



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

2022년 2월

석사학위 논문

다양한 관측중단과 모형설정 오류를
고려한 강건한 부트스트랩 분위수
관리도의 설계

조선대학교 대학원

산업공학과

Bavuujav Delgerbulag

다양한 관측중단과 모형설정 오류를 고려한 강건한 부트스트랩 분위수 관리도의 설계

Robust Percentile Control Chart Using Bootstrap
Method Considering Model-misspecification

2022 년 2월 25일

조선대학교 대학원

산업공학과

Bavuujav Delgerbulag

다양한 관측중단과 모형설정 오류를
고려한 강건한 부트스트랩 분위수
관리도의 설계

지도교수 김성준

이 논문을 산업공학 석사학위 신청 논문으로 제출함

2021 년 10월

조선대학교 대학원

산업공학과

Bavuujav Delgerbulag

Bavuujav Delgerbulag의

석사학위논문 을 인준함

위원장 조선대학교 교수 신중호 (인)

위 원 조선대학교 교수 백정우 (인)

위 원 조선대학교 교수 김성준 (인)

2021 년 12월

조선대학교 대학원

목차

- 제 1 장 서론 1**
 - 제 1 절 연구의 배경 및 필요성1
 - 제 2 절 기존 연구 고찰.....1
 - 제 3 절 연구내용 및 구성3

- 제 2 장 이론적 배경 4**
 - 제 1 절 관측중단을 고려한 분포추정과 모형설정 오류.....4
 - 제 2 절 부트스트랩 분위수 관리도9

- 제 3장 제안 방법론 11**
 - 제 1 절 관측중단을 고려한 부트스트랩 분위수 관리도.. 11
 - 제 2 절 제안 관리도의 설계 및 적용방법 12

- 제 4장 수치 실험 및 사례분석 14**
 - 제 1 절 수치 실험..... 14
 - 제 2 절 공정 적용사례..... 24

- 제 5장 결론 및 향후 연구.....28**

- 참고 문헌.....29**

그림 목차

[그림 1] 완전자료	4
[그림 2] 제1종 및 제2종 관측중단자료	5
[그림 3] 구간 관측중단자료	6
[그림 4] 제안 방법의 관리도 설계 및 적용 절차	13
[그림 5] 낙하충격시험 절차	24
[그림 6] 디스플레이 모듈의 데이터를 기반으로 한 부트스트랩 관리도	25
[그림 7] 탄소섬유의 파손강도 데이터를 기반으로 한 부트스트랩 관리도	27

표 목차

[표 1] 부트스트랩 기반에 분위수 관리도의 문헌검토	2
[표 2] The in-control ARL0, bias and sd for the proposed method and the random data driven method (n=10, m=20).....	16
[표 3] The in-control ARL0, bias and sd for the weighted modeling method and the parametric method (n=10, m=20)	17
[표 4] The in-control ARL0 and sd for the parametric method (n=10, m=20)	18
[표 5] The true model is weibull , out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method	20
[표 6] The true model is weibull, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method.....	20
[표 7] The true model is lognormal, out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method	21
[표 8] The true model is lognormal, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method.....	21
[표 9] The true model is generalized exponential, out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method	22
[표 10] The true model is generalized exponential, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method	22
[표 11] The true model is inverse-gaussian, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method	23

[표 12] The true model is inverse-gaussian, out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method23

[표 13] The breaking strength of carbon fiber data set26

ABSTRACT

다양한 관측중단과 모형설정 오류를 고려한
강건한 부트스트랩 분위수 관리도의 설계

Bavuujav Delgerbulag

Advisor: Seongjoon Kim, Ph.D.

Department of Industrial Engineering

The Graduate School of Chosun University

In recent, the reliability of mobile devices from external physical shock is a major concern for both manufacturer and customer. Since drop shock is the most frequent cause of failure of mobile devices, the evaluation and management of the drop shock reliability is a very important issue in the manufacturing phase. Contrary to the conventional control chart, the low percentile is the main characteristic of interest to the drop shock reliability. Therefore, in this study, we propose a robust percentile control chart method using the bootstrap method considering model-misspecification when candidate distributions are Weibull, Log-normal, Generalized Exponential, and Inverse-Gaussian. The numerical study is performed to investigate the properties of the proposed method and compare to the existing methods. The proposed method is illustrated using mobile display module data and the breaking strength of carbon fiber data set.

국문 초록

제품 R&D를 통해 확보된 신뢰성을 양산단계에서 일정하게 유지하는 것은 시장에서 발생하는 클레임으로 인한 품질비용을 예방하고 제품의 경쟁력을 확보하는데 있어서 매우 중요하다. 제조 공정이 아무리 잘 설계되고 주의 깊게 유지되더라도 항상 변동이 존재하며, 이를 재빨리 탐지하여, 변동을 감소시키고 공정을 관리상태에 유지하기 위한 효과적인 수단은 관리도이다.

본 연구에서는 좌측-, 우측-, 구간-관측중단의 데이터를 가지며 참 분포에 대한 모형설정 오류(model misspecification)의 위험이 존재할 때, 이를 반영한 부트스트랩(bootstrap) 기반의 분위수 관리도를 제안한다. 관리특성의 참 분포가 일반화지수, 와이블, 대수정규, 역가우시안 분포를 가질 수 있을 때, 여러 관측중단 데이터에 대한 일반화 우도함수에 대한 최우추정결과를 기반으로 모형설정 오류에 강건한 부트스트랩 관리한계 설정방법을 제안하였다. 제안된 방법의 강건성 및 안정성을 평가하기 위해 다양한 분위수, 오경보율(False alarm rate; FAR) 및 샘플수에 대한 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 기존연구의 방법과 성능을 비교하였다.

본 연구에서 제안된 방법을 관리상태 평균 런 길이 (ARL0) 및 관리이상상태 평균 런 길이 (ARL1) 측면에서 기존 방법들과 비교해 봤을 때 우수한 결과를 제시하였다.

마지막으로 파손강도와 같이 낮은 분위수의 관리가 필요한 디스플레이 모듈의 공정 적용사례 및 탄소섬유 공정 적용사례를 소개한다.

제 1 장 서론

제 1 절 연구의 배경 및 필요성

오늘날 스마트폰, 태블릿과 같은 모바일 기기는 우리 삶의 필수적 요소가 되었다. 이와 함께 모바일 기기에 장착되는 디스플레이 모듈의 면적은 증가하는 반면, 두께는 줄어들고 있기 때문에 충격에 취약한 구조적 특성을 가지고 있다. 모바일 기기의 디스플레이 모듈은 화면을 표시하는 기능뿐만 아니라 기기와 사용자의 상호작용을 매개하는 핵심적인 부품이기 때문에 외부 충격에 의한 신뢰성은 회사와 소비자 모두에게 매우 중요한 문제이다. 특히, 디스플레이 모듈의 외부 충격에 의한 파손은 모바일 기기에서 가장 빈번하게 발생하는 고장모드이므로 사용 중 낙하 충격에 대한 제품의 파손강도를 제품개발 및 양산 과정에서 관리하는 것은 매우 중요한 문제이다. 이 때, 디스플레이 모듈의 파손강도를 관리하고자 할 때 파손분포의 누적 1% 또는 10%와 같은 낮은 분위수가 중요한 관리대상이 된다. 하지만 일반적으로 공정관리에 널리 사용되는 Shewhart-type의 관리도는 품질특성의 평균 변화를 감시하는데 효율적이지만 파손강도와 같은 낮은 분위수를 관리하는데 적절하지 않다. 이와 같이 감시하고자 하는 관리특성치가 분포의 특정 분위수인 경우에는 모수적 및 비모수적 부트스트랩 방법과 같은 수치적 방법을 사용하여 적절한 관리한계를 설정할 수 있다.

제 2 절 기존 연구 고찰

통계적 품질관리를 위해 부트스트랩 방법을 적용한 연구는 그동안 널리 수행되어 왔다. Bajgier(1992)는 공정 평균에 대한 부트스트랩 관리도를 개발하여 Shewhart \bar{X} 관리도와 비교하였다 (Lio and Park 2010). Seppala et al. (1995)는 부분군 데이터의 평균 및 표준편차를 모니터링하는데 사용될 수 있는 부분군 부트스트랩 (subgroup bootstrap) 접근법을 제안하였다. 이들은 부분군 부트스트랩의 성능을 평가하는데 모의실험 범위(simulated

coverage)라는 척도를 사용하였다 (Jones and Woodall 1998). Liu and Tang(1996)은 독립적(Independent) 및 종속적(dependent) 공정의 평균을 관리하기 위한 부트스트랩 관리도를 제안하였다. Jones and Woodall (1998)은 이전에 제안된 여러 부트스트랩 관리도의 성능을 비교 평가하고 Seppala 등이 제안한 기법의 한계점이 있음을 지적하였으며, 일반적으로 관리상태 평균 런 길이 (ARL) 측면에서 부트스트랩 관리도는 표준 Shewhart 관리도보다 성능이 우수하지 못하였다고 하였다. 그러나 관리특성치의 모집단의 분포가 치우친(skewed distribution)인 경우에는 부트스트랩 방법이 Shewhart 방법보다 평균적으로 실제 분위수 값을 잘 추정하는 것으로 알려져있다. 이후에도 부트스트랩 기반의 분위수 관리도에 관한 다양한 연구들이 이루어져 왔으며 [표 1]에 정리되어있다.

