



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

2022년 2월
석사학위논문

UAV의 자세 제어를 위한 개선된 슬라이딩 모드 제어

조선대학교 대학원

항공우주공학과

장 석 호

UAV의 자세 제어를 위한 개선된 슬라이딩 모드 제어

Improved Sliding Mode Control for UAVs Attitude Control

2022년 2월 25일

조선대학교 대학원

항공우주공학과

장 석 호

UAV의 자세 제어를 위한 개선된 슬라이딩 모드 제어

지도교수 이 현 재

이 논문을 공학석사학위 신청 논문으로 제출함

2021년 10월

조선대학교 대학원

항공우주공학과

장 석 호

장석호의 석사학위논문을 인준함

위원장 조선대학교 교수 김 태 규 (인)

위 원 조선대학교 교수 이 현 재 (인)

위 원 조선대학교 교수 정 성 훈 (인)

2021년 12월

조선대학교 대학원

목차

I. 서론	1
II. UAV 모델링	4
1.좌표계	4
2.비행동역학	5
III.기본적인 슬라이딩 모드 제어	10
1.기본적인 슬라이딩 모드 제어	11
2.안정성 분석	13
3.기본적인 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션	14
IV.성능 향상을 위한 수정된 슬라이딩 모드 제어	18
1.수정된 도달 법칙	18
1) 수정된 도달 법칙	18
2) 수정된 도달 법칙을 활용한 시뮬레이션	20
2.수정된 슬라이딩 변수	22
1) 터미널 슬라이딩 모드 제어	23
2) 터미널 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션	25
3) 빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어	27
4) 빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션	27
V. 채터링 문제	30

1.슈퍼 트위스팅 알고리즘	30
1) 제어기 설계	30
2) 안정성 분석	31
3) 시뮬레이션	34
VI.시스템의 제약 조건	36
1.제어 입력 제한을 고려한 제어 기법	36
1) 모델 예측 제어	36
2) 모델 예측 슬라이딩 모드 제어	40
3) 모델 예측 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션	42
2.각속도 제한을 고려한 제어 기법	45
1) 제한 슬라이딩 모드 제어	48
2) 안정성 분석	50
3) 시뮬레이션	52
VII결론	55
[참고문헌]	57

ABSTRACT

Improved Sliding Mode Control for UAVs Attitude Control

Jang, Seok-ho

Advisor : Prof. HENZEH Leeghim, Ph.D.

Department of Aerospace Engineering,

Graduate School of Chosun University

This thesis introduces an improved sliding mode control technique for attitude control of UAVs with a quadrotor structure. The sliding mode control is a non-linear control technique that is robust against external disturbances and model uncertainty. To design a controller for UAVs, we define sliding variables and reaching laws and derive control inputs. To analyze whether the designed controller is stable in the presence of external disturbances, the stability is confirmed using the Lyapunov theory, and the control performance is verified through computer simulation.

Sliding mode control has two problems, such as chattering, which is a high-frequency oscillation, and it takes an infinite amount of time for the state to converge to the target. We discuss the improved reaching law to reduce chattering, and verify that chattering is reduced through simulation. To solve the second problem, we introduce terminal sliding mode control and fast terminal sliding mode control that guarantee a finite convergence time and verify their performance through simulation.

The improved reaching laws are effective in reducing chattering but have the disadvantage that robustness is not guaranteed. We introduce a super twisting algorithm that can reduce chattering while ensuring robustness. This control technique is one of the second-order sliding mode controls, and the control input is obtained by differentiating

the sliding variable twice. The past algorithm guarantees only the stability of a model with one state variable, but in this work, the stability of a model with multiple state variables was confirmed. The designed controller has verified its control performance through simulation.

As UAVs perform various and complex missions, they can sometimes face various constraints. The mission can be performed in an environment where there is a limit on the size of the control input due to the physical limit of the actuator, or the angular rate limit due to ground shooting, transportation of important objects, etc. In a constrained environment, it is difficult to obtain optimal control performance with the existing control technique. Therefore, a control method considering constraints is required, and in this paper, a sliding mode-based control method is introduced. First, we describe model predictive sliding mode control for UAVs attitude control with a control input limit. This technique is a combination of model predictive control and sliding mode control that predicts the future state and reflects it in the current state. Next, we introduce constrained sliding mode control for the attitude control of UAVs considering the angular rate limit. This technique defines a new sliding variable with two equilibrium points and has a variable structure that switches according to the magnitude of the angular rate. Finally, Analyze the stability of the control technique and verify its performance through simulation.

I. 서론

Unmanned Aerial Vehicle (UAV)의 종류에는 크게 회전익 (Rotary-wing)과 고정익 (Fixed-wing)으로 구분할 수 있으며, 그 중 회전익은 로터의 개수에 따라 쿼드로터 (Quad-rotor), 헥사 로터 (Hexa-rotor), 옥타로터 (octa-rotor) 등으로 자세하게 분류할 수 있다. 그중 쿼드로터는 4개의 로터를 통해 추력을 얻고 비행을 하는 UAV로, 구조가 간단하고 제어하기 쉽다는 장점이 있으며, 정지 비행 (Hovering)이 가능하기 때문에 군사, 레저, 수송, 방재 등 다양하고 복잡한 임무에 활용되고 있다[1-3].

UAV는 실내, 실외에서 모두 비행이 가능하며, 특히 실외에서 많은 임무를 수행한다. 실외는 바람과 같은 외부 교란이 나타날 수 있으며, 화물 수송 또는 UAV의 정확하지 않은 설계로 인해 모델 불확실성이 나타날 수 있다. 이 두 가지 난관은 쿼드로터를 운용함에 있어서 큰 문제점이 되며, UAV의 비행 안정성을 높일 수 있는 여러 연구가 진행되었다[4, 5].

UAV의 비행안정성을 높이는 방법 중 하나로 외부 교란과 모델 불확실성에 강인한 제어 기법을 활용하는 것이다. 이러한 기법에는 슬라이딩 모드 제어 (Sliding Mode Control), 신경망 제어 (Neural Network Control), 백스테핑 제어 (Backstepping Control) 등이 있으며[6-8], 그중 슬라이딩 모드 제어는 시스템의 상태 변수를 활용하여 슬라이딩면을 정의하고, 이 면을 통해서 목표 상태로 추종하도록 제어하는 기법이다. 슬라이딩 모드 제어에는 두 가지 문제점이 있는데, 첫 번째는 강인성을 높이는 과정에서 나타나는 불필요한 고주파의 떨림 현상인 채터링이 나타난다는 것이고, 두 번째는 상태가 목표로 수렴하는 데 무한한 시간이 걸린다는 것이다. 이러한 문제는 슬라이딩 모드 제어의 성능 저하로 이어질 수 있으며, 이를 개선하기 위한 연구가 진행되었다. 채터링을 감소시키기 위해 원인이 되는 도달 법칙을 개선하여 사용하는 방법이 제안되었고[9], 유한 시간 내의 수렴성을 보장하기 위해 개선된 슬라이딩면을 사용하는 터미널 슬라이딩 모드 제어, 빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어 등이 제안되었다[10, 11].

개선된 도달 법칙을 사용하면 채터링을 효과적으로 감소시킬 수 있지만, 외란 등에 대한 강인성이 보장되지 않는다는 문제가 있다. 따라서 슬라이딩 모드 제어의 장점인 강인성을 보장

하면서 채터링을 감소시키기 위해 슈퍼 트위스팅 알고리즘이 연구되었다[12, 13]. 이 제어 기법은 슬라이딩 변수를 두 번 미분하여 제어 입력을 유도하는 2차 슬라이딩 모드 제어의 한 종류이다. 기존의 슈퍼 트위스팅 알고리즘은 상태 변수가 한 개일 때의 안정성만을 보장한다는 것이 증명되었지만, 상태 변수가 여러 개일 때의 안정성은 증명되지 않았다. 본 논문에서는 상태 변수가 여러 개일 때 슈퍼 트위스팅의 알고리즘의 안정성을 증명하였다.

UAV는 다양한 환경에서 임무를 수행할 수 있으며, 때로는 제약된 상황에서 임무를 수행해야 할 수 있다. 예를 들어 구동기가 최대로 발생시킬 수 있는 물리적인 한계보다 큰 제어 입력은 정상적으로 수행할 수 없으며, 영상 촬영 또는 화물 수송으로 인해 급격한 기동이 제한될 수 있다. 급격한 기동의 제한은 최대 각속도 제한으로 생각할 수 있다. 기존의 제어 기법은 제한된 환경에서 UAV가 성공적으로 임무를 수행하기 힘들기 때문에, 제약 조건을 고려한 새로운 제어 기법이 요구된다. 먼저, 제어 입력 제한을 고려하여 제어 입력을 얻기 위해 모델 예측 제어와 슬라이딩 모드 제어를 결합한 모델 예측 슬라이딩 모드 제어 기법이 제안되었다[14, 15]. 모델 예측 제어는 재귀적인 방법을 통해 미래의 상태를 예측하고 현재의 상태에 그 정보를 반영하는 기법이다. 하지만 이 기법은 선형 시스템에 대한 제어 기법이기 때문에 실제 비선형 시스템과 차이가 날 수 있으며, 이것은 모델 불확실성으로 생각할 수 있다. 불확실성을 보상하기 위해 슬라이딩 모드 제어를 적용시킨 제어 기법을 모델 예측 슬라이딩 모드 제어이며, 제어 입력 제한이 존재하는 환경에서 효과적인 제어 입력을 생성할 수 있다. 한편, 각속도 제한을 고려하여 제어 입력을 구하기 위해 새로운 슬라이딩면을 정의한 제한 슬라이딩 모드 제어를 제안한다. 이 기법은 두 개의 평형점을 가지는 새로운 슬라이딩면을 정의한다. 각 평형점은 각속도를 최대 각속도로 수렴하는 구간과 각 상태 변수가 목표 상태로 도달하는 구간으로 나뉘어지며, 상태에 따라 각 구간이 스위칭된다. 평형점이 두 개이기 때문에 각 평형점에 대한 안정성이 요구되며, 리아푸노프 이론을 통해 제어 기법의 안정성을 증명한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저, 2장에서 UAV를 표현하기 위한 좌표계와 뉴턴 오일러 방정식을 사용하여 나타낸 비행동역학에 대해 소개한다. 3장에서는 기본적인 슬라이딩 모드 제어에 대한 전체적인 개념과 안정성을 분석하고, 4장에서는 기본적인 기법의 문제를 해결하기 위한 수정된 도달 법칙과 수정된 슬라이딩 변수에 대해 설명하고 제어기를 설계한다. 5장에서는 슬라이딩 모드 제어의 단점인 채터링을 감소시키면서 외부 교란 등에 대한 강인성을

보장하는 슈퍼 트위스팅 알고리즘에 대해 설명한다. 6장에서 UAV의 임무 수행을 위해 맞닥뜨릴 수 있는 제약 조건을 고려한다. 제약 조건에는 제어 입력 제한, 각속도 제한 등이 있을 수 있으며, 각 제약 조건을 고려하기 위해 슬라이딩 모드 제어를 응용하여 설계된 제어 기법에 대해 설명한다. 2장을 제외한 각 장은 설명한 제어 기법을 활용하여 UAV의 자세 제어를 설계하고 시뮬레이션을 통하여 제어 성능을 검증한다. 마지막으로 7장은 본 논문에 대한 결론으로 마무리한다.

II. UAV 모델링

1. 좌표계

UAV의 동작을 이해하기 위해서는 두 개의 기준 좌표계가 필요하다. 좌표계는 각각 관성 좌표계 (Inertial frame)와 동체 좌표계 (Body frame)으로 구성된다. 관성 좌표계는 뉴턴의 제1 법칙이 성립하는 좌표계를 말하며 이 좌표계에서는 아무런 힘도 작용하지 않는 물체는 정지해 있거나 등속 직선 운동을 한다. 동체 좌표계는 UAV의 질량 중심에 고정된 좌표계를 뜻하며, UAV가 회전할 때 마다 좌표계가 변하게 된다. UAV의 다양한 구조 중 본 논문에서는 쿼드콥터 형태를 선택하였으며, 이때 좌표계는 Fig. (1)와 같다.

