T RHS(\theta_3) = const$이다.

Table 9. Mapping matrices in ${}^{2}\mathbf{R}_3$, ${}^{2}\mathbf{R}_1$ and ${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$ for Fig. 3-16

Component	${}^{2}\mathbf{R}_3$	${}^{2}\mathbf{R}_1$	${}^{0}\mathbf{R}_2^{-1}$
(1,1)	[0]	[1]	[1, 1]
(1,2)	[0]	[1]	[1, 1]
(1,3)	[0]	[0]	[0, 0]
(2,1)	[0]	[1]	[1, 1]
(2,2)	[1]	[1]	[1, 1]
(2,3)	[1]	[0]	[0, 0]
(3,1)	[0]	[0]	[0, 0]
(3,2)	[1]	[0]	[0, 0]
(3,3)	[1]	[0]	[0, 0]

식 (3-53)의 관계식에서 세번째 요소부터(즉, $const = RHS(\theta_3)$), $A_1\cos(\theta_3) + A_2\sin(\theta_3) + A_3 = 0$와 같은 θ_3에 대한 식을 유도한다. 유도한 식으로부터 θ_3는 식 (3-54)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_3 = ATAN2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}}{-A_3}\right) \tag{3-54}$$

여기에서, $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$은 식 (3-55)와 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= -l_{z3} \\ A_2 &= -l_{y3} \\ A_3 &= P_z - l_{z1} - l_{z2} - l_{x6}r_{3,1} - l_{y6}r_{3,2} - l_{z6}r_{3,3} \end{aligned} \tag{3-55}$$

식 (3-53)의 관계식 양변에 ${}^0\mathbf{R}_2^{-1}({}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{P} + {}^0\mathbf{R}_3{}^3\mathbf{P})$를 더하여, 식 (3-56)과 같이 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_2, \theta_3)$을 유도한다.

$$\begin{gathered} LHS(\theta_1,\theta_2) = RHS(\theta_2) \\ {}^0\mathbf{R}_2^{-1}\left({}^0\mathbf{P}_{end} - \left({}^0\mathbf{R}_{6,known}{}^6\mathbf{P} + \sum_{i=2}^{3}{}^0\mathbf{R}_i{}^i\mathbf{P}\right)\right) = {}^0\mathbf{R}_2^{-1}\left({}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{P} + \sum_{i=4}^{5}{}^0\mathbf{R}_i{}^i\mathbf{P}\right) \end{gathered} \tag{3-56}$$

${}^2\mathbf{R}_1$의 직교성에 의해서, 식 (3-56)에 $RHS(\theta_3)$의 내적은 $RHS(\theta_3)^T RHS(\theta_3) = const$이다. 그러므로, 식 (3-56) 로부터 유도한 식 $LHS(\theta_1, \theta_2)^T LHS(\theta_1, \theta_2) - RHS(\theta_2)^T RHS(\theta_2) = 0$에 식 (3-54)에서 계산된 회전 각도 θ_1를 대입한다. 이때, $B_1\cos(\theta_1 + \theta_2) + B_2\sin(\theta_1 + \theta_2) + B_3 = 0$와 같이 $\theta_1 + \theta_2$에 대한 식으로 표현된다. 따라서, $\theta_1 + \theta_2$는 식 (3-57)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_1 + \theta_2 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1^2 + B_2^2 - B_3^2}}{-B_3}\right) \tag{3-57}$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-55)와 같다.

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \left(2P_y l_{z3} - 2l_{x6}l_{z3}r_{2,1} - 2l_{y6}l_{z3}r_{2,2} - 2l_{z3}l_{z6}r_{2,3}\right)s_3 \\
&\quad + \left(2l_{x6}l_{y3}r_{2,1} + 2l_{y3}l_{y6}r_{2,2} + 2l_{y3}l_{z6}r_{2,3} - 2P_y l_{y3}\right)c_3 \\
&\quad - 2P_x l_{x3} + 2l_{y2}l_{y6}r_{2,2} + 2l_{y2}l_{z6}r_{2,3} - 2P_x l_{x2} + 2l_{x2}l_{x6}r_{1,1} + 2l_{x3}l_{x6}r_{1,1} \\
&\quad + 2l_{x2}l_{y6}r_{1,2} + 2l_{x3}l_{y6}r_{1,2} + 2l_{x6}l_{y2}r_{2,1} + 2l_{x2}l_{z6}r_{1,3} + 2l_{x3}l_{z6}r_{1,3} - 2P_y l_{y2} \\
B_2 &= +\left(2l_{x6}l_{z3}r_{1,1} + 2l_{y6}l_{z3}r_{1,2} + 2l_{z3}l_{z6}r_{1,3} - 2P_x l_{z3}\right)s_3 \\
&\quad - \left(2l_{x6}l_{y3}r_{1,1} + 2l_{y3}l_{y6}r_{1,2} + 2l_{y3}l_{z6}r_{1,3}\right)c_3 \\
&\quad + 2P_x l_{y2} - 2P_y l_{x2} - 2P_y l_{x3} + 2P_x c_3 l_{y3} + 2l_{x2}l_{x6}r_{2,1} + 2l_{x3}l_{x6}r_{2,1} - 2l_{x6}l_{y2}r_{1,1} \\
&\quad + 2l_{x2}l_{y6}r_{2,2} + 2l_{x3}l_{y6}r_{2,2} - 2l_{y2}l_{y6}r_{1,2} + 2l_{x2}l_{z6}r_{2,3} + 2l_{x3}l_{z6}r_{2,3} - 2l_{y2}l_{z6}r_{1,3} \\
B_3 &= \left(2l_{x6}l_{z3}r_{3,1} + 2l_{y2}l_{y3} + 2l_{y6}l_{z3}r_{3,2} + 2l_{z2}l_{z3} + 2l_{z3}l_{z6}r_{3,3} - 2P_z l_{z3}\right)c_3 \\
&\quad + \left(2l_{x6}l_{y3}r_{3,1} - 2l_{y2}l_{z3} + 2l_{y3}l_{y6}r_{3,2} + 2l_{y3}l_{z2} + 2l_{y3}l_{z6}r_{3,3} - 2P_z l_{y3}\right)s_3 \\
&\quad + P_x^2 - 2P_x l_{x6}r_{1,1} - 2P_x l_{y6}r_{1,2} - 2P_x l_{z6}r_{1,3} + P_y^2 - 2P_y l_{x6}r_{2,1} - 2P_y l_{y6}r_{2,2} \\
&\quad - 2P_y l_{z6}r_{2,3} + P_z^2 - 2P_z l_{x6}r_{3,1} - 2P_z l_{y6}r_{3,2} - 2P_z l_{z2} - 2P_z l_{z6}r_{3,3} + 2l_{x6}l_{y6}r_{2,1}r_{2,2} \\
&\quad + 2l_{x6}l_{y6}r_{3,1}r_{3,2} + 2l_{x6}l_{z2}r_{3,1} + 2l_{x6}l_{z6}r_{1,1}r_{1,3} + 2l_{x6}l_{z6}r_{2,1}r_{2,3} + 2l_{x6}l_{z6}r_{3,1}r_{3,3} - l_{y1}^2 \\
&\quad + l_{y2}^2 + l_{y6}^2 r_{1,2}^2 + l_{y6}^2 r_{2,2}^2 + l_{y6}^2 r_{3,2}^2 + 2l_{y6}l_{z2}r_{3,2} + 2l_{y6}l_{z6}r_{1,2}r_{1,3} + 2l_{y6}l_{z6}r_{2,2}r_{2,3} \\
&\quad + 2l_{y6}l_{z6}r_{3,2}r_{3,3} - l_{z1}^2 + l_{z2}^2 + 2l_{z2}l_{z6}r_{3,3} + l_{z6}^2 r_{1,3}^2 + l_{z6}^2 r_{2,3}^2 + l_{z6}^2 r_{3,3}^2 + l_{y3}^2 \\
&\quad + l_{z3}^2 - l_{x1}^2 + l_{x2}^2 + 2l_{x2}l_{x3} + l_{x3}^2 + 2l_{x6}l_{y6}r_{1,1}r_{1,2} + l_{x6}^2 r_{1,1}^2 + l_{x6}^2 r_{2,1}^2 + l_{x6}^2 r_{3,1}^2
\end{aligned}
\tag{3-58}
$$

식 (3-53)의 관계식 $LHS(\theta_1, \theta_2) = RHS(\theta_3)$에서 세번째 요소를 제외한 나머지 요소들을 합한 방정식(즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_1 + LHS(\theta_1, \theta_2)_2 = RHS(\theta_3)_1 + RHS(\theta_3)_2$)에 계산된 $\theta_1 + \theta_2$와 θ_3를 대입하면, $C_1\cos(\theta_2) + C_2\sin(\theta_2) + C_3 = 0$와 같은 θ_2에 대한 식을 유도할 수 있다. 유도된 식으로부터 θ_2는 식 (3-59)과 같이 결정할 수 있다.

$$
\theta_2 = ATAN2\left(\frac{C_1}{C_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}}{-C_3}\right)
\tag{3-59}
$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3]$은 식 (3-60)와 같다.

$$\begin{aligned} C_1 &= -l_{x1} - l_{y1} \\ C_2 &= l_{x1} - l_{y1} \\ C_3 &= -c_3 l_{y3} + l_{z3} s_3 - l_{x3} - l_{y2} - l_{x2} \\ &\quad + \left(P_y + P_x - l_{x6} r_{1,1} - l_{x6} r_{2,1} - l_{y6} r_{1,2} - l_{y6} r_{2,2} - l_{z6} r_{1,3} - l_{z6} r_{2,3}\right) c_{1+2} \\ &\quad + \left(P_y - P_x + l_{x6} r_{1,1} - l_{x6} r_{2,1} + l_{y6} r_{1,2} - l_{y6} r_{2,2} + l_{z6} r_{1,3} - l_{z6} r_{2,3}\right) s_{1+2} \end{aligned} \tag{3-60}$$

회전 각도 θ_1은 식 (3-57)의 $\theta_1 + \theta_2$에서 식 (3-59)의 θ_2을 뺌으로써 결정된다. 계산된 회전 각도 θ_1, θ_2 그리고 θ_3을 $({}^0\mathbf{R}_3^{-1}){}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^3\mathbf{R}_6$에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 θ_4, θ_5 그리고 θ_6을 결정한다.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-16의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-17와 같이 정리할 수 있다. Step 1에서, ${}^0\mathbf{R}_2^{-1}$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0, 0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-53)의 관계식에서 i번째 요소를 선택하여 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_i - RHS(\theta_3)_i = 0$), 회전각도 θ_3의 솔루션을 계산한다. Step 2에서, 식 (3-53)의 관계식에서 i번째 요소를 제외한 나머지를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_1, \theta_2)_j + LHS(\theta_1, \theta_2)_k = RHS(\theta_3)_j + RHS(\theta_3)_k$).

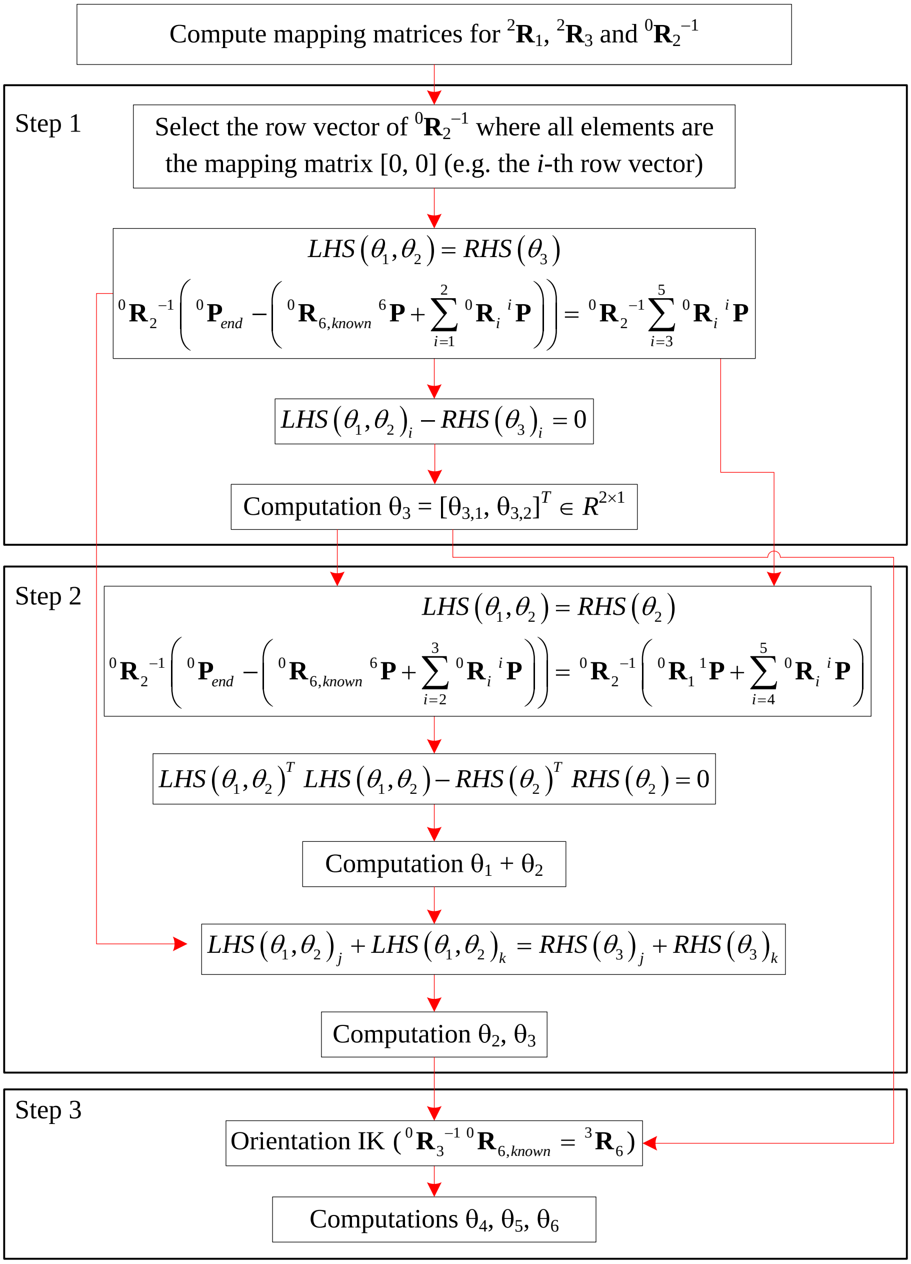


Fig. 3-17. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-16.

(2) the first 3 joint axes intersect at a common point

Ganaral

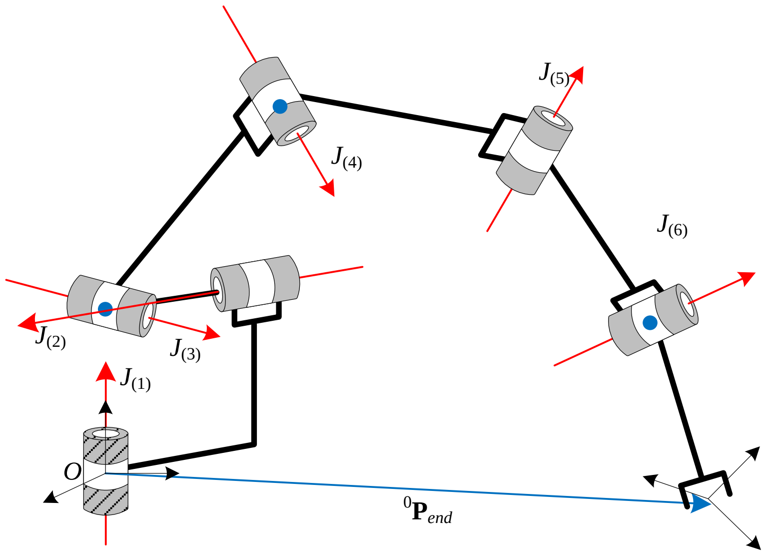


Fig. 3-18. 6-DOF manipulators with the first three joints axes intersect at a common point.

Fig. 3-18은 처음 3개의 회전관절의 회전축이 교차하여 공통점을 가진 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, ${}^{1}\mathbf{P} = {}^{2}\mathbf{P} = [0, 0, 0]^{T} \in R^{3\times1}$). 예를 들어 Fig. 3-18의 6자유도 매니퓰레이터가 z_0-y_1-x_2-y_3-x_4-y_5 회전 순서를 가진 경우, 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석에서 필요한 관계식 $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)$을 식 (3-61)과 같이 유도한다.

$$\begin{gathered} LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4) \\ {}^{4}\mathbf{R}_{6}\left(\left({}^{0}\mathbf{R}_{6,known}{}^{-1}\right){}^{0}\mathbf{P}_{end} - \sum_{i=4}^{6} {}^{6}\mathbf{R}_{i}\,{}^{i}\mathbf{P}\right) = {}^{4}\mathbf{R}_{6}\sum_{i=1}^{3} {}^{6}\mathbf{R}_{i}\,{}^{i}\mathbf{P} \end{gathered} \tag{3-61}$$

식 (3-61)에서, ${}^{4}\mathbf{R}_{6}$과 ${}^{4}\mathbf{R}_{3}$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 10와 같다. Table 10에서 ${}^{4}\mathbf{R}_{3}$의 두번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수 θ_3에 관

한 삼각함수를 가진다. ${}^4\mathbf{R}_6$의 구성요소에 대한 사상 행렬들 중에서 사상 행렬 [1, ±1]로부터, 식 (3-61)의 $LHS(\theta_5,\theta_6)$에 삼각함수의 복잡성(예, c_5c_6, c_5s_6, s_6c_6, s_5s_6)을 예측할 수 있다. 따라서, 식 (3-61)의 관계식 $LHS(\theta_5,\theta_6) = RHS(\theta_4)$에서 두번째 요소는 $LHS(\theta_5,\theta_6) = const$이다. 또한, ${}^4\mathbf{R}_3$의 직교성에 의해서 $RHS(\theta_4)^T RHS(\theta_4) = const$이다.

Table 10. Mapping matrices in ${}^4\mathbf{R}_3$ and ${}^4\mathbf{R}_6$ for Fig. 3-18

Component	${}^4\mathbf{R}_3$	${}^4\mathbf{R}_6$
(1,1)	[1]	[0, 1]
(1,2)	[0]	[0, 0]
(1,3)	[1]	[0, 1]
(2,1)	[0]	[1, ±1]
(2,2)	[0]	[1, 0]
(2,3)	[0]	[1, ±1]
(3,1)	[1]	[1, ±1]
(3,2)	[0]	[1, 0]
(3,3)	[1]	[1, ±1]

식 (3-61)의 관계식 $LHS(\theta_5,\theta_6) = RHS(\theta_4)$로부터, 식 (3-62)과 같이 θ_5과 θ_6에 대한 연립방정식을 기술할 수 있다.

$$
\begin{gathered}
LHS(\theta_5,\theta_6)_2 - RHS(\theta_4)_2 = 0 \\
LHS(\theta_5,\theta_6)^T\, LHS(\theta_5,\theta_6) - RHS(\theta_4)^T\, RHS(\theta_4) = 0
\end{gathered}
\tag{3-62}
$$

식 (3-62)에 독립변수 θ_1과 θ_2에 관한 삼각함수만 존재하므로, 식 (3-62)은 c_6과 s_6에 대한 방정식으로 식 (3-63)와 같이 다시 정리할 수 있다.

$$
\begin{gathered}
A_{1,1}c_6 + A_{1,2}s_6 + A_{1,3} = 0 \\
A_{2,1}c_6 + A_{2,2}s_6 + A_{2,3} = 0
\end{gathered}
\tag{3-63}
$$

벡터 $\mathbf{x}$가 $\mathbf{x} = [c_6,\ s_6]^T \in R^{2\times1}$이라면, 식 (3-63)로부터 벡터 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{x} = -[A_{1,1},\ A_{1,2};\ A_{2,1},\ A_{2,2}]^{-1}[A_{1,3};\ A_{2,3}]$와 같이 결정할 수 있다. 여기에서, $\mathbf{A} = [A_{1,1},\ A_{1,2},\ A_{1,3};\ A_{2,1},\ A_{2,2},\ A_{2,3}]$은 식 (3-64)와 같다.

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= \left(l_{z6} - P_x r_{1,3} - P_y r_{2,3} - P_z r_{3,3}\right) s_5 \\
A_{1,2} &= \left(P_x r_{1,1} - l_{x6} + P_y r_{2,1} + P_z r_{3,1}\right) s_5 \\
A_{1,3} &= l_{z5} s_5 + \left(P_x r_{1,2} + P_y r_{2,2} + P_z r_{3,2} - l_{y5} - l_{y6}\right) c_5 - l_{y4} - l_{y3} \\
A_{2,1} &= \left(2 l_{z4} l_{z6} - 2P_x l_{z4} r_{1,3} - 2P_y l_{z4} r_{2,3} - 2P_z l_{z4} r_{3,3}\right) c_5 \\
&\quad + \left(2P_x l_{y4} r_{1,3} + 2P_y l_{y4} r_{2,3} + 2P_z l_{y4} r_{3,3} - 2 l_{y4} l_{z6}\right) s_5 \\
&\quad + 2 l_{x4} l_{x6} + 2 l_{x5} l_{x6} + 2 l_{z5} l_{z6} - 2P_x l_{x4} r_{1,1} - 2P_x l_{x5} r_{1,1} - 2P_y l_{x4} r_{2,1} - 2P_y l_{x5} r_{2,1} \\
&\quad - 2P_x l_{z5} r_{1,3} - 2P_z l_{x4} r_{3,1} - 2P_z l_{x5} r_{3,1} - 2P_y l_{z5} r_{2,3} - 2P_z l_{z5} r_{3,3} \\
A_{2,2} &= \left(2P_x l_{z4} r_{1,1} + 2P_y l_{z4} r_{2,1} + 2P_z l_{z4} r_{3,1} - 2 l_{x6} l_{z4}\right) c_5 \\
&\quad + \left(2 l_{x6} l_{y4} - 2P_x l_{y4} r_{1,1} - 2P_y l_{y4} r_{2,1} - 2P_z l_{y4} r_{3,1}\right) s_5 \\
&\quad + 2 l_{x4} l_{z6} + 2 l_{x5} l_{z6} - 2 l_{x6} l_{z5} - 2P_x l_{x4} r_{1,3} - 2P_x l_{x5} r_{1,3} - 2P_y l_{x4} r_{2,3} - 2P_y l_{x5} r_{2,3} \\
&\quad + 2P_x l_{z5} r_{1,1} - 2P_z l_{x4} r_{3,3} - 2P_z l_{x5} r_{3,3} + 2P_y l_{z5} r_{2,1} + 2P_z l_{z5} r_{3,1} \\
A_{2,3} &= \left(2 l_{y4} l_{y5} + 2 l_{y4} l_{y6} - 2P_x l_{y4} r_{1,2} - 2P_z l_{y4} r_{3,2} + 2 l_{z4} l_{z5} - 2P_y l_{y4} r_{2,2}\right) c_5 \\
&\quad + \left(2 l_{y5} l_{z4} - 2 l_{y4} l_{z5} + 2 l_{y6} l_{z4} - 2P_z l_{z4} r_{3,2} - 2P_y l_{z4} r_{2,2} - 2P_x l_{z4} r_{1,2}\right) s_5 \\
&\quad + P_x^2 r_{1,1}^2 + P_x^2 r_{1,2}^2 + P_x^2 r_{1,3}^2 + 2P_x P_y r_{1,1} r_{2,1} + 2P_x P_y r_{1,2} r_{2,2} + 2P_x P_y r_{1,3} r_{2,3} \\
&\quad + 2P_x P_z r_{1,1} r_{3,1} + 2P_x P_z r_{1,2} r_{3,2} + 2P_x P_z r_{1,3} r_{3,3} - 2P_x l_{x6} r_{1,1} - 2P_x l_{y5} r_{1,2} - 2P_x l_{y6} r_{1,2} \\
&\quad - 2P_x l_{z6} r_{1,3} + P_y^2 r_{2,1}^2 + P_y^2 r_{2,2}^2 + P_y^2 r_{2,3}^2 + 2P_y P_z r_{2,1} r_{3,1} + 2P_y P_z r_{2,2} r_{3,2} + 2P_y P_z r_{2,3} r_{3,3} \\
&\quad - 2P_y l_{x6} r_{2,1} - 2P_y l_{y5} r_{2,2} - 2P_y l_{y6} r_{2,2} - 2P_y l_{z6} r_{2,3} + P_z^2 r_{3,1}^2 + P_z^2 r_{3,2}^2 + P_z^2 r_{3,3}^2 - 2P_z l_{x6} r_{3,1} \\
&\quad - 2P_z l_{y5} r_{3,2} - 2P_z l_{y6} r_{3,2} - 2P_z l_{z6} r_{3,3} - l_{x3}^2 + l_{x4}^2 + 2 l_{x4} l_{x5} + l_{x5}^2 + l_{x6}^2 - l_{y3}^2 + l_{y4}^2 + l_{y5}^2 \\
&\quad + 2 l_{y5} l_{y6} + l_{y6}^2 - l_{z3}^2 + l_{z4}^2 + l_{z5}^2 + l_{z6}^2
\end{aligned} \tag{3-64}
$$

식 (3-63)으로부터, 계산된 벡터 $\mathbf{x}$를 피타고라스의 삼각함수 항등식(Pythagorean trigonometric identity (i.e., $c_6^2 + s_6^2 - 1 = 0$))에 대입하여 half tangent formula (i.e., $c_5 = (1 - t_5^2)/(1 + t_5^2)$, $s_5 = 2t_5^2/(1 + t_5^2)$ and $t_5 = \tan(\theta_5/2)$)을 적용하면, t_5에 대한 4차 방정식 $at_5^4 + bt_5^3 + ct_5^2 + dt_5 + e = 0$을 얻을 수 있다. 여기에서, a, b, c, d 그리고 e는 식 (3-65)과 같다.

$$\begin{aligned} a &= A_{1,1}^2 - 2A_{1,1}A_{1,3} + A_{1,3}^2 + A_{2,1}^2 - 2A_{2,1}A_{2,3} + A_{2,3}^2 \\ b &= 4A_{1,2}A_{1,3} - 4A_{1,1}A_{1,2} - 4A_{2,1}A_{2,2} + 4A_{2,2}A_{2,3} \\ c &= -2A_{1,1}^2 + 4A_{1,2}^2 + 2A_{1,3}^2 - 2A_{2,1}^2 + 4A_{2,2}^2 + 2A_{2,3}^2 - 4 \\ d &= 4A_{1,1}A_{1,2} + 4A_{1,2}A_{1,3} + 4A_{2,1}A_{2,2} + 4A_{2,2}A_{2,3} \\ e &= A_{1,1}^2 + 2A_{1,1}A_{1,3} + A_{1,3}^2 + A_{2,1}^2 + 2A_{2,1}A_{2,3} + A_{2,3}^2 \end{aligned} \tag{3-65}$$

따라서, 식 (3-23)에 근거하여 계산된 $\mathbf{t}_5 = [t_{5,1}, t_{5,2}, t_{5,3}, t_{5,4}]^T \in R^{4\times1}$로부터 $\theta_{5,i} = 2\tan^{-1}(t_{5,i})$ for $i = 1,\ldots,4$ 을 얻을 수 있다(즉, $\boldsymbol{\theta}_5 = [\theta_{5,1}, \theta_{5,2}, \theta_{5,3}, \theta_{5,4}]^T \in R^{4\times1}$).

관계식 $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)$의 두번째 요소 (즉, $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)_2$)에 계산한 $\boldsymbol{\theta}_5 = [\theta_{5,1}, \theta_{5,2}, \theta_{5,3}, \theta_{5,4}]^T \in R^{4\times1}$의 요소들을 각각 대입하면, $B_1\cos(\theta_6) + B_2\sin(\theta_6) + B_3 = 0$와 같은 θ_6에 대한 식을 유도할 수 있다. 유도된 식으로부터 θ_6는 식 (3-66)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_6 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1^2 + B_2^2 - B_3^2}}{-B_3}\right) \tag{3-66}$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-67)와 같다.