[표 1] 부트스트랩 기반에 분위수 관리도의 문헌검토

저자	고려한 분포	특징
(Nichols and Padgett 2006)	Weibull	와이블 분위수에 대한 모수적 부트스트랩 관리도를 개발하여 와이블 분포의 백분위수에 대한 Shewhart 관리도와 비교
(Lio and Park 2010)	Inverse-Gaussian	공정 관측지가 역가우시안 분포를 따른다고 가정하여 백분위수를 관리하기 위한 부트스트랩 관리도를 제안
(Chiang, Jiang et al. 2017)	Generalized-exponential	일반화 지수 분포에 대한 부트스트랩 분위수 관리도를 제안
(김성준, 윤길원 et al. 2018)	Weibull	관측중단을 고려한 와이블 분위수에 대한 부트스트랩 관리도 개발
(Chiang, Lio et al. 2018)	Weibull, Lognormal, Generalized exponential	2 가지 모델 선택 접근법 (Random data driven 및 weighted modeling)을 통한 부트스트랩 분위수 관리도를 제안

하지만 대부분 기존 연구에서는 공정에 대한 참 분포가 알려져 있다는 가정하에서 연구를 진행하였으며, 참 분포를 잘못 가정하여 낮은 분위수에 대한 관리기준과 관리한계선을 수립하는 경우 의사결정 오류의 위험이 커진다는 문제점이 있다. 이를 보완하기 위해서 Chiang et al. (2018)은 참분포에 대한 모형선택 오류를 고려한 강건한 분위수 관리도 방법을 제안하였다. 첫 번째로 random data-driven 접근법의 경우, 후보 분포중 우도 값이 가장 큰 분포를 선정하여 관리도를 설정했기 때문에 실질적으로 모형 설정 오류를 제대로 반영하기 어려운 단점이 있다. 두 번째 방법인 weighted-modeling 접근법은 후보 분포 각각의 관리도를 설정하고, 이들로부터 공정의 관측값을 각각 적용하여 공정의 관리상태(in-control) 여부를 확률적으로 판단한다. 이 방법은 여러 후보분포를 고려할 수는 있지만 공정의 관리상태가 확률적으로 판단되므로 일부 강건성을 확보할 수 있다는 장점이 있으나, 불확실성이 증가하는 단점이 있다.

하지만 대부분의 기존 연구들은 공정데이터가 완전 데이터(complete data)인 경우만을 고려하여 관리도를 제안하였다. 하지만 디스플레이 모듈의 낙하충격과 같은 신뢰성 데이터는 좌측,우측,구간 관측중단을 복합적으로 가지는 경우가 빈번하며 기존 방법론을 적용할 경우 추정결과의 편향이 발생하고, 이로 인한 분위수 관리도의 성능이 저하될 수 있다. 따라서 본 연구에서는 공정의 관리특성치가 관측중단 자료(censored data)를 가지는 경우에 모형선택의 오류를 고려한 강건한 부트스트랩 기반의 분위수 관리도를 제안하고자 한다.

제 3 절 연구내용 및 구성

본 연구는 총 5개의 장으로 구성되어있다. 1장은 연구의 배경 및 필요성에 대해 소개하였고, 선행연구를 검토하여 기존연구들의 문제점을 파악하고 본 연구의 목표와 내용을 소개한다. 2장에서는 이론적 배경으로서 관측중단을 고려한 분포의 추정과

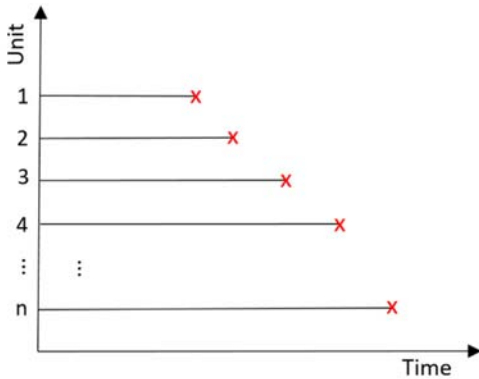
모형설정 오류에 대한 개념을 소개한다. 또한, 관리도에 대한 개념과 모수적 부트스트랩 관리도의 작동 원리에 대해 기술한다. 3장에서는 다양한 관측중단을 고려한 모형설정 오류에 강건한 부트스트랩 기반의 분위수 관리도 방법론을 소개한다. 4장에서는 제안된 방법의 강건성 및 안정성을 평가하기 위해 다양한 분위수, 오경보율(False alarm rate; FAR), 샘플수에 대한 몬테카를로 시뮬레이션을 실시한다. 또한 파손강도와 같이 낮은 분위수의 관리가 필요한 디스플레이 모듈의 공정 적용사례 및 탄소섬유 공정 적용사례를 소개하였다. 마지막으로 5장에서는 결론과 향후 연구방향에 대해서 설명한다.

제 2 장 이론적 배경

제 1 절 관측중단을 고려한 분포추정과 모형설정 오류

수명자료와 관측중단 자료

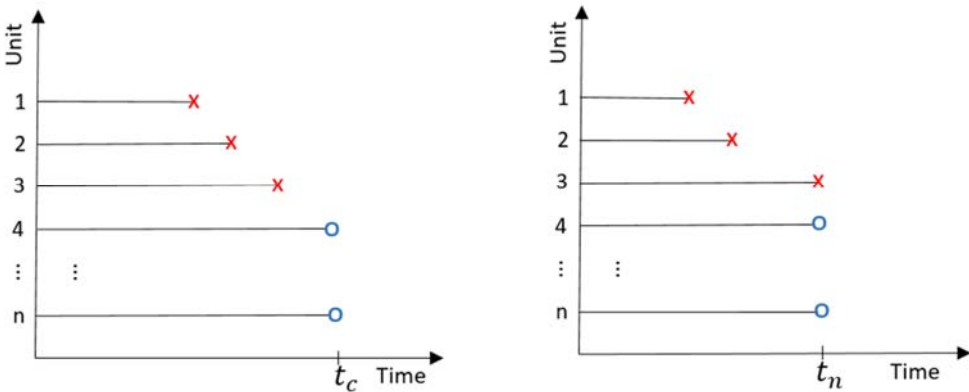
수명자료는 주로 여러 개의 동일한 부품을 작동시키는 수명시험을 통해 얻을 수 있으며 만약 모든 부품이 고장 날 때까지 시험을 수행했다면 여기서 얻은 자료를 완전자료(complete data)라고 부른다. 완전자료는 고장시간을 정확하게 파악할 수 있기 때문에 유용하지만, 신뢰성이 매우 높은 제품에 대한 정보를 얻으려면 많은 시간과 시험비용 등이 필요하다. [그림 1]은 n 개의 부품의 고장데이터를 나타내고 있다.



[그림 1] 완전자료

그러나 시간 혹은 경제적인 이유로 어느 시점에서 시험을 중단했다면 이때 얻어진 자료는 관측중단자료(censored data)라고 한다.

시점 $t=0$ 에서 수명시험을 시작하여 특정 시점 t_c 에서 시험을 중단하여 얻어진 자료를 제1종 관측중단자료 (type I censored data)라고 한다. 이 자료는 특정 시점 이전에 고장 난 부품들의 수명만을 알 수 있고, 나머지 부품들에 대해서는 특정 시점보다 수명이 길다는 사실만을 알 수 있다. 시점 $t=0$ 에서 시작하여 미리 정해진 개수가 고장나는 시점 t_n 의 부품이 고장 날 때까지 시험을 실시하여 얻어진 자료를 제2종 관측중단자료 (type II censored data)라고 한다. 제2종 관측중단자료는 필요한 수만큼의 수명 자료를 확보할 수 있으나, 시험시간이 얼마나 소요되는지 알 수 없다. [그림 2]은 제1종 및 제2종 관측중단자료를 나타낸 것이다.

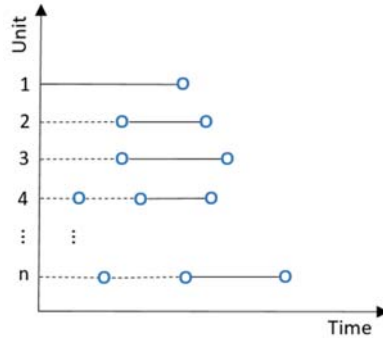


(a) 제1종 관측중단자료

(b) 제2종 관측중단자료(n=3일 때)

[그림 2] 제1종 및 제2종 관측중단자료

시험단위의 고장시간을 연속적으로 관측하지 않고, 일정한 간격을 정하여 간헐적으로 관측하고 고장의 발생여부를 파악하는 자료를 얻게 될 경우, 이러한 정보를 구간관측중단(interval-censored) 자료라고 한다. [그림3]은 구간 관측중단자료를 나타낸 것이다.



[그림 3] 구간 관측중단자료

본 연구에서는 좌측-, 우측-, 구간-관측중단의 데이터를 고려하여 연구를 진행하였다. 낙하충격시험 및 디스플레이 모듈 데이터에 대해서는 4장에서 자세히 소개한다.

분포추정과 모형설정 오류의 문제

본 연구에서는 분위수 관리도를 설계하기 위한 후보분포로 와이블 분포, 대수정규 분포, 일반화 지수분포, 역가우시안 분포를 채택한다. 각 분포에 대한 확률밀도함수(PDF), 누적분포함수(CDF), 그리고 분위수 함수(QF; Quantile Function)는 아래와 같다.

와이블 분포의 경우:

$$f_{we}(x; \lambda, \beta) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\beta}\right\}, \quad (1)$$

$$F_{we}(x; \lambda, \beta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\right\}, \quad (2)$$

$$Q_p^{we} = F_{we}^{-1}(p; \lambda, \beta) = \lambda(-\ln(1-p))^{1/\beta} \quad (3)$$

여기서 $0 < p < 1$ 그리고 $x, \lambda, \beta > 0$ β -형상모수 (shape parameter) λ -척도모수 (scale parameter)이다.