UAV의 운동은 6 자유도 (Six degrees of freedom)를 통해 설명할 수 있으며 위치 ξ 는 관성

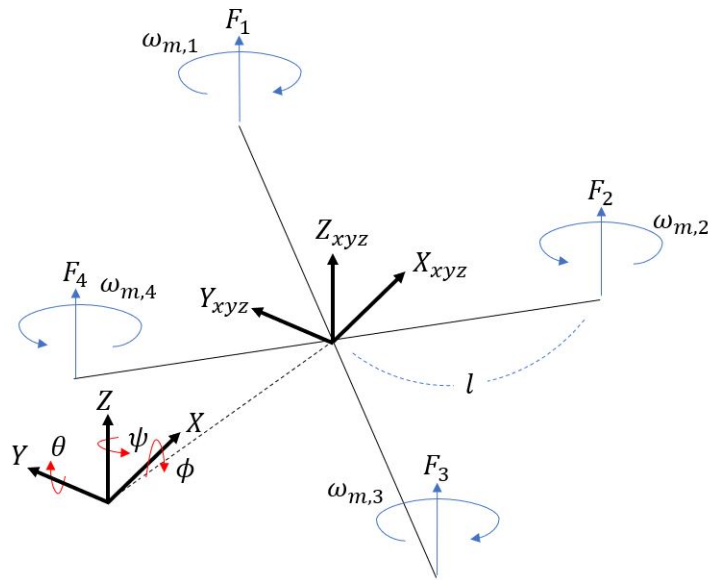


Figure. 1 Coordinate system of UAV

좌표계의 각 축으로, 자세 η 는 관성 좌표계에서 각 축에 대한 오일러 각 (Euler angle)로 정의한다. X 축을 중심으로 회전하는 각을 roll이라고 하며, ϕ 로 표현한다. Y 축을 중심으로 회전하는 각을 pitch, Z 축을 중심으로 회전하는 각을 yaw라고 하며, 각각 θ, ψ 로 표현한다. UAV의 속도와 각속도는 동체 좌표계에서 각각 ν_B, ω 로 정의한다[16].

$$\xi = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\nu_B = \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \end{bmatrix}, \omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. 비행동역학

UAV는 비행 동작을 이해하기 위해서는 동체 좌표계와 관성 좌표계 사이의 변환을 명확히 정의할 필요가 있다. 관성 좌표계에서 동체 좌표계로 변환하기 위해 좌표변환행렬 (Direction Cosine Matrix, DCM, R_E^B)를 활용한다. DCM은 yaw, pitch, roll 순서로 회전한 $Z - Y - X$ 오일러각으로 정의하며, Fig. (2)와 같이 표현할 수 있다[17]. 각 축을 중심으로 회전한 좌표계는

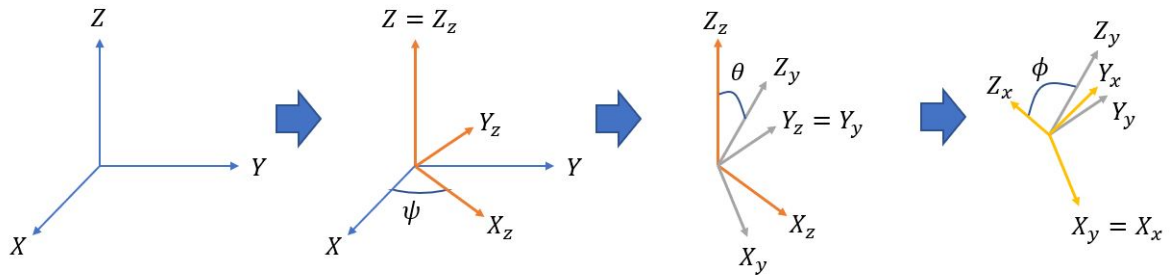


Figure. 2 X-Y-Z Euler angle conversion

회전 행렬을 통해 표현할 수 있다. 먼저, Z 축에 대해 ψ 만큼 회전한 회전 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} X_z \\ Y_z \\ Z_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Y 축에 대해 θ 만큼 회전한 회전 행렬은

$$\begin{bmatrix} X_y \\ Y_y \\ Z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_z \\ Y_z \\ Z_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

마지막으로 Z 축에 대해 ϕ 만큼 회전한 회전 행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X_x \\ Y_x \\ Z_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_y \\ Y_y \\ Z_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

$Z - Y - X$ 오일러각은 Z 축, Y 축, X 축의 순서대로 각 축의 중심에서 회전한 각을 말하며, 좌표변환행렬 또한 해당하는 행렬을 순서대로 곱해서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{zyx} \\ Y_{zyx} \\ Z_{zyx} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\phi \\ s_\theta c_\psi s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\theta c_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ s_\theta c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\theta c_\psi c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \\ &= R_E^B \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

여기서, s_x 와 c_x 는 각각 $\sin x$, $\cos x$ 을 뜻한다. 좌표변환행렬은 정규직교행렬 (Orthonormal matrix)이므로 $R^T = R^{-1}$ 이 성립한다.

좌표변환행렬을 통해 관성 좌표계에서의 속도와 동체 좌표계에서의 속도에 대한 관계식을 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} &= (R_E^B)^T \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\theta c_\psi s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\theta c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi \\ c_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\theta c_\psi c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\phi & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \end{bmatrix} \quad (7)
 \end{aligned}$$

관성 좌표계에서 오일러 각의 각속도와 동체 좌표계의 각속도에 대한 관계식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

쿼드로터 형태의 UAV는 4개의 로터에서 발생하는 추력을 통해 비행한다. Fig. (1)에서 보인 것과 같이 각 로터의 각속도는 $\omega_{m,i}$ 로 표현하며, 각 로터에서 발생한 추력 F_i 과 토크 τ_i 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_i = k\omega_{m,i}^2 \quad (9)$$

$$\tau_i = b\omega_{m,i}^2 + J_m\dot{\omega}_{m,i} \quad (10)$$

여기서, k 와 b 는 각각 양력 상수, 항력 상수이며, J_m 은 로터의 관성모멘트이다. 토크에 대한 식에서 로터의 각가속도 $\dot{\omega}_{m,i}$ 의 효과가 작아서 무시할 수 있다고 간주하여 생략한다.

UAV의 총 추력 T 은 각 로터에서 발생한 추력의 합으로 계산된다.

$$T = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = k \sum_{i=1}^4 \omega_{m,i}^2 \quad (11)$$

본 논문에서 X형의 쿼드로터를 선택하였으며, Z축을 기준으로 45도 회전한 형태이다. roll과 pitch 운동은 두 쌍의 추력 차이를 통해 동작하며, yaw 운동은 동일한 방향으로 회전하는 두 쌍의 로터의 추력 차이를 통해 동작한다.

$$\tau_\phi = l \frac{\sqrt{2}}{2} (F_1 - F_2 - F_3 + F_4) \quad (12)$$

$$\tau_\theta = l \frac{\sqrt{2}}{2} (-F_1 - F_2 + F_3 + F_4) \quad (13)$$

$$\tau_\psi = b(F_1 - F_2 + F_3 - F_4) \quad (14)$$

여기서, l 은 UAV의 무게 중심으로부터 로터의 회전축까지의 거리이다. 위의 토크와 추력에 대한 식을 행렬 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(\omega_{m,1}^2 + \omega_{m,2}^2 + \omega_{m,3}^2 + \omega_{m,4}^2) \\ l \frac{\sqrt{2}}{2} k(\omega_{m,1}^2 - \omega_{m,2}^2 - \omega_{m,3}^2 + \omega_{m,4}^2) \\ l \frac{\sqrt{2}}{2} k(\omega_{m,1}^2 + \omega_{m,2}^2 - \omega_{m,3}^2 - \omega_{m,4}^2) \\ b(\omega_{m,1}^2 - \omega_{m,2}^2 + \omega_{m,3}^2 - \omega_{m,4}^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k & k & k & k \\ l \frac{\sqrt{2}}{2} k & -l \frac{\sqrt{2}}{2} k & -l \frac{\sqrt{2}}{2} k & l \frac{\sqrt{2}}{2} k \\ l \frac{\sqrt{2}}{2} k & l \frac{\sqrt{2}}{2} k & -l \frac{\sqrt{2}}{2} k & -l \frac{\sqrt{2}}{2} k \\ b & -b & b & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{m,1}^2 \\ \omega_{m,2}^2 \\ \omega_{m,3}^2 \\ \omega_{m,4}^2 \end{bmatrix} \quad (15) \end{aligned}$$

UAV의 위치와 자세에 대한 운동방정식은 뉴턴-오일러 방정식 (Newton-Euler equation)으로 설명할 수 있다. 동체 좌표계에서 질량 가속도에 대한 힘 $m\dot{\nu}_B$ 과 원심력 $\omega^\times m\nu_B$ 은 중력

$(R_E^B)^T \mathbf{g}$ 과 UAV의 추력 T 과 동일하다. 이를 가속도 $\dot{\mathbf{v}}_B$ 에 대한 식으로 나타내면

$$\dot{\mathbf{v}}_B = (R_E^B)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{v}_B + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, m 과 g 는 각각 UAV의 질량과 중력가속도이다. 동체 좌표계에서 관성 각가속도 $J\dot{\boldsymbol{\omega}}$, 구심력 $\boldsymbol{\omega}^\times J\boldsymbol{\omega}$ 의 합은 토크 \mathbf{u} 와 동일하다. 이를 각가속도에 대한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}^\times J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \quad (17)$$

여기서,

$$J = \text{diag}(J_x, J_y, J_z) \quad (18)$$

$$\mathbf{u} = [u_2, u_3, u_4]^T \quad (19)$$

J_x , J_y 와 J_z 는 각 축 방향에 대한 UAV의 관성모멘트이다.

III. 기본적인 슬라이딩 모드 제어

슬라이딩 모드 제어 (Sliding Mode Control, SMC) 기법은 비선형 제어 기법 중 하나로 모델 불확실성과 외부 교란에 강인한 특성이 있는 제어 기법이다. SMC는 두가지 동작을 통해 제어가 진행되는데, 첫 번째 동작은 제어하고자 하는 변수가 슬라이딩면 (Sliding surface)으로 향하는 단계 (Reaching phase)이며, 두 번째는 면 위로 올라간 변수가 목표 값을 향해 흐르는 단계 (Sliding phase)이다. 일반적으로 제어하고자 하는 변수는 현재 상태와 목표 상태의 오차로 정의되며, 오차를 0으로 만드는 것을 목표로 하도록 제어기를 설계한다. 설명한 SMC의 동작은 Fig. (3)와 같이 표현할 수 있다[18].

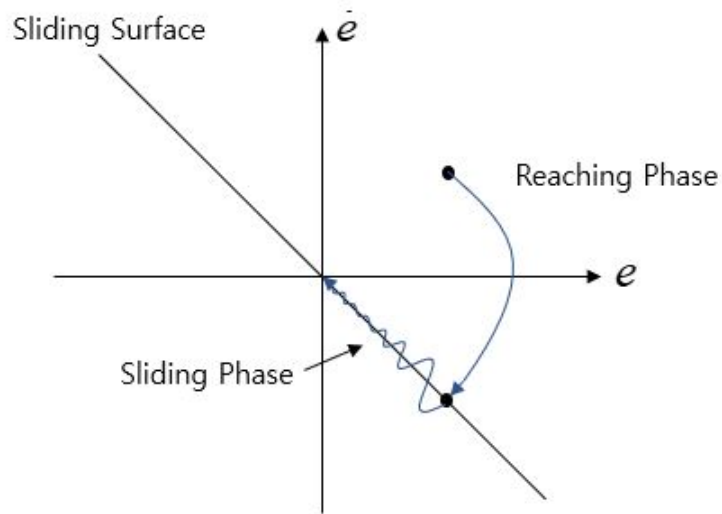


Figure. 3 Phase portrait of Sliding Mode Control

1. 기본적인 슬라이딩 모드 제어

일반적인 슬라이딩 변수 (Sliding variable)는 제어하고자 하는 시스템의 현재 상태 x 와 목표 상태 x_d 에 대한 오차와 오차의 변화율의 합으로 정의되며, 슬라이딩 변수가 0인 구간을 슬라이딩면이라고 한다[19].

$$s = \dot{e} + ae = 0 \quad (20)$$

$$e = x - x_d \quad (21)$$

여기서 a 는 0보다 큰 값을 가지며, 사용자가 설정하는 게인 (Gain)이다. SMC는 슬라이딩 변수 s 를 0을 만드는 것이 목표가 되며, s 가 0이 되고 충분한 시간이 지나면 오차 e 와 오차의 변화율 \dot{e} 은 0이 된다. 이와 관련한 증명은 Lemma.1에서 보인다.

Lemma 1 슬라이딩 변수 $s(t) = 0$ 을 만족하고 충분한 시간이 지나면, 변수 e 와 \dot{e} 는 0으로 수렴한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0 \quad (23)$$

proof 1 슬라이딩 변수가 0이 된다고 가정하면, 즉 $s = 0$ 이 되면 식 (20)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{e}(t) = -ae(t) \quad (24)$$

위의 식은 지수함수의 미분형태이며, 적분하게 되면 다음과 같다.

$$e(t) = \exp(-at) \quad (25)$$

따라서, 충분한 t 만큼의 시간이 지나고, 오차 e 는 0으로 수렴함을 알 수 있으며, 식 (24)에

의해서 속도 오차 \dot{e} 또한 0으로 수렴하는 것을 알 수 있다.

도달 법칙은 슬라이딩 변수를 0으로 보내기 위해 사용되며, SMC의 장점인 불확실성과 외란에 대한 강인성을 보장하는 기법으로 가장 간단한 형태의 도달 법칙은 다음과 같다.

$$\dot{s} = -k \operatorname{sign}(s) \quad (26)$$

여기서, k 는 0보다 큰 계인값이며, $\operatorname{sign}(s)$ 는 s 의 크기에 따라 1, 0과 -1의 값을 출력하는 부호 함수 (Signum function)이다. 부호함수를 통해 s 의 값이 아무리 작더라도 도달 법칙이 남게 되며, 이 값을 통해 사용자가 모르는 외란 등에 대해 보상하는 힘을 가지게 된다.

앞서 설명한 슬라이딩면과 도달 법칙을 활용하여 UAV의 자세를 제어하기 위한 제어 입력을 유도하는 과정을 소개한다. 먼저 UAV의 자세와 자세 명령에 대한 오차를 이용해 슬라이딩 변수를 정의한다.

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d \quad (27)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + a_{smc}\mathbf{e} \quad (28)$$

여기서, a_{smc} 는 0보다 큰 계인이다. 슬라이딩 변수를 시간에 대해 미분하고 식 (17)의 UAV의 자세에 대한 운동방정식을 대입한다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \ddot{\mathbf{e}} + a_{smc}\dot{\mathbf{e}} \\ &= \ddot{\boldsymbol{\eta}} - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d + a_{smc}\dot{\mathbf{e}} \\ &= \mathbf{J}^{-1}(-\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}) - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d + a_{smc}\dot{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (29)$$

제어 입력 \mathbf{u} 에 대해 정리하면

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}(\ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - a_{smc}\dot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{s}}) \quad (30)$$

식 (26)의 도달 법칙을 대입하면 UAV의 자세를 제어하기 위한 제어 입력을 다음과 같이 유도할

수 있다.