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(l_{z6} - P_x r_{1,3} - P_y r_{2,3} P_z r_{3,3}\right) s_5 \\ B_2 &= \left(P_x r_{1,1} - l_{x6} + P_y r_{2,1} + P_z r_{3,1}\right) s_5 \\ B_3 &= -l_{y4} - l_{y3} + l_{z5} s_5 + \left(P_x r_{1,2} + P_y r_{2,2} + P_z r_{3,2} - l_{y5} - l_{y6}\right) c_5 \end{aligned} \tag{3-67}$$

식 (3-61)의 관계식 $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)$에서 두번째 요소를 제외한 나머지 요소들을 합한 방정식 (즉, $LHS(\theta_5, \theta_6)_1 + LHS(\theta_5, \theta_6)_3 = RHS(\theta_4)_1 + RHS(\theta_4)_3$)에 계산된 θ_5과 θ_6를 대입하면, $C_1\cos(\theta_4) + C_2\sin(\theta_4) + C_3 = 0$와 같은 θ_4에 대한 식을 유도할 수 있다. 유도된 식으로부터 θ_4는 식 (3-68)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_4 = ATAN2\left(\frac{C_1}{C_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2 - {C_3}^2}}{-C_3}\right) \tag{3-68}$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3]$은 식 (3-69)와 같다.

$$\begin{aligned} C_1 &= -l_{x3} - l_{z3} \\ C_2 &= l_{z3} - l_{x3} \\ C_3 &= -l_{x5} - l_{z4} - l_{x4} - l_{z5}c_5 + \left(P_x r_{1,2} - l_{y5} - l_{y6} + P_y r_{2,2} + P_z r_{3,2}\right)s_5 \\ &\quad + \left(P_x r_{1,3} + P_y r_{2,3} + P_z r_{3,3} - l_{z6}\right)s_6 + \left(P_x r_{1,1} + P_y r_{2,1} + P_z r_{3,1} - l_{x6}\right)c_6 \\ &\quad + \left(P_x r_{1,3} + P_y r_{2,3} + P_z r_{3,3} - l_{z6}\right)c_5 c_6 + \left(l_{x6} - P_x r_{1,1} - P_y r_{2,1} - P_z r_{3,1}\right)c_5 s_6 \end{aligned} \tag{3-69}$$

계산된 회전 각도 θ_4, θ_5 그리고 θ_6을 ${}^0\mathbf{R}_{6,known}({}^3\mathbf{R}_6^{-1}) = {}^0\mathbf{R}_3$에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 θ_1, θ_2 그리고 θ_3을 결정한다.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-18의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-19와 같이 정리할 수 있다. Step 1에서, 회전각도 θ_2의 솔루션을 계산하기 위해 ${}^4\mathbf{R}_3$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-61)의 관계식에서 i번째 요소를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_i - RHS(\theta_4)_i = 0$). Step 2에서, 회전각도 θ_4의 솔루션을 계산하기 위해 식 (3-61)의 관계식에서 i번째 요소를 제외한 나머지를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_j + LHS(\theta_5,\theta_6)_k = RHS(\theta_4)_j + RHS(\theta_4)_k$).

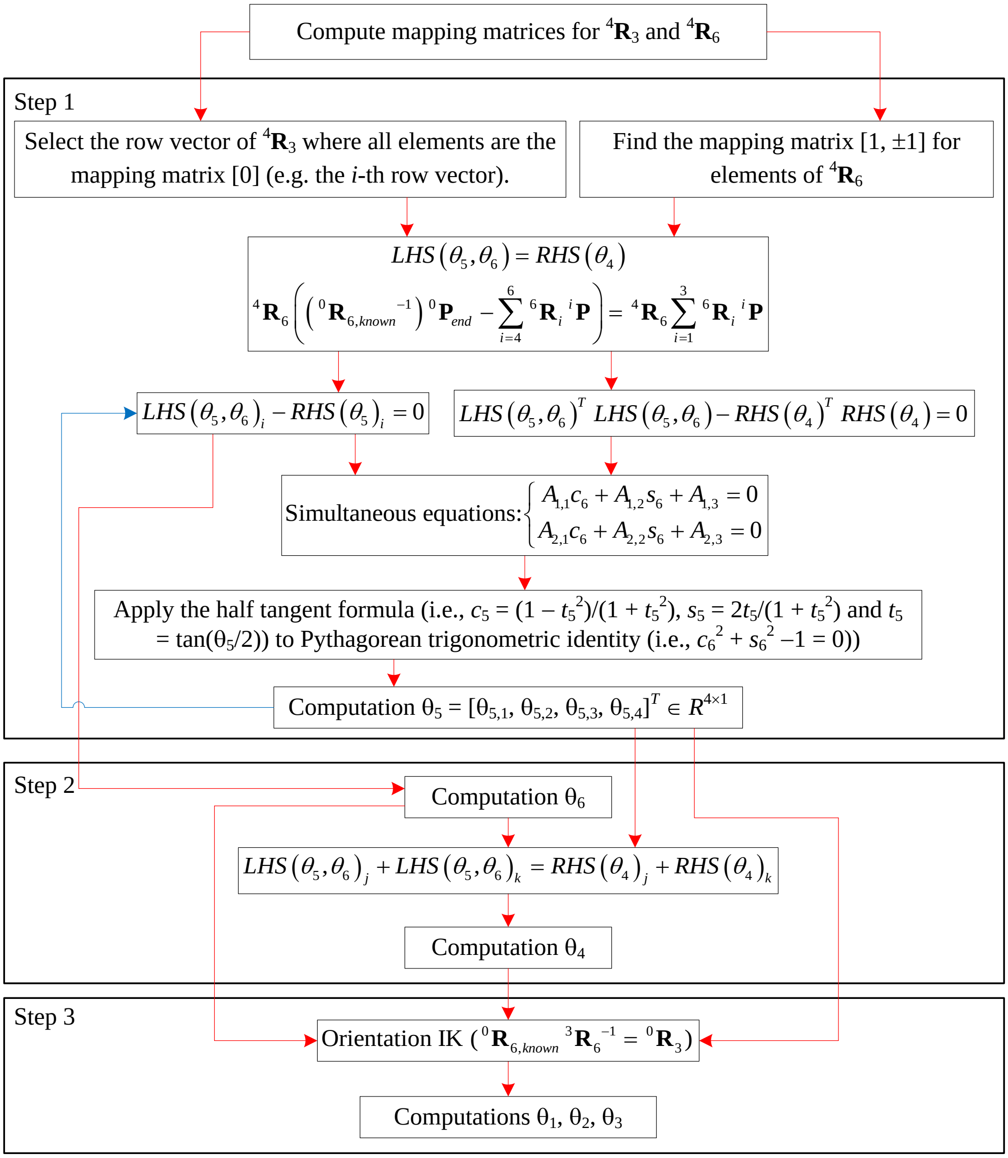


Fig. 3-19. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-18.

Two parallel axes I(z_0-y_1-x_2-y_3-y_4-z_5)

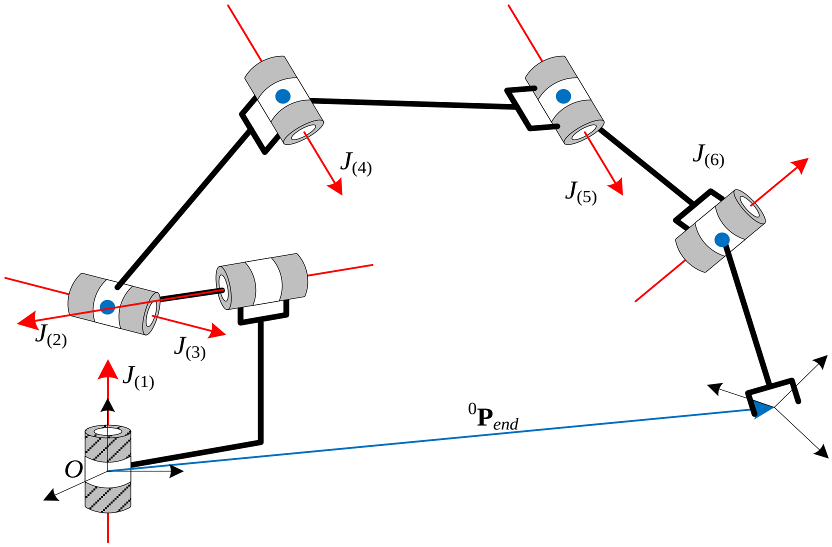


Fig. 3-20. 6-DOF manipulators with the first three joints axes intersect at a common point, where the two consecutive joints axes $J_{(4)}$ and $J_{(5)}$ are parallel (i.e., $J_{(4)}||J_{(5)}$).

Fig. 3-20은 회전관절 4과 5의 회전축이 서로 평행하며 (즉, $J_{(4)}||J_{(5)}$), 처음에 3개의 회전관절의 회전축이 교차하여 공통점을 가진 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, ${}^1\mathbf{P} = {}^2\mathbf{P} = [0, 0, 0]^T \in R^{3\times1}$). 예를 들어 Fig. 3-20의 6자유도 매니퓰레이터가 z_0-y_1-x_2-y_3-y_4-z_5 회전 순서를 가진 경우, 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석에서 필요한 관계식 $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)$을 식 (3-70)과 같이 유도한다.

$$
\begin{aligned}
&LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4) \\
&{}^4\mathbf{R}_6\left(\left({}^0\mathbf{R}_{6,known}{}^{-1}\right){}^0\mathbf{P}_{end} - \sum_{i=4}^{6}{}^6\mathbf{R}_i{}^i\mathbf{P}\right) = {}^4\mathbf{R}_6\sum_{i=1}^{3}{}^6\mathbf{R}_i{}^i\mathbf{P}
\end{aligned}
\tag{3-70}
$$

식 (3-70)에서, ${}^4\mathbf{R}_6$과 ${}^4\mathbf{R}_3$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 11와 같다. Table 11에서 ${}^4\mathbf{R}_3$의 두번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수 θ_3에 관한 삼각함수를 가진다. ${}^4\mathbf{R}_6$의 구성요소에 대한 사상 행렬들 중에서 사상 행렬 [1, ±1]

로부터, 식 (3-70)의 $LHS(\theta_5,\theta_6)$에 삼각함수의 복잡성(예, c_5c_6, c_5s_6, s_6c_6, s_5s_6)을 예측할 수 있다. 따라서, 식 (3-70)의 관계식 $LHS(\theta_5,\theta_6) = RHS(\theta_4)$에서 두번째 요소는 $LHS(\theta_5,\theta_6) = const$이다. 또한, ${}^4\mathbf{R}_3$의 직교성에 의해서 $RHS(\theta_4)^T RHS(\theta_4) = const$이다.

Table 11. Mapping matrices in ${}^4\mathbf{R}_3$ and ${}^4\mathbf{R}_6$ for Fig. 3-20

Component	${}^4\mathbf{R}_3$	${}^4\mathbf{R}_6$
(1,1)	[1]	[1, ±1]
(1,2)	[0]	[1, ±1]
(1,3)	[1]	[1, 0]
(2,1)	[0]	[0, 1]
(2,2)	[0]	[0, 1]
(2,3)	[0]	[0, 0]
(3,1)	[1]	[1, ±1]
(3,2)	[0]	[1, ±1]
(3,3)	[1]	[1, 0]

식 (3-70)의 관계식에서 두번째 요소로부터(즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_2 = RHS(\theta_4)_2$), $A_1\cos(\theta_6) + A_2\sin(\theta_6) + A_3 = 0$와 같은 θ_6에 대한 식을 유도한다. 유도한 식으로부터 θ_6은 식 (3-71)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_6 = ATAN2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}}{-A_3}\right) \tag{3-71}$$

여기에서, $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$은 식 (3-72)와 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= l_{y6} - P_x r_{1,2} - P_y r_{2,2} - P_z r_{3,2} \\ A_2 &= l_{x6} - P_x r_{1,1} - P_y r_{2,1} - P_z r_{3,1} \\ A_3 &= l_{y3} + l_{y4} + l_{y5} \end{aligned} \tag{3-72}$$

식 (3-70)의 관계식 $LHS(\theta_5,\theta_6) = RHS(\theta_4)$로부터, 유도한 식 $LHS(\theta_5, \theta_6)^T LHS(\theta_5, \theta_6) - RHS(\theta_4)^T RHS(\theta_4) = 0$에 식 (3-71)에서 계산된 회전 각도 θ_6을 대입한다. 이때, $B_1\cos(\theta_5) + B_2\sin(\theta_5) + B_3 = 0$와 같이 θ_5에 대한 식으로 표현된다. 따라서, θ_5는 식 (3-73)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_5 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1^{\,2} + B_2^{\,2} - B_3^{\,2}}}{-B_3}\right) \tag{3-73}$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-74)와 같다.

$$\begin{aligned}
B_1 =& \left(2l_{x4}l_{y6} - 2P_x l_{x4} r_{1,2} - 2P_y l_{x4} r_{2,2} - 2P_z l_{x4} r_{3,2}\right) s_6 \\
&+\left(2P_x l_{x4} r_{1,1} + 2P_y lx_4 r_{2,1} + 2P_z l_{x4} r_{3,1}\right) c_6 \\
&+2P_x l_{z4} r_{1,3} - 2l_{z4} lz_5 - 2l_{z4} l_{z6} - 2l_{x4} l_{x5} + 2P_y l_{z4} r_{2,3} + 2P_z l_{z4} r_{3,3} - 2c_6 l_{x4} l_{x6} \\
B_2 =& \left(2P_x l_{z4} r_{1,2} - 2l_{y6} l_{z4} + 2P_y l_{z4} r_{2,2} + 2P_z l_{z4} r_{3,2}\right) s_6 \\
&+\left(2l_{x6} l_{z4} - 2P_x l_{z4} r_{1,1} - 2P_y l_{z4} r_{2,1} - 2P_z l_{z4} r_{3,1}\right) c_6 \\
&+2l_{x5} l_{z4} - 2l_{x4} l_{z5} - 2l_{x4} l_{z6} + 2P_x l_{x4} r_{1,3} + 2P_y l_{x4} r_{2,3} + 2P_z l_{x4} r_{3,3} \\
B_3 =& -P_x^{\,2} r_{1,1}^{\,2} - P_x^{\,2} r_{1,2}^{\,2} - P_x^{\,2} r_{1,3}^{\,2} - 2P_x P_y r_{1,1} r_{2,1} - 2P_x P_y r_{1,2} r_{2,2} - 2P_x P_y r_{1,3} r_{2,3} - 2P_x P_z r_{1,1} r_{3,1} \\
&-2P_x P_z r_{1,2} r_{3,2} - 2P_x P_z r_{1,3} r_{3,3} + 2P_x l_{x6} r_{1,1} + 2P_x l_{y6} r_{1,2} + 2P_x l_{z5} r_{1,3} + 2P_x l_{z6} r_{1,3} - P_y^{\,2} r_{2,1}^{\,2} \\
&-P_y^{\,2} r_{2,2}^{\,2} - P_y^{\,2} r_{2,3}^{\,2} - 2P_y P_z r_{2,1} r_{3,1} - 2P_y P_z r_{2,2} r_{3,2} - 2P_y P_z r_{2,3} r_{3,3} + 2P_y l_{y6} r_{2,2} \\
&+2P_y l_{z5} r_{2,3} + 2P_y l_{z6} r_{2,3} - P_z^{\,2} r_{3,1}^{\,2} - P_z^{\,2} r_{3,2}^{\,2} - P_z^{\,2} r_{3,3}^{\,2} + 2P_y l_{x6} r_{2,1} + l_{y3}^{\,2} - l_{y4}^{\,2} \\
&-2l_{y4} l_{y5} - l_{y5}^{\,2} + 2P_z l_{x6} r_{3,1} + 2P_z l_{y6} r_{3,2} + 2P_z l_{z5} r_{3,3} + 2P_z l_{z6} r_{3,3} + l_{x3}^{\,2} - l_{x4}^{\,2} \\
&-l_{x5}^{\,2} - l_{y6}^{\,2} + l_{z3}^{\,2} - l_{z4}^{\,2} - l_{z5}^{\,2} - 2l_{z5} l_{z6} - l_{z6}^{\,2} \\
&+\left(2P_x l_{y4} r_{1,1} + 2P_x l_{y5} r_{1,1} - 2P_z l_{x5} r_{3,2} + 2P_z l_{y4} r_{3,1} - 2P_y l_{x5} r_{2,2} + 2P_y l_{y4} r_{2,1}\right) s_6 \\
&+\left(2P_y l_{y5} r_{2,1} + 2P_z l_{y5} r_{3,1} + 2l_{x5} l_{y6} - l_{x6}^{\,2} - 2l_{x6} l_{y4} - 2l_{x6} l_{y5} - 2P_x l_{x5} r_{1,2}\right) s_6 \\
&+\left(2P_x l_{y4} r_{1,2} + 2P_x l_{y5} r_{1,2} - 2l_{y4} l_{y6} - 2l_{y5} l_{y6} + 2P_y l_{x5} r_{2,1} + 2P_y l_{y4} r_{2,2}\right) c_6 \\
&+\left(2P_y l_{y5} r_{2,2} + 2P_z l_{x5} r_{3,1} + 2P_z l_{y4} r_{3,2} + 2P_z l_{y5} r_{3,2} - 2l_{x5} l_{x6} + 2P_z l_{x5} r_{1,1}\right) c_6
\end{aligned} \tag{3-74}$$

식 (3-70)의 관계식 $LHS(\theta_5,\theta_6) = RHS(\theta_4)$에서 두번째 요소를 제외한 나머지 요소들을

합한 방정식 (즉, $LHS(\theta_3)_1 + LHS(\theta_3)_3 = RHS(\theta_1, \theta_2)_1 + RHS(\theta_1, \theta_2)_3$)에 식 (3-73)과 식 (3-71)에서 결정된 θ_5와 θ_6를 대입하면, $C_1\cos(\theta_4) + C_2\sin(\theta_4) + C_3 = 0$와 같은 θ_4에 대한 식을 유도할 수 있다. 유도된 식으로부터 θ_4는 식 (3-75)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_4 = ATAN2\left(\frac{C_1}{C_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2} - C_3^{\,2}}}{-C_3}\right) \tag{3-75}$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3]$은 식 (3-76)와 같다.

$$\begin{aligned}
C_1 &= l_{x3} + l_{z3} \\
C_2 &= l_{x3} - l_{z3} \\
C_3 &= l_{x4} + l_{z4} - l_{x5}s_5 + l_{z5}s_5 + l_{z6}s_5 - \left(P_x r_{1,3}s_5 + P_y r_{2,3}s_5 + P_z r_{3,3}\right)s_5 \\
&\quad + \left(l_{x5} + l_{z5} + l_{z6} - P_z r_{1,3} - P_y r_{2,3} - P_z r_{3,3}\right)c_5 + \left(l_{y6} - P_x r_{1,2} - P_y r_{2,2} - P_z r_{3,2}\right)s_5 s_6 \\
&\quad + \left(l_{x6} - P_x r_{1,1} - P_y r_{2,1} - P_z r_{3,1}\right)c_5 c_6 + \left(P_x r_{1,1} + P_y r_{2,1} + P_z r_{3,1} - l_{x6}\right)c_6 s_5 \\
&\quad + \left(P_z r_{3,2} - l_{y6} + P_x r_{1,2} + P_y r_{2,2}\right)c_5 s_6
\end{aligned} \tag{3-76}$$

계산된 회전 각도 θ_4, θ_5 그리고 θ_6을 ${}^0\mathbf{R}_{6,known}({}^4\mathbf{R}_6^{-1}) = {}^0\mathbf{R}_3$에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 θ_1, θ_2 그리고 θ_3을 결정한다.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-20의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-21와 같이 정리할 수 있다. Step 1에서, 회전각도 θ_2의 솔루션을 계산하기 위해 ${}^4\mathbf{R}_3$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-70)의 관계식에서 i번째 요소를 선택하여 (즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_i - RHS(\theta_4)_i = 0$), 회전각도 θ_6의 솔루션을 계산한다. Step 2에서, 회전각도 θ_4의 솔루션을 계산하기 위해 식 (3-70)의 관계식에서 i번째 요소를 제외한 나머지를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_j + LHS(\theta_5, \theta_6)_k = RHS(\theta_4)_j +$

$RHS(\theta_4)_k$).

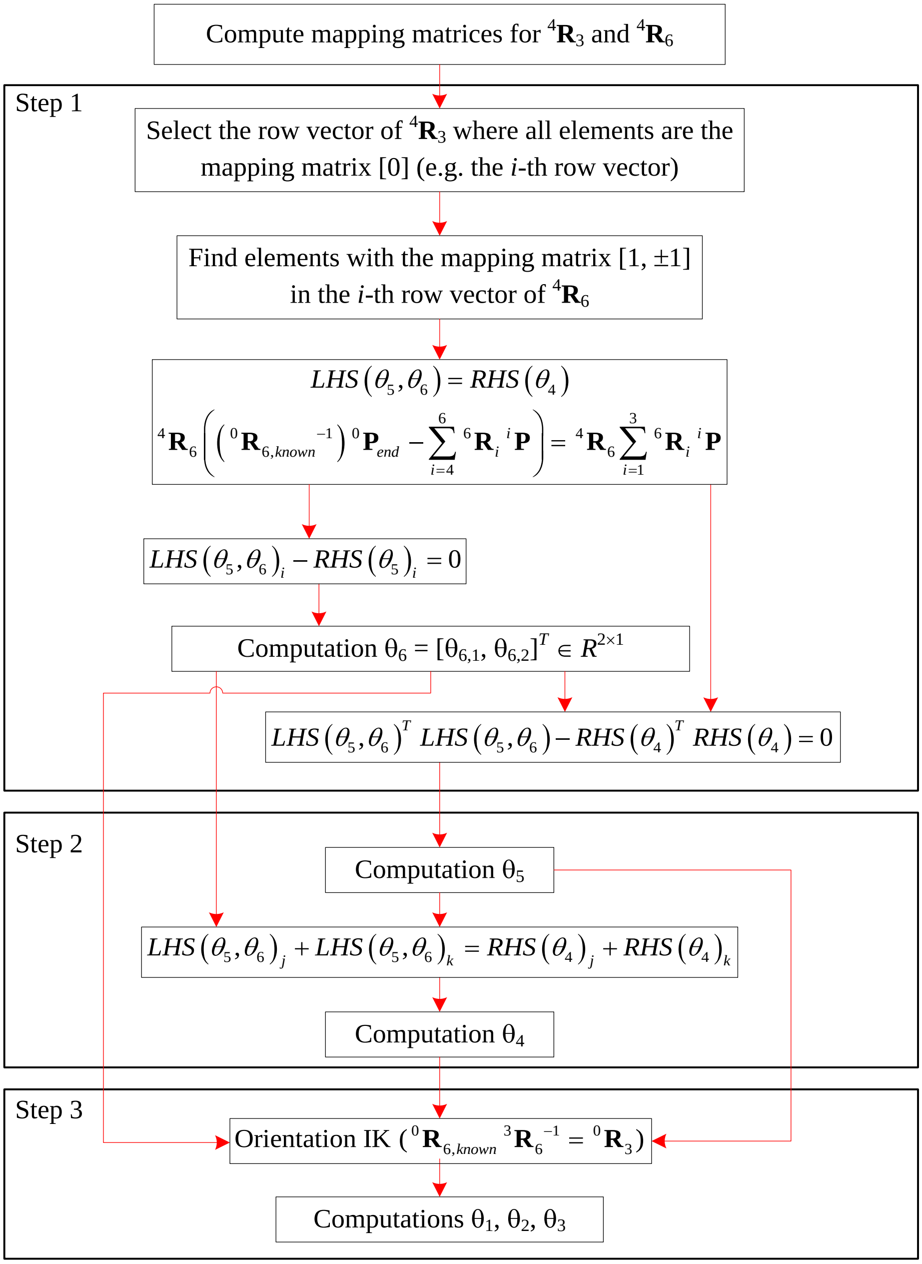


Fig. 3-21. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-20

Two parallel axes II(z_0-y_1-x_2-y_3-z_4-z_5)

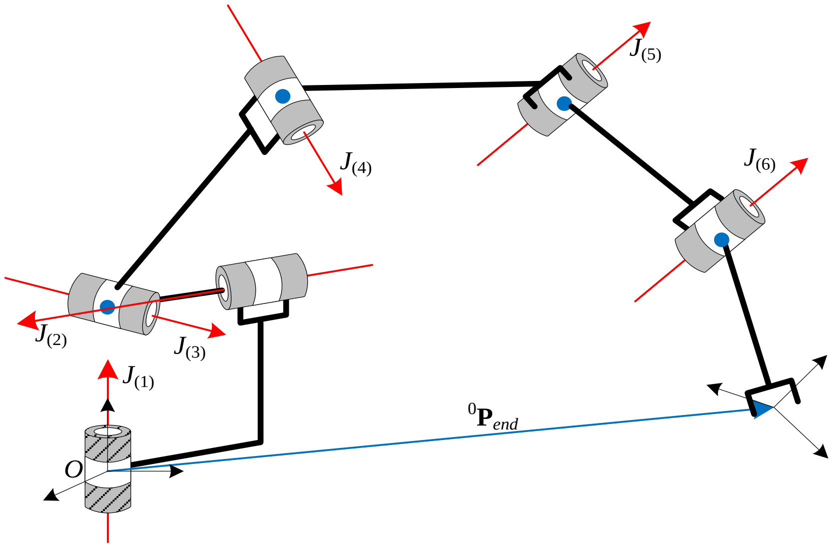


Fig. 3-22. 6-DOF manipulators with the first three joints axes intersect at a common point, where the two consecutive joints axes $J_{(5)}$ and $J_{(6)}$ are parallel (i.e., $J_{(5)} \| J_{(6)}$).

Fig. 3-22은 회전관절 5와 6의 회전축이 서로 평행하며 (즉, $J_{(5)} \| J_{(6)}$), 처음에 3개의 회전관절의 회전축이 교차하여 공통점을 가진 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, ${}^{1}\mathbf{P} = {}^{2}\mathbf{P} = [0, 0, 0]^{T} \in R^{3\times1}$). 예를 들어 Fig. 3-22의 6자유도 매니퓰레이터가 z_0-y_1-x_2-y_3-z_4-z_5 회전 순서를 가진 경우, 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석에서 필요한 관계식 $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)$을 식 (3-77)과 같이 유도한다.

$$\begin{gathered} LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4) \\ {}^{4}\mathbf{R}_{6}\left(\left({}^{0}\mathbf{R}_{6,known}{}^{-1}\right){}^{0}\mathbf{P}_{end} - {}^{4}\mathbf{R}_{6}\,{}^{6}\mathbf{P}\right) = {}^{4}\mathbf{R}_{6}\sum_{i=1}^{5}{}^{6}\mathbf{R}_{i}\,{}^{i}\mathbf{P} \end{gathered} \tag{3-77}$$

식 (3-77)에서, ${}^{4}\mathbf{R}_{6}$과 ${}^{4}\mathbf{R}_{3}$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 12와 같다. Table 12에서 ${}^{4}\mathbf{R}_{3}$의 두번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수 θ_4에 관한 삼각함수를 가진다. ${}^{4}\mathbf{R}_{6}$의 세번째 행 벡터를 제외한 나머지 행벡터들은 독립변수

θ_5과 θ_6에 관한 삼각함수를 가진다. ${}^4\mathbf{R}_6$의 구성요소에 대한 사상 행렬들 중에서 사상 행렬 [1, 1]로부터, 식 (3-77)의 $LHS(\theta_5,\theta_6)$에 삼각함수의 복잡성(예, c_{5+6}와 s_{5+6})을 예측할 수 있다. 즉, 식 (3-77)의 관계식 $LHS(\theta_5,\theta_6) = RHS(\theta_4)$에서 세번째 요소는 $LHS(\theta_5,\theta_6) = const$이다. 또한, ${}^4\mathbf{R}_3$의 직교성에 의해서 $RHS(\theta_4)^T RHS(\theta_4) = const$이다.