대수정규분포의 경우:

$$f_{LN}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4)$$

$$F_{LN}(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{(\ln x) - \mu}{\sigma}\right), \quad (5)$$

$$Q_p^{LN}(p; \mu, \sigma) = \exp\left(\mu + \sqrt{2\sigma^2}\Phi^{-1}(2p - 1)\right) \quad (6)$$

여기서 $0 < p < 1$ 그리고 $x, \mu, \sigma > 0$, μ -평균 (mean), σ -표준편차(standard deviation)이다. 일반화 지수분포의 경우:

$$f_{ge}(x; \alpha, \lambda) = \lambda * \alpha(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \quad (7)$$

$$F_{ge}(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \quad (8)$$

$$Q_p^{ge}(p; \alpha, \lambda) = \frac{-\ln(1-p^{1/\alpha})}{\lambda} \quad (9)$$

여기서 $0 < p < 1$ 그리고 $x, \alpha, \lambda > 0$, α -shape parameter이고, λ -scale parameter이다.

역가우시안 분포의 경우:

$$f_{ig}(x; \mu, v) = \left(\frac{v}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{v(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\}, \quad (10)$$

$$F_{ig}(x; \mu, v) = \Phi\left\{\sqrt{\frac{v}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right\} + \exp\left(\frac{2v}{\mu}\right)\Phi\left\{-\sqrt{\frac{v}{x}}\left(1 + \frac{x}{\mu}\right)\right\}, \quad (11)$$

$$Q_p^{ig} = F_{ig}^{-1}(p; \mu, v) \quad (12)$$

여기서 $0 < p < 1$ 그리고 $x, \alpha, \lambda > 0$, v -shape parameter, μ -mean이다.

위 분포에 대해서 완전데이터만을 고려한 우도함수와 비교하여 좌측, 우측, 그리고 구간 관측중단을 고려한 일반화 우도함수(Generalized likelihood function)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathcal{L}_g(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left\{ \begin{aligned} & f(x_i, \boldsymbol{\theta})^{\delta_{R,i}} * F(x_i, \boldsymbol{\theta})^{\delta_{L,i}} * [1 - F(x_i, \boldsymbol{\theta})]^{\delta_{R,i}} \\ & \times [F(x_i, \boldsymbol{\theta}) - F(x_i - \Delta h, \boldsymbol{\theta})]^{\delta_{I,i}} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

여기서 $f(\cdot)$ 는 관측데이터 x_i ($i = 1, \dots, n$) 의 확률밀도함수(PDF), $F(\cdot)$ 는 누적분포함수(CDF), $\boldsymbol{\theta}$ 는 모수벡터이다. 그리고 관측중단을 나타내는 지수변수(censoring indicator)는 다음과 같다.

$$\delta_{L,i} = 1, \text{ if left - censored at } x_i, 0 \text{ otherwise,}$$

$$\delta_{L,i} = 1, \text{ right - censored at } x_i, 0 \text{ otherwise,}$$

$$\delta_{I,i} = 1, \text{ interval - censored at } x_i, 0 \text{ otherwise.}$$

Kim and Bae (2020)은 좌측, 우측, 구간관측중단이 존재하는 데이터에 대해서 일반화 우도함수를 적용하는 경우와 관측중단을 무시하고 완전데이터로 취급하여 분포를 추정하는 경우를 비교하였다. 그 결과, 와이블과 역가우시안 분포에 대해서 10-백분위수에 대한 MSE(Mean Squared Error)가 각각 33.6%, 35.5% 정도 감소하는 것을 몬테카를로 실험을 통해 확인하였다. 여기서 100p-백분위수를 x_p 라고 나타낼 때 MSE는 다음과 같이 정의된다.

$$MSE(\hat{x}_p) = E \left[(\hat{x}_p - x_p^*)^2 \right] = var(\hat{x}_p) + bias^2(\hat{x}_p),$$

여기서 x_p^* 는 100p 백분위수의 참값이고, var()는 분산, bias()는 편향이다. 또한, Kim and Bae (2014)와 Kim and Bae(2020)은 완전데이터를 가정한 경우와 관측중단을 가정한 경우에 대해서 각각 잘못된 분포를 추정할 모형설정 오류에 대해서 검토하였다. 위와 마찬가지로 와이블 분포와 역가우시안 분포에 대해서 참 분포를 가정하여 다양한 모수와 표본개수에 대해서 몬테카를로 실험을 실시한 결과, 최우추정법을 통해 모수를 추정하여 가장 높은 우도값을 갖는 분포를 선택하는 경우 올바른 분포를 채택할 확률인 PCS(probability of correct selection)가 표본의 개수가 크더라도 무시할 수 없는 수준이라고 보고하였다. 완전데이터인 경우에 와이블 분포 또는 역가우시안 분포를 올바르게 선택할 확률은 표본의 개수가 100개인 경우라고 하더라도 PCS는 97% 수준에 머물렀으며, 현실적으로 표본이 10개인 경우에는 PCS가 최대 72% 정도의 수준에 그쳤다. 관측중단이 고려된 경우는 표본이 20개인 경우 최대 83%에 그쳤다. 이를 통해서, 다양한 후보분포가 존재하며 현실적으로 많은 표본을 취하기 어려운 상황에서 올바른 분위수 관리도의 설계와 적용을 위해서는 참분포에 대한 모형설정 오류가 반드시 고려되어야 하는 것임은 자명한 것으로 판단된다.

제 2 절 부트스트랩 분위수 관리도

품질관리의 대표적인 통계적 도구인 관리도는 미국 Bell 연구소의 Walter A. Shewhart에 의해 처음으로 제시되었다 (Arif 2000). 관리도는 중심선(Center Line)과 관리한계선(Control Limit)을 설정하고 측정된 품질특성치를 시각적으로 표현한 그래프이다. 관리한계선은 관리상한(Upper control limit, UCL), 및 관리하한(Lower control limit, UCL)이 있다. 공정이 관리상태일 때 모든 부분군이 관리한계 내에 타점된다. 공정의 품질특성치 분포에 대한 모수를 공정 모수 또는 관리특성치라고 하는데, 관리상태일 때 관리특성치의 값은 일반적으로 알려져 있기 때문에 관리도는 두 종류의 국면으로 나누어 운용한다. 제1국면(Phase I)에서는 일정 수의 표본을 추출하여 관리상태일 때의 공정 모수를 추정하고 이를 기초로 하여 관리한계를 설정한다. 제2국면(Phase II)에서는 제1국면에서 설정한 관리한계를 이용하여 관리도 절차를 적용하고 공정의 상태를 모니터링하는 것이다 (이주원, 김민지 et al. 2018). 일반적으로 흔히 사용하는 Shewhart 유형의 관리도는 중심극한정리를 기반으로 개발되었으며 측정된 공정 표본이 정규분포를 따를 때 잘 적용된다 (Lio and Park 2010). Efron(1979)에 의해 처음 제안된 부트스트랩 방법은 통계량의 샘플링 분포를 효과적으로 예측하는 계산적 기법이다. 일반적으로 분위수 관리도를 적용할 때, 관리특성치인 낮은 분위수에 대한 관리한계선을 계산하려면 해석적 방법이 존재하지 않거나 수치적 근사방법을 적용하는 경우 오차가 커지게 된다. 이 경우 부트스트랩 방법을 통해 분위수에 대한 관리 한계선을 설정할 수 있다. 일반적인 모수적 부트스트랩 방법을 통한 분위수 관리도의 관리한계선 설정 방법은 다음과 같다.

Phase I 관리상태 공정에서 m 개의 부분군 $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$ (여기서 $i = 1, 2, 3, \dots, m$) 전체에 대해서 최우추정치를 구한다. Phase I 모든 관측값은 특정한 하나의 분포를 따른다고 가정한다.

1. 가정한 분포로부터 부트스트랩 표본을 생성한다.
2. 부트스트랩 표본의 모수 ($\hat{\theta}_n^*$)를 최우추정법으로 구한다.
3. 절차 3에서 추정된 모수를 사용하여 부트스트랩 100p% 분위수 추정치 $\hat{q}_p^* = \hat{Q}_p(p; \hat{\theta}_n^*)$ 를 계산한다.
4. 절차 2~4를 B회 반복한다.
5. 양측 관리도인 경우, 오경보율(False alarm rate, FAR)이 $0 < \alpha < 0.5$ 주어져 있을 때, $B(\alpha/2)$ 및 $B(1 - \alpha/2)$ 번째 부트스트랩 표본의 경험적 분위수를 구한다. 이것이 관리하한(LCL) 및 관리상한(UCL)이 된다. 단측 관리도인 경우 $B \cdot \alpha$ 번째 경험적 분위수나 $B(1 - \alpha)$ 번째 분위수를 사용한다.

Phase I 단계(위의 1~6 절차)가 완료되면 Phase II 단계인 공정 모니터링 절차로 넘어간다. 이때 공정에서 취득되는 부분군 데이터로부터 가정한 분포를 추정하고 계산된 관리특성치인 $\hat{Q}_p(p; \hat{\theta}_n)$ 을 사용한다. 만약 $\hat{Q}_p(p; \hat{\theta}_n)$ 값이 Phase I에서 구한 LCL 및 UCL사이에 있으면 공정이 관리상태로 판단하고, 그렇지 않으면 관리이상상태로 판단된다.