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}^\times J \boldsymbol{\omega} + J (\ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - a_{smc} \dot{\mathbf{e}} - k \operatorname{sgn}(\mathbf{s})) \quad (31)$$

여기서,

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{s}) = [\operatorname{sign}(s_\phi), \operatorname{sign}(s_\theta), \operatorname{sign}(s_\psi)]^T \quad (32)$$

2. 안정성 분석

설계한 제어를 사용한 시스템의 안정성을 검증하기 위해 리아푸노프 이론 (Lyapunov theory)을 사용한다. 이때, SMC의 강인성을 알기 위해 외란을 고려한다.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}^\times J \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (33)$$

여기서, \mathbf{d} 는 모델의 불확실성, 외란 등을 포함한 사용자가 모르는 값이며, 이 값의 최대 값은 제한된다고 가정한다.

$$\|\mathbf{d}\| \leq d_m \quad (34)$$

SMC의 목표는 슬라이딩 변수를 0으로 만드는 것이며, 리아푸노프 후보 함수 (Lyapunov candidate function)는 다음과 같이 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (35)$$

후보 함수를 시간에 대해 미분하면

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\
 &= \mathbf{s}^T (\ddot{\mathbf{e}} + a_{smc} \dot{\mathbf{e}}) \\
 &= \mathbf{s}^T (J^{-1} (-\boldsymbol{\omega}^\times J \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} + \mathbf{d}) - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d + a_{smc} \dot{\mathbf{e}})
 \end{aligned} \tag{36}$$

앞서 유도한 식 (31)의 제어 입력을 대입하면

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\mathbf{d} - k \operatorname{sgn}(\mathbf{s})) \tag{37}$$

위의 식에서 k 는 사용자가 설정하는 게인값이며, 이 값을 외란의 최대 값인 d_m 보다 큰 값으로 설정하면 $d_i - k \operatorname{sgn}(s_i)$ 는 항상 음수가 된다. 따라서, 위 식의 우항은 음수가 되며 리아푸노프 후보 함수는 항상 0보다 작다. 후보 함수가 항상 0보다 작으면 리아푸노프 이론에 의해 시스템은 안정하다는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq \mathbf{s}^T (d_m - k \operatorname{sgn}(\mathbf{s})) \\
 &\leq -k (\mathbf{s}^T \operatorname{sgn}(\mathbf{s})) \\
 &\leq -k \sum_{i=1}^3 (s_i \cdot \operatorname{sign}(s_i)) < 0
 \end{aligned} \tag{38}$$

3. 기본적인 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션

기본적인 슬라이딩 모드 제어를 활용하여 UAV의 자세를 제어하는 시뮬레이션을 진행한다. 시뮬레이션에 사용된 UAV의 조건과 SMC의 게인은 각각 Table. (1)과 (2)에 도시하였다. 초기 자세는 $[10 \quad -20 \quad 30]^T \text{deg}$ 로 설정하였으며, 목표 자세는 $[0 \quad 0 \quad 0]^T \text{deg}$ 로 설정하였다. SMC의 특징인 외란에 대한 강인성을 확인하기 위해 외란에 대한 시나리오를 Fig. (4)와 같이 설계하였다. 외란은 식 (33)와 같이 시스템에 추가되며, 외란이 없는 경우와 있는 경우 두 경우에 대한 시뮬레이션을 진행하여 결과를 비교한다.

Table 1: Characteristics for Quadrotor UAV

Parameter	Value	Parameter	Value
m	1.6 kg	J_x	0.0058 kg m^2
l	0.52 m	J_y	0.0058 kg m^2
g	9.81 m/s^2	J_z	0.0102 kg m^2
k	$2.98 \cdot 10^{-6}$	b	$1.14 \cdot 10^{-7}$
η_0	$[10 \ -20 \ 30]^T \text{ deg}$	η_d	$[0 \ 0 \ 0]^T \text{ deg}$

Table 2: Design Parameters for SMC

Parameter	Value	Parameter	Value
a_{smc}	8	k	10

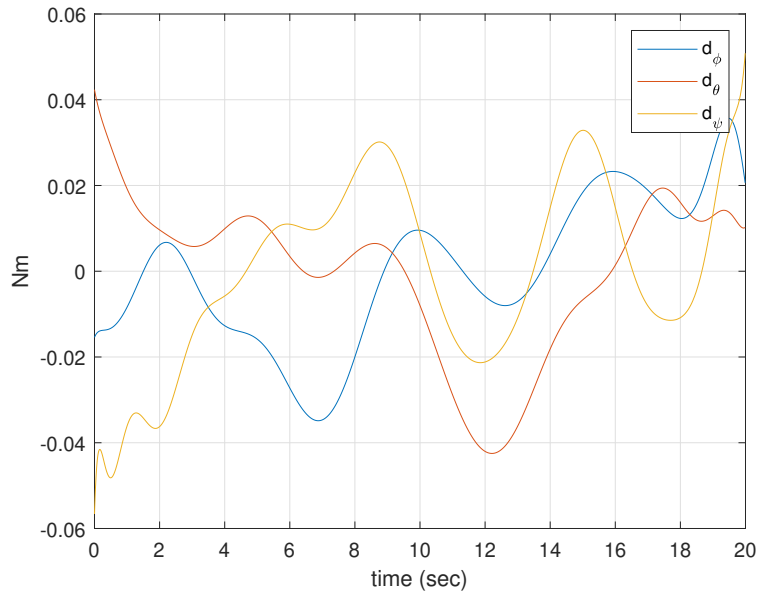


Figure. 4 Scenario of the external disturbances applied to the UAV

Figure. (5)는 UAV의 자세 제어 결과 그래프이며, (a)는 외란이 없는 시스템의 결과, (b)는 외란을 고려한 시스템의 결과이다. 외란이 없을 때 각 자세는 모두 목표 자세로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 외란이 있는 경우에도 약간의 떨림이 있지만 목표 자세를 잘 추종하고 있는 것을 확인할 수 있다. Fig. (6)은 제어 입력에 대한 그래프이며, 외란이 없는 경우와 있는 경우 모두

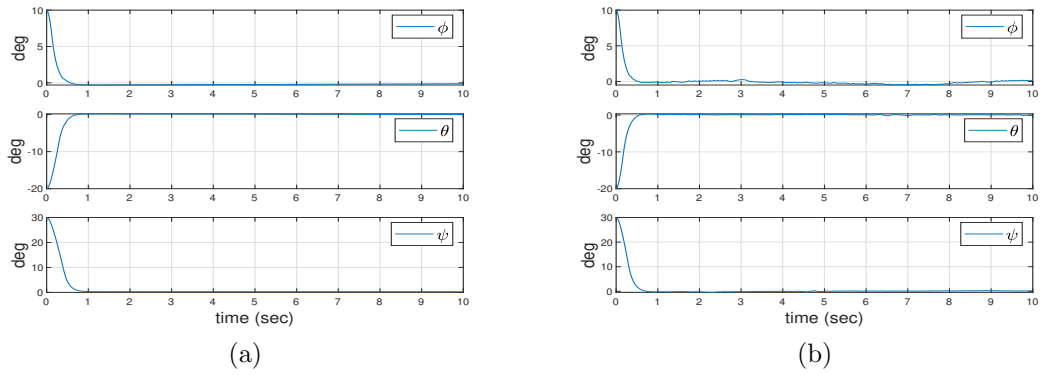


Figure. 5 Time histories of Euler angles using SMC (a)without and (b)with disturbance

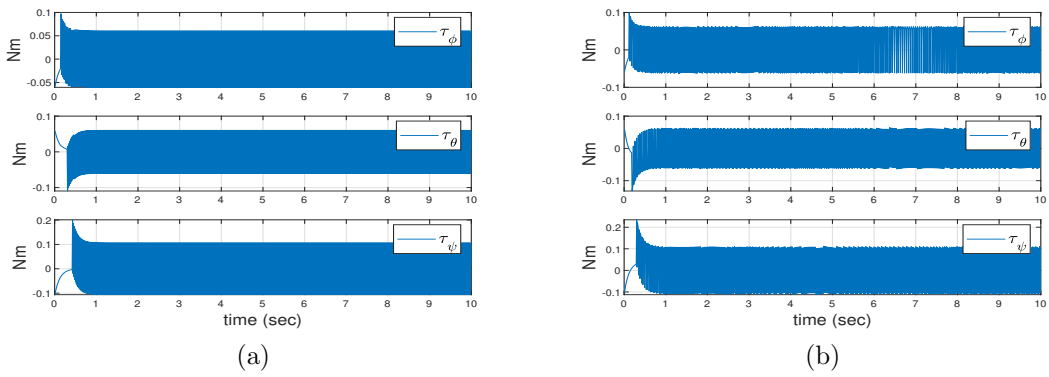


Figure. 6 Time histories of control input using SMC (a)without and (b)with disturbance

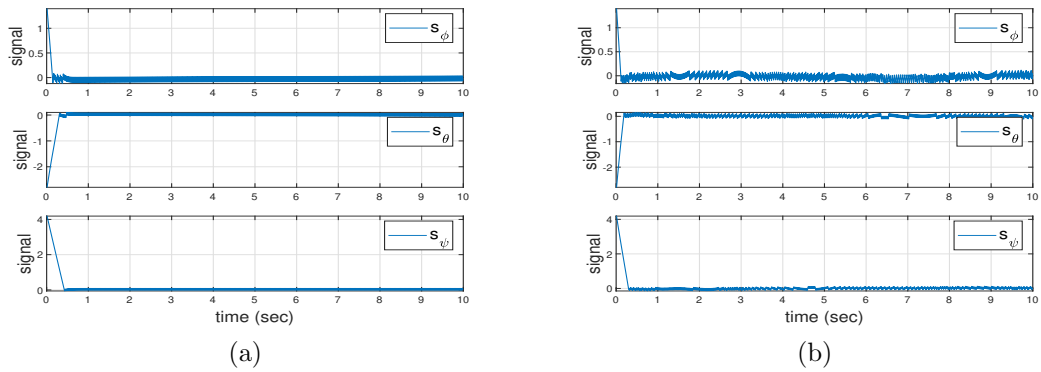


Figure. 7 Time histories of sliding variable using SMC (a)without and (b)with disturbance

큰 떨림 현상이 나타나는 것을 볼 수 있다. 이 현상은 식 (26)의 도달 법칙에서 부호 함수에 의해 나타나는 현상으로, 채터링 (Chattering)이라고 한다. SMC가 외란에 강인한 특징을 가지게 하는 기법이지만, UAV의 실제 비행에서 제어 성능을 저하시키는 요소이기 때문에 SMC의 주요한 문제점으로 지적된다. 이 현상을 해결하기 위해 많은 연구가 진행되었으며 관련한 내용은 다음 장에서 자세하게 다룬다. Fig. (7)는 식 (20)의 슬라이딩 변수에 대한 그래프이며, (a)와 (b) 모두 0으로 수렴하고 있는 것을 볼 수 있다.

따라서, 외란이 존재하는 환경에서의 시스템의 제어는 잘 이루어진 것을 확인할 수 있으며, SMC의 제어 성능을 검증하였다.

IV. 성능 향상을 위한 수정된 슬라이딩 모드 제어

1. 수정된 도달 법칙

앞서 소개한 식 (26)의 도달 법칙은 시스템이 외란에 대해 강인성을 가지도록 하면서 시스템이 목표 상태로 수렴하는 것을 보장하지만, s 의 값이 작아져도 도달 법칙의 존재로 인해 불필요하게 큰 제어 입력이 나타나고 이로 인해 채터링 (Chattering)이라는 고주파의 떨림 현상이 나타난다. 이 현상은 SMC의 가장 큰 단점으로 언급되며, 채터링을 감소시키기 위한 연구도 진행되어 왔다.

1) 수정된 도달 법칙

채터링을 감소시키기 위한 수정된 도달 법칙을 설명하기에 앞서, 여기서 설명하는 도달 법칙은 스칼라 형식으로, UAV에 적용하기 위해서는 벡터 형식으로 확장해야 한다. 벡터 형식으로 확장하기 위해서는 스칼라 형식을 여러번 적용하여 정의할 수 있다. 식 (26)을 예로 들면, 스칼라 형식은

$$\dot{s} = -k \operatorname{sign}(s) \quad (39)$$

위의 식을 UAV를 위한 도달 법칙으로 확장하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= -k [\operatorname{sign}(s_\phi), \operatorname{sign}(s_\theta), \operatorname{sign}(s_\psi)]^T \\ &= -k \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (40)$$

지금부터 소개할 수정된 도달 법칙은 위와 같은 방법으로 UAV에 적용할 수 있다.

첫 번째 방법은 경계층 (Boundary layer) 제어 기법이다[20]. 식 (26)의 도달 법칙에서 -1, 0 과 1로만 나타나는 부호 함수를 1보다 작은 ϵ 을 설정하여 그 값 내에서는 부호 함수가 아닌 s 그

자체가 출력되도록 하는 포화 함수 (Saturation function)를 사용하는 기법이다.

$$\dot{s} = -k_{sat} sat(s) \quad (41)$$

$$sat(s) = \begin{cases} s/\epsilon, & |s| \leq \epsilon \\ sign(s), & otherwise \end{cases} \quad (42)$$

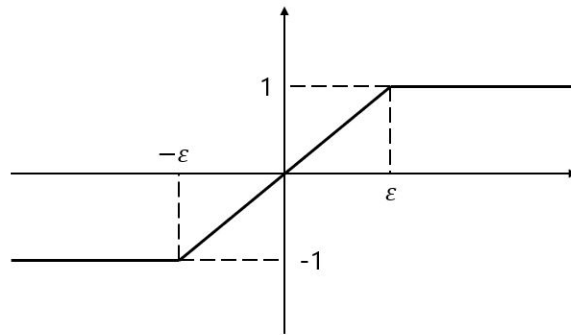


Figure. 8 Saturation function

채터링을 감소시키기 위한 두 번째 방법은 불연속함인 도달 법칙을 근사화하는 방법이다[21]. 이때 부호 함수를 시그모이드 함수 (Sigmoid function) 또는 쌍곡 탄젠트 함수 (Hyperbolic tangent function)으로 바꾸어 표현한다. 도달 법칙을 근사화하게 되면 작은 슬라이딩 변수가 입력되도 불필요하게 큰 값이 계산되지 않으며, 적절한 값의 도달 법칙이 계산될 수 있다.

$$\dot{s} = -k_{sig} \text{sigmoid}(s) \quad (43)$$

$$\text{sigmoid}(s) = \frac{2}{1 + \exp(-\gamma s)} - 1 \quad (44)$$

$$\dot{s} = -k_{tanh} \tanh(s) \quad (45)$$

채터링을 감소시키기 위한 세 번째 방법은 도달 법칙에서 부호 함수를 지수 함수로 변경하는

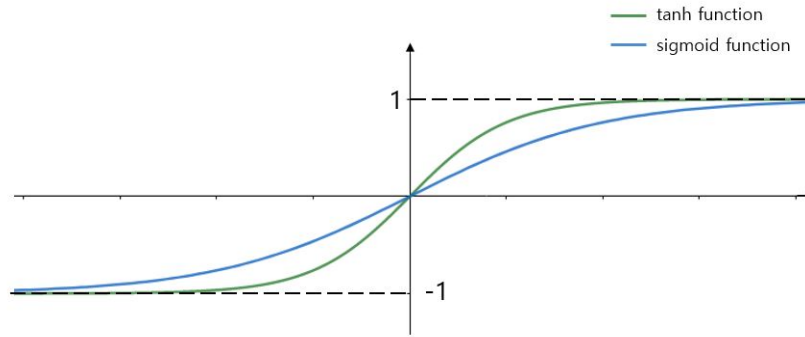


Figure. 9 Sigmoid and tanh function

것이다 [9]. 이 기법은 'Power rate reaching law'라고 하며, 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{s} = -k_{pr} s^\gamma \quad (46)$$

여기서 γ 는 0과 1사이의 실수 값으로, 사용자가 선택하는 계인이다. 이 기법은 s 가 음수일 때 허수가 나타난다는 문제가 있다. 이 문제를 해결하기 위해 다음과 같이 수정된 도달 법칙이 제안된다.

$$\dot{s} = -k_{pr} |s|^\gamma \text{sign}(s) \quad (47)$$

2) 수정된 도달 법칙을 활용한 시뮬레이션

3가지 수정된 도달 법칙을 활용하여 UAV 자세 제어 시뮬레이션을 진행한다. UAV의 조건은 Table. (1)와 동일하며, 또한 이번 시뮬레이션에도 외란을 고려하였으며, 외란 시나리오는 Fig. (4)와 동일하다. 수정된 도달 법칙에 대한 계인은 Table. (3)에 도시하였으며, 수정된 법칙의 두 번째 방법은 쌍곡 탄젠트 함수를 선택하여 시뮬레이션을 진행하였다.