Table 12. Mapping matrices in ${}^4\mathbf{R}_3$ and ${}^4\mathbf{R}_6$ for Fig. 3-22

Component	${}^4\mathbf{R}_3$	${}^4\mathbf{R}_6$
(1,1)	[1]	[1, 1]
(1,2)	[0]	[1, 1]
(1,3)	[1]	[0, 0]
(2,1)	[0]	[1, 1]
(2,2)	[0]	[1, 1]
(2,3)	[0]	[0, 0]
(3,1)	[1]	[0, 0]
(3,2)	[0]	[0, 0]
(3,3)	[1]	[0, 0]

식 (3-77)의 관계식 $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)$의 세번째 요소로부터 (즉, $LHS(\theta_5, \theta_6)_3 = RHS(\theta_4)_3$), $A_1\cos(\theta_4) + A_2\sin(\theta_4) + A_3 = 0$와 같은 θ_4에 대한 식을 유도한다. 유도한 식으로부터 θ_4는 식 (3-78)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_4 = ATAN2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}}{-A_3}\right) \tag{3-78}$$

여기에서, $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$은 식 (3-79)와 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= l_{z3} \\ A_2 &= l_{x3} \\ A_3 &= -P_x r_{1,3} + l_{z5} + l_{z6} + l_{z4} - P_y r_{2,3} - P_z r_{3,3} \end{aligned} \tag{3-79}$$

식 (3-77)의 관계식 $LHS(\theta_5,\theta_6) = RHS(\theta_4)$로부터, 유도한 식 $LHS(\theta_5,\theta_6)^T LHS(\theta_5,\theta_6) - RHS(\theta_4)^T RHS(\theta_4) = 0$은 $B_1\cos(\theta_5) + B_2\sin(\theta_5) + B_3 = 0$와 같이 θ_5에 대한 식으로 표현된다. 따라서, θ_5는 식 (3-80)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_5 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1^2 + B_2^2 - B_3^2}}{-B_3}\right) \tag{3-80}$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-81)와 같다.

$$\begin{aligned} B_1 &= 2l_{x4}l_{x5} + 2l_{y3}l_{y5} + 2l_{y4}l_{y5} + 2c_4 l_{x3}l_{x5} - 2l_{x5}l_{z3}s_4 \\ B_2 &= 2l_{x5}l_{y3} - 2l_{x4}l_{y5} + 2l_{x5}l_{y4} - 2c_4 l_{x3}l_{y5} + 2l_{y5}l_{z3}s_4 \\ B_3 &= \left(2l_{x3}l_{x4} + 2l_{z3}l_{z4} + 2l_{z3}l_{z5}\right)c_4 + \left(2l_{x3}l_{z4} + 2l_{x3}l_{z5} - 2l_{x4}l_{z3}\right)s_4 \\ &\quad -P_x^2 r_{1,1}^2 - P_x^2 r_{1,2}^2 - P_x^2 r_{1,3}^2 - 2P_xP_y r_{1,1}r_{2,1} - 2P_xP_y r_{1,2}r_{2,2} - 2P_xP_y r_{1,3}r_{2,3} \\ &\quad -2P_xP_z r_{1,1}r_{3,1} - 2P_xP_z r_{1,2}r_{3,2} - 2P_xP_z r_{1,3}r_{3,3} + 2P_x l_{x6}r_{1,1} + 2P_x l_{y6}r_{1,2} + 2P_x l_{z6}r_{1,3} \\ &\quad -P_y^2 r_{2,1}^2 - P_y^2 r_{2,2}^2 - P_y^2 r_{2,3}^2 - 2P_yP_z r_{2,1}r_{3,1} - 2P_yP_z r_{2,2}r_{3,2} - 2P_yP_z r_{2,3}r_{3,3} \\ &\quad +2P_y l_{x6}r_{2,1} + 2P_y l_{y6}r_{2,2} + 2P_y l_{z6}r_{2,3} - P_z^2 r_{3,1}^2 - P_z^2 r_{3,2}^2 - P_z^2 r_{3,3}^2 + 2P_z l_{x6}r_{3,1} \\ &\quad +2P_z l_{y6}r_{3,2} + 2P_z l_{z6}r_{3,3} + l_{x3}^2 + l_{z3}^2 + l_{x4}^2 + l_{x5}^2 - l_{x6}^2 + l_{y3}^2 + 2l_{y3}l_{y4} + l_{y4}^2 \\ &\quad +l_{y5}^2 - l_{y6}^2 + l_{z4}^2 + 2l_{z4}l_{z5} + l_{z5}^2 - l_{z6}^2 \end{aligned} \tag{3-81}$$

식 (3-77)의 관계식 $LHS(\theta_5, \theta_6) = RHS(\theta_4)$에서 세번째 요소를 제외한 나머지 요소들을 합한 방정식(즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_1 + LHS(\theta_5,\theta_6)_2 = RHS(\theta_4)_1 + RHS(\theta_4)_2$)에 식 (3-78)과 식 (3-80)에서 결정된 θ_4와 θ_5를 대입하면, $C_1\cos(\theta_5 + \theta_6) + C_2\sin(\theta_5 + \theta_6) + C_3 = 0$와 같은 $\theta_5 + \theta_6$에 대한 식을 유도할 수 있다. 따라서, 유도된 식으로부터 θ_6은 식 (3-82)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_6 = ATAN2\left(\frac{C_1}{C_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{C_1^{\ 2} + C_2^{\ 2} - C_3^{\ 2}}}{-C_3}\right) - \theta_5 \tag{3-82}$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_1, C_2, C_3]$은 식 (3-83)와 같다.

$$\begin{aligned} C_1 &= l_{x6} + l_6 - P_x r_{1,1} - P_x r_{1,2} - P_y r_{2,1} - P_y r_{2,2} - P_z r_{3,1} - P_z r_{3,2} \\ C_2 &= l_{x6} - l_6 - P_x r_{1,1} + P_x r_{1,2} - P_y r_{2,1} + P_y r_{2,2} - P_z r_{3,1} + P_z r_{3,2} \\ C_3 &= l_{x4} + l_{y3} + l_{y4} + c_4 l_{x3} - l_{z3} s_4 + \left(l_{x5} + l_{y5}\right) c_5 + \left(l_{x5} - l_{y5}\right) s_5 \end{aligned} \tag{3-83}$$

계산된 회전 각도 θ_4, θ_5 그리고 θ_6을 ${}^0\mathbf{R}_{6,known}({}^4\mathbf{R}_6^{-1}) = {}^0\mathbf{R}_3$에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 θ_1, θ_2 그리고 θ_3을 결정한다.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-22의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-23와 같이 정리할 수 있다. Step 1에서, 회전각도 θ_2의 솔루션을 계산하기 위해 ${}^4\mathbf{R}_6$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0, 0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-77)의 관계식에서 i번째 요소를 선택하여 (즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_i - RHS(\theta_4)_i = 0$), 회전각도 θ_4의 솔루션을 계산한다. Step 2에서, 회전각도 θ_6의 솔루션을 계산하기 위해 식 (3-77)의 관계식에서 i 번째 요소를 제외한 나머지를 선택한다 (즉, $LHS(\theta_5,\theta_6)_j + LHS(\theta_5,\theta_6)_k = RHS(\theta_4)_j + RHS(\theta_4)_k$).

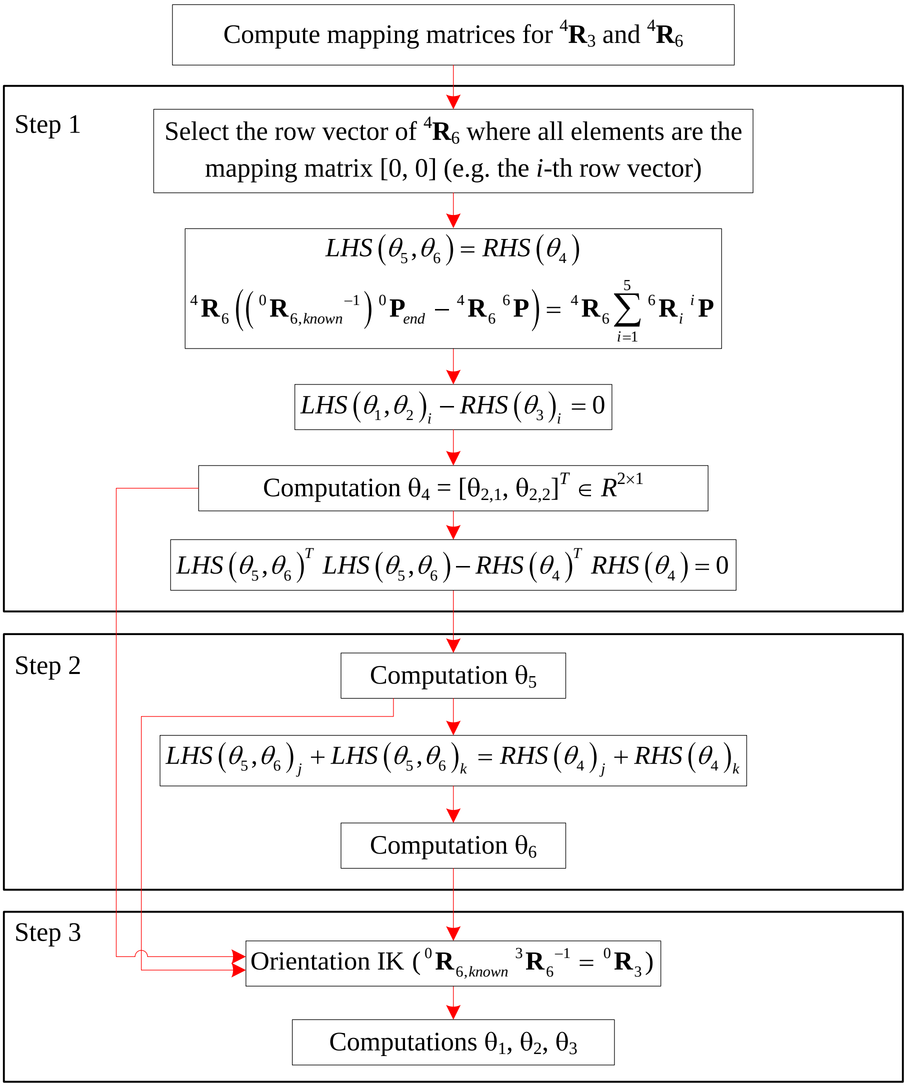


Fig. 3-23. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-22.

다. 6-DOF manipulator with the three parallel axes

(1) Case 1

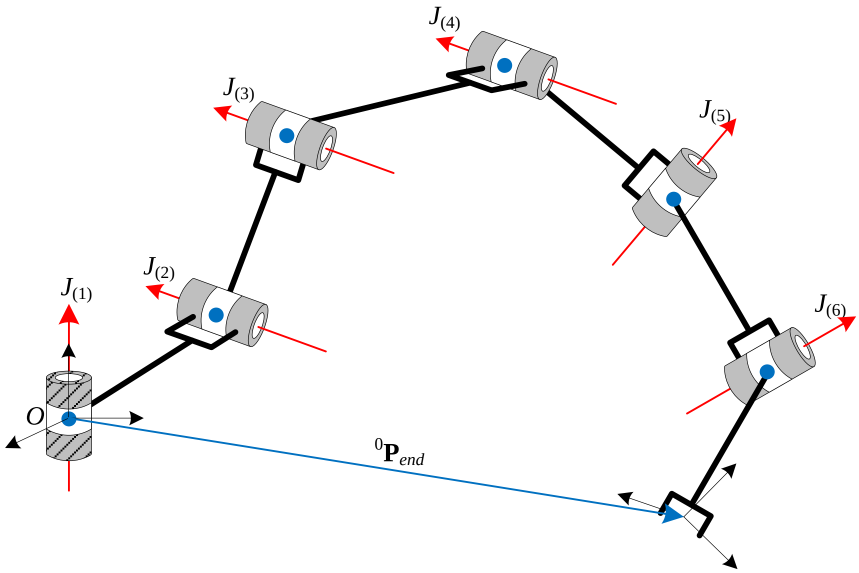


Fig. 3-24. 6-DOF manipulators with the three consecutive joint axes $J_{(2)}$, $J_{(3)}$ and $J_{(4)}$ parallel (i.e., $J_{(2)} \| J_{(3)} \| J_{(4)}$).

Fig. 3-24은 연속적으로 회전관절 2, 3 그리고 4의 회전축이 서로 평행하며, 이외에 회전관절의 회전축은 서로 직교하는 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, $J_{(1)} \perp J_{(2)} \| J_{(3)} \| J_{(4)} \perp J_{(5)} \perp J_{(6)}$). 예를 들어 Fig. 3-24의 6자유도 매니퓰레이터가 z_0-y_1-y_2-y_3-x_4-y_5 회전 순서를 가진 경우를 고려해보자. 해당 매니퓰레이터의 목표 orientation (즉, ${}^0\mathbf{R}_{6,known} = [r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}; r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3}; r_{3,1}, r_{3,2}, r_{3,3}] \in R^{3\times3}$), 목표 position (즉, ${}^0\mathbf{P}_{known} = [P_x, P_y, P_z]^T \in R^{3\times1}$) 그리고 관절간의 오프셋 거리 (즉, ${}^i\mathbf{P} = [l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}]^T \in R^{3\times1}$ for $i = 1, \ldots, 6$)를 이용하여 해당 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석을 수행한다. 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석 시 필요한 관계식 $LHS(\theta_1) = RHS(\theta_2, \ldots, \theta_5)$을 식 (3-84)과 같이 유도한다.

$$LHS(\theta_1) = RHS(\theta_2, \cdots, \theta_5)$$
$$\left({}^0\mathbf{R}_1^{-1}\right)\left({}^0\mathbf{P}_{end} - \left({}^0\mathbf{R}_{6,known}\,{}^6\mathbf{P} + {}^0\mathbf{R}_1\,{}^1\mathbf{P}\right)\right) = {}^0\mathbf{R}_1^{-1}\left(\sum_{i=2}^{5} {}^0\mathbf{R}_1\,{}^i\mathbf{P}\right) \tag{3-84}$$

목표 orientation ${}^0\mathbf{R}_{6,known}$는 ${}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{R}_6$ 이며, 식 (3-85)과 같이 ${}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{R}_6$의 양변에 ${}^0\mathbf{R}_1^{-1}$를 곱하여 정리한다.

$${}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^0\mathbf{R}_1\,{}^1\mathbf{R}_6$$
$$\left({}^0\mathbf{R}_1^{-1}\right){}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^1\mathbf{R}_6 \tag{3-85}$$

식 (3-84)의 $RHS(\theta_2,\ldots,\theta_5)$에서 ${}^1\mathbf{R}_2$, ${}^1\mathbf{R}_3$ 그리고 ${}^1\mathbf{R}_5$와 식 (3-85)에 ${}^1\mathbf{R}_6$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 13와 같다.

Table 13. Mapping matrices in ${}^1\mathbf{R}_2$, ${}^1\mathbf{R}_3$, ${}^1\mathbf{R}_5$ and ${}^1\mathbf{R}_6$ for Fig. 3-24

Component	${}^1\mathbf{R}_2$	${}^1\mathbf{R}_3$	${}^1\mathbf{R}_5$	${}^1\mathbf{R}_6$
(1,1)	[1]	[1, 1]	[(1, 1, 1), 0]	[(1, 1, 1), 0, ±1; (1, 1, 1), ±1, ±1]
(1,2)	[0]	[0, 0]	[(1, 1, 1), ±1]	[(1, 1, 1), 1, 0; (1, 1, 1), –1, 0]
(1,3)	[1]	[1, 1]	[(1, 1, 1), ±1]	[(1, 1, 1), 0, ±1; (1, 1, 1), ±1, ±1]
(2,1)	[0]	[0, 0]	[(0, 0, 0), 0]	[(0, 0, 0), 1, 1; (0, 0, 0), 1, –1]
(2,2)	[0]	[0, 0]	[(0, 0, 0), 1]	[(0, 0, 0), 1, 0]
(2,3)	[0]	[0, 0]	[(0, 0, 0), 1]	[(0, 0, 0), 1, 1; (0, 0, 0), 1, –1]
(3,1)	[1]	[1, 1]	[(1, 1, 1), 0]	[(1, 1, 1), 0, ±1; (1, 1, 1), ±1, ±1]
(3,2)	[0]	[0, 0]	[(1, 1, 1), ±1]	[(1, 1, 1), 1, 0; (1, 1, 1), –1, 0]
(3,3)	[1]	[1, 1]	[(1, 1, 1), ±1]	[(1, 1, 1), 0, ±1; (1, 1, 1), ±1, ±1]

Table 13에서 ${}^1\mathbf{R}_6(2,2)$의 사상 행렬은 [(0, 0, 0), 1, 0] 이므로, 식 (3-4)에 의해서 ${}^1\mathbf{R}_6(2,2)$는 $\pm c_5$(또는 $\pm s$)임을 예측할 수 있다(즉, $\pm c_5$(또는 $\pm s_5$) = $({}^0\mathbf{R}_1^{-1}){}^0\mathbf{R}_{6,known}(2,2)$). ${}^1\mathbf{R}_5(2,1)$의 사상 행렬은 [(0, 0, 0), 0] 이므로, 식 (3-4)에 의해서 ${}^1\mathbf{R}_5(2,1)$는 0이다. y_5축 중심으로 회전하기 때문에 ${}^1\mathbf{R}_6$과 ${}^1\mathbf{R}_5$의 두번째 열 벡터은 동일하다 (즉, ${}^1\mathbf{R}_6(2,2)$와 ${}^1\mathbf{R}_5(2,2)$는

같다). 따라서, ${}^{1}\mathbf{R}_5(2,3)$은 회전행렬의 직교성에 의해서 $\pm s_5$(또는 $\pm c_5$)이어야 한다. 또한, 식 (3-84)에 $RHS(\theta_2,\ldots,\theta_5)$의 두번째 요소는 독립변수 θ_5에 관한 삼각함수 c_5와 s_5만 가진다. 이를 바탕으로, c_5와 s_5는 식 (3-86)와 같이 독립변수 θ_1에 관하여 기술할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\pm c_5 (\text{or } \pm s_5) = \left({}^{0}\mathbf{R}_1^{-1} \right) {}^{1}\mathbf{R}_{6,known}(2,2) \\
&\pm s_5 (\text{or } \pm c_5) = \frac{\left(LHS\left(\theta_1\right)_2 - RHS\left(\theta_2,\ldots,\theta_5\right)_2 + {}^{5}\mathbf{P}(3)\left(\pm s_5 (\text{or } c_5)\right)\right)}{{}^{5}\mathbf{P}(3)}
\end{aligned}
\tag{3-86}
$$

식 (3-86)로부터 θ_5에 대한 피타고라스의 삼각함수 항등식(Pythagorean trigonometric identity (즉, $c_5^2 + s_5^2 - 1 = 0$))을 유도하여, half tangent formula (즉, $c_1 = (1 - t_1^2)/(1 + t_1^2)$, $s_1 = 2t_1/(1 + t_1^2)$ and $t_1 = \tan(\theta_1/2)$)을 적용할 수 있다. 즉, t_1에 대한 4차 방정식 $at_1^4 + bt_1^3 + ct_1^2 + dt_1 + e = 0$을 얻을 수 있다. 여기에서, a, b, c, d 그리고 e는 각각 식 (3-87)-(3-91)과 같다.

$$
\begin{aligned}
a = {} & P_y^2 - 2P_y l_{x6} x_6 r_{2,1} + 2P_y l_{y1} + 2P_y l_{y2} + 2P_y l_{y3} + 2P_y l_{y4} - 2P_y l_{y5} r_{2,2} - 2P_y l_{y6} r_{2,2} \\
& -2P_y l_{z6} r_{2,3} + l_{x6}^2 r_{2,1}^2 - 2l_{x6} l_{y1} r_{2,1} - 2l_{x6} l_{y2} r_{2,1} - 2l_{x6} l_{y3} r_{2,1} - 2l_{x6} l_{y4} r_{2,1} + 2l_{x6} l_{y5} r_{2,1} r_{2,2} \\
& +2l_{x6} l_{y6} r_{2,1} r_{2,2} + 2l_{x6} l_{z6} r_{2,1} r_{2,3} + l_{y1}^2 + 2l_{y1} l_{y2} + 2l_{y1} l_{y3} + 2l_{y1} l_{y4} - 2l_{y1} l_{y5} r_{2,2} - 2l_{y1} l_{y6} r_{2,2} \\
& -2l_{y1} l_{z6} r_{2,3} + l_{y2}^2 + 2l_{y2} l_{y3} + 2l_{y2} l_{y4} - 2l_{y2} l_{y5} r_{2,2} - 2l_{y2} l_{y6} r_{2,2} - 2l_{y2} l_{z6} r_{2,3} + l_{y3}^2 \\
& +2l_{y3} l_{y4} - 2l_{y3} l_{y5} r_{2,2} - 2l_{y3} l_{y6} r_{2,2} - 2l_{y3} l_{z6} r_{2,3} + l_{y4}^2 - 2l_{y4} l_{y5} r_{2,2} - 2l_{y4} l_{y6} r_{2,2} - 2l_{y4} l_{z6} r_{2,3} \\
& +l_{y5}^2 r_{2,2}^2 + 2l_{y5} l_{y6} r_{2,2}^2 + 2l_{y5} l_{z6} r_{2,2} r_{2,3} + l_{y6}^2 r_{2,2}^2 + 2l_{y6} l_{z6} r_{2,2} r_{2,3} + l_{z5}^2 r_{2,2}^2 - l_{z5}^2 + l_{z6}^2 r_{2,3}^2
\end{aligned}
\tag{3-87}
$$

$$
\begin{aligned}
b = {} & 4P_x P_y + 4P_x l_{y1} + 4P_x l_{y2} + 4P_x l_{y3} + 4P_x l_{y4} + 4l_{x6}^2 r_{1,1} r_{2,1} + 4l_{y5}^2 r_{1,2} r_{2,2} + 4l_{y6}^2 r_{1,2} r_{2,2} \\
& +4l_{z5}^2 r_{1,2} r_{2,2} + 4l_{z6}^2 r_{1,3} r_{2,3} - 4P_x l_{x6} r_{2,1} - 4P_y l_{x6} r_{1,1} - 4P_x l_{y5} r_{2,2} - 4P_x l_{y6} r_{2,2} - 4P_y l_{y5} r_{1,2} \\
& -4P_y l_{y6} r_{1,2} - 4P_x l_{z6} r_{2,3} - 4P_y l_{z6} r_{1,3} - 4l_{x6} l_{y1} r_{1,1} - 4l_{x6} l_{y2} r_{1,1} - 4l_{x6} l_{y3} r_{1,1} - 4l_{x6} l_{y4} r_{1,1} \\
& -4l_{y1} l_{y5} r_{1,2} - 4l_{y1} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y2} l_{y5} r_{1,2} - 4l_{y2} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y3} l_{y5} r_{1,2} - 4l_{y3} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y4} l_{y5} r_{1,2} \\
& -4l_{y4} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y1} l_{z6} r_{1,3} - 4l_{y2} l_{z6} r_{1,3} - 4l_{y3} l_{z6} r_{1,3} - 4l_{y4} l_{z6} r_{1,3} + 4l_{x6} l_{y5} r_{1,1} r_{2,2} + 4l_{x6} l_{y5} r_{1,2} r_{2,1} \\
& +4l_{x6} l_{y6} r_{1,1} r_{2,2} + 4l_{x6} l_{y6} r_{1,2} r_{2,1} + 8l_{y5} l_{y6} r_{1,2} r_{2,2} + 4l_{x6} l_{z6} r_{1,1} r_{2,3} + 4l_{x6} l_{z6} r_{1,3} r_{2,1} + 4l_{y5} l_{z6} r_{1,2} r_{2,3} \\
& +4l_{y5} l_{z6} r_{1,3} r_{2,2} + 4l_{y6} l_{z6} r_{1,2} r_{2,3} + 4l_{y6} l_{z6} r_{1,3} r_{2,2}
\end{aligned}
\tag{3-88}
$$

$$
\begin{aligned}
c = {} & 4P_x{}^2 - 8P_x l_{x6} r_{1,1} - 8P_x l_{y5} r_{1,2} - 8P_x l_{y6} r_{1,2} - 8P_x l_{z6} r_{1,3} - 2P_y{}^2 + 4P_y l_{x6} r_{2,1} + 4P_y l_{y5} r_{2,2} \\
& + 4P_y l_{y6} r_{2,2} + 4P_y l_{z6} r_{2,3} + 4l_{x6}{}^2 r_{1,1}{}^2 - 2l_{x6}{}^2 r_{2,1}{}^2 + 8l_{x6} l_{y5} r_{1,1} r_{1,2} - 4l_{x6} l_{y5} r_{2,1} r_{2,2} + 8l_{x6} l_{y6} r_{1,1} r_{1,2} \\
& - 4l_{x6} l_{y6} r_{2,1} r_{2,2} + 8l_{x6} l_{z6} r_{1,1} r_{1,3} - 4l_{x6} l_{z6} r_{2,1} r_{2,3} + 2l_{y1}{}^2 + 4l_{y1} l_{y2} + 4l_{y1} l_{y3} + 4l_{y1} l_{y4} + 2l_{y2}{}^2 \\
& + 4l_{y2} l_{y3} + 4l_{y2} l_{y4} + 2l_{y3}{}^2 + 4l_{y3} l_{y4} + 2l_{y4}{}^2 + 4l_{y5}{}^2 r_{1,2}{}^2 - 2l_{y5}{}^2 r_{2,2}{}^2 + 8l_{y5} l_{y6} r_{1,2}{}^2 \\
& - 4l_{y5} l_{y6} r_{2,2}{}^2 + 8l_{y5} l_{z6} r_{1,2} r_{1,3} - 4l_{y5} l_{z6} r_{2,2} r_{2,3} + 4l_{y6}{}^2 r_{1,2}{}^2 - 2l_{y6}{}^2 r_{2,2}{}^2 + 8l_{y6} l_{z6} r_{1,2} r_{1,3} \\
& - 4l_{y6} l_{z6} r_{2,2} r_{2,3} + 4l_{z5}{}^2 r_{1,2}{}^2 - 2l_{z5}{}^2 r_{2,2}{}^2 - 2l_{z5}{}^2 + 4l_{z6}{}^2 r_{1,3}{}^2 - 2l_{z6}{}^2 r_{2,3}{}^2
\end{aligned}
\tag{3-89}
$$

$$
\begin{aligned}
d = {} & 4P_x l_{y1} - 4P_x P_y + 4P_x l_{y2} + 4P_x l_{y3} + 4P_x l_{y4} - 4l_{x6}{}^2 r_{1,1} r_{2,1} - 4l_{y5}{}^2 r_{1,2} r_{2,2} - 4l_{y6}{}^2 r_{1,2} r_{2,2} \\
& - 4l_{z5}{}^2 r_{1,2} r_{2,2} - 4l_{z6}{}^2 r_{1,3} r_{2,3} + 4P_x l_{x6} r_{2,1} + 4P_y l_{x6} r_{1,1} + 4P_x l_{y5} r_{2,2} + 4P_x l_{y6} r_{2,2} + 4P_y l_{y5} r_{1,2} \\
& + 4P_y l_{y6} r_{1,2} + 4P_x l_{z6} r_{2,3} + 4P_y l_{z6} r_{1,3} - 4l_{x6} l_{y1} r_{1,1} - 4l_{x6} l_{y2} r_{1,1} - 4l_{x6} l_{y3} r_{1,1} - 4l_{x6} l_{y4} r_{1,1} \\
& - 4l_{y1} l_{y5} r_{1,2} - 4l_{y1} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y2} l_{y5} r_{1,2} - 4l_{y2} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y3} l_{y5} r_{1,2} - 4l_{y3} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y4} l_{y5} r_{1,2} \\
& - 4l_{y4} l_{y6} r_{1,2} - 4l_{y1} l_{z6} r_{1,3} - 4l_{y2} l_{z6} r_{1,3} - 4l_{y3} l_{z6} r_{1,3} - 4l_{y4} l_{z6} r_{1,3} - 4l_{x6} l_{y5} r_{1,1} r_{2,2} - 4l_{x6} l_{y5} r_{1,2} r_{2,1} \\
& - 4l_{x6} l_{y6} r_{1,1} r_{2,2} - 4l_{x6} l_{y6} r_{1,2} r_{2,1} - 8l_{y5} l_{y6} r_{1,2} r_{2,2} - 4l_{x6} l_{z6} r_{1,1} r_{2,3} - 4l_{x6} l_{z6} r_{1,3} r_{2,1} - 4l_{y5} l_{z6} r_{1,2} r_{2,3} \\
& - 4l_{y5} l_{z6} r_{1,3} r_{2,2} - 4l_{y6} l_{z6} r_{1,2} r_{2,3} - 4l_{y6} l_{z6} r_{1,3} r_{2,2}
\end{aligned}
\tag{3-90}
$$

$$
\begin{aligned}
e = {} & P_y{}^2 - 2P_y l_{x6} r_{2,1} - 2P_y l_{y1} - 2P_y l_{y2} - 2P_y l_{y3} - 2P_y l_{y4} - 2P_y l_{y5} r_{2,2} - 2P_y l_{y6} r_{2,2} \\
& - 2P_y l_{z6} r_{2,3} + l_{x6}{}^2 r_{2,1}{}^2 + 2l_{x6} l_{y1} r_{2,1} + 2l_{x6} l_{y2} r_{2,1} + 2l_{x6} l_{y3} r_{2,1} + 2l_{x6} l_{y4} r_{2,1} + 2l_{x6} l_{y5} r_{2,1} r_{2,2} \\
& + 2l_{x6} l_{y6} r_{2,1} r_{2,2} + 2l_{x6} l_{z6} r_{2,1} r_{2,3} + l_{y1}{}^2 + 2l_{y1} l_{y2} + 2l_{y1} l_{y3} + 2l_{y1} l_{y4} + 2l_{y1} l_{y5} r_{2,2} + 2l_{y1} l_{y6} r_{2,2} \\
& + 2l_{y1} l_{z6} r_{2,3} + l_{y2}{}^2 + 2l_{y2} l_{y3} + 2l_{y2} l_{y4} + 2l_{y2} l_{y5} r_{2,2} + 2l_{y2} l_{y6} r_{2,2} + 2l_{y2} l_{z6} r_{2,3} + l_{y3}{}^2 \\
& + 2l_{y3} l_{y4} + 2l_{y3} l_{y5} r_{2,2} + 2l_{y3} l_{y6} r_{2,2} + 2l_{y3} l_{z6} r_{2,3} + l_{y4}{}^2 + 2l_{y4} l_{y5} r_{2,2} + 2l_{y4} l_{y6} r_{2,2} + 2l_{y4} l_{z6} r_{2,3} \\
& + l_{y5}{}^2 r_{2,2}{}^2 + 2l_{y5} l_{y6} r_{2,2}{}^2 + 2l_{y5} l_{z6} r_{2,2} r_{2,3} + l_{y6}{}^2 r_{2,2}{}^2 + 2l_{y6} l_{z6} r_{2,2} r_{2,3} + l_{z5}{}^2 r_{2,2}{}^2 - l_{z5}{}^2 + l_{z6}{}^2 r_{2,3}{}^2
\end{aligned}
\tag{3-91}
$$

식 (3-23)에 근거하여 계산된 $\mathbf{t}_1 = [t_{1,1}, t_{1,2}, t_{1,3}, t_{1,4}]^T \in R^{4\times1}$로부터 $\theta_{1,i} = 2\tan^{-1}(t_{1,i})$ for $i = 1,\ldots,4$ 을 결정한다 (즉, $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{1,3}, \theta_{1,4}]^T \in R^{4\times1}$). 식 (3-86)에서 ${}^5\mathbf{P}(3) = 0$이라면, 식 (3-84)의 관계식에서 두번째 요소는 $A_1\cos(\theta_1) + A_2\sin(\theta_1) + A_3 = 0$와 같은 θ_1에 대한 식으로 표현된다. 이때, 회전각도 θ_1는 식 (3-92)과 같이 결정할 수 있다.

$$
\theta_1 = ATAN2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 - A_3{}^2}}{-A_3}\right)
\tag{3-92}
$$

여기에서, $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$은 식 (3-93)와 같다.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= P_y - l_{x6}r_{2,1} - l_{y6}r_{2,2} - l_{z6}r_{2,3} - l_{5y}r_{2,2} \\
A_2 &= l_{x6}r_{1,1} - P_x + l_{y6}r_{1,2} + l_{z6}r_{1,3} + l_{5y}r_{1,2} \\
A_3 &= -l_{y2} - l_{y3} - l_{y4} - l_{y1}
\end{aligned} \tag{3-93}
$$

회전각도 θ_1의 솔루션 $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{1,3}, \theta_{1,4}]^T \in R^{4\times1}$ (또는 $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}]^T \in R^{2\times1}$)을 각각 식 (3-85)에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, θ_5 그리고 θ_6를 결정한다.