제 3장 제안 방법론

제 1절 관측중단을 고려한 부트스트랩 분위수 관리도

본 연구에서는 의사결정 분야에서 널리 이용되는 계층분석과정(Analytic Hierarchy Process: AHP) 기법의 가중치 도출 방법을 기반으로 여러 후보분포에 대한 관리한계선의 가중치를 계산하고, 이로부터 모형설정 오류에 강건한 분위수 관리도를 제안한다. AHP 기법은 다요소(Multi-Attribute) 의사결정 문제를 해결하는 가장 대표적인 방법이다(이광진 2004). 일반적으로 의사결정문제 해결을 위한 AHP의 절차는 다음과 같이 4단계로 이루어진다. 첫째, 의사결정 요소들 간의 관계를 분석하여 계층구조를 형성하고, 둘째, 각 계층내의 의사결정 요소들의 쌍대비교를 통하여 계층별로 쌍대비교행렬을 구한다. 셋째, 쌍대비교행렬로부터 각 계층내의 의사결정 요소의 상대적 중요도를 고유벡터 방법으로 추정한다. 넷째, 각 계층별로 얻어진 요소들의 중요도를 결합하여 의사결정대안의 최종가중치인 총 중요도를 계산한다(함형범 2004). AHP 과정에서 순위결정행렬이라 불리는 쌍대비교행렬에 근거하여 가중치 벡터를 계산하는 방법은 크게 세 가지로 분류된다. 즉, (1) 고유치분해법 (2) 거리최소화법 (3) 평균계산법 등이다(Jeong, Lee et al. 2012). 본 연구에서는 고유벡터 방법(eigenvector method)를 사용하였다. 고유벡터 방법은 쌍대비교 행렬 A를 고유치 분해에 의해 λ_{max} 에 대응되는 고유벡터 w의 표준화벡터를 가중치로 사용하는 방법이다(Jeong, Lee et al. 2012).

본 연구에서는 네 가지의 후보분포들에 대한 쌍대(pairwise) 우도비를 계산한 다음 쌍대비교행렬을 생성하여 고유벡터를 산출하였다. 종래의 선행연구에서 특정한 하나의 분포만을 가정하거나, 다양한 후보분포들에 대한 가능성을 고려하는 대신 관리이탈에 대한 의사결정의 불확실성을 증가시키는 단점을 극복하기 위해서 우도비 기반의 쌍대비교행렬로부터 도출된 고유벡터를 여러 후보분포에 대한 관리한계선의 가중치로 활용하고자 한다.

제 2 절 제안 관리도의 설계 및 적용방법

앞 절에서 설명한 본 연구에서 제안하는 부트스트랩 관리 한계선의 설정 절차는 다음과 같다.

1. 모든 후보분포에 대하여 2장에서 소개한 모수적 부트스트랩 분위수 관리도 방법을 적용하여 관리한계선을 계산한다.

$$\text{Lognormal} : \hat{Q}_1(p; \hat{\theta}_1), (LCL_1, UCL_1)$$

$$\text{Generalized Exponential} : \hat{Q}_2(p; \hat{\theta}_2), (LCL_2, UCL_2)$$

$$\text{Weibull} : \hat{Q}_3(p; \hat{\theta}_3), (LCL_3, UCL_3)$$

$$\text{Inverse Gaussian} : \hat{Q}_4(p; \hat{\theta}_4), (LCL_4, UCL_4)$$

2. 모든 후보 분포들의 우도비(likelihood ratio)를 계산하여 쌍대비교행렬 생성한다.

$$LR_{ij} = \ln(\mathcal{L}_i(\theta_i) - \mathcal{L}_j(\theta_j)), \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

$$M_{LR} = \begin{bmatrix} 1 & \exp(LR_1 - LR_2) & \exp(LR_1 - LR_3) & \exp(LR_1 - LR_4) \\ \exp(LR_2 - LR_1) & 1 & \exp(LR_2 - LR_3) & \exp(LR_2 - LR_4) \\ \exp(LR_3 - LR_1) & \exp(LR_3 - LR_2) & 1 & \exp(LR_3 - LR_4) \\ \exp(LR_4 - LR_1) & \exp(LR_4 - LR_2) & \exp(LR_4 - LR_3) & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

3. M_{LR} 의 최대 고유치 λ_{max} 에 대한 고유벡터를 산출한다.

$$M_{LR} \cdot \hat{e} = \lambda_{max} \cdot \hat{e} \quad \text{여기서} \quad \hat{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4] \quad (16)$$

4. 고유벡터를 이용한 분포 가중치를 계산한다.

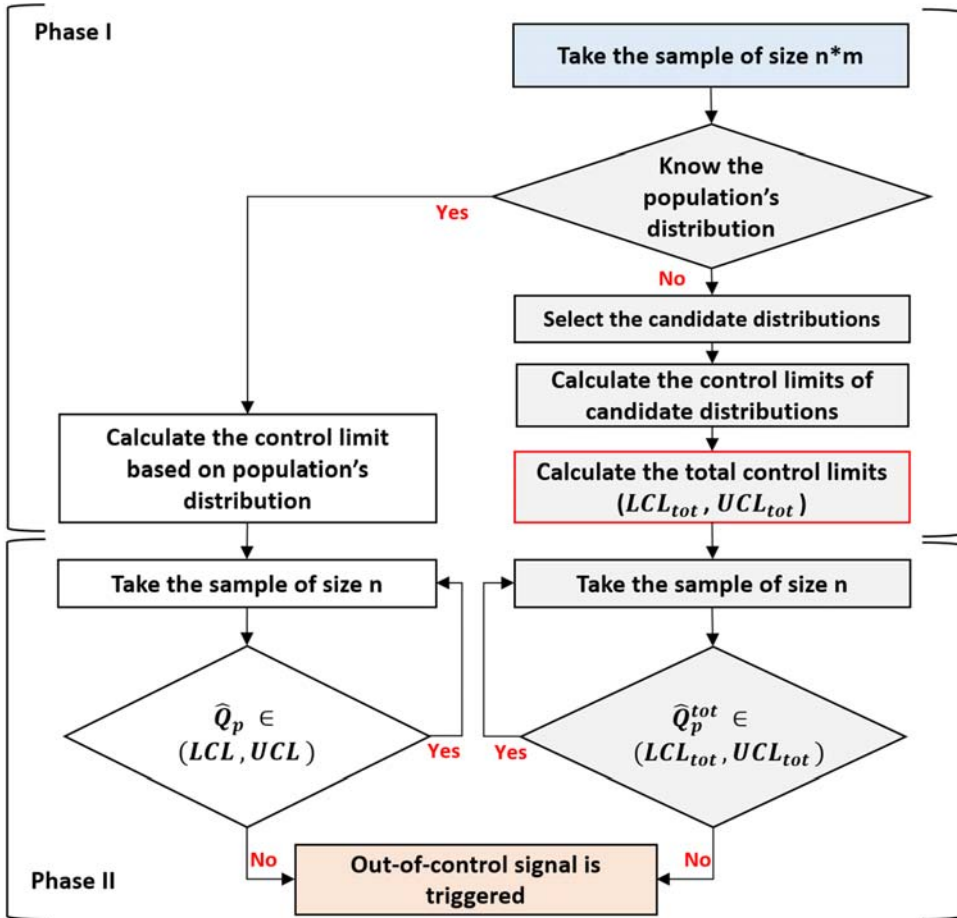
$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{e_1}{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}, \\ w_2 &= \frac{e_2}{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}, \\ w_3 &= \frac{e_3}{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}, \\ w_4 &= \frac{e_4}{e_1 + e_2 + e_3 + e_4} \end{aligned} \quad (17)$$

5. 통합 관리한계선을 계산한다.

$$LCL_{tot} = LCL_1 * w_1 + LCL_2 * w_2 + LCL_3 * w_3 + LCL_4 * w_4 \quad (18)$$

$$UCL_{tot} = UCL_1 * w_1 + UCL_2 * w_2 + UCL_3 * w_3 + UCL_4 * w_4 \quad (19)$$

제안 방법을 Phase I과 Phase II로 구분하여 도식화 하면 아래 그림과 같다.



[그림 4] 제안 방법의 관리도 설계 및 적용 절차

제 4장 수치 실험 및 사례분석

본 장에서는 제안 방법의 성능을 평가하기 위해 관리상태 평균 런 길이 (ARL0) 및 관리이상상태 평균 런 길이 (ARL1) 와 해당하는 표준편차(Standard deviation, SD), bias 측면에서 전통적 모수적 부트스트랩 방법, Chiang et al. (2018)이 제안한 Random data driven method, 그리고 Weighted modeling method와 비교하였다. 또한, 디스플레이 모듈 공정적용사례 및 탄소섬유 공정 적용사례를 소개한다.

제 1 절 수치 실험

관리도에서 주어진 공정의 상태 하에서 시작부터 이상신호를 줄 때까지 부분군의 개수를 런길이(Run length)라고 한다. 즉, 이상상태의 런길이(ARL1)는 이상원인이 발생하여 이후부터 이상신호까지 추출한 부분군의 수가 되고, 관리상태의 런길이(ARL0)는 공정이 공정상태에서 시작하여 이상신호를 줄 때까지 추출한 부분군의 수가 된다. 관리도의 효율을 비교하는데는 평균런길이 (Average run length, ARL)가 일반적으로 사용된다. 따라서 ARL0은 클수록, ARL1 작을수록 효율적인 관리도가 된다.

관리상태의 평균런길이(ARL0) 수치실험

본 연구의 수치 실험에서는 관리상태 평균 런 길이 (ARL0)를 다음과 같이 구하였다:
 관리상태 공정에서 크기가 $n=10$ 인 $m=20$ 개의 부분군을 생성하여, 제3장의 제2절에서 제안한 부트스트랩 관리 한계 설정 절차 1~5를 사용하여 $B=5000$ 개의 부트스트랩 샘플을 통해서 통합 관리한계를 설정한다. 이 때 관심 분위수는 $p=0.01$ 및 0.1 , 오경보율은 (FAR) $\alpha=0.01, 0.005$ 및 0.0027 으로 설정하였다. 관리한계를 설정한 다음 동일한 크기의 부분군을 정상상태인 참 분포로부터 생성하여 관리특성치인 분위수 \hat{Q}_p^{tot} 를 추정한다. 이 분위수 추정치가 통합 관리한계선을 벗어날 때까지 생성한 추정치의 개수를 런 길이로 기록한다.