Figure. (10)은 포화 함수를 사용한 첫 번째 수정된 도달 법칙을 사용한 시뮬레이션 결과이며, (a)는 자세, (b)는 제어 입력에 대한 결과 그래프이다. (a)를 보면 목표 자세로 수렴하는 것을 볼 수 있으며, (b)에서 효과적으로 채터링이 감소한 것을 확인하였다. 포화 함수에서 ϵ 의 값에 따라

Table 3: Design parameters for modified reaching law

Parameter	Value	Parameter	Value
a_{smc}	8	k_{sat}	10
ϵ	0.1	k_{tanh}	50
k_{pr}	60	γ	0.9

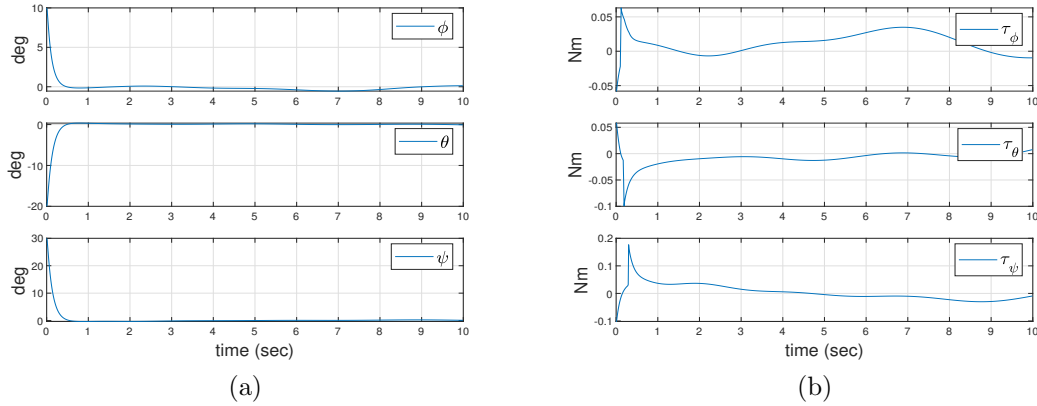


Figure. 10 Time histories of (a)Euler angles and (b)control input using sat function

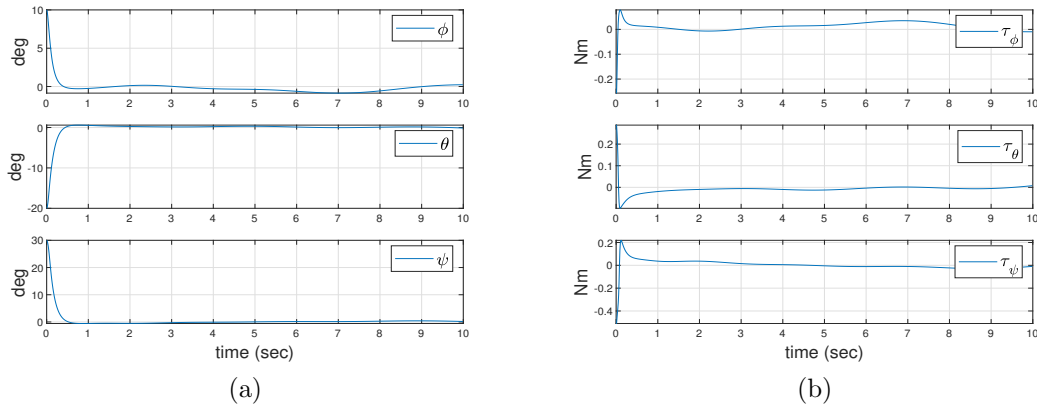


Figure. 11 Time histories of (a)Euler angles and (b)control input using tanh function

채터링이 나타나는 형태가 달라지는데, 값이 작을 경우 포화 함수가 적용되지 않은 부호 함수 형태의 결과 그래프가 나타나며, 값이 클 경우 채터링은 감소하지만 자세를 제대로 추종하지 못하게 된다. 따라서 튜닝을 통해 적절한 값의 ϵ 을 설정해야 한다.

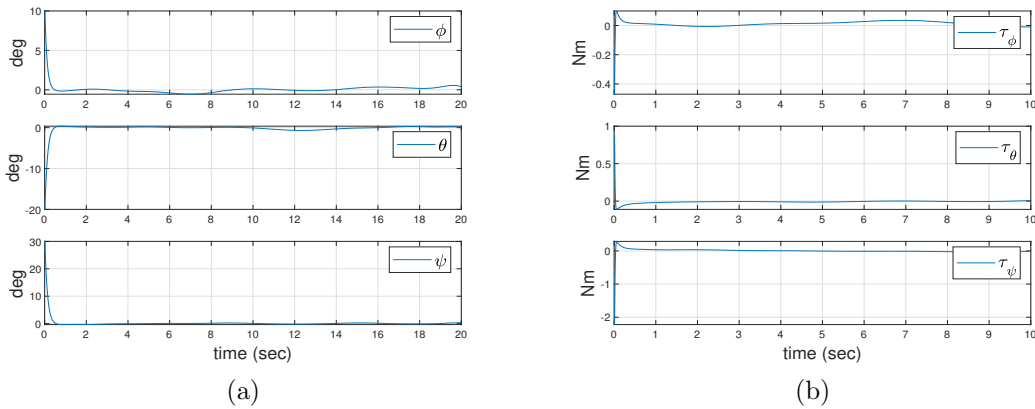


Figure. 12 Time histories of (a)Euler angles and (b)control input using power rate function

Figure. (11)은 쌍곡 탄젠트 함수를 적용한 시뮬레이션 결과이며, (a)에서 목표 자세를 잘 추종하는 것을 볼 수 있다. (b)는 제어 입력에 대한 그래프이며 채터링이 감소하여 나타나지 않는 것을 확인할 수 있지만, 비교적 큰 입력이 나타나는 것을 볼 수 있다. 그 이유는 식 (26)의 도달 법칙보다 쌍곡 탄젠트 함수를 적용하였을 때 게인 k_{tanh} 을 큰 값으로 설정하였기 때문인데, 게인이 작을 때 목표 자세를 제대로 추종하지 못하기 때문이다.

Figure. (12)은 power rate 도달 법칙에 대한 시뮬레이션 결과이며, (a)에서 목표 자세를 잘 추종하고 (b)에서 채터링이 감소하였지만 입력의 크기가 크게 나타나는 것을 볼 수 있다. 제어 입력의 크기가 큰 경우는 부호 함수를 지수 함수로 변경되면서 전보다 큰 값으로 계산되기 때문이다.

앞서 소개한 3가지 도달 법칙은 채터링을 감소시킬 수 있지만, 모델 불확실성과 외부 교란에 대해 보상하기 위한 도달 법칙의 형태가 변형되었기 때문에 그만큼의 강인성이 떨어진다는 단점이 있다. 따라서 채터링을 감소시키면서 강인성을 보장할 수 있는 제어 기법이 연구되었으며, 이 기법은 다음 장에서 설명한다.

2. 수정된 슬라이딩 변수

앞서 언급한 식 (20)의 슬라이딩 변수는 Lemma. (1)에 의해 s 가 0일 때 충분한 시간이 지나고 각 변수들도 0으로 수렴하게 된다. 하지만, 변수들이 0으로 수렴하기 위해서는 무한한 시간이

결린다는 단점이 있다. 이 단점을 해결하기 위해 다음과 같은 수정된 슬라이딩면을 활용한 제어 기법이 제안되었다.

1) 터미널 슬라이딩 모드 제어

터미널 슬라이딩 모드 제어 (Terminal Sliding Mode Control, TSMC) 기법은 각 변수들이 0으로 수렴하는데 무한한 시간이 걸린다는 단점을 해결한 제어기법 중 하나이다. 이 기법을 적용하면 유한 시간 내에 목표 값으로 수렴하는 것을 보장할 수 있으며, 이를 위해 슬라이딩 변수를 다음과 같이 정의한다[10].

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + a_{tsmc}\mathbf{e}^\gamma \quad (48)$$

여기서,

$$\mathbf{e}^\gamma = [e_\phi^\gamma, \quad e_\theta^\gamma, \quad e_\psi^\gamma]^T \quad (49)$$

a_{tsmc} 는 0보다 큰 계인이며, γ 는 0과 1사이의 실수 계인이다.

TSMC의 수렴 시간을 구하기 위해 슬라이딩 변수가 0이라고 가정한다.

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + a_{tsmc}\mathbf{e}^\gamma = 0 \quad (50)$$

정리하면

$$\dot{\mathbf{e}} = -a_{tsmc}\mathbf{e}^\gamma \quad (51)$$

위의 식은 시간에 대한 일차 미분방정식의 형태로 볼 수 있으며, 수렴 시간을 구하기 위해 적분을 진행한다.

$$\int_{e_s}^{e_f} e^{-\gamma} de = -a_{tsmc} \int_{t_s}^{t_f} dt \quad (52)$$

여기서, e_s 와 e_f 는 초기 오차와 최종 오차를 말하며, t_s 와 t_f 시작 시간과 최종 시간을 말한다.

부분 적분하면

$$\left[\frac{1}{1-\gamma} e^{1-\gamma} \right]_{e_s}^{e_f} = -a_{tsmc} [t]_{t_s}^{t_f} \quad (53)$$

최종 오차 e_f 와 시작 시간 t_s 을 0으로 가정하면

$$\frac{1}{1-\gamma} e_s^{1-\gamma} = -a_{tsmc} t_f \quad (54)$$

최종 시간 t_f 에 대해 정리하면 TSMC의 수렴 시간을 구할 수 있으며, 각 변수들이 유한 시간 내로 수렴하는 것을 보장할 수 있다.

$$t_f = \frac{1}{a_{tsmc}(1-\gamma)} e_s^{1-\gamma} \quad (55)$$

UAV의 자세 제어를 위한 제어 입력을 구한다. 식 (48)의 슬라이딩 변수에 대한 식을 시간에 대해 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + a_{tsmc} \gamma \dot{e}^{\gamma-1} \\ &= J^{-1}(\omega^\times J\omega + u) - \ddot{\eta}_d + a_{tsmc} \gamma \dot{e}^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (56)$$

제어 입력 u 에 대해 정리하면

$$u = \omega^\times J\omega + J(\ddot{\eta}_d - a_{tsmc} \gamma \dot{e}^{\gamma-1} + \dot{s}) \quad (57)$$

여기서, 도달 법칙은 앞서 소개한 여러 방법들 중에서 사용자가 선택할 수 있으며, 본 논문에서는 Power rate 도달 법칙과 슬라이딩 변수에 대한 비례항의 합으로 이루어진 아래와 같은 도달 법칙을 선택한다. 이 형태의 도달 법칙은 채터링을 감소시킬 뿐만 아니라 좋은 제어 성능을 가지고 있기 때문에 많은 연구에서 사용되는 도달 법칙이다.

$$\dot{s} = -k_1 s - k_2 |s|^\epsilon \text{sgn}(s) \quad (58)$$

여기서, k_1 과 k_2 는 0보다 큰 계인이다.

식 (48)의 슬라이딩 변수는 상태 변수 e_i 가 음수일 때 허수가 나타난다는 문제가 있다. 이 문제를 해결하기 위해 다음과 같이 수정된 슬라이딩 변수가 제안된다.

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + a_{tsmc} |\mathbf{e}|^\gamma \text{sgn}(\mathbf{e}) \quad (59)$$

여기서,

$$|\mathbf{e}|^\gamma = [|e_\phi|^\gamma, |e_\theta|^\gamma, |e_\psi|^\gamma]^T \quad (60)$$

수정된 슬라이딩면을 활용해 UAV의 자세 제어를 위한 제어 입력은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}^\times J \boldsymbol{\omega} + J (\ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - a_{tsmc} |\mathbf{e}|^\gamma \text{sgn}(\mathbf{e}) - k_1 \mathbf{s} - k_2 |\mathbf{s}|^\epsilon \text{sgn}(\mathbf{s})) \quad (61)$$

2) 터미널 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션

터미널 슬라이딩 모드 제어를 통해 UAV의 자세 제어 시뮬레이션을 진행한다. UAV의 조건과 외란은 이전 시뮬레이션과 동일하며, TSMC의 계인은 Table.4에 도시하였다.