회전각도 θ_2, θ_3 그리고 θ_4를 결정하기 위해서, 식 (3-84)관계식 $LHS(\theta_1) = RHS(\theta_2,\ldots,\theta_5)$에 θ_1, $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, θ_5 그리고 θ_6을 대입하여, 새로운 관계식 $LHS = RHS(\theta_2, \theta_3)$을 식 (3-94)과 같이 유도한다.

$$
\begin{gathered}
LHS = RHS\left(\theta_2, \theta_3\right) \\
{}^0\mathbf{R}_1^{-1}\left({}^0\mathbf{P}_{end} - \left({}^0\mathbf{R}_1\,{}^1\mathbf{P} + {}^0\mathbf{R}_{6,known}\,{}^6\mathbf{P} + \left(\sum_{i=4}^{5} {}^0\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P}\right)\right)\right) = {}^0\mathbf{R}_1^{-1}\left(\sum_{i=2}^{3} {}^0\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P}\right)
\end{gathered} \tag{3-94}
$$

식 (3-94)로부터 유도한 식 $LHS^T LHS - RHS(\theta_2, \theta_3)^T RHS(\theta_2, \theta_3) = 0$은 $B_1\cos(\theta_3) + B_2\sin(\theta_3) + B_3 = 0$와 같이 θ_3에 대한 식으로 표현된다. 따라서, 회전각도 θ_3는 식 (3-95)과 같이 결정할 수 있다.

$$
\theta_3 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1^{\,2} + B_2^{\,2} - B_3^{\,2}}}{-B_3}\right) \tag{3-95}
$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-96)와 같다.

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -2l_{x2}l_{x3} - 2l_{z2}l_{z3} \\
B_2 &= 2l_{x3}l_{z2} - 2l_{x2}l_{z3} \\
B_3 &= LHS_x^{\,2} + LHS_y^{\,2} + LHS_z^{\,2} - l_{x2}^{\,2} - l_{x3}^{\,2} - l_{y2}^{\,2} - 2l_{y2}l_{y3} - l_{y3}^{\,2} - l_{z2}^{\,2} - l_{z3}^{\,2}
\end{aligned} \tag{3-96}
$$

식 (3-96)에서, LHS_x, LHS_y 그리고 LHS_z는 각각 식 (3-94)의 LHS에 x, y 그리고 z 성분을 의미한다. 식 (3-95)에서 계산된 회전각도 θ_3을 식 (3-94)의 관계식 $LHS = RHS(\theta_2, \theta_3)$에 대입한다. Table 13에서 ${}^1\mathbf{R}_2$와 ${}^1\mathbf{R}_3$의 구성요소들에 대한 사상 행렬들로부터, 식 (3-94)에 $RHS(\theta_2, \theta_3)$의 두번째 요소는 독립변수에 관한 삼각함수가 존재하지 않는다. 따라서, 식 (3-94)의 관계식 $LHS = RHS(\theta_2, \theta_3)$의 첫번째와 세번째 요소를 연립방정식으로 사용하면, 벡터 $\mathbf{x} = [c_2, s_2]^T \in R^{2\times1}$는 $\mathbf{x} = -[C_{1,1}, C_{1,2}; C_{2,1}, C_{2,2}]^{-1}[C_{1,3}; C_{2,3}]$와 같이 결정할 수 있다. 회전각도 θ_2는 식 (3-97)와 같이 계산된다.

$$\theta_2 = ATAN2\left(\frac{C_{1,1}C_{2,3} - C_{1,3}C_{2,1}}{C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1}}, -\frac{C_{1,2}C_{2,3} - C_{1,3}C_{2,2}}{C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1}}\right) \tag{3-97}$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}; C_{2,1}, C_{2,2}, C_{2,3}]$은 식 (3-98)와 같다.

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= l_{x3}c_3 + l_{z3}s_3 + l_{x2} \\ C_{1,2} &= -l_{x3}s_3 + l_{z3}c_3 + l_{z2} \\ C_{1,3} &= LHS_x \\ C_{2,1} &= l_{z3}c_3 - l_{x3}s_3 + l_{z2} \\ C_{2,2} &= -l_{z3}s_3 - l_{x3}c_3 - l_{x2} \\ C_{2,3} &= LHS_z \end{aligned} \tag{3-98}$$

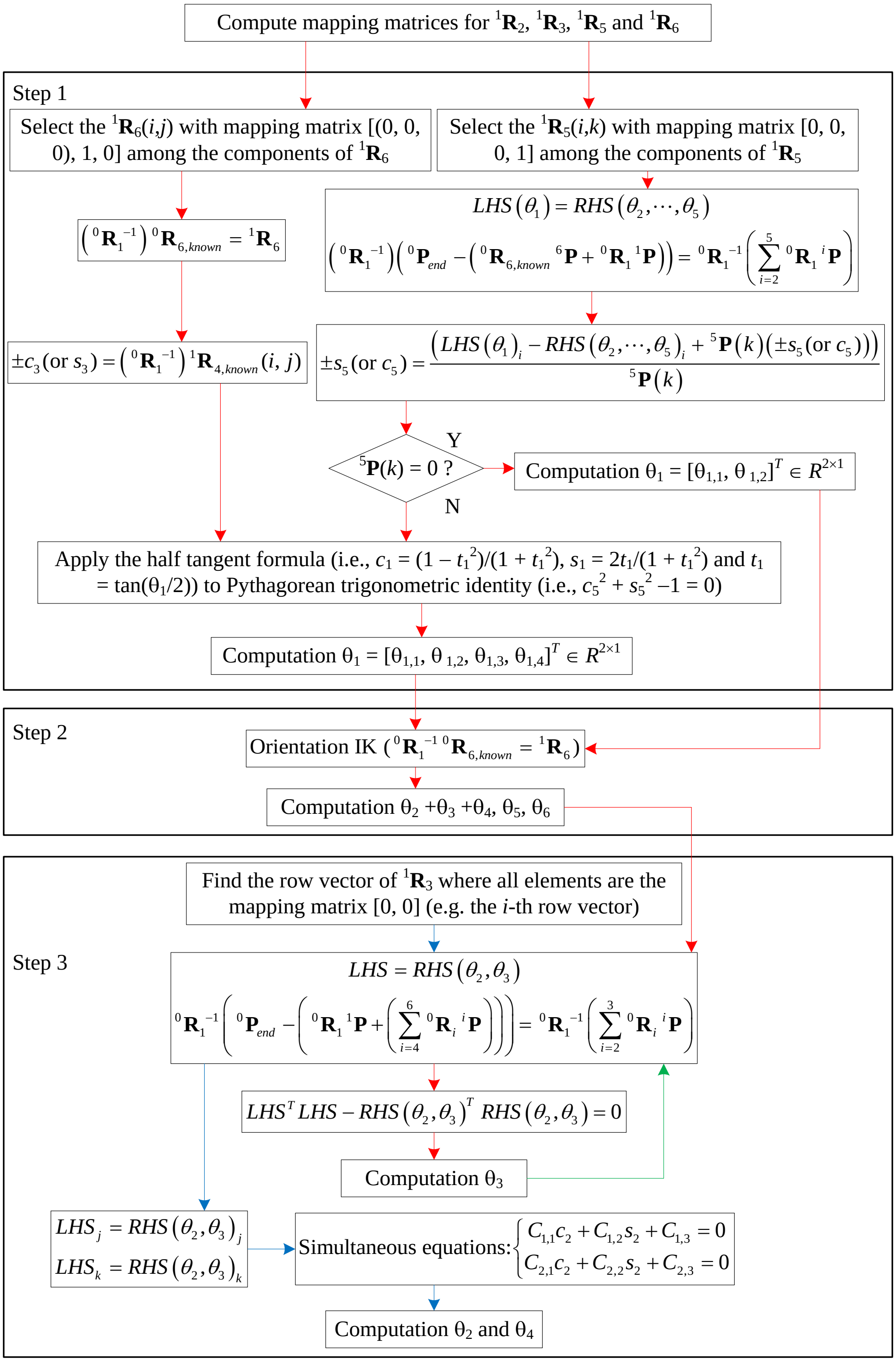


Fig. 3-25. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-24.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-24의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 단힌 형태 방법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-25와 같이 정리할 수 있다. Step1에서, 회전각도 θ_1의 솔루션를 계산하기 위해 $^1\mathbf{R}_6$의 구성요소들 중에서 사상 행렬 [0, 0, 0, 1, 0]을 가진 $^1\mathbf{R}_6(i,j)$와 $^1\mathbf{R}_5$의 구성 요소들중에서 사상 행렬 [0, 0, 0, 1]을 가진 $^1\mathbf{R}_5(i,k)$ 요소를 선택한다. 이때, $^5\mathbf{P}(k)$가 $^5\mathbf{P}(k) = 0$을 만족하는지 확인한다. Step 2에서, 계산한 회전각도 θ_1의 솔루션 $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{1,3}, \theta_{1,4}]^T \in R^{4\times1}$ (또는 $\boldsymbol{\theta}_1 = [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}]^T \in R^{2\times1}$)을 각각 식 (3-85)에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 $\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, θ_5 그리고 θ_6를 결정한다. Step 3에서, $^1\mathbf{R}_3$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0, 0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-94)의 관계식 $LHS = RHS(\theta_2, \theta_3)$에 i번째 요소를 제외한 나머지들을 연립방정식으로 선택한다.

(2) Case 2

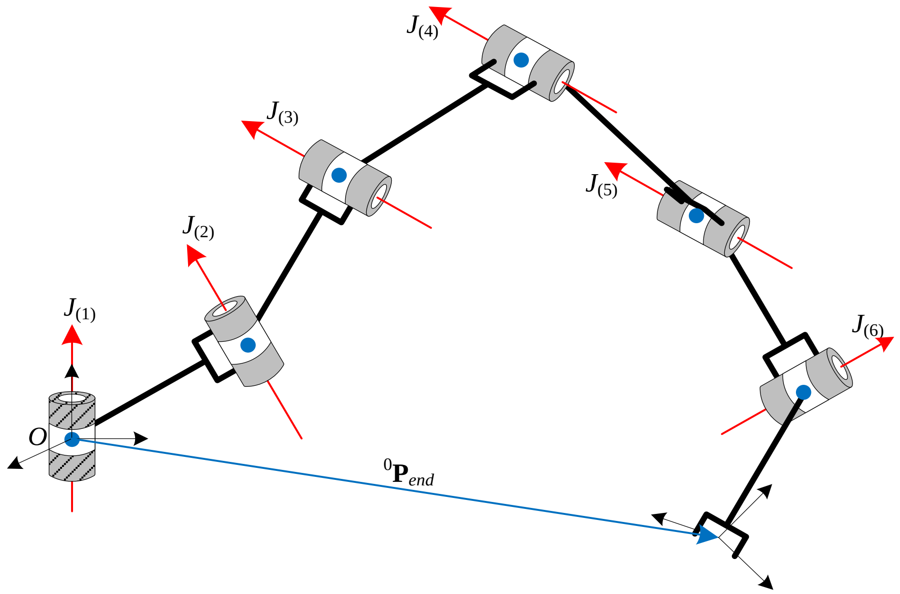


Fig. 3-26. 6-DOF manipulators with the three consecutive joint axes $J_{(3)}$, $J_{(4)}$ and $J_{(5)}$ parallel (i.e., $J_{(3)} \| J_{(4)} \| J_{(5)}$).

Fig. 3-26은 연속적으로 회전관절 3, 4 그리고 5의 회전축이 서로 평행하며, 이외에 회전관절의 회전축은 서로 직교하는 6자유도 매니퓰레이터를 나타낸다 (즉, $J_{(1)} \perp J_{(2)} \perp J_{(3)} \| J_{(4)} \| J_{(5)} \perp J_{(6)}$). 예를 들어 Fig. 3-26의 6자유도 매니퓰레이터가 z_0-y_1-x_2-x_3-x_4-y_5 회전 순서를 가진 경우를 고려해보자. 해당 매니퓰레이터의 목표 orientation (즉, ${}^{0}\mathbf{R}_{6,known} = [r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}; r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3}; r_{3,1}, r_{3,2}, r_{3,3}] \in R^{3\times3}$), 목표 position (즉, ${}^{0}\mathbf{P}_{known} = [P_x, P_y, P_z]^T \in R^{3\times1}$) 그리고 관절간의 오프셋 거리 (즉, ${}^{i}\mathbf{P} = [l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}]^T \in R^{3\times1}$ for $i = 1, \ldots, 6$)를 이용하여 해당 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석을 수행한다. 해당 매니퓰레이터의 위치에 대한 역기구학 해석 시 필요한 관계식 $LHS(\theta_6) = RHS(\theta_2, \ldots, \theta_5)$을 식 (3-99)와 같이 유도한다.

$$LHS\left(\theta_6\right) = RHS\left(\theta_2,\cdots,\theta_5\right)$$
$${}^5\mathbf{R}_6\left(\left({}^0\mathbf{R}_{6,known}{}^{-1}\right){}^0\mathbf{P}_{end} - {}^6\mathbf{P}\right) = {}^5\mathbf{R}_6\sum_{i=1}^{5}{}^6\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P} \qquad (3\text{-}99)$$

목표 orientation ${}^0\mathbf{R}_{6,known}$는 ${}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^0\mathbf{R}_5{}^5\mathbf{R}_6$ 이며, 식 (3-100)과 같이 ${}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^0\mathbf{R}_5{}^5\mathbf{R}_6$의 양변에 ${}^5\mathbf{R}_6{}^{-1}$를 곱하여 정리한다.

$${}^0\mathbf{R}_{6,known} = {}^0\mathbf{R}_5\,{}^5\mathbf{R}_6$$
$${}^0\mathbf{R}_{6,known}\left({}^5\mathbf{R}_6{}^{-1}\right) = {}^0\mathbf{R}_5 \qquad (3\text{-}100)$$

식 (3-100)에 ${}^0\mathbf{R}_5{}^{-1}(= {}^5\mathbf{R}_0)$과 식 (3-99)의 $RHS(\theta_2,\ldots,\theta_5)$에서 ${}^5\mathbf{R}_4$, ${}^5\mathbf{R}_3$ 그리고 ${}^5\mathbf{R}_1$의 모든 구성 요소에 대한 사상 행렬은 Table 14같다.

Table 14. Mapping matrices in ${}^1\mathbf{R}_2$, ${}^1\mathbf{R}_3$, ${}^5\mathbf{R}_1$ and ${}^5\mathbf{R}_0$ for Fig. 3-26

Component	${}^5\mathbf{R}_4$	${}^5\mathbf{R}_3$	${}^5\mathbf{R}_1$	${}^5\mathbf{R}_0$
(1,1)	[0]	[0, 0]	[1, (0, 0, 0)]	[1, 1, (0, 0, 0); 1, –1, (0, 0, 0)]
(1,2)	[0]	[0, 0]	[0, (0, 0, 0)]	[1, 1, (0, 0, 0); 1, –1, (0, 0, 0)]
(1,3)	[0]	[0, 0]	[1, (0, 0, 0)]	[0, 1, (0, 0, 0)]
(2,1)	[0]	[0, 0]	[1, ±(1, 1, 1)]	[1, 0, ±(1, 1, 1); 1, ±1, ±(1, 1, 1)]
(2,2)	[1]	[1, 1]	[0, (1, 1, 1)]	[1, 0, ±(1, 1, 1); 1, ±1, ±(1, 1, 1)]
(2,3)	[1]	[1, 1]	[1, ±(1, 1, 1)]	[0, 1, 1; 0, 1, –(1, 1, 1)]
(3,1)	[0]	[0, 0]	[1, ±(1, 1, 1)]	[1, 0, ±(1, 1, 1); 1, ±1, ±(1, 1, 1)]
(3,2)	[1]	[1, 1]	[0, (1, 1, 1)]	[1, 0, ±(1, 1, 1); 1, ±1, ±(1, 1, 1)]
(3,3)	[1]	[1, 1]	[1, ±(1, 1, 1)]	[0, 1, 1; 0, 1, –(1, 1, 1]]

Table 13에서 ${}^5\mathbf{R}_0(1,3)$의 사상 행렬은 [0, 1, (0, 0, 0)] 이므로, 식 (3-4)에 의해서 ${}^5\mathbf{R}_0(1,3)$는 $\pm c_2$(또는 $\pm s_2$)임을 예측할 수 있다(즉, $\pm c_2$(또는 $\pm s_2$) $= ({}^0\mathbf{R}_{6,known}({}^5\mathbf{R}_6{}^{-1}))^T(1,3)$). ${}^5\mathbf{R}_1(1,2)$의 사상 행렬은 [(0, 0, 0), 0] 이므로, 식 (3-4)에 의해서 ${}^5\mathbf{R}_1(1,2)$는 0이다. z_0축 중심으로 회전하기 때문에 ${}^5\mathbf{R}_0$과 ${}^5\mathbf{R}_1$의 세번째 열 벡터은 동일하다 (즉, ${}^5\mathbf{R}_0(1,3)$와 ${}^5\mathbf{R}_1(1,3)$

는 같다). 따라서, ${}^{5}\mathbf{R}_1(1,1)$은 회전행렬의 직교성에 의해서 $\pm s_2$(또는 $\pm c_2$)이어야 한다. 또한, 식 (3-99)에 $RHS(\theta_2,\ldots,\theta_5)$의 첫번째 요소는 독립변수 θ_2에 관한 삼각함수 c_2와 s_2만 가진다. 이를 바탕으로, c_2와 s_2는 식 (3-101)와 같이 독립변수 θ_6에 관하여 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} \pm c_2(\text{or } \pm s_2) &= \left({}^{0}\mathbf{R}_{6,known}\left({}^{5}\mathbf{R}_6^{-1}\right)\right)^T(1,3) \\ \pm s_2(\text{or } \pm c_2) &= \frac{\left(LHS\left(\theta_6\right)_i - RHS\left(\theta_2,\cdots,\theta_5\right)_i + {}^{1}\mathbf{P}(1)\left(\pm s_2(\text{or } c_2)\right)\right)}{{}^{1}\mathbf{P}(1)} \end{aligned} \tag{3-101}$$

식 (3-101)로부터 θ_2에 대한 피타고라스의 삼각함수 항등식(Pythagorean trigonometric identity (즉, $c_2^2 + s_2^2 - 1 = 0$))을 유도하여, half tangent formula (즉, $c_6 = (1 - t_6^2)/(1 + t_6^2)$, $s_6 = 2t_6/(1 + t_6^2)$ and $t_6 = \tan(\theta_6/2)$)을 적용할 수 있다. 즉, t_6에 대한 4차 방정식 $at_6^4 + bt_6^3 + ct_6^2 + dt_6 + e = 0$을 얻을 수 있다. 여기에서, a, b, c, d 그리고 e는 각각 식 (3-102)-(3-106)과 같다.

$$\begin{aligned} a = {} & P_x^2 r_{1,1}^2 + 2P_xP_yr_{1,1}r_{2,1} + 2P_xP_zr_{1,1}r_{3,1} + 2P_xl_{x2}r_{1,1} + 2P_xl_{x3}r_{1,1} + 2P_xl_{x4}r_{1,1} + 2P_xl_{x5}r_{1,1} \\ & -2P_xl_{x6}r_{1,1} - 2P_xl_{z1}r_{1,1}r_{1,3} + P_y^2r_{2,1}^2 + 2P_yP_zr_{2,1}r_{3,1} + 2P_yl_{x2}r_{2,1} + 2P_yl_{x3}r_{2,1} + 2P_yl_{x4}r_{2,1} \\ & +2P_yl_{x5}r_{2,1} - 2P_yl_{x6}r_{2,1} - 2P_yl_{z1}r_{1,3}r_{2,1} + P_z^2r_{3,1}^2 + 2P_zl_{x2}r_{3,1} + 2P_zl_{x3}r_{3,1} + 2P_zl_{x4}r_{3,1} \\ & +2P_zl_{x5}r_{3,1} - 2P_zl_{x6}r_{3,1} - 2P_zl_{z1}r_{1,3}r_{3,1} + l_{x1}^2r_{1,3}^2 - l_{x1}^2 + l_{x2}^2 + 2l_{x2}l_{x3} + 2l_{x2}l_{x4} + 2l_{x2}l_{x5} \\ & -2l_{x2}l_{x6} - 2l_{x2}l_{z1}r_{1,3} + l_{x3}^2 + 2l_{x3}l_{x4} + 2l_{x3}l_{x5} - 2l_{x3}l_{x6} - 2l_{x3}l_{z1}r_{1,3} + l_{x4}^2 + 2l_{x4}l_{x5} \\ & -2l_{x4}l_{x6} - 2l_{x4}l_{z1}r_{1,3} + l_{x5}^2 - 2l_{x5}l_{x6} - 2l_{x5}l_{z1}r_{1,3} + l_{x6}^2 + 2l_{x6}l_{z1}r_{1,3} + l_{z1}^2r_{1,3}^2 \end{aligned} \tag{3-102}$$

$$\begin{aligned} b = {} & 4l_{x2}l_{z6} + 4l_{x3}l_{z6} + 4l_{x4}l_{z6} + 4l_{x5}l_{z6} - 4l_{x6}l_{z6} + 4l_{x1}^2r_{1,1}r_{1,3} + 4l_{z1}^2r_{1,1}r_{1,3} - 4P_xl_{x2}r_{1,3} \\ & -4P_xl_{x3}r_{1,3} - 4P_xl_{x4}r_{1,3} - 4P_xl_{x5}r_{1,3} + 4P_xl_{x6}r_{1,3} - 4P_yl_{x2}r_{2,3} - 4P_yl_{x3}r_{2,3} - 4P_yl_{x4}r_{2,3} \\ & -4P_yl_{x5}r_{2,3} + 4P_yl_{x6}r_{2,3} + 4P_xl_{z6}r_{1,1} - 4P_zl_{x2}r_{3,3} - 4P_zl_{x3}r_{3,3} - 4P_zl_{x4}r_{3,3} - 4P_zl_{x5}r_{3,3} \\ & +4P_zl_{x6}r_{3,3} + 4P_yl_{z6}r_{2,1} + 4P_zl_{z6}r_{3,1} - 4l_{x2}l_{z1}r_{1,1} - 4l_{x3}l_{z1}r_{1,1} - 4l_{x4}l_{z1}r_{1,1} - 4l_{x5}l_{z1}r_{1,1} \\ & +4l_{x6}l_{z1}r_{1,1} - 4l_{z1}l_{z6}r_{1,3} - 4P_xl_{z1}r_{1,1}^2 + 4P_xl_{z1}r_{1,3}^2 - 4P_x^2r_{1,1}r_{1,3} - 4P_y^2r_{2,1}r_{2,3} - 4P_z^2r_{3,1}r_{3,3} \\ & -4P_yl_{z1}r_{1,1}r_{2,1} + 4P_yl_{z1}r_{1,3}r_{2,3} - 4P_zl_{z1}r_{1,1}r_{3,1} + 4P_zl_{z1}r_{1,3}r_{3,3} - 4P_xP_yr_{1,1}r_{2,3} - 4P_xP_yr_{1,3}r_{2,1} \\ & -4P_xP_zr_{1,1}r_{3,3} - 4P_xP_zr_{1,3}r_{3,1} - 4P_yP_zr_{2,1}r_{3,3} - 4P_yP_zr_{2,3}r_{3,1} \end{aligned} \tag{3-103}$$

$$\begin{aligned}
c = & -2P_x^2 r_{1,1}^2 + 4P_x^2 r_{1,3}^2 - 4P_x P_y r_{1,1} r_{2,1} + 8P_x P_y r_{1,3} r_{2,3} - 4P_x P_z r_{1,1} r_{3,1} + 8P_x P_z r_{1,3} r_{3,3} \\
& +4P_x l_{x6} r_{1,1} + 12P_x l_{z1} r_{1,1} r_{1,3} - 8P_x l_{z6} r_{1,3} - 2P_y^2 r_{2,1}^2 + 4P_y^2 r_{2,3}^2 - 4P_y P_z r_{2,1} r_{3,1} \\
& +8P_y P_z r_{2,3} r_{3,3} + 4P_y l_{x6} r_{2,1} + 8P_y l_{z1} r_{1,1} r_{2,3} + 4P_y l_{z1} r_{1,3} r_{2,1} - 8P_y l_{z6} r_{2,3} - 2P_z^2 r_{3,1}^2 \\
& +4P_z^2 r_{3,3}^2 + 4P_z l x_6 r_{3,1} + 8P_z l_{z1} r_{1,1} r_{3,3} + 4P_z l_{z1} r_{1,3} r_{3,1} - 8P_z l_{z6} r_{3,3} + 4l_{x1}^2 r_{1,1}^2 - 2l_{x1}^2 r_{1,3}^2 \\
& -2l_{x1}^2 + 2l_{x2}^2 + 4l_{x2} l_{x3} + 4l_{x2} l_{x4} + 4l_{x2} l_{x5} + 2l_{x3}^2 + 4l_{x3} l_{x4} + 4l_{x3} l_{x5} + 2l_{x4}^2 \\
& +4l_{x4} l_{x5} + 2l_{x5}^2 - 2l_{x6}^2 - 4l_{x6} l_{z1} r_{1,3} + 4l_{z1}^2 r_{1,1}^2 - 2l_{z1}^2 r_{1,3}^2 - 8l_{z1} l_{z6} r_{1,1} + 4l_{z6}^2
\end{aligned} \tag{3-104}$$