이 전체과정을 2000번 반복하여 평균 런 길이 (ARL0) 및 표준편차(SD)를 계산하였다.

[표 2], [표 3] 및 [표 4]에 시뮬레이션 결과가 나타나 있다. [표 2] 및 [표 3]에서 보는 바와 같이 명목 ARL0와의 편향(Bias) 기준으로 비교했을 때 네 가지의 방법 중 전통적인 모수적 부트스트랩 방법이 (total bias=68.43)가장 우수한 것으로 나타났다. 이것은 자명한 결과로서, 전통적 모수적 부트스트랩 방법은 모형설정오류 없이 참분포를 올바르게 가정하여 추정한 결과이므로 가장 바람직한 수치실험의 벤치마킹 값으로 이해할 수 있다. Weighted modeling 방법은 Total bias=153.43, Random data driven method는 108.00으로 얻어졌다. 반면, 제안 방법은 Total Bias가 80.79로 모형설정 오류를 고려한 종래의 방법들(random data driven 및 weighted modeling)에 비해 우수한 것으로 확인 되었다. [표 4]는 전통적 부스트랩 방법을 서로 다른 분포를 가정함으로써 모형설정 오류를 일으킨 결과를 나타내고 있다. 모형설정 오류를 고려하지 않는 경우 ARL0의 편향이 매우 커지는 결과를 확인할 수 있다.

[표 2] The in-control ARL0, bias and SD for the proposed method and the random data driven method (n=10, m=20)

True model	P	FAR	Nominal ARL0	Proposed method			Random data driven method		
				ARL0	bias	Sd	ARL0	bias	Sd
WB	0.01	0.01	100	121.60	21.60	4.44	122.04	22.04	4.22
		0.005	200	265.18	65.18	9.79	265.23	65.23	9.21
		0.0027	370.37	446.11	75.74	14.63	463.34	92.97	14.72
	0.1	0.01	100	117.99	17.99	4.01	125.17	25.17	4.22
		0.005	200	262.08	62.08	8.60	275.53	75.53	10.10
		0.0027	370.37	446.07	75.70	14.56	462.99	92.62	14.27
LN	0.01	0.01	100	117.81	17.81	5.04	124.15	24.15	4.80
		0.005	200	241.58	41.58	9.15	231.48	31.48	9.31
		0.0027	370.37	436.52	66.15	15.06	376.35	5.98	12.82
	0.1	0.01	100	110.65	10.65	3.97	114.42	14.42	5.44
		0.005	200	249.56	49.56	9.70	214.77	14.77	8.61
		0.0027	370.37	415.41	45.04	14.75	377.11	6.74	14.39
GE	0.01	0.01	100	165.73	65.73	6.39	217.51	117.51	7.90
		0.005	200	392.53	192.53	14.61	487.50	287.5	16.41
		0.0027	370.37	576.23	205.86	17.85	730.14	359.77	21.15
	0.1	0.01	100	195.57	95.57	7.96	270.87	170.87	9.99
		0.005	200	404.31	204.31	14.10	602.09	402.09	17.96
		0.0027	370.37	632.97	262.60	19.51	911.31	540.94	24.40
IG	0.01	0.01	100	135.01	35.01	5.14	126.88	26.88	5.26
		0.005	200	288.03	88.03	10.99	266.97	66.97	10.45
		0.0027	370.37	451.44	81.07	15.15	448.48	78.11	15.03
	0.1	0.01	100	130.29	30.29	5.87	117.79	17.79	4.81
		0.005	200	260.52	60.52	9.81	235.33	35.33	9.16
		0.0027	370.37	438.74	68.37	15.39	387.42	17.05	13.52
Total bias				80.79	108.00				

[표 3] The in-control ARL0 , bias and SD for the weighted modeling method and the parametric method (n=10, m=20)

True model	P	FAR	Nominal ARL0	Weighted modeling method			Parametric method		
				ARL0	bias	Sd	ARL0	bias	Sd
WB	0.01	0.01	100	25.71	74.29	0.67	120.84	20.84	4.20
		0.005	200	35.88	164.12	1.04	248.47	48.47	8.15
		0.0027	370.37	40.96	329.41	1.18	476.04	105.67	15.35
	0.1	0.01	100	24.84	75.16	0.71	139.98	39.98	4.94
		0.005	200	33.90	166.10	1.16	275.10	75.1	9.05
		0.0027	370.37	43.91	326.46	1.34	450.84	80.47	14.57
LN	0.01	0.01	100	142.00	42.00	5.30	134.19	34.19	4.87
		0.005	200	260.38	60.38	9.05	278.86	78.86	10.21
		0.0027	370.37	429.16	58.79	13.87	496.14	125.77	16.36
	0.1	0.01	100	132.57	32.57	4.93	140.64	40.64	5.61
		0.005	200	262.62	62.62	9.63	292.45	92.45	10.64
		0.0027	370.37	421.40	51.03	15.07	497.95	127.58	16.57
GE	0.01	0.01	100	217.02	117.02	8.46	139.46	39.46	4.87
		0.005	200	446.10	246.10	14.15	275.55	75.55	10.08
		0.0027	370.37	690.05	319.68	19.19	348.66	21.71	9.33
	0.1	0.01	100	290.35	190.35	10.45	142.51	42.51	4.99
		0.005	200	556.42	356.42	17.12	253.01	53.01	7.39
		0.0027	370.37	870.67	500.30	23.12	363.14	7.23	9.54
IG	0.01	0.01	100	154.26	54.26	5.79	136.73	36.73	5.46
		0.005	200	313.40	113.40	11.23	272.31	72.31	9.38
		0.0027	370.37	504.79	134.42	15.69	516.06	145.69	17.19
	0.1	0.01	100	139.59	39.59	4.89	140.14	40.14	5.09
		0.005	200	280.74	80.74	9.99	302.23	102.23	11.26
		0.0027	370.37	457.50	87.13	14.67	506.21	135.84	16.54
				Total bias	153.43		68.43		

[표 4] The in-control ARL0 and sd for the parametric method (n=10, m=20)

Assumed model											
True model	p	FAR	Nominal ARL0	WB		LN		GE		IG	
				ARL0	Sd	ARL0	Sd	ARL0	Sd	ARL0	Sd
WB	0.01	0.005	200	248.47	8.15	26.92	0.84	35.35	1.16	23.60	0.65
LN				733.29	16.80	278.86	10.21	171.41	5.82	243.83	8.60
GE				546.96	11.19	500.32	16.50	275.55	10.08	497.82	16.21
IG				626.45	11.74	334.13	12.06	211.07	8.66	272.31	9.38
WB	0.1	0.005	200	275.10	9.05	26.93	0.83	33.98	1.24	23.21	0.72
LN				775.80	12.75	292.45	10.64	139.94	4.93	239.34	8.91
GE				799.94	12.63	658.48	19.56	253.01	7.39	639.08	18.92
IG				784.55	12.22	301.80	10.53	159.64	5.94	302.23	11.26
WB	0.01	0.0027	370.37	476.04	15.35	33.25	1.04	54.05	1.93	29.00	0.84
LN				756.84	12.56	496.14	16.36	261.12	7.70	419.18	14.07
GE				699.35	12.18	826.65	22.45	348.66	9.33	807.12	21.99
IG				799.23	12.76	556.64	17.92	350.44	13.04	516.06	17.19
WB	0.1	0.0027	370.37	450.84	14.57	35.18	1.12	47.90	1.69	29.24	0.88
LN				855.68	12.80	497.95	16.57	202.79	6.37	438.39	14.58
GE				896.07	12.25	1021.22	25.49	363.14	9.54	987.73	24.98
IG				903.94	12.44	502.69	16.55	261.81	10.26	506.21	16.54
WB	0.01	0.01	100	120.84	4.20	19.95	0.59	25.68	0.84	17.29	0.46
LN				426.04	9.88	134.19	4.87	96.10	3.54	128.78	5.54
GE				379.37	9.44	239.00	9.20	139.46	4.87	237.45	8.77
IG				478.47	10.77	143.75	4.93	104.56	4.62	136.73	5.46
WB	0.1	0.01	100	139.98	4.94	19.72	0.55	23.95	0.76	18.31	0.49
LN				660.80	12.27	140.64	5.61	72.68	2.60	132.74	4.89
GE				666.53	12.39	338.45	11.82	142.51	4.99	294.98	10.29
IG				638.06	11.81	145.76	5.47	84.65	3.02	140.14	5.09

관리 이탈상태의 평균런길이(ARL1) 수치실험

관리에이상상태 평균 런 길이 (ARL1)는 다음과 같이 구하였다:

관리상태 공정에서 크기가 $n=10$ 인 $m=20$ 개의 부분군을 생성하여, $B=5000$ 개의 부트스트랩 샘플로부터 통합 관리한계를 설정한다. 관심 분위수는 $p=0.1$ (10%) 및 오경보율은(FAR) $\alpha=0.0027$ 로 설정하였다 (명목 $ARL1=370$). 관리한계를 계산한 다음 관리이상상태에서 다른 모수들로부터 부분군을 생성한다. 시뮬레이션 결과는 [표 5]~[표12]에 정리되어 있다. 이 표에는 $ARL0$ 와 함께 다양한 모수의 변화(관리에탈상태)에 따른 부트스트랩 관리도의 $ARL1$ 을 나타내고 있다. 이를 통해서 이상상태의 변화에 따라서 제안한 방법과 종래의 기법들이 이상상태를 얼마나 빨리 검출하는지 비교할 수 있다. [표 5] 및 [표 6]에서 보다시피 실제 모델이 와이블인 경우에 척도모수가 변화되었을 때 random data driven 방법이 일부 공정변동을 먼저 탐지할 수 있었지만 형상모수와 척도모수가 동시에 변동하였을 때 제안 방법이 다른 방법에 비해 공정변동을 빨리 탐지할 수 있다. 참 분포가 대수정규 및 역가우시안일 때 random data driven 방법이 공정 변동을 먼저 감지할 수 있었으며, 제안 방법이 거의 같은 수준으로 공정 변동을 감지할 수 있었다. 결과는 [표 7], [표 8] 및 [표 11], [표 12]와 같다. [표 9] 및 [표 10]은 일반화 지수분포하에서 각 모수 변화 따른 실험결과를 나타내고 있으며, 모수적 부트스트랩 방법이 공정 변동을 가장 빠르게 탐지할 수 있었으며, 그 이후로 제안 방법이 공정변동을 탐지할 수 있었다. 결론적으로 관리상태 평균 런 길이 ($ARL0$) 및 관리이상상태 평균 런 길이 ($ARL1$)과 표준편차(SD) 측면에서 비교해봤을 때 weighted modeling 방법은 경쟁력이 떨어진 것으로 나타났으며, 제안 방법과 random data driven 방법의 성능이 대등한 수준에서 우수한 것으로 나타났다.