Table 4: Design parameters for TSMC

Parameter	Value	Parameter	Value
a_{tsmc}	12	γ	0.95
k_1	15	k_2	20
ϵ	0.9		

Figure. (13)은 UAV의 자세에 대한 결과 그래프이다. 각 자세 모두 0으로 잘 추종하고 있는 것을 확인할 수 있다. Fig. (14)은 제어 입력에 대한 그래프이며, 큰 계인값으로 인해 비교적 큰 입력이 나타난 것을 볼 수 있다. 채터링이 나타나지 않는 식 (58)의 도달 법칙을 사용하였으며, 외란이 존재하는 환경에서도 목표 자세를 추종하기 위한 제어 입력을 생성하는 것을 확인할 수 있다.

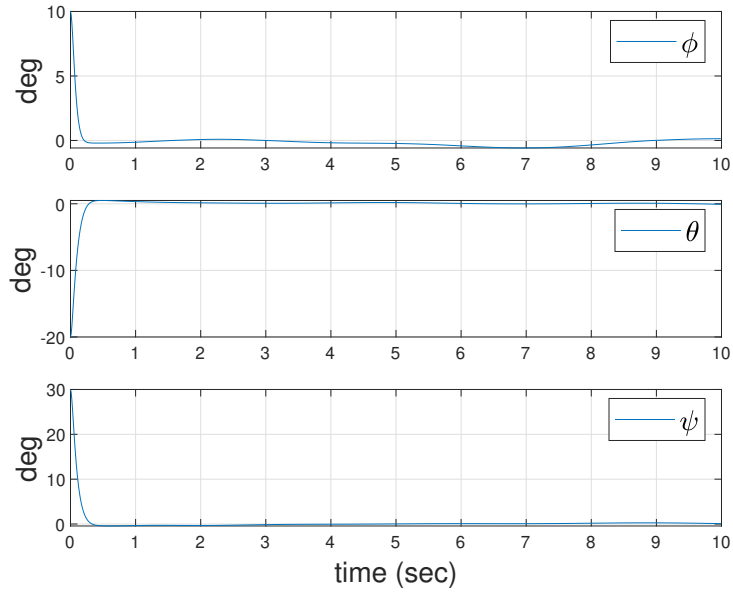


Figure. 13 Time histories of Euler angles using TSMC

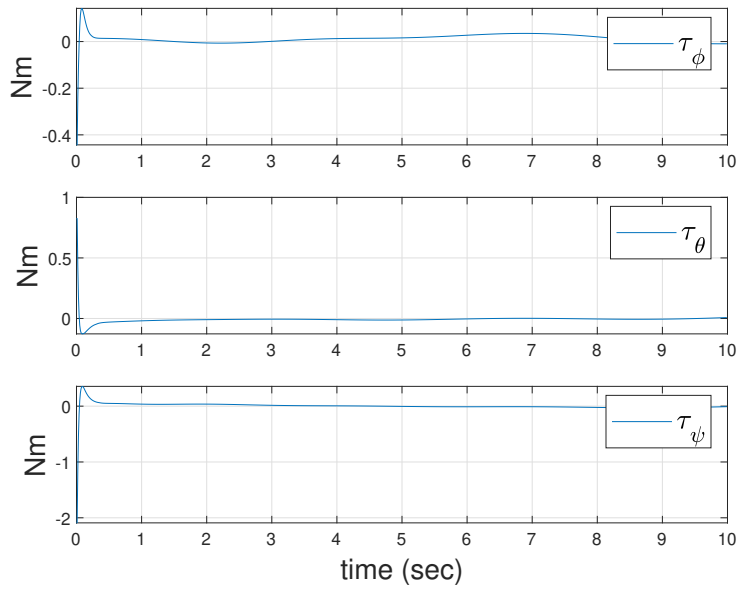


Figure. 14 Time histories of control input using TSMC

3) 빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어

빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어 (Fast Terminal Sliding Mode Control, FTSMC)는 기존의 TSMC에서 수렴 속도를 좀 더 빠르게 하는 제어 기법이다. 슬라이딩 변수는 식 (20)와 (48)을 결합한 형태로, 다음과 같이 정의한다[11].

$$s = \dot{e} + a_{ftsm}e + b_{ftsm}e^\gamma \quad (62)$$

여기서, a_{ftsm} 와 b_{ftsm} 는 0보다 큰 값을 가지는 계인이며, γ 는 0과 1사이의 값을 가지는 계인이다. FTSMC는 TSMC와 비교했을 때 보다 빠른 수렴 속도를 보장한다. 수렴 속도를 계산하는 방법은 TSMC와 동일한 과정으로 진행되며, 시간 $t = \ln((a_{ftsm}e_s^{1-\gamma} + b_{ftsm})/b_{ftsm})/(a_{ftsm}(1-\gamma))$ 이내로 각 변수들이 0으로 수렴하는 것을 보장한다. 위의 슬라이딩 변수는 TSMC의 슬라이딩 변수와 마찬가지로 변수가 음수일 때 허수가 나타난다는 문제가 있다. 이 문제는 앞서 소개한 것과 같은 방법으로 해결할 수 있으며, 다음과 같은 슬라이딩 변수로 수정할 수 있다.

$$s = \dot{e} + a_{ftsm}e + b_{ftsm}|e|^\gamma \text{sgn}(e) \quad (63)$$

이 슬라이딩면을 활용하여 다른 제어 기법에서 제어 입력을 유도한 것과 같은 방법으로 UAV를 제어하기 위한 제어 입력을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$u = \omega^\times J\omega + J(\ddot{\eta}_d - a_{ftsm}\dot{e} - b_{ftsm}|e|^\gamma \text{sgn}(e) - k_1s - k_2|s|^\epsilon \text{sgn}(s)) \quad (64)$$

4) 빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션

빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어를 활용하여 UAV의 자세 제어 시뮬레이션을 진행한다. 시뮬레이션 조건과 외란은 이전과 동일하며, FTSMC의 계인은 Table.5에 도시하였다.

Figure. (15)는 UAV의 자세에 대한 결과 그래프이다. 각 자세는 목표 자세로 잘 추종하는 것을 볼 수 있으며, TSMC보다 약 0.05초 빠른 0.28초에 수렴하였다. 수렴 시간은 계인을 적절하게 조절하여 정할 수 있으며, 계인 조절을 통해 좀 더 빠르게 수렴하도록 제어할 수 있지만 외란

Table 5: Design parameters for FTSMC

Parameter	Value	Parameter	Value
a_{ftsm}	5	b_{ftsm}	10
k_1	10	k_2	15
γ	0.95	ϵ	0.95

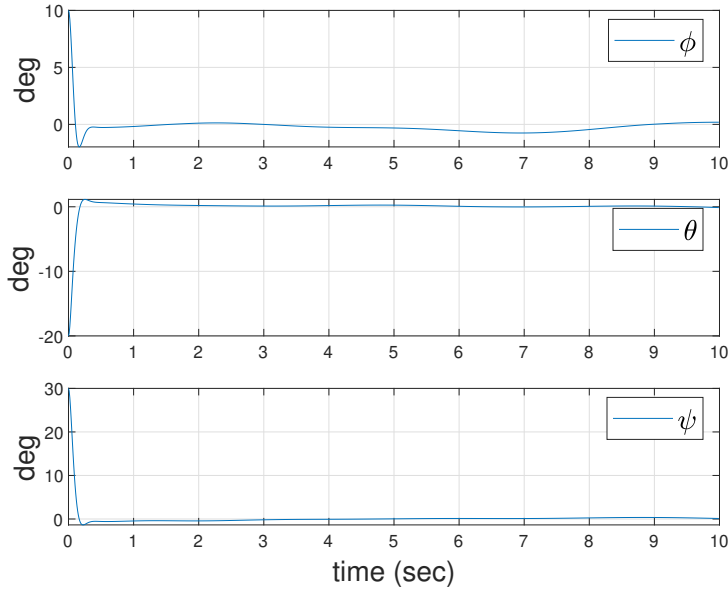


Figure. 15 Time histories of Euler angles using FTSMC

에 대한 보상 능력이 떨어진다는 문제가 있다. 반대로 외란에 대한 능력을 높이면 수렴 속도가 늦어진다는 문제가 있으며, 외란과 제어 성능 중 제어 목적에 더 적합한 적절한 계인을 튜닝해야 한다. Fig. (16)은 제어 입력에 대한 그래프이며, 시뮬레이션 초반에 오버슈트 (Overshoot)이 발생한 것을 볼 수 있다. 오버슈트는 계인의 크기가 커서 생기는 현상으로, 외란을 보상하기 위해 큰 값의 계인을 선택하였기 때문이다. 오버슈트 이후 외란에 대한 힘을 보상하면서 목표 자세를 유지하기 위한 힘을 발생시키는 것을 볼 수 있다.

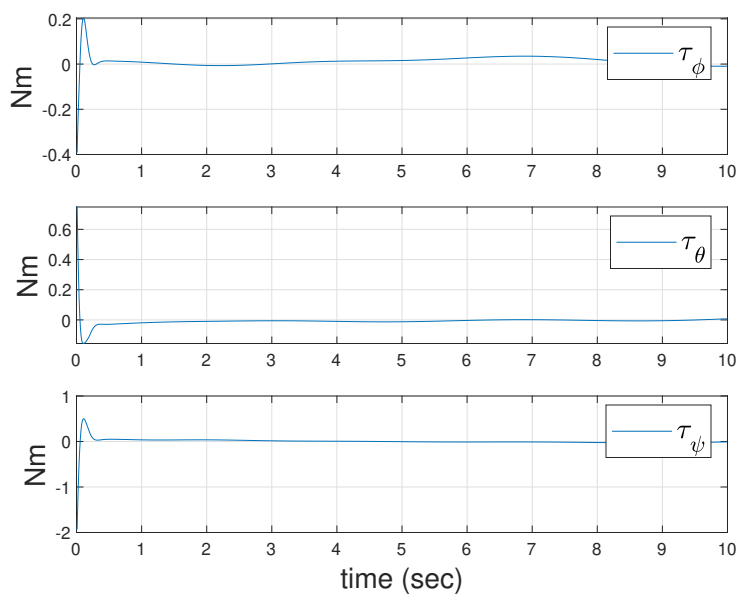


Figure. 16 Time histories of control input using FTSMC

V. 채터링 문제

슬라이딩 모드 제어 기법의 가장 큰 단점은 고주파의 떨림 현상인 채터링이다. 이 현상은 제어기의 성능을 떨어뜨리는 주요한 원인이 된다. 이 현상을 해결하기 위해 앞서 설명한 것처럼 도달 법칙을 수정하여 채터링을 감소시킬 수 있지만, 수정된 도달 법칙으로 인해 모델의 강인성이 보장되지 않는다는 문제가 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 슈퍼 트위스팅 알고리즘 (Super Twisting Algorithm, STA)을 소개한다.

1. 슈퍼 트위스팅 알고리즘

슈퍼 트위스팅 알고리즘은 채터링을 감소시키면서 강인성을 보장하는 제어 기법 중 하나로, 강인성을 보장하기 위한 부호 함수가 식 (26)처럼 \dot{s} 가 아닌 \ddot{s} 에 나타나게 함으로써, 실제 제어 입력에는 부호 함수가 적분된 형태가 나타나게 되는 제어 기법이다. 이러한 형태는 슬라이딩 변수 s 를 두 번 미분했을 때 부호 함수, 즉 도달 법칙이 나타나기 때문에 2차 슬라이딩 모드 제어 (Second-Order Sliding Mode Control, SOSMC)이라고 부른다[12].

1) 제어기 설계

STA의 도달 법칙은 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{s} = -K_1 G(s)^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s) + \mathbf{u}_{disc} \quad (65)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{disc} = -K_2 \text{sgn}(s) \quad (66)$$

여기서,

$$G(\mathbf{s}) = \text{diag}(|s_\phi|, |s_\theta|, |s_\psi|) \quad (67)$$

$$K_1 = \text{diag}(k_{1,\phi}, k_{1,\theta}, k_{1,\psi}) \quad (68)$$

$$K_2 = \text{diag}(k_{2,\phi}, k_{2,\theta}, k_{2,\psi}) \quad (69)$$

$k_{1,\phi}, k_{1,\theta}, k_{1,\psi}, k_{2,\phi}, k_{2,\theta}$, 그리고 $k_{2,\psi}$ 는 각각 0보다 큰 값을 가지는 계인이며, \mathbf{u}_{disc} 는 채터링이 생기는 주요 원인인 부호 함수를 적분한 형태의 불연속항이다.

식 (65)을 시간에 대해 미분하였을 때, 슈퍼 트위스팅 알고리즘의 특징인 슬라이딩 변수의 2차 미분에서 부호 함수가 나타나는 것을 볼 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{s}} = -K_1 \frac{1}{2} G(\mathbf{s})^{-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{s}} - K_2 \text{sgn}(\mathbf{s}) \quad (70)$$

위의 도달 법칙을 활용하여 시스템을 제어하기 위한 제어 입력을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\mathbf{u} = J \left(a_{sta} \dot{\mathbf{e}} + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - f(\boldsymbol{\eta}) + K_1 G(\mathbf{s})^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{u}_{disc} \right) \quad (71)$$

2) 안정성 분석

기존의 STA의 안정성은 상태 변수가 하나일 때 안정성이 증명되었으며, 상태 변수가 여러 개인 경우는 명확하게 안정성이 증명되지 않았다. 따라서 본 논문에서는 UAV와 같이 상태 변수가 여러 개일 때의 안정성을 증명하며, 안정성 분석을 위해 리아푸노프 이론을 적용한다. 먼저, STA 제어기의 강인성을 알기 위해 시스템에서 외란 $\mathbf{d} = [d_\phi \ d_\theta \ d_\psi]^T$ 을 고려한다[22].

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = f(\boldsymbol{\eta}) + J^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (72)$$

$$\|\dot{\mathbf{d}}\| \leq L \quad (73)$$

외란 \mathbf{d} 는 전역 유계 (Globally bounded)라고 가정한다.