$$\begin{aligned}
d = & \ 4l_{x2} l z_6 + 4l_{x3} l z_6 + 4l_{x4} l z_6 + 4l_{x5} l_{z6} + 4l_{x6} l_{z6} - 4l_{x1}^2 r_{1,1} r_{1,3} - 4l_{z1}^2 r_{1,1} r_{1,3} - 4P_x l_{x2} r_{1,3} \\
& -4P_x l_{x3} r_{1,3} - 4P_x l_{x4} r_{1,3} - 4P_x l_{x5} r_{1,3} - 4P_x l_{x6} r_{1,3} - 4P_y l_{x2} r_{2,3} - 4P_y l_{x3} r_{2,3} - 4P_y l_{x4} r_{2,3} \\
& -4P_y l_{x5} r_{2,3} - 4P_y l_{x6} r_{2,3} - 4P_x l_{z6} r_{1,1} - 4P_z l_{x2} r_{3,3} - 4P_z l_{x3} r_{3,3} - 4P_z l_{x4} r_{3,3} - 4P_z l_{x5} r_{3,3} \\
& -4P_z l_{x6} r_{3,3} - 4P_y l_{z6} r_{2,1} - 4P_z l_{z6} r_{3,1} - 4l_{x2} l_{z1} r_{1,1} - 4l_{x3} l_{z1} r_{1,1} - 4l_{x4} l_{z1} r_{1,1} - 4l_{x5} l_{z1} r_{1,1} \\
& -4l_{x6} l_{z1} r_{1,1} + 4l_{z1} l_{z6} r_{1,3} + 4P_x l_{z1} r_{1,1}^2 - 4P_x l_{z1} r_{1,3}^2 + 4P_x^2 r_{1,1} r_{1,3} + 4P_y^2 r_{2,1} r_{2,3} + 4P_z^2 r_{3,1} r_{3,3} \\
& +4P_y l_{z1} r_{1,1} r_{2,1} - 4P_y l_{z1} r_{1,3} r_{2,3} + 4P_z l_{z1} r_{1,1} r_{3,1} - 4P_z l_{z1} r_{1,3} r_{3,3} + 4P_x P_y r_{1,1} r_{2,3} + 4P_x P_y r_{1,3} r_{2,1} \\
& +4P_x P_z r_{1,1} r_{3,3} + 4P_x P_z r_{1,3} r_{3,1} + 4P_y P_z r_{2,1} r_{3,3} + 4P_y P_z r_{2,3} r_{3,1}
\end{aligned} \tag{3-105}$$

$$\begin{aligned}
e = & \ P_x^2 r_{1,1}^2 + 2P_x P_y r_{1,1} r_{2,1} + 2P_x P_z r_{1,1} r_{3,1} - 2P_x l_{x2} r_{1,1} - 2P_x l_{x3} r_{1,1} - 2P_x l_{x4} r_{1,1} - 2P_x l_{x5} r_{1,1} \\
& -2P_x l_{x6} r_{1,1} - 2P_x l_{z1} r_{1,1} r_{1,3} + P_y^2 r_{2,1}^2 + 2P_y P_z r_{2,1} r_{3,1} - 2P_y l_{x2} r_{2,1} - 2P_y l_{x3} r_{2,1} - 2P_y l_{x4} r_{2,1} \\
& -2P_y l_{x5} r_{2,1} - 2P_y l_{x6} r_{2,1} - 2P_y l_{z1} r_{1,3} r_{2,1} + P_z^2 r_{3,1}^2 - 2P_z l_{x2} r_{3,1} - 2P_z l_{x3} r_{3,1} - 2P_z l_{x4} r_{3,1} \\
& -2P_z l_{x5} r_{3,1} - 2P_z l_{x6} r_{3,1} - 2P_z l_{z1} r_{1,3} r_{3,1} + l_{x1}^2 r_{1,3}^2 - l_{x1}^2 + l_{x2}^2 + 2l_{x2} l_{x3} + 2l_{x2} l_{x4} + 2l_{x2} l_{x5} \\
& +2l_{x2} l_{x6} + 2l_{x2} l_{z1} r_{1,3} + l_{x3}^2 + 2l_{x3} l_{x4} + 2l_{x3} l_{x5} + 2l_{x3} l_{x6} + 2l_{x3} l_{z1} r_{1,3} + l_{x4}^2 + 2l_{x4} l_{x5} \\
& +2l_{x4} l_{x6} + 2l_{x4} l_{z1} r_{1,3} + l_{x5}^2 + 2l_{x5} l_{x6} + 2l_{x5} l_{z1} r_{1,3} + l_{x6}^2 + 2l_{x6} l_{z1} r_{1,3} + l_{z1}^2 r_{1,3}^2
\end{aligned} \tag{3-106}$$

식 (3-23)에 근거하여 계산된 $\mathbf{t}_6 = [t_{6,1}, t_{6,2}, t_{6,3}, t_{6,4}]^T \in R^{4\times1}$로부터 $\theta_{6,i} = 2\tan^{-1}(t_{6,i})$ for $i = 1,\ldots,4$ 을 결정한다 (즉, $\boldsymbol{\theta}_6 = [\theta_{6,1}, \theta_{6,2}, \theta_{6,3}, \theta_{6,4}]^T \in R^{4\times1}$). 식 (3-101) 에서 ${}^1\mathbf{P}(1) = 0$이라면, 식 (3-99)의 관계식에서 첫번째 요소는 $A_1\cos(\theta_6) + A_2\sin(\theta_6) + A_3 = 0$와 같은 θ_6에 대한 식으로 표현된다. 이때, 회전각도 θ_6은 식 (3-107)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_6 = ATAN2\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}}{-A_3}\right) \tag{3-107}$$

여기에서, $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$은 식 (3-108)와 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= P_x r_{1,1} - l_{x6} + P_y r_{2,1} + P_z r_{3,1} - l_{z1} r_{3,1} \\ A_2 &= P_x r_{1,3} - l_{z6} + P_y r_{2,3} + P_z r_{3,3} - l_{z1} r_{3,3} \\ A_3 &= -l_{x3} - l_{x4} - l_{x5} - l_{x2} \end{aligned} \tag{3-108}$$

회전각도 θ_6의 솔루션 $\boldsymbol{\theta}_6 = [\theta_{6,1},\ \theta_{6,2},\ \theta_{6,3},\ \theta_{6,4}]^T \in R^{4\times1}$ (또는 $\boldsymbol{\theta}_6 = [\theta_{6,1},\ \theta_{6,2}]^T \in R^{2\times1}$)을 각각 식 (3-100)에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 θ_1, θ_2 그리고 $\theta_3 + \theta_4 + \theta_5$를 결정한다.

회전각도 θ_3, θ_4 그리고 θ_5를 결정하기 위해서 관계식 $LHS(\theta_6) = RHS(\theta_2,\dots,\theta_5)$에 θ_1, θ_2, $\theta_3 + \theta_4 + \theta_5$ 그리고 θ_6을 대입하여, 새로운 관계식 $LHS = RHS(\theta_2, \theta_3)$을 식 (3-109)과 같이 유도한다.

$$\begin{gathered} LHS = RHS\left(\theta_4, \theta_5\right) \\ {}^5\mathbf{R}_6\left(\left({}^0\mathbf{R}_{6,known}{}^{-1}\right){}^0\mathbf{P}_{end} - \left(\sum_{i=5}^{6} {}^6\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{2} {}^6\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P}\right)\right) = {}^5\mathbf{R}_6\left(\sum_{i=3}^{4} {}^6\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P}\right) \end{gathered} \tag{3-109}$$

식 (3-109)로부터 유도한 식 $LHS^T LHS - RHS(\theta_2,\ \theta_3)^T RHS(\theta_4,\ \theta_5) = 0$은 $B_1\cos(\theta_4) + B_2\sin(\theta_4) + B_3 = 0$와 같이 θ_4에 대한 식으로 표현된다. 따라서, θ_4는 식 (3-110)과 같이 결정할 수 있다.

$$\theta_4 = ATAN2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + ATAN2\left(\frac{\pm\sqrt{B_1{}^2 + B_2{}^2 - B_3{}^2}}{-B_3}\right) \tag{3-110}$$

여기에서, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$은 식 (3-111)와 같다.

$$\begin{aligned} B_1 &= -2l_{y3}l_{y4} - 2l_{z3}l_{z4} \\ B_2 &= 2l_{y3}l_{z4} - 2l_{y4}l_{z3} \\ B_3 &= LHS_x{}^2 + LHS_y{}^2 + LHS_z{}^2 - l_{x3}{}^2 - 2l_{x3}l_{x4} - l_{x4}{}^2 - l_{y3}{}^2 - l_{y4}{}^2 - l_{z3}{}^2 - l_{z4}{}^2 \end{aligned} \tag{3-111}$$

식 (3-111)에서, LHS_x, LHS_y 그리고 LHS_z는 각각 식 (3-109)의 LHS에 x, y 그리고 z 성분을 의미한다. 식 (3-110)에서 계산된 회전각도 θ_4를 새로운 관계식 $LHS = RHS(\theta_4, \theta_5)$에 대입한다. Table 14에서 ${}^5\mathbf{R}_3$와 ${}^5\mathbf{R}_4$의 구성요소들에 대한 사상 행렬들로부터, 식 (3-109)에 $RHS(\theta_4, \theta_5)$의 첫번째 요소는 독립변수에 관한 삼각함수가 존재하지 않는다. 따라서, 식 (3-109)의 관계식 $LHS = RHS(\theta_4, \theta_5)$의 두번째와 세번째 요소를 연립방정식으로 사용하면, 벡터 $\mathbf{x} = [c_5, s_5]^T \in R^{2\times1}$는 $\mathbf{x} = [C_{1,1}, C_{1,2}; C_{2,1}, C_{2,2}]^{-1}[C_{1,3}; C_{2,3}]$와 같이 결정할 수 있다. 그러므로, 회전각도 θ_5는 식 (3-112)와 같이 계산된다.

$$\theta_5 = ATAN2\left(\frac{C_{1,1}C_{2,3} - C_{1,3}C_{2,1}}{C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1}}, -\frac{C_{1,2}C_{2,3} - C_{1,3}C_{2,2}}{C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1}}\right) \tag{3-112}$$

여기에서, $\mathbf{C} = [C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}; C_{2,1}, C_{2,2}, C_{2,3}]$은 식 (3-113)와 같다.

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= l_{y3}c_4 + l_{z3}s_4 + l_{y4} \\ C_{1,2} &= l_{z3}c_4 + l_{z4} - l_{y3}s_4 \\ C_{1,3} &= LHS_y \\ C_{2,1} &= l_{z3}c_4 - l_{y3}s_4 + l_{z4} \\ C_{2,2} &= -l_{y4} - l_{y3}c_4 - l_{z3}s_4 \\ C_{2,3} &= LHS_z \end{aligned} \tag{3-113}$$

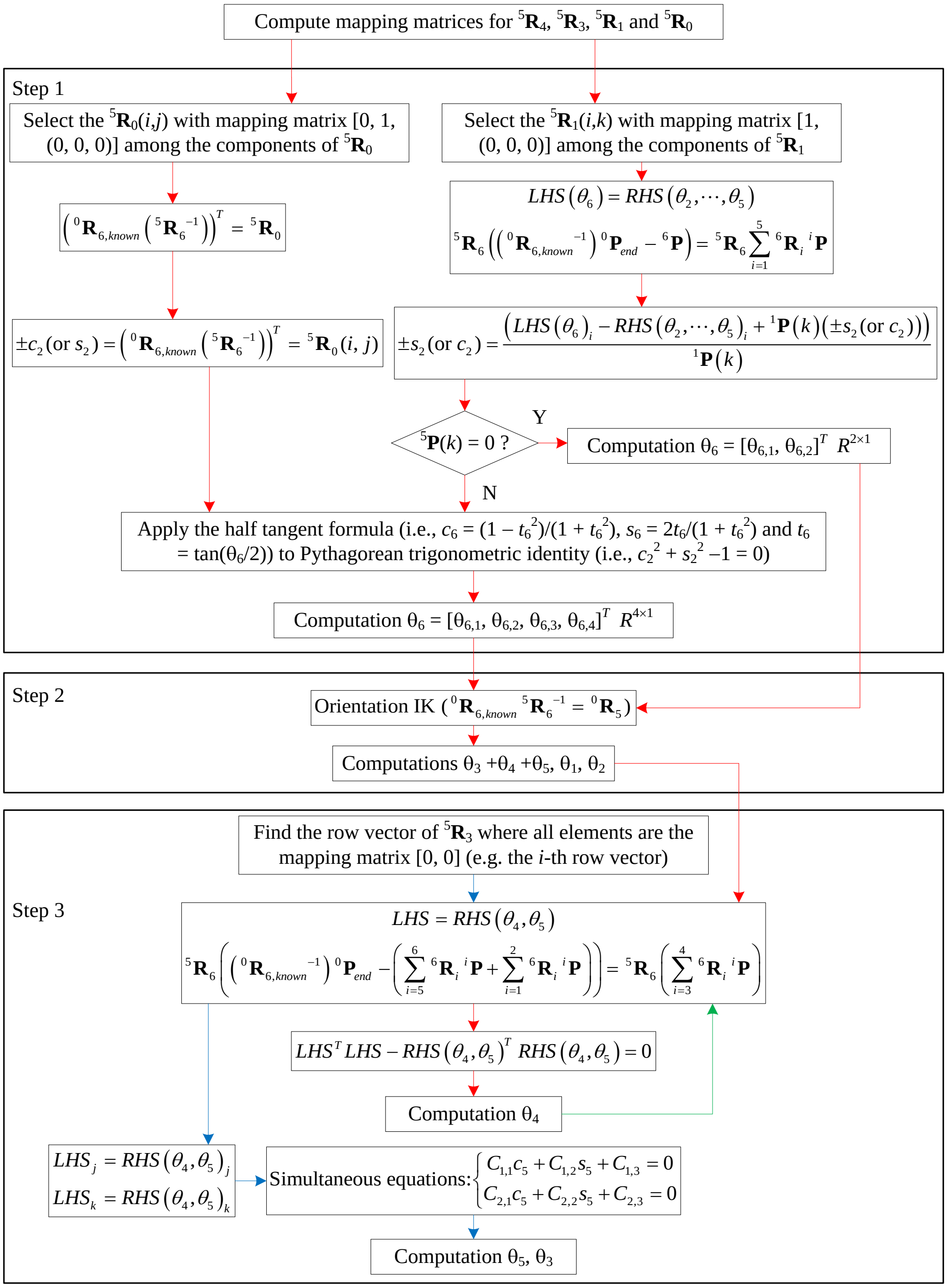


Fig. 3-27. Framework of the inverse kinematics solution for the Fig. 3-26.

사상 관계를 이용하여 Fig. 3-26의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 닫힌 형태 방

법의 역기구학 솔루션의 프레임워크를 Fig. 3-27와 같이 정리할 수 있다. Step1에서, 회전각도 θ_6의 솔루션를 계산하기 위해 ${}^5\mathbf{R}_0$의 구성요소들 중에서 사상 행렬 [0, 1, (0, 0, 0)]을 가진 ${}^5\mathbf{R}_0(i,j)$와 ${}^5\mathbf{R}_1$의 구성 요소들중에서 사상 행렬 [1, 0, 0, 0]을 가진 ${}^5\mathbf{R}_1(i,k)$ 요소를 선택한다. 이때, ${}^1\mathbf{P}(k)$가 ${}^1\mathbf{P}(k) = 0$을 만족하는지 확인한다. Step 2에서, 계산한 회전각도 θ_6의 솔루션 $\boldsymbol{\theta}_6 = [\theta_{6,1}, \theta_{6,2}, \theta_{6,3}, \theta_{6,4}]^T \in R^{4\times1}$ (또는 $\boldsymbol{\theta}_6 = [\theta_{6,1}, \theta_{6,2}]^T \in R^{2\times1}$)을 각각 식 (3-100)에 대입하여, 제 3 장제 2 절1 회전행렬에 대한 역기구학 해석 방법을 통해서 회전각도 $\theta_3 + \theta_4 + \theta_5$, θ_1 그리고 θ_2를 결정한다. Step 3에서, ${}^5\mathbf{R}_3$의 행 벡터들 중에서 모든 요소에 대한 사상 행렬이 [0, 0]인 i번째 행 벡터를 찾는다. 이를 기준으로, 식 (3-109)의 관계식 $LHS = RHS(\theta_4, \theta_5)$에 i번째 요소를 제외한 나머지들을 연립 방정식으로 선택한다.

제 4 장 토의

이번 장에서는 사상 관계를 이용한 기구학 해석 시 자코비안 행렬 계산방법을 소개하며, 사상 관계를 이용한 변위 자코비안 행렬의 계산방법이 기존의 변위 자코비안 행렬 계산방법에 비해서 반복적인 계산 횟수가 감소하였음을 제시한다.

관절 공간 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]^T \in R^{n\times 1}$을 가진 직렬 매니퓰레이터에 대한 순기구학 $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$을 고려해보자. $\mathbf{X} = [P_x, P_y, P_z, O_\alpha, O_\beta, O_\gamma]^T \in R^{6\times 1}$는 매니퓰레이터의 끝단의 자세를 의미하며, P_x, P_y 그리고 P_z (또는 O_α, O_β 그리고 O_γ)는 기준 좌표계 {0}에 관하여 매니퓰레이터의 끝단 위치 (또는 방향)를 나타내는 변수이다. $\mathbf{X}$를 시간으로 미분하면, 식 (4-1)와 같은 매니퓰레이터의 끝단 자세의 속도와 관절각도의 속도의 관계를 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{v}_{end} \\ \hdashline {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{end} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_n} \\ \hdashline \frac{\partial f_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial f_5}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial f_6}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_D \\ \hdashline \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{4-1}$$

여기에서, ${}^{0}\mathbf{v}_{end} \in R^{3\times 1}$ (또는 ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{end} \in R^{3\times 1}$)는 좌표계 {0}에 관하여 매니퓰레이터의 끝단 선속도 (또는 각속도)를 나타내며, $\mathbf{J}_D \in R^{3\times n}$ (또는 $\mathbf{J}_R \in R^{3\times n}$)은 변위 (또는 회전) 자코비안 행렬을 의미한다.

회전 자코비안 행렬 $\mathbf{J}_R$은 회전 행렬로부터 쉽게 얻을 수 있다. 예를 들어, DH

파라미터를 기반으로 순기구학 해석 시 회전축은 z축으로만 설정하기 때문에, 회전 자코비안 $\mathbf{J}_R$의 i번째 열 벡터는 $\mathbf{z}_{i-1}$와 같다. 여기에서, $\mathbf{z}_{i-1}$는 관절 i의 회전축의 단위 벡터를 의미한다. 본 연구에서는 순기구학 해석 시 x, y 그리고 z축을 사용하여 관절 i의 회전축 설정하므로, 사상 관계를 기반으로 연속 회전 행렬을 식 (3-4)과 같이 하나의 식으로 일반화시켰다. 따라서, 매니퓰레이터의 회전순서만 주어진다면 사상 관계를 이용하여 회전 자코비안 $\mathbf{J}_R$의 i번째 열 벡터를 쉽게 얻을 수 있다 (예, 관절 i의 회전축이 y축이라면, $\mathbf{J}_R$의 i번째 열 벡터는 연속 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_i$의 두번째 열 벡터).

사상 관계를 이용한 변위 자코비안 $\mathbf{J}_D$의 계산을 고려해보자. 좌표계 {0}와 좌표계 {i}의 원점이 일치할 때, 좌표계 {i}에 관하여 링크 i의 끝단 위치 벡터(즉, ${}^i\mathbf{P}$)는 ${}^i\mathbf{P} = [{}^iP_x, {}^iP_y, {}^iP_z]^T \in R^{3\times1}$이다. 여기에서, ${}^i\mathbf{P}$는 일정하다. 좌표계 {i}에 관하여 링크 i의 끝단 위치 벡터(즉, ${}^0\mathbf{P}$)는 ${}^0\mathbf{P} = {}^0\mathbf{R}_i{}^i\mathbf{P}$으로 결정된다. ${}^0\mathbf{P}$가 시간에 대해 미분되었을 때(즉, $d{}^0\mathbf{P}/dt$), 속도 벡터 ${}^0\mathbf{v}$의 첫번째 요소(즉, ${}^0v_x$)는 식 (4-2)과 같이 계산된다.

$$
{}^0v_x = \frac{\partial\,{}^0\mathbf{x}\cdot{}^i\mathbf{x}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}{}^iP_x + \frac{\partial\,{}^0\mathbf{x}\cdot{}^i\mathbf{y}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}{}^iP_y + \frac{\partial\,{}^0\mathbf{x}\cdot{}^i\mathbf{z}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}{}^iP_z \tag{4-2}
$$

사상 관계 관점에서 식 (4-2)에서 $\partial{}^0\mathbf{x}\cdot{}^i\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\theta}$를 관찰해보자. 제 3 장제 1 절에서 사상 관계를 이용하여 연속 회전 행렬 ${}^0\mathbf{R}_i \in R^{3\times3}$을 식 (3-4)과 같이 표현하였다. 식 (3-4)을 기반으로, 식 (4-2)에서 $\partial{}^0\mathbf{x}\cdot{}^i\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\theta}$ 항은 식 (4-3)과 같이 기술할 수 있다.

$$\frac{\partial\,{}^0\mathbf{x}\cdot{}^i\mathbf{x}}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\frac{\partial\left(\sum_{j=1}^{{}^x m_x}{}^x d_{x,j}\cos\left({}^x\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta}+{}^x\phi_{x,j}\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}}$$

$$=-\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{{}^x m_x}{}^x C_{x,j(1)}\,{}^x d_{x,j}\sin\left({}^x\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta}+{}^x\phi_{x,j}\right)\\ \sum_{j=1}^{{}^x m_x}{}^x C_{x,j(2)}\,{}^x d_{x,j}\sin\left({}^x\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta}+{}^x\phi_{x,j}\right)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{{}^x m_x}{}^x C_{x,j(n)}\,{}^x d_{x,j}\sin\left({}^x\mathbf{C}_{x,j}\boldsymbol{\theta}+{}^x\phi_{x,j}\right)\end{bmatrix}^T\in R^{1\times i}\tag{4-3}$$

여기에서, ${}^xC_{x,j(k)}$는 ${}^x\mathbf{C}_x$의 j번째 행벡터의 k번째 요소를 의미한다. 식 (4-3)은 다시 식 (4-4)과 같은 행렬 형태로 표현한다.

$$\frac{\partial\,{}^0\mathbf{x}\cdot{}^i\mathbf{x}}{\partial\boldsymbol{\theta}}=-\left({}^x\mathbf{C}_x^{\ T}\,{}^x\mathbf{DM}_x\,{}^x\mathbf{d}_x\right)^T\in R^{1\times i}\tag{4-4}$$

식 (4-3)에서 ${}^xm_x$이 ${}^xm_x = m$이라고 할 때, 식 (4-4)에서 ${}^x\mathbf{C}_x^T$는 ${}^x\mathbf{C}_x\in R^{m\times i}$의 전치를 의미한다. ${}^x\mathbf{DM}_x$는 ${}^x\mathbf{DM}_x = diag[\sin({}^x\mathbf{C}_{x,1}\boldsymbol{\theta} + {}^x\phi_{x,1}), \sin({}^x\mathbf{C}_{x,2}\boldsymbol{\theta} + {}^x\phi_{x,2}),\ldots, \sin({}^x\mathbf{C}_{x,m}\boldsymbol{\theta} + {}^x\phi_{x,m})]$이며, ${}^x\mathbf{d}_x$는 ${}^x\mathbf{d}_x = [{}^xd_{x,1}, {}^xd_{x,2},\ldots, xd_{x,m}]^T\in R^{m\times 1}$이다. 여기에서, diag[$a_1, a_2, \ldots, a_m$]은 $m\times m$ diagonal matrix를 의미한다. 식 (4-4)과 유사하게, 사상 관계를 이용하여 속도 벡터 ${}^0\mathbf{v}$를 식 (4-5)과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned}{}^0\mathbf{v}&=\frac{d\,{}^0\mathbf{P}}{dt}=\frac{d}{dt}\left({}^0\mathbf{R}_i\,{}^i\mathbf{P}\right)\\ &=-\begin{bmatrix}\left({}^x\mathbf{C}_x^{\ T}\,{}^x\mathbf{DM}_x\,{}^x\mathbf{d}_x\right)^T{}^iP_x+\left({}^x\mathbf{C}_y^{\ T}\,{}^x\mathbf{DM}_y\,{}^x\mathbf{d}_y\right)^T{}^iP_y+\left({}^x\mathbf{C}_z^{\ T}\,{}^x\mathbf{DM}_z\,{}^x\mathbf{d}_z\right)^T{}^iP_z\\ \left({}^y\mathbf{C}_x^{\ T}\,{}^y\mathbf{DM}_x\,{}^y\mathbf{d}_x\right)^T{}^iP_x+\left({}^y\mathbf{C}_y^{\ T}\,{}^y\mathbf{DM}_y\,{}^y\mathbf{d}_y\right)^T{}^iP_y+\left({}^y\mathbf{C}_z^{\ T}\,{}^y\mathbf{DM}_z\,{}^y\mathbf{d}_z\right)^T{}^iP_z\\ \left({}^z\mathbf{C}_x^{\ T}\,{}^z\mathbf{DM}_x\,{}^z\mathbf{d}_x\right)^T{}^iP_x+\left({}^z\mathbf{C}_y^{\ T}\,{}^z\mathbf{DM}_y\,{}^z\mathbf{d}_y\right)^T{}^iP_y+\left({}^z\mathbf{C}_z^{\ T}\,{}^z\mathbf{DM}_z\,{}^z\mathbf{d}_z\right)^T{}^iP_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \vdots\\ \dot\theta_i\end{bmatrix}\\ &=\mathbf{J}_D\dot{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}\tag{4-5}$$

여기에서, $\mathbf{J}_D \in R^{3\times i}$는 변위 자코비안 행렬을 의미한다.