[표 5] The true model is Weibull , out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method

상태	Parameters	Weighted modeling method		Random data driven method		
		ARL	Sd	ARL	Sd	
In-control	$\beta=4.699$ $\lambda=120.58$	43.91	1.34	462.99	14.27	
정상모수 (변동 없음)	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.699$ $\lambda=119.37$	40.39	1.17	417.68	13.51
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.699$ $\lambda=114.55$	28.12	0.79	244.04	8.66
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.699$ $\lambda=108.52$	16.83	0.48	129.84	4.87
정상모수 (-1% 변동)	척도모수 (변동 없음)	$\beta=4.65$ $\lambda=120.58$	39.80	1.14	410.57	13.01
	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.65$ $\lambda=119.37$	36.93	1.11	377.96	12.26
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.65$ $\lambda=114.55$	26.17	0.76	236.49	9.49
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.65$ $\lambda=108.52$	15.03	0.42	112.08	4.00
정상모수 (-5% 변동)	척도모수 (변동 없음)	$\beta=4.46$ $\lambda=120.58$	29.50	0.87	264.93	9.09
	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.46$ $\lambda=119.37$	29.20	0.88	232.40	8.04
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.46$ $\lambda=114.55$	19.41	0.58	138.20	4.54
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.46$ $\lambda=108.52$	12.21	0.32	71.82	2.78
정상모수 (-10% 변동)	척도모수 (변동 없음)	$\beta=4.229$ $\lambda=120.58$	20.26	0.54	137.33	5.09
	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.229$ $\lambda=119.37$	19.31	0.54	115.32	3.78
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.229$ $\lambda=114.55$	13.70	0.36	75.29	2.46
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.229$ $\lambda=108.52$	9.25	0.27	44.45	1.58

[표 6] The true model is Weibull, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method

상태	Parameters	Proposed method		Parametric method		
		ARL	Sd	ARL	Sd	
In-control	$\beta=4.699$ $\lambda=120.58$	446.07	14.56	450.84	14.57	
정상모수 (변동 없음)	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.699$ $\lambda=119.37$	422.98	14.41	410.68	12.77
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.699$ $\lambda=114.55$	251.22	8.78	271.65	9.37
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.699$ $\lambda=108.52$	132.19	4.79	133.76	5.08
정상모수 (-1% 변동)	척도모수 (변동 없음)	$\beta=4.65$ $\lambda=120.58$	385.07	12.88	394.42	12.74
	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.65$ $\lambda=119.37$	348.88	11.75	371.24	12.78
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.65$ $\lambda=114.55$	227.67	8.15	226.43	8.27
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.65$ $\lambda=108.52$	111.85	4.06	119.44	4.92
정상모수 (-5% 변동)	척도모수 (변동 없음)	$\beta=4.46$ $\lambda=120.58$	256.58	9.17	249.76	8.76
	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.46$ $\lambda=119.37$	228.09	8.15	226.03	7.60
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.46$ $\lambda=114.55$	133.53	4.69	144.31	5.73
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.46$ $\lambda=108.52$	69.84	2.50	78.36	3.08
정상모수 (-10% 변동)	척도모수 (변동 없음)	$\beta=4.229$ $\lambda=120.58$	126.56	4.42	134.22	4.98
	척도모수 (-1% 변동)	$\beta=4.229$ $\lambda=119.37$	113.38	3.87	127.24	4.89
	척도모수 (-5% 변동)	$\beta=4.229$ $\lambda=114.55$	74.93	2.39	83.40	2.92
	척도모수 (-10% 변동)	$\beta=4.229$ $\lambda=108.52$	43.43	1.46	42.50	1.36

[표 7] The true model is Lognormal, out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method

		Parameters		Random data driven method		Weighted modeling method	
상태				ARL	Sd	ARL	Sd
In-control		$\mu=4.6799$	$\sigma=0.229$	377.11	14.39	421.40	15.07
mean (변동 없음)	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.6799$	$\sigma=0.231$	346.77	13.15	382.32	13.49
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.6799$	$\sigma=0.2404$	195.49	8.02	229.14	8.10
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.6799$	$\sigma=0.2519$	101.95	4.38	124.65	4.46
mean (-1% 변동)	s/dev (변동 없음)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.229$	109.41	4.90	134.07	5.60
	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.231$	94.32	3.66	121.10	4.73
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.2404$	61.62	2.95	71.63	2.62
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.2519$	34.65	1.25	43.23	1.48
mean (-5% 변동)	s/dev (변동 없음)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.229$	3.31	0.160	4.40	0.107
	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.231$	3.09	0.073	4.29	0.098
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.2404$	2.71	0.064	3.56	0.071
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.2519$	2.35	0.047	3.12	0.066
mean (-10% 변동)	s/dev (변동 없음)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.229$	1.035	0.0045	1.30	0.014
	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.231$	1.031	0.0041	1.29	0.013
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.2404$	1.030	0.0043	1.27	0.012
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.2519$	1.024	0.0035	1.25	0.012

[표 8] The true model is Lognormal, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method

		Parameters		Proposed method		Parametric method	
상태				ARL	Sd	ARL	Sd
In-control		$\mu=4.6799$	$\sigma=0.229$	415.41	14.75	497.95	16.57
mean (변동 없음)	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.6799$	$\sigma=0.231$	366.85	13.64	419.53	14.79
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.6799$	$\sigma=0.2404$	214.67	8.84	252.85	9.14
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.6799$	$\sigma=0.2519$	104.43	3.57	136.45	5.24
mean (-1% 변동)	s/dev (변동 없음)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.229$	123.55	5.19	142.23	5.95
	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.231$	107.81	3.82	142.04	6.06
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.2404$	64.39	2.34	75.68	2.81
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.633$	$\sigma=0.2519$	38.72	1.40	47.66	1.61
mean (-5% 변동)	s/dev (변동 없음)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.229$	3.39	0.086	3.59	0.091
	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.231$	3.32	0.076	3.51	0.078
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.2404$	2.91	0.064	3.04	0.069
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.446$	$\sigma=0.2519$	2.36	0.045	2.55	0.051
mean (-10% 변동)	s/dev (변동 없음)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.229$	1.038	0.0047	1.045	0.0052
	s/dev (+1% 변동)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.231$	1.032	0.0042	1.041	0.0046
	s/dev (+5% 변동)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.2404$	1.032	0.0043	1.038	0.0046
	s/dev (+10% 변동)	$\mu=4.212$	$\sigma=0.2519$	1.029	0.0040	1.035	0.0045

[표 9] The true model is Generalized exponential, out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method

상태	Parameters	Random data driven method		Weighted modeling method		
		ARL	Sd	ARL	Sd	
In-control	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.0447$	911.31	24.40	870.67	23.12	
alpha (변동 없음)	lambda (+1% 변동)	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.0451$	818.95	22.37	677.51	19.51
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.0469$	311.44	11.96	280.64	10.26
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.049$	92.82	4.29	88.36	4.21
alpha (-1% 변동)	lambda (변동 없음)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.0447$	910.98	23.92	777.49	21.32
	lambda (+1% 변동)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.0451$	735.68	21.54	672.87	19.58
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.0469$	288.00	11.79	257.48	9.44
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.049$	88.26	4.20	87.89	3.26
alpha (-5% 변동)	lambda (변동 없음)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.0447$	635.52	19.58	587.39	18.10
	lambda (+1% 변동)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.0451$	547.88	17.60	499.01	16.80
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.0469$	197.28	8.25	183.89	7.06
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.049$	57.16	2.20	54.33	1.90
alpha (-10% 변동)	lambda (변동 없음)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.0447$	439.58	15.02	414.59	14.49
	lambda (+1% 변동)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.0451$	350.46	12.53	319.66	12.11
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.0469$	117.00	4.70	102.18	3.38
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.049$	38.07	1.63	36.01	1.25

[표 10] The true model is Generalized exponential, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method

상태	Parameters	Proposed method		Parametric method		
		ARL	Sd	ARL	Sd	
In-control	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.0447$	632.97	19.51	363.14	9.54	
alpha (변동 없음)	lambda (+1% 변동)	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.0451$	547.30	18.34	305.68	8.63
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.0469$	193.82	8.74	128.74	4.90
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=81.08$ $\lambda=0.049$	58.35	2.52	45.31	2.24
alpha (-1% 변동)	lambda (변동 없음)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.0447$	627.38	18.78	346.49	9.08
	lambda (+1% 변동)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.0451$	553.56	18.32	286.05	8.40
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.0469$	164.35	6.98	123.59	4.54
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=80.27$ $\lambda=0.049$	52.11	2.11	37.55	1.51
alpha (-5% 변동)	lambda (변동 없음)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.0447$	444.65	15.03	255.28	7.65
	lambda (+1% 변동)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.0451$	372.23	13.76	209.88	6.62
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.0469$	118.77	4.76	82.59	3.37
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=77.02$ $\lambda=0.049$	35.46	1.36	27.83	1.04
alpha (-10% 변동)	lambda (변동 없음)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.0447$	277.51	10.83	173.91	6.08
	lambda (+1% 변동)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.0451$	222.19	8.77	147.43	5.56
	lambda (+5% 변동)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.0469$	69.06	2.61	48.20	1.83
	lambda (+10% 변동)	$\alpha=72.97$ $\lambda=0.049$	24.48	0.94	19.79	0.80