슬라이딩 변수를 이용하여 새로운 상태 벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{cases} z_1 = s \\ z_2 = -K_2 \int \text{sgn}(s) dt + \mathbf{d} \end{cases} \quad (74)$$

여기서, $z_1 \in \mathcal{R}^3$, $z_2 \in \mathcal{R}^3$ 이다. 식 (74)를 시간에 대해 미분하면

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -K_1 G(z_1)^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 = -K_1 \text{sgn}(z_1) + \dot{\mathbf{d}} \end{cases} \quad (75)$$

식 (74)에서 정의한 상태벡터를 이용하여 새로운 변수 ζ 를 정의한다.

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(z_1)^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(z_1) \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (76)$$

이때, ζ 가 유한 시간 내에 0으로 수렴하면, 상태벡터 z_1 , z_2 도 유한 시간 내에 0으로 수렴한다는 것을 알 수 있다.

위의 식을 시간에 대해 미분하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} G(z_1)^{-\frac{1}{2}} \left(-K_1 G(z_1)^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(z_1) + z_2 \right) \\ -K_2 \text{sgn}(z_1) + \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} G(z_1)^{-\frac{1}{2}} \left(-K_1 G(z_1)^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(z_1) + z_2 \right) \\ -K_2 G(z_1)^{-\frac{1}{2}} G(z_1)^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(z_1) + \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (77)$$

간단하게 정리하면,

$$\dot{\zeta} = A\zeta + B\dot{\mathbf{d}} \quad (78)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}K_1G(\mathbf{z}_1)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}G(\mathbf{z}_1)^{-\frac{1}{2}} \\ -K_2G(\mathbf{z}_1)^{-\frac{1}{2}} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (79)$$

식 (73)을 이용하면 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\dot{\zeta} \leq \tilde{A}\zeta \quad (80)$$

여기서,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}K_1G(\mathbf{z}_1)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}G(\mathbf{z}_1)^{-\frac{1}{2}} \\ -K_2G(\mathbf{z}_1)^{-\frac{1}{2}} + L \cdot I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (81)$$

ζ 를 이용해 리아푸노프 후보 함수를 다음과 같이 설정한다.

$$V = \zeta^T P \zeta \quad (82)$$

여기서,

$$P = \begin{bmatrix} K_1 & -I_{3 \times 3} \\ -I_{3 \times 3} & K_2 \end{bmatrix} \quad (83)$$

P 는 대칭 행렬 (Symmetric matrix)이며, $K_1 > 0, K_2 > 0$ 일 때, 양의 정부호 (Positive definite) 행렬이다.

안정성을 확보하기 위하여 식 (82)을 시간에 대해 미분한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\
 &\leq (\tilde{A}\zeta)^T P \zeta + \zeta^T P (\tilde{A}\zeta) \\
 &\leq \zeta^T (\tilde{A}^T P + P \tilde{A}) \zeta \\
 &\leq -\zeta^T \tilde{Q} \zeta
 \end{aligned} \tag{84}$$

이때, \tilde{Q} 는 대칭 행렬이며, 양의 정부 조건을 가질 때, 시스템은 안정하다.

3) 시뮬레이션

슈퍼 트위스팅 알고리즘을 사용하여 외부 교란이 존재하는 환경에서 UAV의 자세 제어 시뮬레이션을 진행한다. STA의 개인은 Table. (6)과 같다.

Table 6: Design parameters for STA

Parameter	Value	Parameter	Value
a_{sta}	6	k_1	6
k_2	4		

Figure. (17)는 UAV의 자세에 대한 결과 그래프이며, 외란을 고려했음에도 불구하고 매우 높은 안정성과 목표 자세 수렴성을 보이고 있다. 시뮬레이션 초반에 오버슈트 현상이 있는데, 식 (65)에서 부호 함수를 적분하면서 생기는 현상이다. STA는 목표 자세로 추종하는 것을 주요 제어 목표로 하며, 목표 자세에 수렴할 때까지 부호 함수가 적분되고 도달 법칙의 값이 커지게 된다. 목표 자세에 수렴하고 이전에 적분되어 쌓인 도달 법칙의 존재로 인해 오버슈트가 나타나며, 다시 목표 자세로 수렴하기 위해 도달 법칙의 값의 방향이 바뀌고, 최종적으로 목표로 수렴하게 된다. 외란의 경우도 이와 동일한 과정으로 목표 자세로 수렴하도록 식 (66)의 값이 쌓이게 되며, 이 힘을 통해 외란에 대한 영향을 보상하여 UAV가 정상적인 비행을 하게 된다. Fig. (18)은 STA의 제어 입력에 대한 그래프이며, 채터링이 감소한 것을 볼 수 있다. 또한, 목표 자세에 수렴한 이후에도 외란에 대한 영향을 보상하기 위해 제어 입력이 생성된 것을 볼 수 있다.

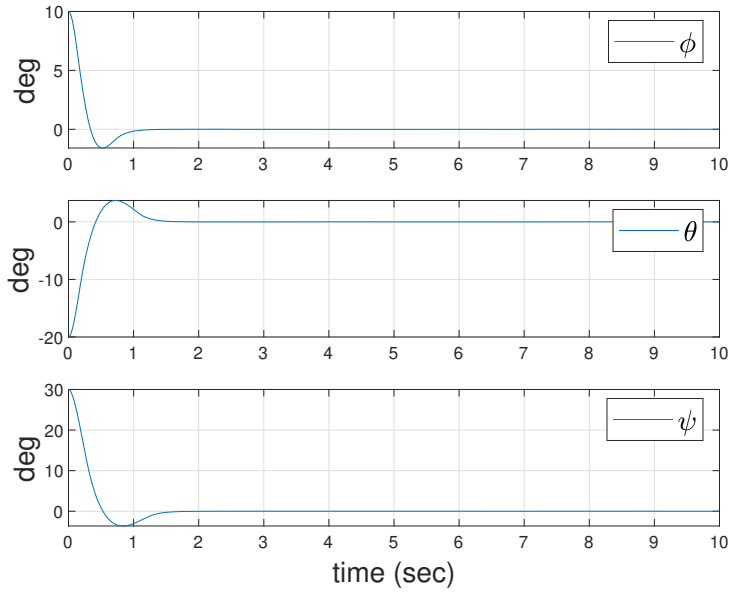


Figure. 17 Time histories of Euler angles using STA

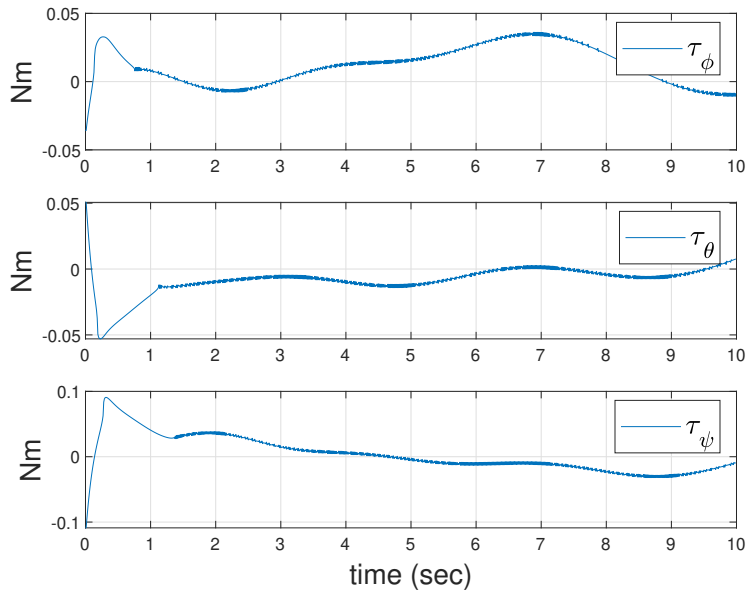


Figure. 18 Time histories of control input using STA

VI. 시스템의 제약 조건

제약이 없는 일반적인 시스템에 대한 제어 입력을 얻는 것은 비교적 쉽지만, 상태의 크기 제한, 속도 제한, 제어 입력의 크기 제한 등 여러 제약 조건이 있는 상황에서의 제어는 일반적인 시스템에 비해 제어하기 어렵다. 이러한 제약 조건이 있는 시스템을 제어하기 위해서는 제약 조건을 고려하여 제어기를 설계해야 하는데, 이번 장에서는 슬라이딩 모드 제어 기법을 응용하여 제약 조건이 있는 시스템을 제어하기 위한 제어 기법을 소개한다.

1. 제어 입력 제한을 고려한 제어 기법

UAV의 임무 목적 또는 구동기의 물리적인 한계로 인해 제어 입력의 크기가 제한될 수 있다. 제한된 제어 입력 내에서 임무를 수행하기 위해서는 기존의 제어 기법과는 다른 제약 조건을 고려한 제어 기법이 요구된다. 제약을 만족하면서 UAV를 제어할 수 있는 여러 기법 중 모델 예측 슬라이딩 모드 제어 (Model Predictive Sliding Mode Control, MPSMC)는 모델 예측 제어 (Model Predictive Control, MPC) 기법과 슬라이딩 모드 제어 기법을 결합한 기법으로, 모델의 불확실성과 외부 교란에 강인한 특성을 가지면서 제약 조건을 만족하면서 제어할 수 있다. 또한, 도달 법칙을 사용하지 않고 최적화를 통해 제어 입력을 얻어내기 때문에 채터링을 감소시키는 효과도 있다. MPSMC는 MPC를 활용해 제어하는 것과 동일한 과정으로 제어가 진행된다. 따라서 MPSMC를 이해하기 위해서는 먼저 MPC에 대한 이해가 필요하기 때문에 MPC의 제어 과정에 대해 설명하고, MPSMC의 제어 과정을 설명한다.

1) 모델 예측 제어

모델 예측 제어는 미래의 상태를 예측하고 그 정보를 활용하여 현재 상태를 제어하는 기법이며, 제약조건이 있는 문제를 해결하기 위해 활용된다. 미래의 상태를 예측하기 위해 선형 연속 시스템은 이산화 (Discretization)하며, 이산 시스템에서 N 단계까지의 상태를 예측하여 그 정보를 활용한다. 여기서 N 을 예측 지평선 (Prediction Horizon)이라고 부른다. 제어하기

위한 과정이 수학적으로 어떻게 이루어지는지 알아보기 위해 다음과 같은 선형 이산 시스템을 고려한다[23].

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \quad (85)$$

여기서, A 와 B 는 사용자가 알고 있는 계수 행렬 (Coefficient matrix)이며, k 는 시간 간격 (Time instant)이다.

시스템을 N 단계까지 예측하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}(k+2) &= A\mathbf{x}(k+1) + B\mathbf{u}(k+1) \\ &= A^2\mathbf{x}(k) + AB\mathbf{u}(k) + B\mathbf{u}(k+1) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k+N) &= A^N\mathbf{x}(k) + A^{N-1}B\mathbf{u}(k) + \dots + B\mathbf{u}(k+N-1) \end{aligned} \quad (86)$$

벡터 형식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} B & & & \\ AB & B & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A^{N-1}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (87)$$

다음과 같이 간단하게 정리할 수 있다.

$$\mathbf{X}_a = A_a\mathbf{x}(k) + B_a\mathbf{U} \quad (88)$$

제어 입력 또한 재귀적 방법을 통하여 $N-1$ 단계까지의 제어 입력을 예측할 수 있으며, 이때

후방 차분 연산자 $\Delta \mathbf{u}$ 를 활용한다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \\ \vdots \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) + \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & & & \\ I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ I_{3 \times 3} & \cdots & \cdots & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (89)$$

간단하게 정리하면

$$\mathbf{U} = E_u \mathbf{u}(k-1) + H_u \Delta \mathbf{U} \quad (90)$$

또한 위의 식을 식 (88)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_a &= A_a \mathbf{x}(k) + B_a (E_u \mathbf{u}(k-1) + H_u \Delta \mathbf{U}) \\ &= A_a \mathbf{x}(k) + B_{ae} \mathbf{u}(k-1) + B_{ah} \Delta \mathbf{U} \end{aligned} \quad (91)$$

모델 예측 제어는 목적 함수를 정의하고, 그 함수의 값을 최소화하도록 제어하는 기법으로, 목적 함수를 어떻게 정의하는지에 따라 MPC의 제어 성능이 달라지게 된다. 일반적인 MPC의 목적 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$J = \mathbf{X}_a^T R \mathbf{X}_a + \Delta \mathbf{U}^T Q \Delta \mathbf{U} \quad (92)$$

여기서, R 과 Q 는 양의 정부호 (Positive definite) 성질과 대칭 (Symmetric) 성질을 가지는 가중 행렬 (Weight matrix)이며, 두 행렬의 값을 조절하여 목적함수의 값을 최소로 할 때 예측된 상태 벡터 \mathbf{X}_a 와 예측된 제어 입력 변화율 $\Delta \mathbf{U}$ 중에 어떤 것을 더 중요시하면서 목적 함수를 최소로 할지 정하는 역할을 하게 된다. 예를 들어, R 의 값이 1이고 Q 의 값이 0이라면 제어 입력의 변화율은 배제하고 상태 벡터의 값을 최소로 하는 것을 목적으로 하는 것이고, R 의 값이 0이고 Q 의 값이 1이라면 반대로 상태 벡터를 배제하고 제어 입력의 변화율만을 최소로 하는 것을 목적으로 정하게 된다. MPC는 두 가중 행렬을 적절히 조절하여 두 벡터 모두 고려하면서 목적 함수를

최소로 만들도록 설정하는 것이 바람직하다.

MPC는 제약 조건이 있는 문제를 해결할 때 사용되기도 한다. 제약 조건은 상태 벡터의 크기 제한, 변화율 제한, 제어 입력의 크기 제한, 변화율 제한 등이 있으며, 그 중 제어 입력의 크기 제한을 고려한다. 제어 입력은 모델의 구동기의 물리적인 제한, 임무 등에 의해 제한될 수 있으며, 수학적으로는 다음과 같이 표현한다.