예를 들어, 제 3 장제 1 절 순기구학에서 Fig. 3-3의 3자유도 매니퓰레이터는 회전순서 z_0-y_1-z_2를 가진다. Fig. 3-3에 대한 위치벡터 ${}^0\mathbf{P}_{end}$는 식 (3-14)와 같다. 식 (3-14)을 미분하면, ${}^0\mathbf{v}_{end}(= d{}^0\mathbf{P}_{end}/dt)$는 식 (4-6)와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{v}_{end} &= \frac{d\,{}^0\mathbf{P}_{end}}{dt} \\
&= \begin{bmatrix} -l_{x1}s_1 - l_{x2}s_1c_2 - l_{z3}s_1s_2 & -l_{x2}c_1s_2 + l_{z3}c_1c_2 & 0 \\ l_{x1}c_1 + l_{x2}c_1c_2 + l_{z3}c_1s_2 & -l_{x2}s_1s_2 + l_{z3}s_1c_2 & 0 \\ 0 & -l_{z3}s_2 - l_{x2}c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{J}_D \dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{4-6}$$

$d({}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{P})/dt$은 $d({}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{P})/dt = l_{x1}(d\theta_1/dt)[-s_1, c_1, 0]^T$와 같이 계산된다. 식 (4-5)를 기반으로, Table 4에 사상 관계를 이용하여 $d({}^0\mathbf{R}_i{}^i\mathbf{P})/dt$ for i = 2, 3을 각각 식 (4-7)와 식 (4-8)와 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left({}^0\mathbf{R}_2\,{}^2\mathbf{P}\right) &= -l_{x2} \begin{bmatrix} \left({}^x\mathbf{C}_x{}^T\,{}^x\mathbf{DM}_x\,{}^x\mathbf{d}_x\right)^T \\ \left({}^y\mathbf{C}_x{}^T\,{}^y\mathbf{DM}_x\,{}^y\mathbf{d}_x\right)^T \\ \left({}^z\mathbf{C}_x{}^T\,{}^z\mathbf{DM}_x\,{}^z\mathbf{d}_x\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&= -l_{x2} \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1+2} & 0 \\ 0 & s_{1-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\right)^T \\ \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1+2-\pi/2} & 0 \\ 0 & s_{1-2-\pi/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\right)^T \\ s_{2+\pi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&= -l_{x2} \begin{bmatrix} s_1c_2 & c_1s_2 \\ -c_1c_2 & s_1s_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4-7}$$

$$\frac{d}{dt}\left({}^{0}\mathbf{R}_3\,{}^{3}\mathbf{P}\right) = -l_{z3}\begin{bmatrix} \left({}^{x}\mathbf{C}_z{}^{T}\,{}^{x}\mathbf{DM}_z\,{}^{x}\mathbf{d}_z\right)^T \\ \left({}^{y}\mathbf{C}_z{}^{T}\,{}^{y}\mathbf{DM}_z\,{}^{y}\mathbf{d}_z\right)^T \\ \left({}^{z}\mathbf{C}_z{}^{T}\,{}^{z}\mathbf{DM}_z\,{}^{z}\mathbf{d}_z\right)^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}$$

$$= -l_{z3}\begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{1+2-\pi/2} & 0\\ 0 & s_{1-2+\pi/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right)^T \\ \left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{1+2-\pi} & 0\\ 0 & s_{1-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right)^T \\ s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix} \tag{4-8}$$

$$= -l_{z3}\begin{bmatrix} s_1 s_2 & -c_1 c_2 & 0\\ -c_1 s_2 & -s_1 c_2 & 0\\ 0 & s_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}$$

$d({}^{0}\mathbf{R}_1{}^{1}\mathbf{P})/dt$와 식 (4-7)-(4-8)을 종합하여 정리하면, 식 (4-9)와 같은 Fig. 3-3의 끝단 대한 변위 자코비안 행렬 $\mathbf{J}_D$를 유도할 수 있다.

$$\mathbf{J}_D = \begin{bmatrix} -l_{x1}s_1 - l_{x2}s_1c_2 - l_{z3}s_1s_2 & -l_{x2}c_1s_2 + l_{z3}c_1c_2 & 0\\ l_{x1}c_1 + l_{x2}c_1c_2 + l_{z3}c_1s_2 & -l_{x2}s_1s_2 + l_{z3}s_1c_2 & 0\\ 0 & -l_{x2}c_2 - l_{z3}s_2 & 0\end{bmatrix} \tag{4-9}$$

따라서, 사상 관계를 이용한 $\mathbf{J}_D$ 계산은 직접 미분 방식으로 계산한 식 (4-6)의 $\mathbf{J}_D$와 일치함을 볼 수 있다. 유사하게, $d({}^{0}\mathbf{R}_1{}^{1}\mathbf{P})/dt$와 식 (4-7)을 종합하여 정리하면, Fig. 3-3의 링크 2에 대한 변위 자코비안을 얻을 수 있다.

수학적으로, 식 (4-1)에서 매니퓰레이터의 끝단에 대한 변위 자코비안 행렬 $\mathbf{J}_D$의 i번째 열 벡터는 $\partial{}^{0}\mathbf{P}_{end}/\partial\theta_i$임을 알 수 있다. DH 파라미터를 기반한 순기구학 해석의 경우, $\mathbf{J}_D$의 i번째 열 벡터는 $\mathbf{z}_{i-1}$와 $({}^{0}\mathbf{P}_{end} - {}^{0}\mathbf{P}_{i-1})$의 외적으로 계산된다 (즉, $\mathbf{z}_{i-1} \times ({}^{0}\mathbf{P}_{end} - {}^{0}\mathbf{P}_{i-1})$). 여기에서, ${}^{0}\mathbf{P}_{i-1}$는 좌표계 {0}에 관하여 i번째 관절의 원점까지의 위치

벡터이다. 기존의 변위 자코비안 행렬 계산방법은 매니퓰레이터의 끝단 (또는 각 링크) 선속도 상태에 대한 i번째 관절 속도의 효과만 관찰한다 (즉, 변위 자코비안 행렬의 i번째 열 벡터). 따라서, 기존의 변위 자코비안 행렬 계산방법은 매니퓰레이터의 관절 개수 n만큼 변위 자코비안 행렬의 열 벡터들을 계산해야한다. 반면에, 이번 장에서 제시한 식 (4-5)을 기반으로 사상 관계를 이용하면, 변위 자코비안 행렬에 각각의 열 벡터들에 대한 계산 없이, 매니퓰레이터의 끝단뿐만 아니라 각 링크에 대한 변위 자코비안 행렬을 기술할 수 있다.

제 5 장 결론

본 논문은 사상 관계를 이용하여, 로봇 매니퓰레이터에 대한 새로운 기구학 해석방법을 제안하였고, 연속 회전 행렬의 구성 요소인 방향코사인을 사상 관계(즉, 사상 행렬과 위상각 벡터)로 기술할 수 있음을 보였다. 즉, 해당 매니퓰레이터에 대한 사상 행렬과 위상각 벡터가 주어진다면 복잡한 형태의 방향 코사인의 식 형태가 예측 가능하다. 다양한 설계 예제로부터 사상 관계를 이용한 기구학 해석은 다음과 같은 특징을 가진다.

1. 기존에 연속 회전 행렬은 회전 순서에 기반하여 일반적인 회전 행렬의 곱셈을 통해서 계산하거나, 정리된 테이블로부터 얻었다 (예, 12가지 오일러 회전 행렬). 본 논문에서는 사상 관계를 이용하여 연속 회전 행렬을 일반화하였다. 즉, 사상 관계를 기반으로 일반화된 하나의 식으로부터 2, 3, …, n자유도 연속 회전 행렬들이 기술된다.
2. 3자유도 연속 회전 행렬의 역기구학 해석은 사전에 정의된 12가지 오일러 회전 행렬에 대한 역기구학 솔루션들 중에서 하나를 선택하여 수행되었다. 본 논문에서는 사상 관계를 기반으로, 3자유도 연속 회전 행렬의 일반화된 역기구학 솔루션을 제공한다.
3. 기존 방법은 순기구학 결과 식의 형태를 엔지니어가 보고 판단하여 닫힌 형태 방식의 역기구학 해석을 수행하게 된다. 이러한 반복적인 작업을 해소하기 위해서, 본 논문에서는 사상 관계를 이용하여 특정 기구학 구성 [2]-[4] (즉, 3개의 연속된 회전 관절의 축이 공통점에서 교차 또는 3개의 연속된 회전 관절의 축이 평행)을 가진 각각의 6자유도 매니퓰레이터에 대한 역기구학 해석 방법을 제시하였다.

4. 기존 변위 자코비안 행렬 계산방법은 매니퓰레이터에 끝단 또는 각 링크의 선속도에 대한 변위 자코비안 행렬을 기술하기 위해서, 매니퓰레이터에 관절의 개수만큼 변위 자코비안 행렬의 열 벡터들을 계산하였다. 본 논문에서는 사상 관계를 기반으로 정의한 하나의 식을 이용하여, 변위 자코비안 행렬에 각각의 열 벡터들에 대한 계산 없이, 매니퓰레이터의 끝단뿐만 아니라 각 링크에 대한 변위 자코비안 행렬을 기술한다.

참고문헌

[1] K. J. Waldron and J. Schmiedeler, *Springer Handbook of Robotics*, 1st ed. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[2] S. Lorenzo, V. Luigi, and O. Giuseppe, *Robotics: Modelling, Planning and Control*. 1st ed. Springer London, 2010.

[3] R. Diankov, “Automated Construction of Robotic Manipulation Programs,” Ph.D. dissetation, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, PA, USA, 2010.

[4] J. J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd ed. Pearson/Prentice Hall, 2005.

[5] M. Raghavan and B. Roth, “Kinematic analysis of the 6R manipulator of general geometry,” *in Proc. 5th Int. Symp. Robot. Res.*, pp. 263–269, 1990.

[6] Kohli, D. and Osvatic, M., “Inverse kinematics of general 6R and 5R, P serial manipulators,” *ASME J. Mech. Des*. vol. 115, no. 4, pp. 922–931, Dec., 1993.

[7] J. S. Kim and G. S. Chinkjian, “Inverse kinematic solutions of 6-D.O.F. biopolymer segments,” *Robotica*, vol. 34, no. 8, pp. 1734-1753, Aug., 2016.

[8] L.W. Tsai, A.P. Morgan, “Solving the Kinematics of the Most General Six- and Five-Degree-of-Freedom Manipulators by Continuation Methods,” *ASME. J. Mech., Trans., and Automation*, vol. 107, no. 2, pp. 189-200, Jun., 1985.

[9] C.W.Wampler, A.P. Morgan and A.J. Sommese, “Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics,” *ASME J. Mech. Des.*, vol. 112, no. 1, pp. 59-68, Mar., 1990.

[10] S.C.A. Thomopoulos and R.Y.J. Tam, “An iterative solution to the inverse kinematics of robotic manipulators,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 26, no. 4, pp. 359–373, 1991.

[11] R.S. Rao, A. Asaithambi and S.K. Agrawal, “Inverse kinematic solution of robot

manipulators using interval analysis," *ASME J. Mech. Des.*, vol. 120, no. 1, pp. 147-150, Mar., 1998.

[12] C.W. Wampler, "Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least squares methods," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. 16, no. 1, pp. 93-101, Jan., 1986.

[13] J. Denavit, and R. S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices", *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 215-221, Jun., 1955.

[14] M. A. Ali, H. A. Park and C. S. G. Lee, "Closed-form inverse kinematic joint solution for humanoid robots," *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, 2010, pp. 704-709, 2010.

[15] F. Xiao, G. Li, D. Jiang, Y. Xie, J. Yun, Y. Liu, L. Huang and Z. Fang, "An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry," *Mechan. Mach. Theory*, vol. 159, pp. 359–373, May, 2021.

[16] D. Kohli, and A.H. Soni, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms Via Successive Screw Displacements," *ASME J. Eng. Ind.*, vol. 97, no. 2, pp. 739-747, May, 1975.

[17] L. W. Tsai, *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*, 1st ed. John Wiley & Sons, 1999.

[18] R. Featherstone, *Robot Dynamics Algorithms*, 1st ed. Boston/Dordrecht/ Lancaster: Kluwer Academic Publishers, 1987.

[19] R. Featherstone, *Rigid body dynamics algorithms*, 1st ed. Springer, New York, 2008.

[20] R. W. Brockett, "Robotic manipulators and the product of exponentials formula," *in Proc. Symp. Math. Theory Netw. Syst.*, Beer Sheva, Israel, pp. 120-129, 1983.

[21] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, 1st ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1994.

[22] K. M. Lynch and F. C. Park, *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*, 1st ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2017.

[23] J. Selig, *Geometric Fundamentals of Robotics*, 1st ed. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2005.

[24] F. C. Park, J. E. Bobrow, and S. R. Ploen, “A Lie group formulation of robot dynamics,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, no. 6. pp. 609-618, Dec., 1995.

[25] Hildenbrand, D., “Geometric Computing in Computer Graphics and Robotics using Conformal Geometric Algebra,” Ph.D. dissetation, Darmstadt University of Technology, Darmstadt, 2006.

[26] J. M. Pardos-Gotor, *Screw theory in robotics: an illustrated and practicable introduction to modern mechanics*, 1st ed. CRC Press, 2021.

[27] I.-M. Chen and G. Yan, “Closed-form inverse kinematic solver for reconfigurable robots,” *In Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation*, Seoul, South Korea, pp. 2395-2400, 2001.

[28] I. Zaplana, H. Hadfield, and J. Lasenby, “Closed-form solutions for the inverse kinematics of serial robots using conformal geometric algebra,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 173, 2022, Art. no. 104835.

[29] C.H. Cho and S.C Kang, “Design of a Static Balancing Mechanism for a Serial Manipulator With an Unconstrained Joint Space Using One-DOF Gravity Compensators,” *IEEE Trans. on Rob.*, vol. 30, no. 2, pp. 421-431, Apr., 2014.

[30] S.H. Kim, M.T. Choi and C.H. Cho, “Synthesis method of a mapping matrix for a gravity compensator,” *J. Mech. Sci. Tech.*, vol. 33, no. 12, pp. 6053-6062, Dec., 2019.

[31] S.H. Kim, and C.H. Cho, “Synthesis of gravity compensators using the space mapping method,” *J. Mech. Sci. Tech.* (Submitted in 2022).

부록

A. Orientation의 역기구학에서 행렬식 증명

제 3 장제 2 절1에서 연속 회전 행렬 $^{0}\mathbf{R}_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$이 singular인 경우 회전 각도 θ_3 계산 과정에서, 행렬 $\mathbf{A}$의 행렬식 $\det(\mathbf{A}) = X_1Y_2 - Y_1X_2$가 0이 아님을 증명한다. $^{0}\mathbf{R}_3$에서 사상 행렬 $^{D}\mathbf{C}$로 계산된 방향 코사인 ^{D}R은 $\cos(\theta_1 + {}^{u}\phi_1)\cos(\theta_3 + {}^{u}\phi_3) + \cos(\theta_1 + {}^{u}\phi_4)\cos(\theta_2 + {}^{u}\phi_5)\cos(\theta_3 + {}^{u}\phi_6)$ 같이 일반화된 코사인-사인 함수의 조합 형태를 갖는다. 여기에서, $^{u}\phi_2$은 *Null*로써 생략된다. 예를 들어, z_0-y_1-z_2 연속 회전 행렬 $^{0}\mathbf{R}_3$에서, (2,1) 요소 $\cos(\theta_1)\sin(\theta_3) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$는 $\cos(\theta_1)\cos(\theta_3 - \pi/2) + \cos(\theta_1 - \pi/2)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$와 같이 기술할 수 있다. 여기에서, $^{u}\phi_3$과 $^{u}\phi_4$는 $-\pi/2$이며, $^{u}\phi_1$, $^{u}\phi_5$ 그리고 $^{u}\phi_6$는 0이다. ^{D}R은 식 (5-1)과 같이 단순한 코사인 함수의 합 형태로 다시 기술할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
{}^{D}R = &\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_3 + {}^{u}\phi_1 + {}^{u}\phi_3\right) + \cos\left(\theta_1 - \theta_3 + {}^{u}\phi_1 - {}^{u}\phi_3\right)\right)/2 \\
&+ \begin{pmatrix} \cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + {}^{u}\phi_4 + {}^{u}\phi_5 + {}^{u}\phi_6\right) + \cos\left(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 + {}^{u}\phi_4 + {}^{u}\phi_5 - {}^{u}\phi_6\right) \\ + \cos\left(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + {}^{u}\phi_4 - {}^{u}\phi_5 + {}^{u}\phi_6\right) + \cos\left(\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + {}^{u}\phi_4 - {}^{u}\phi_5 - {}^{u}\phi_6\right) \end{pmatrix}/4
\end{aligned} \tag{5-1}
$$

제 3 장제 1 절에 식 (3-3)를 기반으로 식 (5-1)를 고려하였을 때, ^{D}R에 대한 위상각 벡터 $^{D}\boldsymbol{\phi} = [{}^{D}\phi_1, \ldots, {}^{D}\phi_6]^T \in R^{6\times1}$의 요소들은 각각 $^{D}\phi_1 = {}^{u}\phi_1 + {}^{u}\phi_2(= Null) + {}^{u}\phi_3$, $^{D}\phi_2 = {}^{u}\phi_1 + {}^{u}\phi_2(= Null) + {}^{u}\phi_3$, $^{D}\phi_3 = {}^{u}\phi_4 + {}^{u}\phi_5 + {}^{u}\phi_6$, $^{D}\phi_4 = {}^{u}\phi_4 + {}^{u}\phi_5 - {}^{u}\phi_6$, $^{D}\phi_5 = {}^{u}\phi_4 - {}^{u}\phi_5 + {}^{u}\phi_6$ 그리고 $^{D}\phi_6 = {}^{u}\phi_4 - {}^{u}\phi_5 - {}^{u}\phi_6$을 만족해야 한다.

$^{0}\mathbf{R}_3$이 singular인 경우 (즉, $\theta_2 = {}^{B}\phi_{1\_sub} = \mp\pi/2$ (또는 $\theta_2 = {}^{B}\phi_{1\_sub} = \mp\pi/2$)), ^{D}R은 $\cos(\theta_1 + {}^{u}\phi_1)\cos(\theta_3 + {}^{u}\phi_3) \pm \cos(\theta_1 + {}^{u}\phi_4)\sin({}^{u}\phi_5 - {}^{B}\phi_{1_sub})\cos(\theta_3 + {}^{u}\phi_6)$이다. 또한, 제 3 장제 2 절1.다에서 식 (3-18)의 X_j와 Y_j는 각각 $A_xc_1 - A_ys_1$과 $-B_xc_1 + B_ys_1$로 같아야 한다. 여기에서, A_x, A_y, B_x 그리고 B_y는 각각 $A_x = \cos({}^{u}\phi_1)\cos({}^{u}\phi3) \pm \cos({}^{u}\phi_4)\cos({}^{u}\phi_6)\sin(\phi_C)$, $A_y =$

$\sin(^u\phi_1)\cos(^u\phi_3) \pm \sin(^u\phi_4)\cos(^u\phi_6)\sin(\phi_C)$, $B_x = \cos(^u\phi_1)\sin(^u\phi_3) \pm \cos(^u\phi_4)\sin(^u\phi_6)\sin(\phi_C)$ 그리고 $B_y = \sin(^u\phi_1)\sin(^u\phi_3) \pm \sin(^u\phi_4)\sin(^u\phi_6)\sin(\phi_C)$ 이다. 여기에서, $\phi_C = {}^u\phi_5 - {}^B\phi_{1_sub}$이다.

행렬 **A**의 행렬식 $\det(\mathbf{A}) = X_1Y_2 - Y_1X_2$를 계산하기 위해서, $X_j^2 + Y_j^2$를 고려한다. $X_j^2 + Y_j^2$는 복소수 $X_j \pm jY_j$를 사용하여 $X_j^2 + Y_j^2 = (X_j + jY_j)(X_j - jY_j)$와 같이 계산할 수 있다. 복소수 $X_j \pm jY_j = 0$ 이라면, 식 (5-2)을 얻을 수 있다.

$$c_1 = -\frac{-\left(A_yA_x + B_yB_x\right) \mp j\left(A_yB_x - B_yA_x\right)}{A_x^{\,2} + B_x^{\,2}} s_1 \tag{5-2}$$

여기에서, $A_yB_x - B_yA_x$, $A_yA_x + B_yB_x$ 그리고 $A_x^2 + B_x^2$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
A_yB_x - B_yA_x &= \mp\sin\left(^u\phi_1 - {}^u\phi_4\right)\sin\left(^u\phi_3 - {}^u\phi_6\right)\sin\left(\phi_C\right) \\
A_yA_x + B_yB_x &= \cos\left(^u\phi_1\right)\sin\left(^u\phi_1\right) + \sin\left(\phi_C\right)\left(\sin\left(^u\phi_4\right)\cos\left(^u\phi_4\right) \pm \sin\left(^u\phi_1 + {}^u\phi_4\right)\cos\left(^u\phi_3 - {}^u\phi_6\right)\right) \\
&\quad + \sin\left(\phi_C\right)\left(\sin\left(\phi_C\right)\cos\left(^u\phi_4\right) \pm \sin\left(^u\phi_1 + {}^u\phi_4\right)\cos\left(^u\phi_3 - {}^u\phi_6\right)\right) \\
A_x^{\,2} + B_x^{\,2} &= \left(\cos\left(^u\phi_1\right)\right)^2 + \left(\cos\left(^u\phi_1\right)\sin\left(^u\phi_1\right)\right)^2 \pm 2\sin\left(\phi_C\right)\cos\left(^u\phi_1\right)\cos\left(^u\phi_4\right)\cos\left(^u\phi_3 - {}^u\phi_6\right)
\end{aligned}$$

$X_j^2 + Y_j^2 = 0$을 만족시키는 위상각 조건은 식 (5-2)로부터 $^u\phi_1 - {}^u\phi_4 = [0, \pm\pi]$ AND $^u\phi_3 - {}^u\phi_6 = [0, \pm\pi]$ (또는 $^u\phi_1 = \pm\pi/2$ AND $\phi_C = [0, \pm\pi]$)와 같이 얻을 수 있다. Table 15은 12 가지 오일러 각도의 회전 행렬에 모든 구성 요소들에 대한 위상각 벡터 및 위상각 조건 $[^u\phi_1 - {}^u\phi_4, {}^u\phi_3 - {}^u\phi_6, {}^u\phi_1, \phi_C]$을 나타낸다. Table 15에서 위상각 조건 $[^u\phi_1 - {}^u\phi_4, {}^u\phi_3 - {}^u\phi_6, {}^u\phi_1, \phi_C]$이 가질 수 있는 값은 각각 $^u\phi_1 - {}^u\phi_4 = \pm\pi/2$, $^u\phi_3 - {}^u\phi_6 = \pm\pi/2$, $^u\phi_1 = [0, \pm\pi/2]$ 그리고 $\phi_C = \pm\pi/2$이며, 이 위상각 조건을 X_j와 Y_j에 적용하면 $X_j^2 + Y_j^2$은 1을 만족한다. 따라서, $^0\mathbf{R}_3$이 singular인 경우, $^DR_1$ (또는 $^DR_2$)에 대한 X_1과 Y_1 (또는 X_2과 Y_2)은 $X_1^2 + Y_1^2 = 1$ (또는 $X_2^2 + Y_2^2 = 1$)이다.

$\det(\mathbf{A}) = 0$ 일 때 (즉, $Y_1 = X_1Y_2/X_2$), $X_1^2 + Y_1^2 = 1$에서 Y_1에 X_1Y_2/X_2를 대입하면 $X_1^2 +$

$(X_1Y_2/X_2)2 = 1$이다. $X_2^2 + Y_2^2 = 1$이므로, $X_1^2 + (X_1Y_2/X_2)^2 = 1$에서 Y_2^2에 $1 - X_2^2$를 대입하면 식 $(X_1/X_2)^2 = 1$이 유도된다. 즉, $\det(\mathbf{A}) = 0$ 이라면 $(X_1/X_2)^2 = 1$이어야 한다. 여기에서, $(X_1/X_2)^2 = 1$를 만족시키기 위해서는 $|X_1| = |X_2|$이어야 한다. 식 (3-18)의 X_j에 의해서, $|X_1| = |X_2|$가 성립되기 위해서는 $|^D\phi_{1,i} - {}^D\phi_{2,i}|$는 0 또는 π이어야 한다. 여기에서, $^D\phi_{1,i}$ (또는 $^D\phi_{2,i}$)는 $^DR_1$(또는 $^DR_2$)에 대한 위상각 벡터의 i번째 요소이다. $^DR_1$과 $^DR_2$의 행 (또는 열) 숫자가 동일하면, $|^D\phi_{1,i} - {}^D\phi_{2,i}|$는 0 또는 π를 가지지 않음을 Table 15을 통해서 알 수 있다. 따라서 항상 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$을 만족한다.

Table 15. Phase angle vectors for all components of the 12 Euler angle seccussive rotation matrices.

Rotations	Component	Phase angle vector	$[^u\phi_1 - {}^u\phi_4, {}^u\phi_3 - {}^u\phi_6, {}^u\phi_1, \phi_C]$
x_0-y_1-z_2	$R(1,1)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,2)$	$[\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,3)$	$[-\pi/2]$	-
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, \pi/2, \pi, \pi, 0, 0]^T \in R^{2\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(2,2)$	$[0, 0, -\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(2,3)$	$[\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,1)$	$[-\pi, 0, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]$
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, -\pi/2, \pi, 0, 0, -\pi]^T \in R^{2\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]$
	$R(3,3)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
x_0-z_1-y_2	$R(1,1)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,2)$	$[\pi/2]$	-
	$R(1,3)$	$[-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,1)$	$[\pi, 0, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]$
	$R(2,2)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,3)$	$[\pi/2, \pi/2, -\pi, 0, 0, \pi]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]$
	$R(3,1)$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi, -\pi, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,3)$	$[0, 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
y_0-x_1-z_2	$R(1,1)$	$[0, 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(1,2)$	$[\pi/2, -\pi/2, -\pi, -\pi, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$

	$R(1,3)$	$[-\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,2)$	$[0, 0]^T \in R^{6\times1}$	-
	$R(2,3)$	$[\pi/2]$	-
	$R(3,1)$	$[\pi/2, \pi/2, -\pi, 0, 0, \pi]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]$
	$R(3,2)$	$[\pi, 0, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]$
	$R(3,3)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
y_0-z_1-x_2	$R(1,1)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,2)$	$[-\pi, 0, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]$
	$R(1,3)$	$[-\pi/2, -\pi/2, \pi, 0, 0, -\pi]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]$
	$R(2,1)$	$[-\pi/2]$	-
	$R(2,2)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,3)$	$[\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,1)$	$[\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, \pi/2, \pi, \pi, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(3,3)$	$[0, 0, -\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
z_0-x_1-y_2	$R(1,1)$	$[0, 0, -\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(1,2)$	$[\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(1,3)$	$[-\pi/2, \pi/2, \pi, \pi, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	-
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, -\pi/2, \pi, 0, 0, -\pi]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]$
	$R(2,2)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,3)$	$[-\pi, 0, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]$
	$R(3,1)$	$[\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,2)$	$[-\pi/2]$	-
	$R(3,3)$	$[0, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
z_0-y_1-x_2	$R(1,1)$	$[0, 0]^T \in R^{6\times1}$	-
	$R(1,2)$	$[\pi/2, \pi/2, -\pi, 0, 0, \pi]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]$
	$R(1,3)$	$[\pi, 0, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2]$
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	-
	$R(2,2)$	$[0, 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(2,3)$	$[\pi/2, -\pi/2, -\pi, -\pi, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(3,1)$	$[\pi/2]$	-
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	-

	$R(3,3)$	$[0, 0]^T \in R^{6\times1}$	-
x_0-y_1-x_2	$R(1,1)$	$[0]$	-
	$R(1,2)$	$[-\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,3)$	$[-\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,1)$	$[\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,2)$	$[0, 0, 0, \pi, 0, \pi]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(2,3)$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(3,1)$	$[\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	-
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]$
	$R(3,3)$	$[0, -\pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]$
x_0-z_1-x_2	$R(1,1)$	$[0]$	-
	$R(1,2)$	$[\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,3)$	$[\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,2)$	$[0, \pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]$
	$R(2,3)$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]$
	$R(3,1)$	$[-\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(3,3)$	$[0, 0, 0, -\pi, 0, -\pi]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
y_0-x_1-y_2	$R(1,1)$	$[0, 0, 0, -\pi, 0, -\pi]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(1,2)$	$[-\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,3)$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(2,1)$	$[\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,2)$	$[0]$	-
	$R(2,3)$	$[\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,1)$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]$
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,3)$	$[0, \pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]$
y_0-z_1-y_2	$R(1,1)$	$[0, -\pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]$
	$R(1,2)$	$[\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(1,3)$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]$
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,2)$	$[0]$	-

	$R(2,3)$	$[-\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,1)$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(3,2)$	$[\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,3)$	$[0, 0, 0, \pi, 0, \pi]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
z_0-x_1-z_2	$R(1,1)$	$[0, 0, 0, \pi, 0, \pi]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(1,2)$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2, \pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, 0, -\pi/2]$
	$R(1,3)$	$[\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]$
	$R(2,2)$	$[0, -\pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2]$
	$R(2,3)$	$[\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,1)$	$[-\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,2)$	$[-\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,3)$	$[0]$	-
z_0-y_1-z_2	$R(1,1)$	$[0, \pi, 0, 0, 0, 0]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]$
	$R(1,2)$	$[\pi/2, \pi/2, \pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, \pi/2, \pi/2]$
	$R(1,3)$	$[-\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(2,1)$	$[-\pi/2, \pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, -\pi/2]^T \in R^{2\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(2,2)$	$[0, 0, 0, -\pi, 0, -\pi]^T \in R^{6\times1}$	$[\pi/2, -\pi/2, 0, \pi/2]$
	$R(2,3)$	$[-\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,1)$	$[\pi/2, \pi/2]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,2)$	$[\pi, 0]^T \in R^{2\times1}$	-
	$R(3,3)$	$[0]$	-

B. MATLAB CODE

1. 실행 파일

본 연구에서 사상 관계를 이용하여 일반화시킨 3자유도 회전행렬의 역기구학 해석 알고리즘 Fig. 3-8을 확인하기 위한 실행 파일은 Command_IK_Orientation.m 와 같다. Command_IK_Orientation.m을 실행하면 Fig. 5-1과 같이 대화 상자 창이 생성된다. 생성된 대화 상자 창에, 임의의 회전 순서 및 각도들을 입력하면 Fig. 5-2 와 같이 MATLAB 명령 창에서 결과를 확인할 수 있다.