[표 11] The true model is Inverse-Gaussian, out-of-control ARL1 and sd for the proposed method and the parametric method

		Parameters		Proposed method		Parametric method	
상태				ARL	Sd	ARL	Sd
In-control		$\mu=110.55$	$v=2035.72$	438.74	15.39	506.21	16.54
mean (변동 없음)	Shape (-1% 변동)	$\mu=110.55$	$v=2015.36$	434.46	14.97	460.47	15.59
	Shape (-5% 변동)	$\mu=110.55$	$v=1933.93$	293.85	10.55	324.85	11.70
	Shape (-10% 변동)	$\mu=110.55$	$v=1832.15$	221.25	8.93	250.64	10.08
mean (-1% 변동)	Shape (변동 없음)	$\mu=109.55$	$v=2035.72$	370.57	12.74	412.49	14.44
	Shape (-1% 변동)	$\mu=109.55$	$v=2015.36$	365.76	12.79	392.37	13.61
	Shape (-5% 변동)	$\mu=109.55$	$v=1933.93$	269.56	11.02	273.66	10.36
	Shape (-10% 변동)	$\mu=109.55$	$v=1832.15$	166.27	6.45	198.75	7.78
mean (-5% 변동)	Shape (변동 없음)	$\mu=105.02$	$v=2035.72$	164.31	6.55	196.15	8.06
	Shape (-1% 변동)	$\mu=105.02$	$v=2015.36$	150.46	5.58	171.74	6.93
	Shape (-5% 변동)	$\mu=105.02$	$v=1933.93$	109.64	4.74	131.15	5.30
	Shape (-10% 변동)	$\mu=105.02$	$v=1832.15$	83.48	3.36	84.74	3.62
mean (-10% 변동)	Shape (변동 없음)	$\mu=99.49$	$v=2035.72$	56.86	2.18	63.50	2.72
	Shape (-1% 변동)	$\mu=99.49$	$v=2015.36$	55.45	2.99	57.68	2.11
	Shape (-5% 변동)	$\mu=99.49$	$v=1933.93$	40.56	1.42	47.60	1.77
	Shape (-10% 변동)	$\mu=99.49$	$v=1832.15$	30.99	1.27	34.00	1.46

[표 12] The true model is Inverse-Gaussian, out-of-control ARL1 and sd for the weighted modeling method and the random data driven method

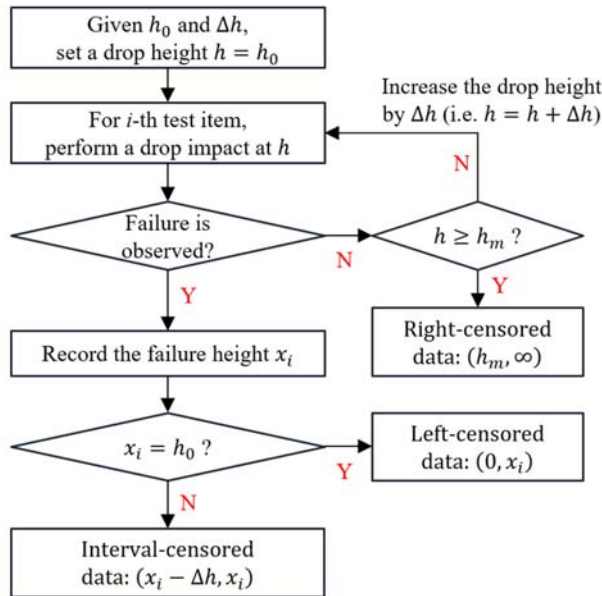
		Parameters		Random data driven method		Weighted modeling method	
상태				ARL	Sd	ARL	Sd
In-control		$\mu=110.55$	$v=2035.72$	387.42	13.52	457.50	14.67
mean (변동 없음)	Shape (-1% 변동)	$\mu=110.55$	$v=2015.36$	363.70	13.19	436.75	14.62
	Shape (-5% 변동)	$\mu=110.55$	$v=1933.93$	282.58	11.19	326.24	12.33
	Shape (-10% 변동)	$\mu=110.55$	$v=1832.15$	179.67	8.17	239.00	9.21
mean (-1% 변동)	Shape (변동 없음)	$\mu=109.55$	$v=2035.72$	337.72	13.00	408.67	14.16
	Shape (-1% 변동)	$\mu=109.55$	$v=2015.36$	332.20	12.96	370.79	13.39
	Shape (-5% 변동)	$\mu=109.55$	$v=1933.93$	233.36	9.45	281.15	9.91
	Shape (-10% 변동)	$\mu=109.55$	$v=1832.15$	152.25	6.29	197.82	7.51
mean (-5% 변동)	Shape (변동 없음)	$\mu=105.02$	$v=2035.72$	151.81	7.08	199.17	8.45
	Shape (-1% 변동)	$\mu=105.02$	$v=2015.36$	135.07	5.67	175.10	6.70
	Shape (-5% 변동)	$\mu=105.02$	$v=1933.93$	108.83	4.83	139.88	5.79
	Shape (-10% 변동)	$\mu=105.02$	$v=1832.15$	68.42	3.56	94.88	3.60
mean (-10% 변동)	Shape (변동 없음)	$\mu=99.49$	$v=2035.72$	49.34	2.48	70.32	2.53
	Shape (-1% 변동)	$\mu=99.49$	$v=2015.36$	48.18	1.79	66.35	2.53
	Shape (-5% 변동)	$\mu=99.49$	$v=1933.93$	38.80	1.86	53.83	2.21
	Shape (-10% 변동)	$\mu=99.49$	$v=1832.15$	25.83	0.83	37.96	1.42

제 2절 공정 적용사례

본 연구에서는 파손강도와 같이 낮은 분위수의 관리가 필요한 디스플레이 모듈의 공정 적용사례 및 탄소섬유의 공정 적용사례를 소개하였다.

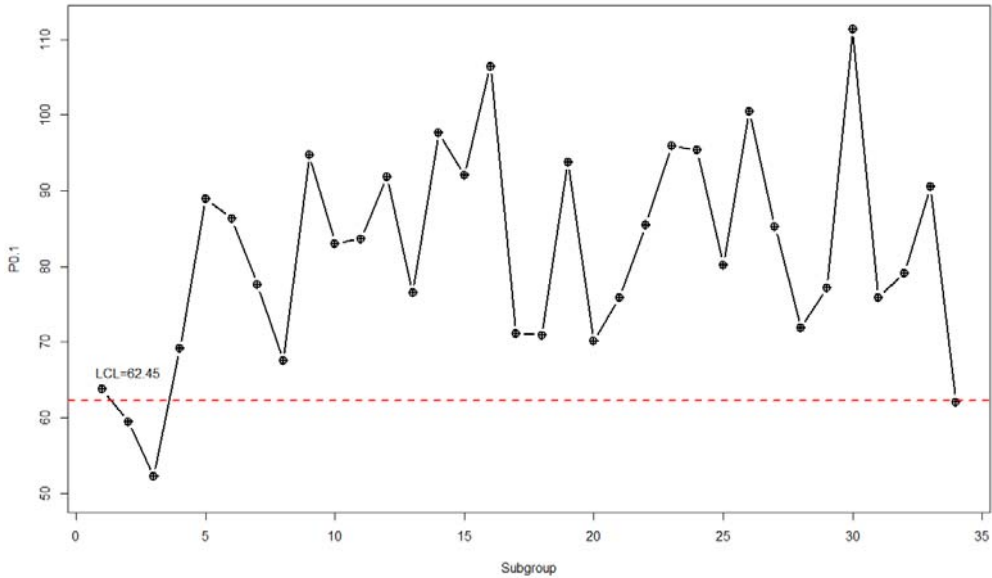
디스플레이 모듈 사례

제품의 충격강도를 평가하기 위해 충격시험을 실시하며, 먼저 초기낙하높이와 낙하높이간격을 정한 다음 i 번째 item에 대한 낙하충격 시험을 실시한다. 이때 파손이 확인되면 파손높이를 측정한다. 파손높이가 초기높이와 같은 경우 좌측관측중단 자료로 확인되고 같지 않은 경우에 구간 관측중단 자료로 확인된다. i 번째 반면에 item에 대한 낙하충격 시험을 실시하였을 때 파손이 확인되지 않으면 우측중단 자료로 확인된다. 낙하충격시험 절차는 [그림 5]에 나와 있다(Kim, Kwon et al. 2020). 여기서 h_0 - 초기낙하높이, h_m -최대낙하높이, Δh -낙하높이간격, x_i -낙하충격데이터이다.



[그림 5] 낙하충격시험 절차

국내 A사 스마트폰 디스플레이 모듈 대상으로 완성품 상태에서 자유낙하 시험기에 장착하여 50cm부터 10cm 간격으로 파손될 때까지 평가하였다. 총 34 lot에서 lot당 7-11개의 평가 데이터가 있으며, 총 327 개의 평가 데이터를 고려하였다. Lot 1~4 및 34를 제외한 lot(227개의 평가 데이터)를 in-control 상태로 선정하였다. 관리상태 29개의 부분군으로부터 관리하한선을 계산하였으며, 관심 분위수는 $p=0.1$, 오경보율(FAR)은 $\alpha=0.0027$ 이다. 디스플레이 모듈 평가 데이터를 가지고 관리도를 그렸다. [그림 6]에서 보는 바와 같이 공정상태를 비교적 잘 탐지할 수 있다.