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \quad (93)$$

여기서, u_{min} 과 u_{max} 는 각각 최소, 최대 제어 입력이다. 위의 식은 제어 입력이 하나일 경우이며, 여러 개의 제어 입력에 대한 제한은 다음과 같이 벡터로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max} \quad (94)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{min} &= [u_{min,\phi}, \quad u_{min,\theta}, \quad u_{min,\psi}]^T \\ \mathbf{u}_{max} &= [u_{max,\phi}, \quad u_{max,\theta}, \quad u_{max,\psi}]^T \end{aligned} \quad (95)$$

N 단계까지의 제약 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{U}_{min} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{U}_{max} \quad (96)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{min} &= [\mathbf{u}_{min}(k), \quad \mathbf{u}_{min}(k+1), \quad \dots, \quad \mathbf{u}_{min}(k+N-1)]^T \\ \mathbf{U}_{max} &= [\mathbf{u}_{max}(k), \quad \mathbf{u}_{max}(k+1), \quad \dots, \quad \mathbf{u}_{max}(k+N-1)]^T \end{aligned} \quad (97)$$

식 (96)은 다음과 같이 벡터 형식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -U \\ U \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -U_{min} \\ U_{max} \end{bmatrix} \quad (98)$$

식 (90)을 대입하면

$$\begin{bmatrix} -H_u \\ H_u \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -U_{min} + E_u \mathbf{u}(k-1) \\ U_{max} - E_u \mathbf{u}(k-1) \end{bmatrix} \quad (99)$$

정리하면

$$A_{\Delta U} \Delta U - \mathbf{b}_{\Delta U} \leq \mathbf{0} \quad (100)$$

최종적으로 예측 지평선까지 예측된 제약 조건을 구할 수 있으며, 이 제약 조건을 만족하면서 식 (92)의 목적 함수를 최소화 하도록 제어하게 된다.

2) 모델 예측 슬라이딩 모드 제어

모델 예측 제어는 선형 시스템이 요구되지만, 실제 모델은 비선형인 경우가 많다. 비선형 시스템을 직접 적용하는 것이 가장 이상적이거나, 비선형 시스템을 구하는 것은 매우 어려운 과정이 될 수 있으며, 선형화된 시스템을 사용해야 하는 경우도 있다. 이러한 경우에는 제어 성능이 저하될 수 있으며, 이러한 문제를 해결하기 위해 모델의 불확실성에 강인한 장점이 있는 SMC 기법을 활용한다. 제약 조건이 있는 문제를 해결할 수 있는 MPC와 모델 불확실성에 강인한 SMC를 결합하여 제약 조건이 있는 비선형 모델을 선형화된 시스템을 통해 제어할 수 있다. MPSMC는 MPC와 동일한 과정으로 시스템을 제어하게 되며, 차이점은 목적 함수를 어떻게 설계하느냐의 차이점이 있다. MPSMC는 제약 조건을 만족하는 것과 슬라이딩 변수를 0으로 만드는 것을 목적 함수에 포함하게 된다. 먼저, MPSMC의 슬라이딩 변수는 다음과 같이 정의한다[15].

$$\mathbf{s}(k) = \mathbf{c}^T (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_d) \quad (101)$$

여기서,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} A & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3) \quad (103)$$

\mathbf{x}_d 는 목표 상태이며, a_1, a_2 , 그리고 a_3 은 각각 0보다 큰 값을 가지는 계인이다. \mathbf{c} 는 기존의 슬라이딩 변수의 계인을 행렬 형태로 바꾼 계인 행렬이다.

슬라이딩 변수 또한 재귀적 방법을 통해 N 단계까지 예측할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(k) &= \mathbf{c}^T (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_d) \\ \mathbf{s}(k+1) &= \mathbf{c}^T (\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_d) \\ &\vdots \\ \mathbf{s}(k+N) &= \mathbf{c}^T (\mathbf{x}(k+N) - \mathbf{x}_d) \end{aligned} \quad (104)$$

벡터 형식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}(k) \\ \mathbf{s}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{s}(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & & & \\ & \mathbf{c}^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{c}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_d \\ \vdots \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix} \right) \quad (105)$$

간단하게

$$\mathbf{S}_s = \mathbf{C}_s (\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_{ad}) \quad (106)$$

식 (88)를 대입하면 N 단계까지의 슬라이딩 변수에 대한 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_s &= C_s (A_a \mathbf{x}(k) + B_a \mathbf{U} - \mathbf{X}_{ad}) \\
 &= A_s \mathbf{x}(k) + B_s \mathbf{U} - D_s
 \end{aligned} \tag{107}$$

또한, 식 (90)을 통해 제어 입력 변화율 $\Delta \mathbf{U}$ 에 대한 예측된 슬라이딩 변수 벡터를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_s &= A_s \mathbf{x}(k) + B_s (E_u \mathbf{u}(k-1) + H_u \Delta \mathbf{U}) - D_s \\
 &= A_s \mathbf{x}(k) + B_{se} \mathbf{u}(k-1) + B_{sh} \Delta \mathbf{U} - D_s
 \end{aligned} \tag{108}$$

MPSMC는 MPC와 동일하게 목적 함수를 정의하고 목적 함수의 값을 최소로 하면서 식 (100)의 제약 조건을 만족하는 값을 최적화 기법을 통해 찾아나가게 된다. MPSMC의 목적함수는 다음과 같이 정의한다.

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{S}_s^T R \mathbf{S}_s + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{U}^T Q \Delta \mathbf{U} \tag{109}$$

3) 모델 예측 슬라이딩 모드 제어를 활용한 시뮬레이션

모델 예측 슬라이딩 모드 제어를 활용하여 UAV의 자세 제어 시뮬레이션을 진행한다. MPSMC를 활용하기 위해서는 선형 시스템이 요구되기 때문에, 식 (17)의 시스템을 $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ 에서 선형화한다. 식 (85)와 같이 선형화한 시스템에서 $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\eta}^T, \boldsymbol{\omega}^T]^T$ 으로 정의한다. 목적 함수는 식 (92)를 적용하며, 제약 조건은 제어 입력의 크기 제한을 고려하였다. 시뮬레이션을 위한 목적 함수의 가중 행렬, 최소, 최대 제어입력, 슬라이딩 변수의 게인행렬과 예측 지평선은 Table.7에 도시하였다. 이번 시뮬레이션에서는 제약 조건을 만족하는 것을 주요 목표로 정했기 때문에 외란은 고려하지 않는다.

Figure. (19)은 UAV의 자세에 대한 그래프이며, 각 자세 모두 약 1.5초 이후 목표 자세로 수렴하는 것을 볼 수 있다. Fig. (20)은 제어 입력에 대한 그래프이며, 제약 조건인 최대, 최소 제어 입력 내에서 제어 입력이 생성되는 것을 볼 수 있다. Fig. (21)은 목적 함수에 대한 그래프이며, 초반 약 0.7의 값이 나타나지만, 시뮬레이션이 진행되면서 목적 함수가 감소하는 것을

Table 7: Design parameters for MPSMC

Parameter	Value	Parameter	Value
R	$0.01 \cdot I_{3 \times 3}$	Q	$0.005 \cdot I_{3 \times 3}$
u_{min}	-0.05	u_{max}	0.05
\mathbf{c}	$[diag(5, 5, 8), I_{3 \times 3}]^T$	N	10

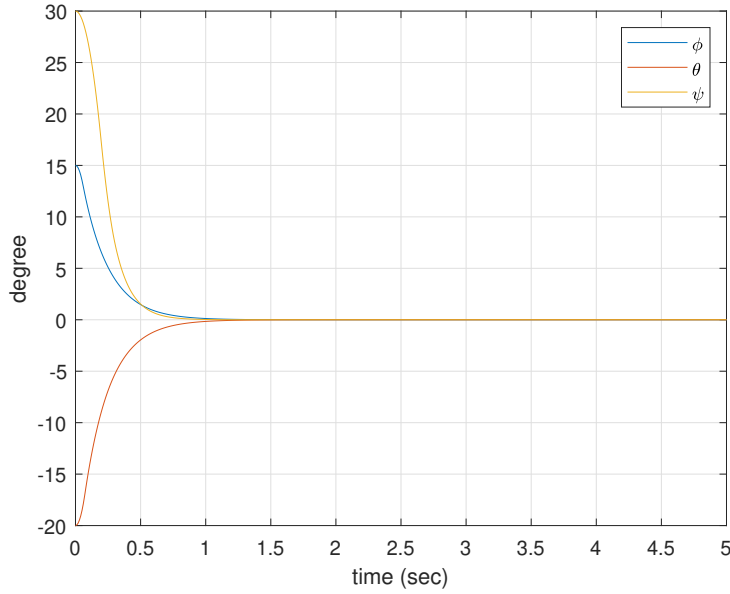


Figure. 19 Time histories of Euler angles using MPSMC

볼 수 있다. UAV의 자세가 목표 자세로 수렴한 이후에는 목적 함수가 0에 수렴하는 것을 알 수 있다. Fig. (22)는 슬라이딩 변수에 대한 그래프이다. 각 변수들이 모두 0으로 수렴하는 것을 볼 수 있으며, 제어 목표에 맞는 적절한 목적 함수임을 알 수 있다.

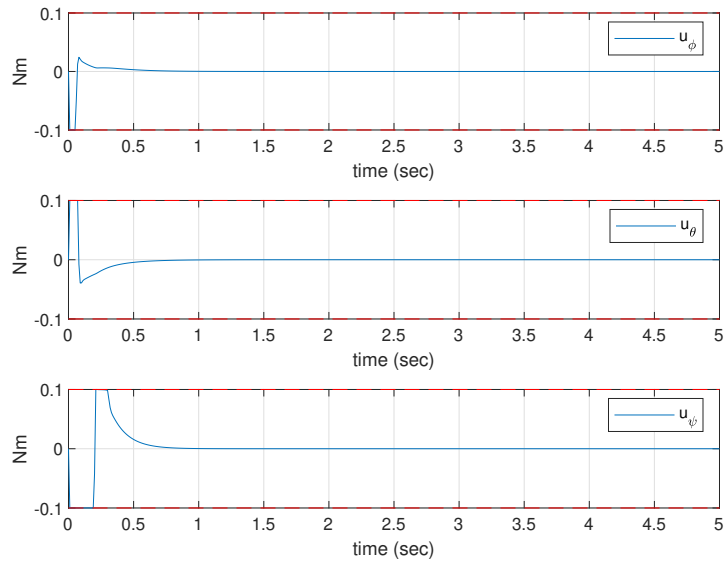


Figure. 20 Time histories of control input using MPSMC

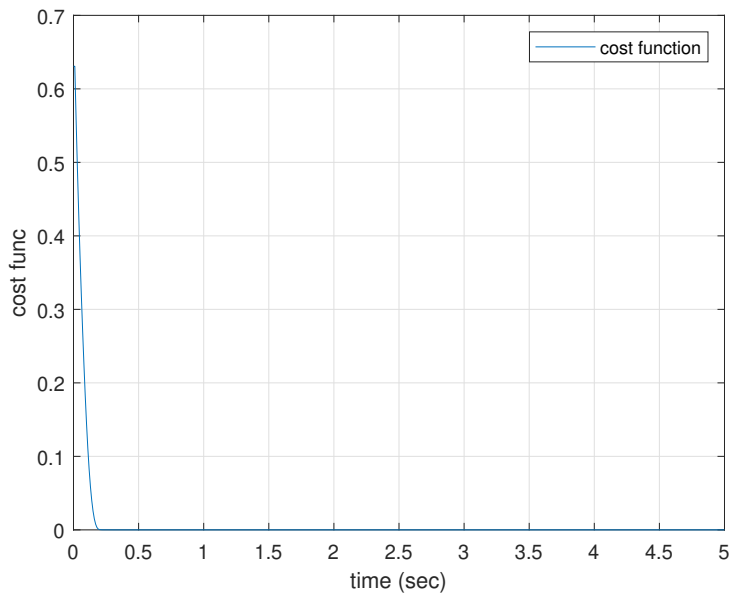


Figure. 21 Time histories of cost function using MPSMC

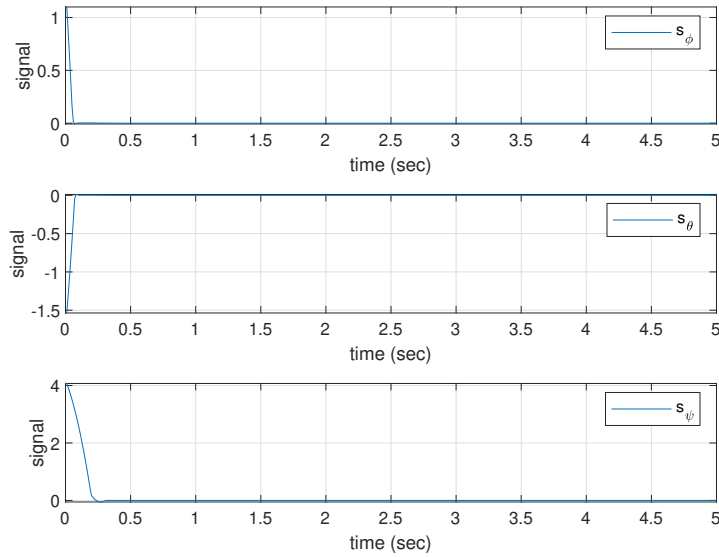


Figure. 22 Time histories of sliding variable using MPSMC

2. 각속도 제한을 고려한 제어 기법

영상 촬영, 화물 수송 등 임무에 따라 UAV의 급격한 움직임이 제한될 수 있다. 움직임을 제한하는 것은 각속도의 크기가 제한되는 것이며, 기존의 제어 기법으로 UAV를 제어하게 되면 수행할 수 없는 큰 각속도를 요구할 수 있으며, 이는 임무 실패 또는 UAV의 파손으로 이어질 수 있다. 따라서 각속도 크기 제약 조건을 고려한 제어 기법이 요구되며, 슬라이딩 모드 제어를 응용한 제한 슬라이딩 모드 제어 (Constrained Sliding Mode Control, CSMC)을 제안한다.