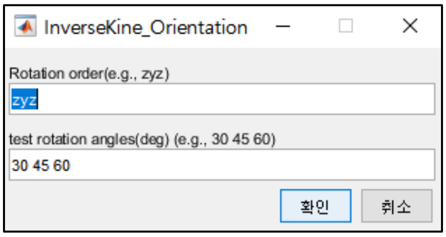


Fig. 5-1. Dialog box window for Command_IK_Orientation.m.

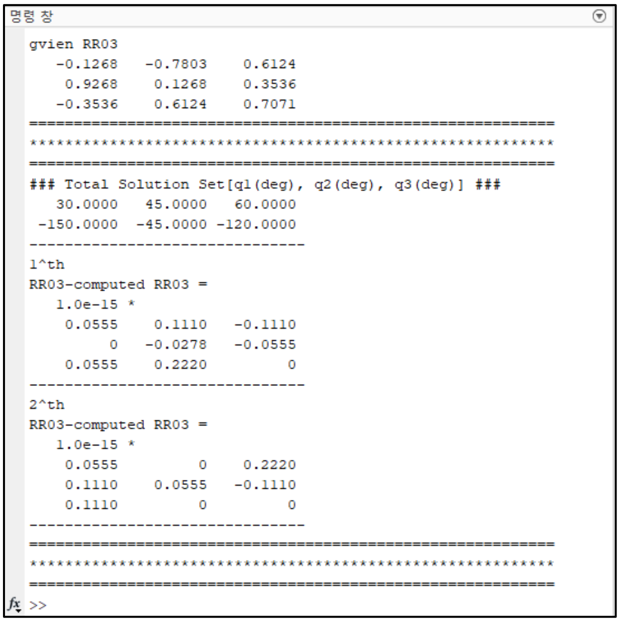


Fig. 5-2. Execution result of Command_IK_Orientation.m displayed in the command window.

유사하게, Fig. 3-9의 일반적인 4자유도 매니퓰레이터 대한 역기구학 해석 알고리즘 Fig. 3-10을 확인하기 위한 실행 파일은 Command_IK_4DOF.m이며, Fig. 3-12의 마지막 3개의 관절 축이 공통 지점에서 교차하는 6자유도 매니퓰레이터(즉, Table 6에 No. 1)에 대한 역기구학 해석 알고리즘 Fig. 3-13을 확인하기 위한 실행 파일은 Command_IK_CommonPoint_Case01.m이다.

a. Command_IK_Orientation.m

```
clc, clear all, close all

precision = 1.0e-05;

format short
format compact
definput = {'zyz'; '30 45 60'};
opts.Interpreter = 'tex';
dims = [1 50; 1 50];
answer = inputdlg({'Rotation order(e.g., zyz)','rotation angles(deg) (e.g., 30
45 60)'},...
              'InverseKine_Orientation',dims,definput,opts);

Term = ['x', 'y', 'z'];
UnitVector = eye(3);
RotAxis = zeros(3,3);

for i = 1:3
    for j = 1:3
        if answer{1,1}(i) == Term(j)
            RotAxis(:,i) = UnitVector(:,j);
        end
    end
end

Theta = deg2rad(str2num(answer{2,1}));
RR01 = Rot(Theta(1), RotAxis(:,1));
RR12 = Rot(Theta(2), RotAxis(:,2));
RR23 = Rot(Theta(3), RotAxis(:,3));
RR03 = RR01*RR12*RR23;

disp('gvien RR03')
disp(RR03)
disp('============================================================')
disp('************************************************************')
disp('============================================================')
```

```
CompudedTheta = InverseKine_Orientation(RotAxis, RR03);

disp('============================================================')
disp('************************************************************')
disp('============================================================')
```

b. Command_IK_4DOF.m

```
clc, clear all, close all

format short
format compact

precision = 1.0e-05;
DOF = 4;

%% Create: input dialog box
definput = {'zyzy'; '30 45 60 80'};
opts.Interpreter = 'tex';
dims = [1 60; 1 60];
answer = inputdlg({'Rotation order(e.g., zyzy)','rotation angles(deg) (e.g., 30 
45 60 80)'},...
             'InverseKine_4DOF_Manipulator',dims,definput,opts);

Term = ['x', 'y', 'z'];
UnitVector = eye(3);
RotAxis = zeros(3,4);

for i = 1:4
    for j = 1:3
        if answer{1,1}(i) == Term(j)
            RotAxis(:,i) = UnitVector(:,j);
        end
    end
end
Theta = deg2rad(str2num(answer{2,1}))';

%% Computed position and orientation values for verification

% Num_P_end, Num_RR06_known and Offset
rng('shuffle','multFibonacci');
Offset = randi([1 3], 3, DOF);

% rng(0,'twister');
% Theta = deg2rad(randi([-180 180], DOF,1));

RR01 = Rot(Theta(1), RotAxis(:,1));
RR12 = Rot(Theta(2), RotAxis(:,2));
RR23 = Rot(Theta(3), RotAxis(:,3));
RR34 = Rot(Theta(4), RotAxis(:,4));
```

```
RR02 = RR01*RR12;
RR03 = RR02*RR23;
RR04_known = RR03*RR34

P01 = RR01*Offset(:,1);
P02 = RR02*Offset(:,2);
P03 = RR03*Offset(:,3);
P04 = RR04_known*Offset(:,4);

Pend_known = P01+P02+P03+P04
T_known = double(T_matrix(RR04_known, Pend_known));
%% Kinematic analysis using mapping relationship
disp('============================================================')
disp('****** Kinematic analysis using mapping relationship ******')
disp('============================================================')

% Mapping relationship
[~, ~, MappingRelationship] = ForwardKine(DOF, RotAxis, Offset, Theta);

% InverseKine
[Theta1, InvRR01KnownRot] = InverseKine_4DOF_Position(RotAxis, Offset,
Pend_known, RR04_known, MappingRelationship);
for i = 1:length(Theta1)
    Theta234 = InverseKine_Orientation(RotAxis(:,2:4),
InvRR01KnownRot(i).Matrix);
    ComputedTheta(2*(i-1)+1: 2*i, 1) = Theta1(i)*ones(2,1);
    ComputedTheta(2*(i-1)+1: 2*i, 2:4) = Theta234;
end
disp('### ComputedTheta(deg) = [q1, q2, q3, q4] ###')
disp(rad2deg(ComputedTheta))

%% Check...
disp('============================================================')
disp('************************************************************')
disp('============================================================')
count = 0;
for i = 1:size(ComputedTheta,1)
    % ForwardKine
    [Computed_Pose, Computed_RR, ~] = ForwardKine(DOF, RotAxis, Offset,
ComputedTheta(i,:)');
    T_Computed = double(T_matrix(Computed_RR, Computed_Pose));
    fprintf("%d th solution error(T_known-T_Computed) \n", i)
    disp(T_known-T_Computed)
    disp('--------------------------------------------')

    Error = norm(double(T_known-T_Computed));
    if Error < precision
        count = count + 1;
        Result(count) = i;
    end
end

if length(Result) ~= 1
    fprintf('### Available solutions are [');
```

```
    fprintf('%g', Result(1:end-1));
    fprintf(', %g] ###\n', Result(end));
else
    fprintf('### Available solution is [');
    fprintf('%g] ###\n', Result);
end
```

c. Command_IK_CommonPoint_Case01.m

```
clc, clear all, close all

format short
format compact

precision = 1.0e-05;
DOF = 6;

%% Create: input dialog box
definput = {'zyzyxy'; '30 45 60 80 100 70'};
opts.Interpreter = 'tex';
dims = [1 75; 1 75];
answer = inputdlg({'Rotation order(e.g., zyzyxy)','rotation angles(deg) (e.g., 
30 45 60 80 100 70)'},...

'InverseKine_6DOF_Manipulator_with_a_speherical_joint',dims,definput,opts);

Term = ['x', 'y', 'z'];
UnitVector = eye(3);
RotAxis = zeros(3,DOF);

for i = 1:DOF
    for j = 1:3
        if answer{1,1}(i) == Term(j)
            RotAxis(:,i) = UnitVector(:,j);
        end
    end
end
Theta = deg2rad(str2num(answer{2,1}))';

%% Computed position and orientation values for verification

% Num_P_end, Num_RR06_known and Offset
rng('shuffle','multFibonacci');
Offset = randi([1 3], 3, DOF);
Offset(:,4:5) = zeros(3,2);

% rng(0,'twister');
% Theta = deg2rad(randi([-180 180], DOF,1));
```

```
RR01 = Rot(Theta(1), RotAxis(:,1));
RR12 = Rot(Theta(2), RotAxis(:,2));
RR23 = Rot(Theta(3), RotAxis(:,3));
RR34 = Rot(Theta(4), RotAxis(:,4));
RR45 = Rot(Theta(5), RotAxis(:,5));
RR56 = Rot(Theta(6), RotAxis(:,6));

RR02 = RR01*RR12;
RR03 = RR02*RR23;
RR04 = RR03*RR34;
RR05 = RR04*RR45;
RR06_known = RR05*RR56

P01 = RR01*Offset(:,1);
P02 = RR02*Offset(:,2);
P03 = RR03*Offset(:,3);
P04 = RR03*Offset(:,4);
P05 = RR03*Offset(:,5);
P06 = RR06_known*Offset(:,6);

Pend_known = P01+P02+P03+P04+P05+P06
T_known = double(T_matrix(RR06_known, Pend_known));
%% Kinematic analysis using mapping relationship
disp('============================================================')
disp('****** Kinematic analysis using mapping relationship ******')
disp('============================================================')

% Mapping relationship
[~, ~, MappingRelationship] = ForwardKine(DOF, RotAxis, Offset, Theta);

% InverseKine
[Theta123, InvRR03KnownRot] = InverseKine_CommonPoint_General_Type01(RotAxis,
Offset, Pend_known, RR06_known, MappingRelationship);
disp(rad2deg(Theta123))

for i = 1:length(Theta123)
    Theta456 = InverseKine_Orientation(RotAxis(:,4:6),
InvRR03KnownRot(i).Matrix);
    ComputedTheta(2*(i-1)+1: 2*i, 1:3) = [Theta123(:,i), Theta123(:,i)]';
    ComputedTheta(2*(i-1)+1: 2*i, 4:6) = Theta456;
end
clc;
disp('### ComputedTheta(deg) = [q1, q2, q3, q4, q5, q6] ###')
disp(rad2deg(ComputedTheta))

%% Check...
disp('============================================================')
disp('************************************************************')
disp('============================================================')
count = 0;
for i = 1:size(ComputedTheta,1)
    % ForwardKine
    [Computed_Pose, Computed_RR, ~] = ForwardKine(DOF, RotAxis, Offset,
ComputedTheta(i,:)');
```

```
    T_Computed = double(T_matrix(Computed_RR, Computed_Pose));
    fprintf("%d th solution error(T_known-T_Computed) \n", i)
    disp(T_known-T_Computed)
    disp('---------------------------------------------')

    Error = norm(double(T_known-T_Computed));
    if Error < precision
        count = count + 1;
        Result(count) = i;
    end
end

if length(Result) ~= 1
    fprintf('### Available solutions are [');
    fprintf('%g, ', Result(1:end-1));
    fprintf('%g] ###\n', Result(end));
else
    fprintf('### Available solution is [');
    fprintf('%g] ###\n', Result);
end
```

2. 함수 파일

CompudedTheta = InverseKine_Orientation(RotAxis, RR03): Fig. 3-8의 알고리즘이 구현된 MATLAB 함수이다. 3자유도 회전 순서 RotAxis와 회전행렬 RR03을 입력 받아서, 회전 각도 계산 결과를 CompudedTheta으로 출력한다.

[R_index_i, R_index_j] = SelectionElements(Rot, PhaseAngle, RotAxis): 회전 순서 RotAxis에 대한 회전행렬 Rot로부터, Fig. 3-8 알고리즘에서 회전 각도 계산 시 필요한 회전 행렬의 구성 요소들 위치 정보(즉, [R_index_i, R_index_j])을 Rot에 대한 위상각 행렬들 PhaseAngle을 이용하여 출력한다.

Result = MotionMatrix(DOF): 제 2 장제 2 절에서 Fig. 2-2의 일반화된 운동행렬을 기반으로, 자유도 DOF가 주어지면 해당 운동행렬을 Result으로 출력하는 함수이다. 제 2 장제 2 절에서 운동행렬 수정방법은 ModificationRules.m와 같다.

Result = ModificationRules(MotionMatrix, RotAxis, GravitVector, LocationCOM, LinkIndex): 제 2 장제 2 절에 운동행렬의 수정규칙을 수행하는 MATLAB 함수이다. 예를 들어, MotionMatrix은 2자유도에 대한 운동행렬이며 LinkIndex가 $[0, 1]^T$ 일 때 RotAxis = $[1, 0, 0]^T$와 GravitVector = $[1, 0, 0]^T$ 이라면, 연속 회전 행렬 0R2(1,1)에 대한 사상 행렬을 운동행렬의 수정규칙으로 유도한 결과를 Result로 출력한다.

Matrix = PhaseAngleMatrix(axis): 제 2 장제 3 절에서 식 (2-7)-(2-9)의 x, y, 그리고 z축의 위상각 행렬을 출력하는 MATLAB 함수이다. 예를 들어 axis = [1, 0, 0]이라면, 식 (2-7)에 x축의 위상각 행렬을 Matrix로 출력한다.

Factor = UPAV_SelectionCombination(Matrix_A, Matrix_B): 입력 받은 Matrix_A와 Matrix_B에 대하여, 제 2 장제 3 절에서 Fig. 2-5의 연속 회전에 대한 위상각 벡터를 유도하는 과정에서 1) selection과 2) combination을 수행한 결과를 Factor로 출력한다.

Result = UPAV_Elimination(Matrix): 입력 받은 Matrix에 대하여, 제 2 장제 3 절에서 Fig. 2-5의 연속 회전에 대한 위상각 벡터를 유도하는 과정에서 3) elimination을 수행한 결과를 Result로 출력한다.

Result = ComputePhaseAngleVector(JJ, PhaseAngleMatrix): 입력 받은 사상 행렬 JJ과 연속 회전에 대한 위상각 행렬 PhaseAngleMatrix을 이용하여, 위상각 벡터를 계산한 결과를 Result로 출력한다.

[EndPosition, RR0end, Rot] = ForwardKine(DOF, RotAxis, Offset, Theta): 자유도 DOF, 회전순서 RotAxis, 관절간 오프셋 Offset, 그리고 각 관절의 회전각도 Theta를 입력 받으면, 사상 관계를 이용하여 끝단의 위치 EndPosition, 회전행렬 RR0end 그리고 매니퓰레이터에 대한 사상 관계 Rot를 출력한다.

a. InverseKine_Orientation.m

```
%% ------------------------------------------------------------------------ %
% Fig.3-8. Flow chart of the generalized inverse kinematic analysis process
% for the three-DOF successive rotation matrix.
%% ------------------------------------------------------------------------ %
function CompudedTheta = InverseKine_Orientation(RotAxis, RR03)

precision = 1.0e-05;
deg2rad = pi/180;
rad2deg = 180/pi;

%% Computation: mapping matrices for rotation matrix
DOF = 3;
hat_Matrix_C = MotionMatrix(DOF);

tamp = setdiff(eye(3),RotAxis(:,1)','rows');
GravitVector = tamp(1,:);
tamp = setdiff(eye(3),RotAxis(:,end)','rows');
LocationCOM = tamp(1,:);

LinkIndex = zeros(DOF,1);
LinkIndex(DOF) = 1;

JJ_core = ModificationRules(hat_Matrix_C, 0, RotAxis, GravitVector,
LocationCOM, LinkIndex);

term = eye(3,3);
for i = 1:3
    GravitVector = term(i,:)';
    for j =1:3
        LocationCOM = term(:,j);
        JJ(i,j).Matrix = ModificationRules(JJ_core, 0, RotAxis, GravitVector,
LocationCOM, LinkIndex);
    end
end

%% Computation: phase angle vectors for rotation matrix
for i = 1:DOF
    Rot(i).FF_Matrix = PhaseAngleMatrix(RotAxis(:,i));

    if i == 1
        Rot(i).Succesive_FF_Matrix = Rot(i).FF_Matrix;
    else
        Rot(i).Succesive_FF_Matrix = UPAV_SelectionCombination(Rot(i-
1).Succesive_FF_Matrix, Rot(i).FF_Matrix);
    end
end

Succesive_PhaseAngleMatrix = UPAV_Elimination(Rot(end).Succesive_FF_Matrix);
PhaseAngle = ComputePhaseAngleVector(JJ, Succesive_PhaseAngleMatrix);

[R_index_i, R_index_j] = SelectionElements(RR03, PhaseAngle, RotAxis);
```

```
%% Step = 1, Theta 2
StepNum = 1;
CompudedTheta2 = zeros(2,1);

Index_i = R_index_i(1,StepNum);
Index_j = R_index_j(1,StepNum);
Phi = PhaseAngle(Index_i,Index_j).Vector;

if abs(RR03(Index_i,Index_j)) < precision
    RR03(Index_i,Index_j) = 0;
end

Term = sqrt(1-RR03(Index_i,Index_j)^2);
if abs(Phi) == pi/2
    CompudedTheta2(1) = atan2(-sign(Phi)*RR03(Index_i,Index_j),Term);
    CompudedTheta2(2) = atan2(-sign(Phi)*RR03(Index_i,Index_j),-Term);
else
    CompudedTheta2(1) = atan2(Term, RR03(Index_i,Index_j));
    CompudedTheta2(2) = atan2(-Term, RR03(Index_i,Index_j));
end

%% Step = 2, Theta 1
StepNum = 2;
CompudedTheta1 = zeros(2,1);
for i = 1:2
    CompudedTheta = zeros(3,1);
    CompudedTheta = [0; CompudedTheta2(i,1); 0];
    CompudedTheta1(i,1) = Step23(StepNum, JJ, PhaseAngle, RR03, R_index_i,
R_index_j, CompudedTheta);
end

%% Step 3: Theta 3
StepNum = 3;
CompudedTheta3 = zeros(2,1);
for i = 1:2
    CompudedTheta = zeros(3,1);
    CompudedTheta = [CompudedTheta1(i,1); CompudedTheta2(i,1); 0];
    CompudedTheta3(i,1) = Step23(StepNum, JJ, PhaseAngle, RR03, R_index_i,
R_index_j, CompudedTheta);
end

%% Total Solution Set
CompudedTheta = zeros(2,3);
CompudedTheta = [CompudedTheta1, CompudedTheta2, CompudedTheta3];
disp('### Total Solution Set[q1(deg), q2(deg), q3(deg)] ### ')
disp(CompudedTheta*rad2deg)
disp('-------------------------------')
%% Computation RR03 uinsg a mapping relationship
N = size(CompudedTheta,1);
for u = 1:N
    q = CompudedTheta(u,:)';
    ComputedRR03 = [];
    for i = 1:3
```

```
        for j = 1:3
            for k = 1:size(JJ(i,j).Matrix,1)
                JJ(i,j).ScalingFactor(k,1) = 2^(-nnz(JJ(i,j).Matrix(k,:))+1);
            end
            ComputedRR03(i,j) = sum(JJ(i,j).ScalingFactor.*cos(JJ(i,j).Matrix*q
+ PhaseAngle(i,j).Vector));
        end
    end
    fprintf('%d^th \n',u)
    disp('RR03-computed RR03 = ')
    disp(RR03-ComputedRR03)
    disp('-------------------------------')
end

end


%% Step2-3
function Results = Step23(StepNum, JJ, PhaseAngle, RR, R_index_i, R_index_j,
ComputedTheta)
    precision = 1.0e-05;
    deg2rad = pi/180;

    switch StepNum
        case 2
            Sign = 1;
        case 3
            Sign = -1;
    end

    for j = 1:2
        Component_i = R_index_i(j,StepNum);
        Component_j = R_index_j(j,StepNum);

        for k = 1:2
            Phi(k) = PhaseAngle(Component_i,Component_j).Vector(k);
        end
        Phi_sum(j) = (Phi(1) + Sign*Phi(2))/2;
        Term(j) = ComputedTheta(2) + (Phi(1) - Sign*Phi(2))/2;
        R(j) = RR(Component_i,Component_j);

        Phi_S(j) = (Phi(1) + Phi(2))/2;
        Phi_M(j) = (Phi(1) - Phi(2))/2;
    end

    if abs(cos(Term(1))) < precision && abs(cos(Term(2))) < precision
%         disp('Singular!!')
        if StepNum == 2
%             Results = 0;
            Results = 22.5*deg2rad;
        else
%             disp('Using Type D!!!')
            Results = Singular(JJ, ComputedTheta, PhaseAngle);
        end
```

```
    else
        if abs(Phi_sum(1)) == pi/2
            Results = atan2(-
sign(Phi_sum(1))*R(1)/cos(Term(1)),R(2)/cos(Term(2)));
        else
            Results = atan2(-
sign(Phi_sum(2))*R(2)/cos(Term(2)),R(1)/cos(Term(1)));
        end
    end

    %%%%------Singular------%%%%
    function Result = Singular(JJ, ComputedTheta, PhaseAngle) % [Nested
Functions]
        rad2deg = 180/pi;
        a = [1, 3];

        for j = 1:2
            Component_i = R_index_i(a(j),4);
            Component_j = R_index_j(a(j),4);
            R(j) = RR(Component_i,Component_j);
            J_matrix = JJ(Component_i,Component_j).Matrix;

            for count = 1:size(J_matrix,1)
                D(count) = 2^(-nnz(J_matrix(count,:)));
            end

            for k = 1:6
                Phi(k) = PhaseAngle(Component_i,Component_j).Vector(k);
                Term_X(k) = D(k)*cos(J_matrix(k,:)*ComputedTheta + Phi(k));
                Term_Y(k) = -J_matrix(k,3)*D(k)*sin(J_matrix(k,:)*ComputedTheta
+ Phi(k));
            end
            X(j) = sum(Term_X);
            Y(j) = sum(Term_Y);
            Alpha(j) = atan(Y(j)/X(j));

            Matrix_A(j,:) = [X(j), Y(j)];
            Vector_R(j,1) = [R(j)];
        end

        Vector_X = inv(Matrix_A)*Vector_R;
        Result = atan2(Vector_X(2),Vector_X(1));

    end
end
```

b. SelectionElements.m

```
function [R_index_i, R_index_j] = SelectionElements(Rot, PhaseAngle, RotAxis)

FirstAxis = RotAxis(:,1);
ThirdAxis = RotAxis(:,3);
Components = eye(3,4);
Count = zeros(4,1);
R_index_i = eye(3,4);
R_index_j = eye(3,4);

for i = 1:3
    for j = 1:3
        if dot(FirstAxis,Components(:,i)) == 1 &&
dot(ThirdAxis,Components(:,j)) == 1
            index = 1;
            Count(index) = Count(index) +1;
            Phi(Count(index),index).Vector = PhaseAngle(i,j).Vector;
            R(Count(index),index) = Rot(i,j);
%             fprintf('Type A : RR03(%d,%d)  \n',i,j);

            R_index_i(Count(index),index) = i;
            R_index_j(Count(index),index) = j;

        elseif dot(FirstAxis,Components(:,i)) ~= 1 &&
dot(ThirdAxis,Components(:,j)) == 1
            index = 2;
            Count(index) = Count(index) +1;
            Phi(Count(index),index).Vector = PhaseAngle(i,j).Vector;
            R(Count(index),index) = Rot(i,j);
%             fprintf('Type B : RR03(%d,%d)  \n',i,j);

            R_index_i(Count(index),index) = i;
            R_index_j(Count(index),index) = j;

        elseif dot(FirstAxis,Components(:,i)) == 1 &&
dot(ThirdAxis,Components(:,j)) ~= 1
            index = 3;
            Count(index) = Count(index) +1;
            Phi(Count(index),index).Vector = PhaseAngle(i,j).Vector;
            R(Count(index),index) = Rot(i,j);
%             fprintf('Type C : RR03(%d,%d)  \n',i,j);

            R_index_i(Count(index),index) = i;
            R_index_j(Count(index),index) = j;

        elseif dot(FirstAxis,Components(:,i)) ~= 1 &&
dot(ThirdAxis,Components(:,j)) ~= 1
            index = 4;
            Count(index) = Count(index) +1;
            Phi(Count(index),index).Vector = PhaseAngle(i,j).Vector;
            R(Count(index),index) = Rot(i,j);
%             fprintf('Type D : RR03(%d,%d)  \n',i,j);
```

```
            R_index_i(Count(index),index) = i;
            R_index_j(Count(index),index) = j;
        end
    end
end

end
```

c. MotionMatrix.m

```
%% -------------------------------------------------------------------- %
% The joint space of an n-DOF manipulator with revolute joints is q = [q1,
% q2, … , qn]^T \in R^n \time 1. A possible motion set for joint i has the
% elements of {0(fixed), 1(forward rotation), -1(reverse rotation)}.
% A general motion combination of the n- DOF manipulator can be determined
% with the n-tuples (permutations with repetition). That is, n elements of
% the motion set of {0, +1, -1} are chosen in order, where the repetition
% is allowed.
%
% The detailed references are:
% [1] S.H. Kim, M.T. Choi and C.H. Cho, "Synthesis method of a mapping
%     matrix for a gravity compensator," Journal of Mechanical Science and
%     Technology, vol. 33, no. 12, pp. 6053-6062, Dec. 2019.
%% -------------------------------------------------------------------- %
function Result = MotionMatrix(DOF)

M = 3^(DOF);
N = DOF;

Result = zeros(M,N);
    for i = 1:DOF
%         fprintf('%d th column vector \n',i)
        Count = 3^(DOF-i);
        Repeat = 3^(i-1);

        for j = 1:Repeat
            if j ~= 1
                Start(1) = End(3) + 1;
            else
                Start(1) = N*(j-1) + 1;
            end
            End(1) = Start(1) + Count -1;

            Start(2) = End(1) + 1;
            End(2) = Start(2) + Count -1;

            Start(3) = End(2) + 1;
            End(3) = Start(3) + Count -1;
```

```
            Result(Start(1):End(1),i) = zeros(Count,1);
            Result(Start(2):End(2),i) = ones(Count,1);
            Result(Start(3):End(3),i) = -1*ones(Count,1);
        end
    end
end
```