[그림 6] 디스플레이 모듈의 데이터를 기반으로 한 부트스트랩 관리도

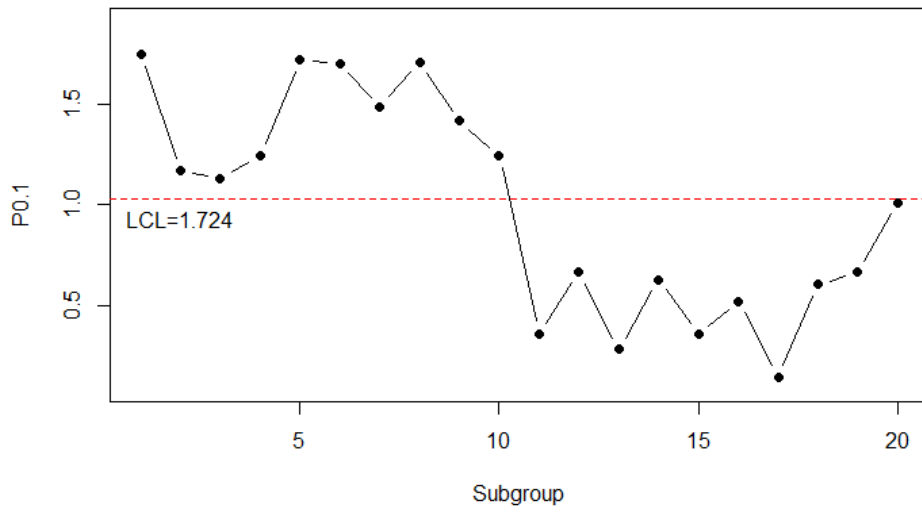
탄소섬유(Carbon fiber) 강도 데이터 사례

(Padgett and Spurrier 1990)등이 보고하고, (Nichols and Padgett 2006) 및 (Chiang, Lio et al. 2018)등이 추가로 연구한 탄소섬유 (carbon fiber) 데이터 세트를 제안 방법을 적용하는데 사용하였다. [표 13]에서 보는 바와 같이 탄소섬유의 파손강도 데이터 세트는 두 가지 파트(in-control 및 out of control)에서 구성된다. 첫번째 10개의 부분군을 (크기가 n=5인 m=10 부분군)관리상태로 가정할 수 있으며, 마지막 10개의 부분군을 관리이상상태로 가정한다.

[표 13] The breaking strength of carbon fiber data set

Subgroup	Observations				
1	3.70	2.74	2.73	2.50	3.60
2	3.11	3.27	2.87	1.47	3.11
3	4.42	2.41	3.19	3.22	1.69
4	3.28	3.09	1.84	3.15	4.90
5	3.75	2.43	2.95	2.97	3.39
6	2.96	2.53	2.67	2.93	3.22
7	3.39	2.81	4.20	3.33	2.55
8	3.31	3.31	2.85	2.56	3.56
9	3.15	2.35	2.55	2.59	2.38
10	2.81	2.77	2.17	2.83	1.92
11	1.41	3.68	2.97	1.36	0.98
12	2.76	4.91	3.68	1.84	1.59
13	3.19	1.57	0.81	5.56	1.73
14	1.59	2.00	1.22	1.12	1.71
15	2.17	1.17	5.08	2.48	1.18
16	3.51	2.17	1.69	1.25	4.38
17	1.84	0.39	3.68	2.48	0.85
18	1.61	2.79	4.70	2.03	1.80
19	1.57	1.08	2.03	1.61	2.12
20	1.89	2.88	2.82	2.05	3.65

[표 13]에 나와 있는 첫 10개의 부분군을 사용하여 관리하한선을 계산하였다. 탄소섬유의 파괴강도(breaking strength)와 같은 낮은 분위수($p=0.1$)를 모니터링하기 위해서는 단측관리도를 사용한다. 오경보율(FAR)을 $\alpha=0.0027$ 으로 설정하였으며 LCL=1.724이다. 그 다음으로 모든 부분군을 적용하여 관리도를 그렸다. [그림 7]에서 보는 바와 같이 제안 방법은 공정 상태를 잘 감시할 수 있다.



[그림 7] 탄소섬유의 파손강도 데이터를 기반으로 한 부트스트랩 관리도

제 5장 결론 및 향후 연구

본 연구에서는 좌측, 우측, 구간-관측중단의 데이터를 가지며 참 분포에 대한 모형설정 오류(model misspecification)의 위험이 존재할 때, 이를 반영한 부트스트랩(bootstrap) 기반의 분위수 관리도를 제안하였다. 관리특성치의 참 분포가 일반화지수, 와이블, 대수정규, 역가우시안 분포를 가질 수 있을 때, 여러종류의 관측중단을 고려한 일반화 우도함수를 기반으로 모형설정 오류에 강건한 부트스트랩 관리한계 설정방법을 제안하였다. 제안된 방법의 강건성 및 안정성을 평가하기 위해 다양한 분위수, 오경보율(False alarm rate; FAR) 및 샘플수에 대한 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 기존연구의 방법과 성능을 비교하였다. 그 결과, ARL0에 대해서는 모든 경우에 대해서 제안 방법이 기존에 제안된 강건한 부트스트랩 분위수 관리도보다 우수한 결과를 나타내었으며, ARL1에 대해서는 가장 우수하거나 대등한 수준으로 확인되었다. 기존 제안 방법들은 모형설정 오류를 제한적으로 고려하거나, 관리상태의 판단을 확률적으로 함으로써 강건성을 확보하는 대신 의사결정의 불확실성을 높이는 단점이 있었다. 하지만 제안 방법은 보다 많은 후보분포를 가정하면서도 안정적인 관리상태의 판단을 할 수 있다는 장점이 있다.

마지막으로 파손강도와 같이 낮은 분위수의 관리가 필요한 디스플레이 모듈의 공정 적용사례 및 탄소섬유 공정 적용사례를 소개하였다. 관리상태 평균 런 길이 (ARL0) 및 관리이상상태 평균 런 길이 (ARL1)과 표준편차(SD) 측면에서 비교해봤을 때 제안 방법은 공정 모니터링에 효과적임을 파악할 수 있었다. 또한 공정 적용사례를 통하여 관리대상의 값의 스케일이 큰 경우 뿐만 아니라 스케일이 작은 경우에도 정확하다는 것을 알 수 있었다. 향후 연구 계획으로는 다양한 표본 크기 및 또 다른 후보 분포를 고려하여 시뮬레이션 연구를 수행할 필요가 있다고 판단된다. 아울러 검출력을 고려한 경제적 관리도 설계방법을 개발하고자 한다.

참고 문헌

Arif, O. H. (2000). Statistical process control by quantile approach Ph.D., Sheffield Hallam University (United Kingdom).

Chiang, J.-Y., N. Jiang, T. N. Brown, T.-R. Tsai and Y. L. Lio (2017). "Control charts for generalized exponential distribution percentiles." Communications in Statistics - Simulation and Computation **46**(10): 7827-7843.

Chiang, J.-Y., Y. L. Lio, H. K. T. Ng, T.-R. Tsai and T. Li (2018). "Robust bootstrap control charts for percentiles based on model selection approaches." Computers & Industrial Engineering **123**: 119-133.

Jeong, H.-C., J.-C. Lee and M.-S. Jhun (2012). "A study for obtaining weights in pairwise comparison matrix in AHP." The Korean Journal of Applied Statistics **25**(3): 531-541.

Jones, L. A. and W. H. Woodall (1998). "The Performance of Bootstrap Control Charts." Journal of Quality Technology **30**(4): 362-375.

Kim, M. and S. J. Bae (2014). "Drop fragility of the display of a smart mobile phone: weakest link failure or cumulative shock failure" IIE Transactions **46**(10): 1079-1092.

Kim, S.-J., D. Kwon and S. J. Bae (2020). "A drop-impact reliability assessment of mobile display modules using a statistical modeling approach." Journal of Mechanical Science and Technology **34**(10): 3945-3955.

Lio, Y. L. and C. Park (2010). "A bootstrap control chart for inverse Gaussian percentiles." Journal of Statistical Computation and Simulation **80**(3): 287-299.

Liu, R. Y. and J. Tang (1996). "Control Charts for Dependent and Independent Measurements Based on Bootstrap Methods." Journal of the American Statistical Association **91**(436): 1694-1700.

Nichols, M. D. and W. J. Padgett (2006). "A Bootstrap Control Chart for Weibull Percentiles." Quality and Reliability Engineering International **22**(2): 141-151.

Padgett, W. J. and J. D. Spurrier (1990). "Shewhart-Type Charts for Percentiles of Strength Distributions." Journal of Quality Technology **22**(4): 283-288.

김성준, 윤길원, 박정열 and 방선호 (2018). "관측중단 하에서의 부트스트랩 와이블 분위수 관리도의 개발." 한국신뢰성학회 학술대회논문집: 54-54.

송서일, 조영찬 and 이만웅 (1999). 부트스트랩 방법을 이용한 xbar 관리도의 수행도

평가, 대한산업공학회.

이광진 (2004). "AHP에서 왜대칭행렬의 고유분해를 이용한 중요도 추정법의 제안." **17(1)**: 119-134.

이주원, 김민지 and 이재헌 (2018). "자기출발 EWMA 와 X 관리도의 관리상태 성능." 한국데이터정보과학회지 29(4): 851-860.

함형범 (2004). "AHP의 수학적 배경과 수학교육 목적의 실천." **17(2)**: 21-32.