d. ModificationRules.m

```
%% ---------------------------------------------------------------------- %
% The absolute motion, potential energy and mobility should be consider to
% modify the motion matrix for the gravity compensation.
% The modified motion matrix is identical to the mapping matrix computed by
% the space mapping method.

% The detailed references are:
% [1] S.H. Kim, M.T. Choi and C.H. Cho, "Synthesis method of a mapping
%     matrix for a gravity compensator," Journal of Mechanical Science and
%     Technology, vol. 33, no. 12, pp. 6053-6062, Dec. 2019.
%% ---------------------------------------------------------------------- %
function Result = ModificationRules(MotionMatrix, RotAxis, GravitVector,
LocationCOM, LinkIndex)

Result = [];
%%%-------------- No.1 --------------%%%
index = find(MotionMatrix(:,1) == 1);
Count = size(index,1);
Term = [];
for k = 1:Count
    Term(k,:) = MotionMatrix(index(k),:);
end
Result(1:Count,:) = Term(1:Count,:);
Result(Count(end)+1:end,:) = [];

if isempty(Result) == 1
%     disp('isempty!!')
    Result = zeros(1,size(MotionMatrix,2));
end

%%%-------------- No.2(a) --------------%%%
parallel_axis = [];
index_i = 1;
index_j = 0;
for i = 1:size(RotAxis,2)-1
    if RotAxis(:,i) == RotAxis(:,i+1)
        index_j = index_j + 1;
        parallel_axis(index_i,index_j:index_j+1) = [i, i+1];
    else
        index_i = index_i + 1;
        index_j = 0;
```

```
    end
end

Term = [];
index = [];
count = 0;
row = 0;

if dot(RotAxis(:,1),GravitVector) == 1
    [row,col] = size(Result);
%     disp('%%%------------- No.2(a) -------------%%%')
% Syntax to delete column vectors
    if isempty(parallel_axis) ~= 1
        Count = find(parallel_axis(1,:));
            if isempty(Count) ~= 1
                for i = 1:length(Count)
                    Result(:,parallel_axis(1,Count(i))) = zeros(row,1);
                end

                index = find(Result(:,Count(end)+1) ~= 1);
            end
    else
        Result(:,1) = zeros(row,1);
            if length(LinkIndex) ~= 1
                index = find(Result(:,2) ~= 1);
            end
    end

    if length(LinkIndex) ~= 1
        for i = 1:length(index)
            count = count + 1;
            Term(count,:) = Result(index(i),:);
        end
        Result = setdiff(Result, Term, 'rows');
    end
end

%%%-------------- No.2(b) --------------%%%
Rule2b = false;
row = 0;

if dot(RotAxis(:,end),LocationCOM) == 1
%     disp('%%%------------- No.2(b) -------------%%%')
    Rule2b = true;
    [row,~] = size(Result);

% Syntax to delete column vectors
    if isempty(parallel_axis) == 1 || parallel_axis(end) ~= size(RotAxis,2)
        Result(:,end) = zeros(row,1);
    else
        Count = find(parallel_axis(end,:)~=0);
        for i = length(Count):-1:1
            Result(:,parallel_axis(end,Count(i))) = zeros(row,1);
        end
```

```
    end
end

Rule2c = false;
NumOfLinks = length(LinkIndex);
count = 0;
Term = [];

for L = 1:NumOfLinks-1
    index = [];
    for i = 1:size(Result,1)
        if sum(abs(Result(i,L+1:end))) == 0
            if Rule2b == true && L == NumOfLinks-1
                break;
            end
            count = count + 1;
            Term(count,:) = Result(i,:);
            Rule2c = true;
        end
    end
end

if Rule2c == true
%     disp('%%%------------- No.2(c) -------------%%%')
    Result = setdiff(Result, Term, 'rows');
end

%%%------------- No.3 and 4-------------%%%
[IndexOfLink, ~] = find(LinkIndex ~= 0);
Count = 0;
if IndexOfLink > 1
    Count = IndexOfLink-1; % Number of comparisons between two adjacent axes

    for i = 1:Count
        if i == 1
            Term = Rules34(Result, RotAxis(:,i),RotAxis(:,i+1), i);
        else
            Term = Rules34(Term, RotAxis(:,i),RotAxis(:,i+1), i);
        end
    end
    Result = [];
    Result = Term;
end

% According to rules 1, 2(a) and 2(b), if the mapping matrix is
% an empty matrix, application of the deletion rule to
% the mapping matrix is terminated.
if isempty(Result) == 1
    Result = zeros(1,size(MotionMatrix,2));
    return
else
    Result = unique(Result,'row');
    Result = sortrows(Result,'descend');
end
```

```
end


function Result = Rules34(Matrix, RotAxis_i, RotAxis_j, index)
Result = [];
count = 0;

Parallel = dot(RotAxis_i,RotAxis_j);
for i = 1:size(Matrix,1)
    if Parallel == 1    % Rules 4
%         disp('%%%------------- No.4 -------------%%%')
%         disp('Parallel !!')
        if Matrix(i,index) == Matrix(i,index+1)
            count = count + 1;
            Result(count,:) = Matrix(i,:);
        end

    else    % Rules 3
%         disp('%%%------------- No.3 -------------%%%')
%         disp('Orthogonal !!')
        if Matrix(i,index) ~= 0 || Matrix(i,index+1) ~= 0
            count = count + 1;
            Result(count,:) = Matrix(i,:);
        end
    end
end

end
```

e. PhaseAngleMatrix.m

```
%% The phase angle matrices of Rx(alpha), Ry(beta), and Rz(gamma),
respectively.
%% --------------------------------------------------------------------- %
% Eqs. (5)-(7)

% The detailed references are:
% [1] S.H. Kim, and C.H. Cho, "Synthesis of gravity compensators
%     using the space mapping method,” Journal of Mechanical Science and
%     Technology (Submitted in 2022).
%% --------------------------------------------------------------------- %
function Matrix = PhaseAngleMatrix(axis)

    if axis(1) == 1
    % The phase angle matrix of Rx(alpha)
        Matrix = [inf,  NaN,  NaN;
                  NaN,    0, pi/2;
                  NaN,-pi/2,    0];
    elseif axis(2) == 1
```

```
    % The phase angle matrix of Ry(beta)
        Matrix = [   0, NaN,-pi/2;
                   NaN, inf,  NaN;
                  pi/2, NaN,    0];
    else
    % The phase angle matrix of Ry(beta)
        Matrix = [   0, pi/2, NaN;
                 -pi/2,    0, NaN;
                   NaN,  NaN, inf];
    end

end
```

f. UPAV_SelectionCombination.m

```
%% Derivation of the unit phase angle vector
%% ---------------------------------------------------------------------- %
% The process for deriving the unit phase angle vector
%   1) Selection
%   2) Combination

% Fig. 2. A method for deriving new unit phase angle vector based
% on successive rotations.

% The detailed references are:
% [1] S.H. Kim, and C.H. Cho, "Synthesis of gravity compensators
%     using the space mapping method," Journal of Mechanical Science and
%     Technology (Submitted in 2022).
%% ---------------------------------------------------------------------- %
function Factor = UPAV_SelectionCombination(Matrix_A, Matrix_B)
FF01 = Matrix_A;
FF12 = Matrix_B;

switch isstruct(FF01)
    case 0
        for i = 1:3
            for j = 1:3
                Factor(i,j).Struct = [FF01(i,:); FF12(:,j)'];
            end
        end

    case 1
        for i = 1:3
            for j = 1:3
                if isempty(FF01(i,j).Struct) == 1
                    FF01(i,j).Struct = NaN*ones(2,1);
                end
            end
        end
```

```
            [~, Num] = size(FF01(1,1).Struct);
        for i =1:3
            for j = 1:3
                Step(i,j).Temp1 = [FF01(i,1).Struct; FF12(1,j)*ones(1,Num)];
                Step(i,j).Temp2 = [FF01(i,2).Struct; FF12(2,j)*ones(1,Num)];
                Step(i,j).Temp3 = [FF01(i,3).Struct; FF12(3,j)*ones(1,Num)];

                Factor(i,j).Struct = [Step(i,j).Temp1, Step(i,j).Temp2,
Step(i,j).Temp3];
            end
        end
end

end
```

g. UPAV_Elimination.m

```
%% Derivation of the unit phase angle vector
%% ---------------------------------------------------------------------- %
% The process for deriving the unit phase angle vector
%   3) Elimination
% Fig. 2. Method for deriving new unit phase angle vector based
% on successive rotations.
% The detailed references are:
% [1] S.H. Kim, and C.H. Cho, "Synthesis of gravity compensators
%     using the space mapping method," Journal of Mechanical Science and
%     Technology (Submitted in 2022).
%% ---------------------------------------------------------------------- %
function Result = UPAV_Elimination(Matrix)

Factor = Matrix;
Result = [];

STRUCT = isa(Factor,'struct');
switch STRUCT
    case 1
        for i = 1:3
            for j = 1:3
                [~, Index_NaN_C] = find(isnan(Factor(i,j).Struct) == 1);
                Result(i,j).Struct = Factor(i,j).Struct;
                Result(i,j).Struct(:,Index_NaN_C) = [];
            end
        end

    case 0
        Result = Factor;
end
end
```

h. ComputePhaseAngleVector.m

```
%% ------------------------------------------------------------------- %
% The detailed references are:
% [1] S.H. Kim, and C.H. Cho, "Synthesis of gravity compensators
%     using the space mapping method," Journal of Mechanical Science and
%     Technology (Submitted in 2022).
%% ------------------------------------------------------------------- %
function Result = ComputePhaseAngleVector(JJ, PhaseAngleMatrix)
Result = [];

STRUCT = isa(PhaseAngleMatrix,'struct');
switch STRUCT
    case 1
        for i = 1:3
            for j = 1:3

                [JJ_row,~] = size(JJ(i,j).Matrix);
                [~,Phase_col] = size(PhaseAngleMatrix(i,j).Struct);

                Search_Phase = PhaseAngleMatrix(i,j).Struct;
                Search_JJ = JJ(i,j).Matrix;

                [Inf_row, Inf_col] = find(PhaseAngleMatrix(i,j).Struct == inf);
                for index = 1:length(Inf_col)
                    PhaseAngleMatrix(i,j).Struct(Inf_row(index), Inf_col(index))
= 0;
                end

                remove= [];
                for w =1:size(Search_Phase,1)
                    if Search_Phase(w,:) == inf*ones(1,size(Search_Phase,2))
                        remove = w;
                    end
                end

                if isempty(remove) == 0 && remove ~= 1
                    Search_JJ(:,remove) = [];
                    Search_Phase(remove,:) = [];
                end

                for k = 1:Phase_col
                    [check_row_phase, ~] = find(Search_Phase(:,k) == inf);

                    if isempty(check_row_phase) == 0
                        for v = 1:length(check_row_phase)
                            PhaseAngleMatrix(i,j).Struct(check_row_phase(v),k) =
0;
                        end
                    end


                    for u = 1:JJ_row
                        [~, check_JJ] = find(Search_JJ(u,:) == 0);
```

```
                        if isempty(check_JJ) == 0 && isempty(check_row_phase) ==
0
                            if length(check_JJ) == length(check_row_phase)
                                if check_JJ == transpose(check_row_phase)
                                    Result(i,j).Vector(u,1) =
JJ(i,j).Matrix(u,:)*PhaseAngleMatrix(i,j).Struct(:,k);
                                end
                            end
                        elseif isempty(check_JJ) ~= 0 && isempty(check_row_phase)
~= 0
                            Result(i,j).Vector(u,1) =
JJ(i,j).Matrix(u,:)*PhaseAngleMatrix(i,j).Struct(:,k);
                        end
                    end
                end

            end
        end

    case 0  % DOF = 1
        [Inf_row, Inf_col] = find(PhaseAngleMatrix == inf);
        for index = 1:length(Inf_col)
            PhaseAngleMatrix(Inf_row(index), Inf_col(index)) = 0;
        end

        [NaN_row, NaN_col] = find(isnan(PhaseAngleMatrix) == 1);
        for index = 1:length(NaN_col)
            PhaseAngleMatrix(NaN_row(index), NaN_col(index)) = pi/2;
        end

        Result = PhaseAngleMatrix;
end

end
```

i. ForwardKine.m

```
function [EndPosition, RR0end, Rot] = ForwardKine(DOF, RotAxis, Offset, Theta)
%% Computation: mapping matrices for rotation matrix
for k = 1:DOF
    hat_Matrix_C = MotionMatrix(k);
%     disp('hat_Matrix_C')
%     disp(hat_Matrix_C)

    tamp = setdiff(eye(3),RotAxis(:,1)','rows');
    GravitVector = tamp(1,:);
    tamp = setdiff(eye(3),RotAxis(:,end)','rows');
    LocationCOM = tamp(1,:);
```

```
    LinkIndex = zeros(k,1);
    LinkIndex(k) = 1;

    JJ_core = ModificationRules(hat_Matrix_C, 0, RotAxis, GravitVector,
LocationCOM, LinkIndex);
%     disp('JJ_core')
%     disp(JJ_core)
%     disp('=================')

    term = eye(3,3);
    for i = 1:3
        GravitVector = term(i,:)';
        for j =1:3
%             fprintf('(%d,%d) \n',i,j)

            LocationCOM = term(:,j);
            Rot(k).JJ(i,j).Matrix = ModificationRules(JJ_core, 0,
RotAxis(:,1:k), GravitVector, LocationCOM, LinkIndex);

%             disp(Rot(k).JJ(i,j).Matrix)
        end
    end
%     disp('=================')
%     disp('*****************')
%     disp('=================')
end


%% Computation: phase angle vectors for rotation matrix

for i = 1:DOF
    Rot(i).FF_Matrix = PhaseAngleMatrix(RotAxis(:,i));

    if i == 1
        Rot(i).Succesive_FF_Matrix = Rot(i).FF_Matrix;
    else
        Rot(i).Succesive_FF_Matrix = UPAV_SelectionCombination(Rot(i-
1).Succesive_FF_Matrix, Rot(i).FF_Matrix);
    end
    Rot(i).Succesive_PhaseAngleMatrix =
UPAV_Elimination(Rot(i).Succesive_FF_Matrix);
    Rot(i).PhaseAngle = ComputePhaseAngleVector(Rot(i).JJ,
Rot(i).Succesive_PhaseAngleMatrix);
end

%% Computation rotation matrices and Pose
EndPosition = zeros(3,1);
for u = 1:DOF
    q = Theta(1:u);

    for i = 1:3
        for j = 1:3
            for k = 1:size(Rot(u).JJ(i,j).Matrix,1)
```

```
                if u ~= 1
                    Rot(u).JJ(i,j).ScalingFactor(k,1) = 2^(-
nnz(Rot(u).JJ(i,j).Matrix(k,:))+1);
                else
                    Rot(u).JJ(i,j).ScalingFactor(k,1) = 1;
                end
            end

            if u ~= 1
                Rot(u).Matrix(i,j) =
sum(Rot(u).JJ(i,j).ScalingFactor.*cos(Rot(u).JJ(i,j).Matrix*q ...
                                          + Rot(u).PhaseAngle(i,j).Vector));
            else
                Rot(u).Matrix(i,j) =
sum(Rot(u).JJ(i,j).ScalingFactor.*cos(Rot(u).JJ(i,j).Matrix*q ...
                                          + Rot(u).PhaseAngle(i,j)));
            end
        end
    end

    Position(u).Vector = Rot(u).Matrix*Offset(:,u);
    EndPosition = EndPosition + Position(u).Vector;
end
RR0end = Rot(DOF).Matrix;

end
```

j. InverseKine_4DOF_Position.m

```
function [Theta1, InvRR01KnownRot] = InverseKine_4DOF_Position(RotAxis, Offset,
Num_P_end, Num_RR04_known, MappingRelationship)


%% Step1: Theta 1
Theta1 = [];

% mapping matrix for RR14 and RR13
%% Computation: mapping matrices for rotation matrix
LinkIndex = [3, 2];
for k = 1:2
    if k == 1
        subRotAxis = RotAxis;
        subRotAxis(:,1) = [];
    else
        subRotAxis(:,end) = [];
    end

    term = eye(3,3);
    for i = 1:3
```

```
        GravitVector = term(i,:)';
        for j =1:3
            JJ_core = [];
            if k == 1
                JJ_core = MappingRelationship(4).JJ(i,j).Matrix;
                JJ_core(:,1) = [];
            else
                JJ_core = Rot(k-1).JJ(i,j).Matrix;
                JJ_core(:,end) = [];
            end

            if nnz(JJ_core(:,1)) == 0
                JJ_core = MotionMatrix(2);
            end

            LocationCOM = term(:,j);
            Rot(k).JJ(i,j).Matrix = ModificationRules(JJ_core,
subRotAxis(:,1:k), GravitVector, LocationCOM, LinkIndex);
%             fprintf('(%d,%d)\n',i,j)
%             disp(Rot(k).JJ(i,j).Matrix)

        end
    end
end

%% Computation: phase angle vectors for rotation matrix
FF12_Matrix = PhaseAngleMatrix(RotAxis(:,2));
FF23_Matrix = PhaseAngleMatrix(RotAxis(:,3));

FF13_Matrix = UPAV_SelectionCombination(FF12_Matrix, FF23_Matrix);

RR13_PhaseAngleMatrix = UPAV_Elimination(FF13_Matrix);
RR13_PhaseAngle = ComputePhaseAngleVector(Rot(2).JJ, RR13_PhaseAngleMatrix);

%% Select cosin and sine function
DOF = 4;
syms Pose_x Pose_y Pose_z
lx = sym('lx', [1 DOF]);
ly = sym('ly', [1 DOF]);
lz = sym('lz', [1 DOF]);
r = sym('r', [3 3]);
t = sym('t', [1 DOF]);


KnownRot = [r(1,1), r(1,2), r(1,3);
            r(2,1), r(2,2), r(2,3);
            r(3,1), r(3,2), r(3,3)];
TargetPose = [Pose_x; Pose_y; Pose_z];


SymTheta = sym('theta', [DOF, 1]);
SymOffset = [lx; ly; lz];

[~, ~, SymRot] = ForwardKine(DOF, RotAxis, SymOffset, SymTheta);
```

```
SymP01 = SymRot(1).Matrix*SymOffset(:,1);
SymP02 = SymRot(2).Matrix*SymOffset(:,2);
SymP03 = SymRot(3).Matrix*SymOffset(:,3);
SymP04 = KnownRot*SymOffset(:,4);

LHS = simplify(transpose(SymRot(1).Matrix)*(TargetPose-(SymP01+SymP04)));
RHS = simplify(transpose(SymRot(1).Matrix)*(SymP02+SymP03));

Orientation_LHS = transpose(SymRot(1).Matrix)*KnownRot;

tamp = [find(RotAxis(:,2)==1),find(RotAxis(:,4)==1); ...
       find(RotAxis(:,2)==1),find(RotAxis(:,3)==1)];
index_i = tamp(1,1);
index_j = tamp(1,2);
index_k = setdiff([1; 2; 3], tamp(:,2), 'rows');

if SymOffset(index_k,3) == 0
    System = LHS(index_i)-RHS(index_i);
    vars = [cos(SymTheta(1)), sin(SymTheta(1))];
    [A, ~] = coeffs(System, vars);
    subs_A = double(subs(A, [r, TargetPose, SymOffset], [Num_RR04_known,
Num_P_end, Offset]));

    Theta1(i,1) = atan2(subs_B(2),subs_B(1))
+atan2(sqrt(subs_B(1)^2+subs_B(2)^2-subs_B(3)^2),-subs_B(3));
    Theta1(i,2) = atan2(subs_B(2),subs_B(1)) +atan2(-
sqrt(subs_B(1)^2+subs_B(2)^2-subs_B(3)^2),-subs_B(3));
end

CosineTheta3 = Orientation_LHS(index_i, index_j);
SineTheta3 = simplify(LHS(index_i)-RHS(index_i)...

+SymOffset(index_k,3)*cos(SymTheta(3)+RR13_PhaseAngle(index_i,index_k).Vector))
/SymOffset(index_k,3);
SineTheta3 = subs(SineTheta3, ...

simplify(cos(SymTheta(3)+RR13_PhaseAngle(index_i,index_j).Vector)), ...
                  CosineTheta3);

temp = simplifyFraction(expand(CosineTheta3^2+SineTheta3^2));
[temp_num, temp_den] = numden(temp);
Equation02 = temp_num == temp_den;
Equation02 = subs(Equation02,...
           [cos(SymTheta(1)), sin(SymTheta(1))],...
           [(1-t(1)^2)/(1+t(1)^2), 2*t(1)/(1+t(1)^2)]);

term = [];
term = simplifyFraction(expand(Equation02));
[~, temp_den] = numden(lhs(term));
modifiedTerm = simplify(expand(temp_den*(lhs(term)-rhs(term))));
% [~, T] = coeffs(modifiedTerm, t(1));
% disp(T)
```

```
Sol = solve(modifiedTerm==0, t(1));

for i = 1:4
    temp = double(subs(Sol(i),...
                    [r, TargetPose, SymOffset],...
                    [Num_RR04_known, Num_P_end, Offset]));
%     Theta1(i,1) = 2*atan(vpa(temp));
    Theta1(i,1) = 2*atan(temp);
    InvRR01KnownRot(i).Matrix = double(subs(Orientation_LHS, ...
                                    [SymTheta(1), KnownRot(1,:),
KnownRot(2,:), KnownRot(3,:)], ...
                                    [Theta1(i), Num_RR04_known(1,:),
Num_RR04_known(2,:), Num_RR04_known(3,:)]));
end



end
```

k. InverseKine_CommonPoint_Case01.m

```
function [ComputedTheta, InvRR03KnownRot] =
InverseKine_CommonPoint_Case01(RotAxis, Offset, Num_P_end, Num_RR06_known,
MappingRelationship)
%% Step1: Theta 2
% Computation: mapping matrices for rotation matrix
LinkIndex = [3, 2];
for k = 1:2
    if k == 1
        subRotAxis = RotAxis;
        subRotAxis(:,1) = [];
    else
        subRotAxis(:,end) = [];
    end

    term = eye(3,3);
    for i = 1:3
        GravitVector = term(i,:)';
        for j =1:3
            JJ_core = [];
            if k == 1
                JJ_core = MappingRelationship(4).JJ(i,j).Matrix;
                JJ_core(:,1) = [];
            else
                JJ_core = Rot(k-1).JJ(i,j).Matrix;
                JJ_core(:,end) = [];
            end

            if nnz(JJ_core(:,1)) == 0
```

```
                JJ_core = MotionMatrix(2);
            end

            LocationCOM = term(:,j);
            Rot(k).JJ(i,j).Matrix = ModificationRules(JJ_core, 
subRotAxis(:,1:k), GravitVector, LocationCOM, LinkIndex);
%             fprintf('(%d,%d)\n',i,j)
%             disp(Rot(k).JJ(i,j).Matrix)

        end
    end
end
%% Computation: phase angle vectors for rotation matrix


FF12_Matrix = PhaseAngleMatrix(RotAxis(:,2));
FF23_Matrix = PhaseAngleMatrix(RotAxis(:,3));

FF13_Matrix = UPAV_SelectionCombination(FF12_Matrix, FF23_Matrix);

RR13_PhaseAngleMatrix = UPAV_Elimination(FF13_Matrix);
RR13_PhaseAngle = ComputePhaseAngleVector(Rot(2).JJ, RR13_PhaseAngleMatrix);

DOF = 6;
syms Pose_x Pose_y Pose_z
lx = sym('lx', [1 DOF]);
ly = sym('ly', [1 DOF]);
lz = sym('lz', [1 DOF]);
r = sym('r', [3 3]);
t = sym('t', [1 DOF]);

KnownRot = [r(1,1), r(1,2), r(1,3);
            r(2,1), r(2,2), r(2,3);
            r(3,1), r(3,2), r(3,3)];
TargetPose = [Pose_x; Pose_y; Pose_z];

SymTheta = sym('theta', [DOF, 1]);
SymOffset = [lx; ly; lz];

for i = 1:6
    HalfTangen_S(i) = 2*t(i)/(1+t(i)^2);
    HalfTangen_C(i) = (1-t(i)^2)/(1+t(i)^2);
end

%% Computation: Theta 2

[~, ~, SymRot] = ForwardKine(DOF, RotAxis, SymOffset, SymTheta);

SymP01 = SymRot(1).Matrix*SymOffset(:,1);
SymP02 = SymRot(2).Matrix*SymOffset(:,2);
SymP03 = SymRot(3).Matrix*SymOffset(:,3);
SymP06 = KnownRot*SymOffset(:,6);
```

```
LHS = simplify(transpose(SymRot(2).Matrix)*(TargetPose-
(SymP01+SymP02+SymP06)));
RHS = simplify(transpose(SymRot(2).Matrix)*(SymP03));
Orientation_LHS = transpose(SymRot(3).Matrix)*KnownRot;

Select_indexA = find(RotAxis(:,3) == 1);
Select_indexC = find(RotAxis(:,3) ~= 1);

Equ(1,1) = RHS(Select_indexA) - LHS(Select_indexA);
Equ(2,1) = simplify(expand(transpose(RHS)*RHS) -expand(transpose(LHS)*LHS));

vars = [cos(SymTheta(1)), sin(SymTheta(1))];
[A1, T] = coeffs(Equ(1), vars);
[A2, T] = coeffs(Equ(2), vars);
AA = expand([A1(1), A1(2); A2(1), A2(2)]);
BB = simplify(-[A1(3); A2(3)]);
XX = simplifyFraction(AA\BB);

vars = [cos(SymTheta(2)), sin(SymTheta(2))];
A = sym('A', [2 3]);

for i = 1:2
    [N(i), D(i)] = numden(XX(i));
    N(i) = simplify(N(i));
    D(i) = simplify(D(i));

    [num_C(i,:), num_T(i,:)] = coeffs(N(i), vars);
    [den_C(i,:), den_T(i,:)] = coeffs(D(1), vars);

    count = size(num_C(i,:),2);
    for j = 1:count
        if j == 1
            subs_XX(i) = A(i,j)*(num_T(i,j)/den_T(i));
        else
            subs_XX(i) = subs_XX(i) + A(i,j)*(num_T(i,j)/den_T(i));
        end
    end
end

EquTheta2 = simplifyFraction(expand(subs_XX(1)^2+subs_XX(2)^2==1));
System1 = subs(EquTheta2,...
             [cos(SymTheta(2)), sin(SymTheta(2))], ...
             [HalfTangen_C(2), HalfTangen_S(2)]);
Sol_1 = solve(System1, t(2),"MaxDegree",4);

% Substitute parameter data into symbolic in the analytic solution of theta 2
for i = 1:2
    for j = 1:count
        temp = num_C(i,j)/den_C(i);
        subs_A(i,j) = subs(temp, [[lx; ly; lz], r, TargetPose], [Offset,
Num_RR06_known, Num_P_end]);
    end
end
```

```
index = 0;
for i = 1:size(Sol_1,1)
    t2(i) = vpa(subs(Sol_1(i), A, subs_A));

    if isreal(t2(i)) == 1
        index = index + 1;
        Theta2(index) = 2*atan(t2(i));

    elseif abs(imag(t2(i))) < 1.0e-30
        index = index + 1;
        Theta2(index) = 2*atan(real(t2(i)));
    end
end
disp(rad2deg(double(Theta2)))

%% Computation: Theta 1 and Theta 3

for i = 1:3
    Equ(i,1) = expand(RHS(i)-LHS(i));
end

vars = [cos(SymTheta(1)), sin(SymTheta(1))];
[C_q1, ~] = coeffs(Equ(Select_indexA), vars);
vars = [cos(SymTheta(3)), sin(SymTheta(3))];
[C_q3, ~] = coeffs(Equ(Select_indexC(1))+Equ(Select_indexC(2)), vars);

%%% Substitution
Sign = [1, -1];
temp1 = subs(C_q1, [[lx; ly; lz], r, TargetPose], [Offset, Num_RR06_known,
Num_P_end]);
temp2 = subs(C_q3, [[lx; ly; lz], r, TargetPose], [Offset, Num_RR06_known,
Num_P_end]);
for i = 1:size(Theta2,2)
    subs_B = subs(temp1, SymTheta(2), Theta2(i));
    subs_B = double(subs_B);

    count = 0;
    for j = 1:2
        Theta1(i,1) = atan2(subs_B(2),subs_B(1))
+atan2(sqrt(subs_B(1)^2+subs_B(2)^2-subs_B(3)^2),-subs_B(3));
        Theta1(i,2) = atan2(subs_B(2),subs_B(1)) +atan2(-
sqrt(subs_B(1)^2+subs_B(2)^2-subs_B(3)^2),-subs_B(3));

        subs_C = subs(temp2, [SymTheta(1), SymTheta(2)],
[Theta1(i,j),Theta2(i)]);
        subs_C = double(subs_C);

        for k = 1:2
            count = count + 1;
            test = sqrt(subs_C(1)^2+subs_C(2)^2-subs_C(3)^2);

            if isreal(test) ~= 1
                disp('Theta3: isreal ~= 1')
                Theta3(i,count) = 0;
```

```
            else
                Theta3(i,count) = atan2(subs_C(2),subs_C(1))
+atan2(Sign(k)*sqrt(subs_C(1)^2+subs_C(2)^2-subs_C(3)^2),-subs_C(3));
            end
        end
    end
end

ComputedTheta = [];
NumOfTheta2 = size(Theta2,2);
NumOfTheta3 = size(Theta3,2);

for i = 1:NumOfTheta2
    ComputedTheta(2,NumOfTheta3*(i-1)+1:NumOfTheta3*i) =
Theta2(i)*ones(1,NumOfTheta3);
    ComputedTheta(1,NumOfTheta3*(i-1)+1:NumOfTheta3*i) =
[Theta1(i,1)*ones(1,2), Theta1(i,2)*ones(1,2)];
    ComputedTheta(3,NumOfTheta3*(i-1)+1:NumOfTheta3*i) = Theta3(i,:);
end

for i = 1:length(ComputedTheta)
    InvRR03KnownRot(i).Matrix = double(subs(Orientation_LHS, ...
        [SymTheta(1), SymTheta(2), SymTheta(3), KnownRot(1,:), KnownRot(2,:),
KnownRot(3,:)], ...
        [ComputedTheta(:,i)', Num_RR06_known(1,:), Num_RR06_known(2,:),
Num_RR06_known(3,:)]));
end

end
```