제한 슬라이딩 모드 제어를 설명하기 앞서, 이번 섹션에서는 UAV의 자세를 오일러각이 아닌 쿼터니언 (Quaternion, $[q \ q_4]^T \in \mathcal{R}^4$)을 사용하여 표현한다. 오일러각은 시뮬레이션에서 결과 그래프를 볼 때 좀 더 직관적으로 보기 위해 사용되며, 제어를 설계할 때 쿼터니언을 사용한다.

오일러 각에서 쿼터니언으로 변환하기 위한 식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\psi}{2}) - \cos(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\psi}{2}) \\ \cos(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\psi}{2}) + \sin(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\psi}{2}) \\ \cos(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\psi}{2}) - \sin(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\psi}{2}) \\ \cos(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\psi}{2}) + \sin(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\psi}{2}) \end{bmatrix} \quad (110)$$

반대로, 쿼터니언에서 오일러 각으로 변환하기 위한 식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left(\frac{2(q_4 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)} \right) \\ \sin^{-1} (2(q_4 q_2 - q_3 q_1)) \\ \tan^{-1} \left(\frac{2(q_4 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \right) \end{bmatrix} \quad (111)$$

쿼터니언에 대한 시간 변화율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}^\times + q_4 I_{3 \times 3}) \boldsymbol{\omega} \\ \dot{q}_4 &= -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (112)$$

쿼터니언에 대한 오차는 오일러각의 오차와 다른 정의를 가지며, 다음과 같이 쿼터니언 오차를 정의한다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_e \\ q_{e,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d,4} I_{3 \times 3} - \mathbf{q}_d^\times & -\mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_d^T & q_{d,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (113)$$

여기서, \mathbf{q}_d 와 $q_{d,4}$ 는 목표 쿼터니언이다.

쿼터니언으로 자세를 표현하면 슬라이딩 변수의 정의가 달라진다. 슬라이딩 변수는 쿼터니언 오차의 벡터 파트 \mathbf{q}_e 와 각속도로 표현한다[24].

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} + a\mathbf{q}_e \quad (114)$$

슬라이딩 변수가 $\mathbf{s} = 0$ 이 되고 충분한 시간이 지나면 쿼터니언 오차 \mathbf{q}_e 와 각속도 $\boldsymbol{\omega}$ 는 0이 된다.

자세에 대한 표현이 오일러각에서 쿼터니언으로 변경되고 동역학이 달라졌기 때문에 Lemma.1으로는 각 변수가 0으로 수렴하는 것을 설명할 수 없으며, Lemma.2에서 설명한다. UAV의 자세를 제어하기 위해 슬라이딩 변수를 시간에 대해 미분하면

$$\dot{s} = \dot{\omega} + a\dot{q}_e \quad (115)$$

식 (112)와 식 (17)를 대입하면

$$\dot{s} = J^{-1}(-\omega^\times J\omega + u) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_e^\times + q_{e,4}I_{3 \times 3})\omega \quad (116)$$

식 (58)의 도달 법칙을 대입하고 제어 입력에 대해 정리하면 쿼터니언으로 자세를 표현한 UAV의 자세 제어 입력을 구할 수 있다.

$$u = \omega^\times J\omega - J \left(\frac{1}{2}(\mathbf{q}_e^\times + q_{e,4}I_{3 \times 3})\omega - k_1 s - k_2 |s|^\epsilon \text{sgn}(s) \right) \quad (117)$$

Lemma 2 슬라이딩 변수 $s(t) = 0$ 을 만족하고 충분한 시간이 지나면, 쿼터니언 오차 \mathbf{q}_e 와 각속도 ω 는 0으로 수렴한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_e(t) = 0 \quad (118)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0 \quad (119)$$

proof 2 슬라이딩 변수가 0이 된다고 가정하면, 즉 $s = 0$ 이 되면 식 (115)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\omega(t) = -a\mathbf{q}_e(t) \quad (120)$$

위의 식을 식 (112)의 두 번째 식에 대입하면

$$\dot{q}_{e,4} = -a\frac{1}{2}\mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e \quad (121)$$

쿼터니언의 놈 (Norm)은 $\mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e = 1 - q_{e,4}^2$ 이기 때문에 우항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{q}_{e,4} = -a \frac{1}{2} (1 - q_{e,4}^2) \quad (122)$$

시간에 대해 적분하면 $q_{e,4}(t) = \tanh(\frac{a}{2}t)$ 이 되는 것을 알 수 있으며, 충분한 시간이 지난 후 $q_{e,4}$ 는 1에 수렴한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_{e,4}(t) = 1 \quad (123)$$

$q_{e,4}$ 가 1이 되면 쿼터니언 놈에 의해 \mathbf{q}_e 는 0이 되는 것을 알 수 있다. 또한, 슬라이딩 변수 \mathbf{s} 의 정의에 의해서 $\boldsymbol{\omega}$ 도 0이 된다.

1) 제한 슬라이딩 모드 제어

제한 슬라이딩 모드 제어는 각속도 제한이 있을 때 시스템을 용이하게 제어하기 위한 SMC 기반의 수정된 제어 기법이다. 이 제어 기법은 소개했던 다른 기법들과 다르게 슬라이딩 변수의 구조가 UAV의 상태에 따라 변형되는 형태를 띠고 있으며, 변형된 슬라이딩 변수에 대해 각각 다른 평형점을 가지고 있다. 슬라이딩 변수의 가변 구조를 통해 각속도 제약 조건이 있는 환경에서 조건을 만족하면서 UAV의 자세 명령을 수행할 수 있게 된다. UAV는 구조적 파손을 방지하거나 여러 임무를 안전하게 수행하기 위해 기동성이 제한되어 있다고 가정한다. 기동성 제약은 UAV의 각속도 제약으로 변환할 수 있으며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|\omega_i| \leq \omega_m \quad (124)$$

여기서, ω_i 는 UAV의 각 축에 대한 각속도이며, ω_m 은 UAV의 허용가능한 최대 각속도이다. 각속도 제한을 만족하기 위한 새로운 슬라이딩 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} + a \text{sat}_L(\mathbf{q}_e) \quad (125)$$

여기서 포화 함수 sat_L 은 다음과 같이 정의한다.

$$sat_L(\mathbf{q}_e) = [sat_L(q_{e,1}), \quad sat_L(q_{e,2}), \quad sat_L(q_{e,3})]^T \quad (126)$$

$$sat_L(q_{e,i}) = \min(L, |q_{e,i}|)sign(q_{e,i}) \quad (127)$$

$$L = \frac{\omega_m}{a} \quad (128)$$

L 은 0보다 큰 계인 a 와 최대 각속도 ω_m 으로 구성된 제한 변수이며, 함수 $\min()$ 은 두 요소를 비교하여 그 중 작은 값을 선택한다. 식 (125)의 슬라이딩 변수는 $\mathbf{s} = 0$ 일 때 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{q}_e = 0$ 과 $\boldsymbol{\omega} = -asat_L(\mathbf{q}_e)$ 의 두 개의 평형점을 가지고 있다. 첫 번째 평형점은 UAV의 자세 제어 목표와 관련있으며, 두 번째 평형점은 UAV가 주어진 각속도 제한 내에서 기동하도록 강제하는 것과 관련있다.

각속도 제한을 고려한 제어를 설계하기 위해 슬라이딩 변수를 시간에 대해 미분하면

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} + aD\frac{1}{2}(\mathbf{q}_e^\times + q_{e,4}I_{3 \times 3})\boldsymbol{\omega} \quad (129)$$

여기서,

$$D = diag(D_1, \quad D_2, \quad D_3) \quad (130)$$

$$D_i = \begin{cases} 1, & \text{if } -L \leq q_{e,i} \leq L \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (131)$$

D_i 는 함수 $sat_L()$ 을 미분한 것으로, L 과 $q_{e,i}$ 의 크기 비교를 통해 0또는 1의 값을 가지게 된다. 식 (17)와 (58)을 식 (129)에 대입하면, CSMC를 사용한 제어 입력을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{u} = - \left(-\boldsymbol{\omega}^\times J\boldsymbol{\omega} + aJD\frac{1}{2}(\mathbf{q}_e^\times + q_{e,4}I_{3 \times 3})\boldsymbol{\omega} + J(k_1\mathbf{s} + k_2|\mathbf{s}|^\epsilon sgn(\mathbf{s})) \right) \quad (132)$$

쿼터니언 오차 $q_{e,i}$ 가 L 보다 크면 $aJD\frac{1}{2}(\mathbf{q}_e^\times + q_{e,4}I_{3 \times 3})\boldsymbol{\omega}$ 항은 제거된다. 그렇지 않다면 항이 활성화되고 위의 제어 입력은 $q_{e,i}$ 와 ω_i 가 0으로 향하도록 작용한다. 즉, 제어 입력은 두 개의

평형점을 가지고, 각각의 역할을 수행한다. $D_i = 0$ 인 경우는 슬라이딩면의 첫 번째 평형점으로 향하기 위함으로, 제어 입력은 UAV의 허용 가능한 최대 각속도로 도달하도록 돕는다. 제어 입력의 첫 번째 작용으로 각속도가 최대 각속도로 도달하고 시간이 지난 후 $q_{e,i}$ 가 L 보다 작아지게 되면 두 번째 평형점으로 도달하도록 제어 입력의 형태가 변형되고 쿼터니언 오차와 각속도가 0이 되도록 제어한다.

2) 안정성 분석

제한 슬라이딩 모드 제어의 안정성을 분석하기 전에 슬라이딩 변수에 대한 분석을 진행한다. CSMC의 슬라이딩 변수는 식 (125)에서 먼저 정의하였고, 두 개의 평형점을 가지고 있다는 것을 설명하였다. 슬라이딩 변수와 평형점은 서로 밀접한 관련이 있는데, 각각 다른 평형점은 다른 슬라이딩 변수를 가지고 있기 때문이다. 식 (125)의 슬라이딩 변수는 다음과 같이 두 가지 형태의 슬라이딩 변수로 분류할 수 있다.

$$s_i = \omega_i + \omega_m \text{sign}(q_{e,i}) \quad (133)$$

$$s_i = \omega_i + a q_{e,i} \quad (134)$$

각 슬라이딩 변수는 L 과 $q_{e,i}$ 의 크기 비교를 통해서 나뉘게 되며, 나뉜 슬라이딩 변수는 서로 다른 평형점을 가지게 된다. 첫 번째 슬라이딩면은 각속도 ω_i 가 허용가능한 최대 각속도 ω_m 으로 수렴하는 지점을 평형점으로 가지고 있으며, 이 경우 D 의 정의에 따라 값은 0이 되게 된다. 두 번째는 쿼터니언 오차 $q_{e,i}$ 와 각속도 ω_i 가 0으로 수렴하는 것이 평형점이 되고, D 의 값이 1이 되면서 관련된 항이 나타나게 된다. 또한 두 번째 슬라이딩면으로 얻은 제어 입력은 쿼터니언을 활용하여 SMC의 제어 입력을 얻는 것과 동일하다.

설계한 제어를 사용한 시스템의 안정성을 확인한다. CSMC는 두 가지 형태의 슬라이딩면을 가지고 있기 때문에 각각의 면에 대해 안정성을 분석해야 한다. 식 (133)의 첫 번째 슬라이딩면에 대한 리아푸노프 후보는 다음과 같이 정의한다.

$$V_L = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (135)$$

시간에 대해 미분한 리아푸노프 후보에 식 (129)을 대입하면

$$\begin{aligned}\dot{V}_L &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\ &= \mathbf{s}^T \left(\dot{\boldsymbol{\omega}} + aD \frac{1}{2} (\mathbf{q}_e^\times + q_{e,4} I_{3 \times 3}) \boldsymbol{\omega} \right)\end{aligned}\quad (136)$$

위의 식에 식 (17)과 (132)을 대입하면

$$\begin{aligned}\dot{V}_L &= \mathbf{s}^T (J^{-1}(-\boldsymbol{\omega}^\times J \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u})) \\ &= \mathbf{s}^T (-k_1 \mathbf{s} + k_2 |\mathbf{s}|^\epsilon \text{sgn}(\mathbf{s})) \\ &= -k_1 \|\mathbf{s}\|^2 - k_2 \sum_{i=1}^3 |s_i| |s_i|^\epsilon < 0\end{aligned}\quad (137)$$

따라서 시간에 대해 미분한 리아푸노프 후보는 항상 음수가 되며, 첫 번째 슬라이딩면의 제어기에 대한 시스템은 안정하다.

이어서 식 (134)의 두 번째 슬라이딩면에 대한 리아푸노프 후보를 정의한다.

$$V_L = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (138)$$

첫 번째 슬라이딩면과 동일한 과정으로 안정성 분석이 진행되며, 위의 식을 시간에 대해 미분하고 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_L &= \mathbf{s}^T \left(J^{-1}(-\boldsymbol{\omega}^\times J \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}) + aD \frac{1}{2} (\mathbf{q}_e^\times + q_{e,4} I_{3 \times 3}) \boldsymbol{\omega} \right) \\ &= \mathbf{s}^T (-k_1 \mathbf{s} - k_2 |\mathbf{s}|^\epsilon \text{sgn}(\mathbf{s})) < 0\end{aligned}\quad (139)$$

첫 번째와 다르게 두 번째 슬라이딩면에서는 D 가 나타나게 되고, 식 (132)의 제어 입력을 대입하게 되면 항상 음수가 되는 것을 알 수 있다. 따라서 시스템은 안정하며, $-L \leq q_{e,i} \leq L$ 인 상태에서 슬라이딩 변수 s_i 는 두 번째 평형점으로 수렴하게 된다. 평형점으로 이동한 후에 Lemma2에서 증명된 것처럼 쿼터니언 오차와 각속도는 0이 된다.

3) 시뮬레이션

제한 슬라이딩 모드 제어를 활용하여 각속도 제한이 존재하는 환경에서 UAV의 자세 제어 시뮬레이션을 진행한다. 최대 각속도의 크기는 0.1 rad/s 로 설정하였으며, CSMC의 계인은 Table.8에 도시하였다.

Table 8: Design parameters for CSMC

Parameter	Value	Parameter	Value
ω_m	0.1 rad/s	a	8
k_1	5.5	k_2	2
γ	0.95	ϵ	0.95

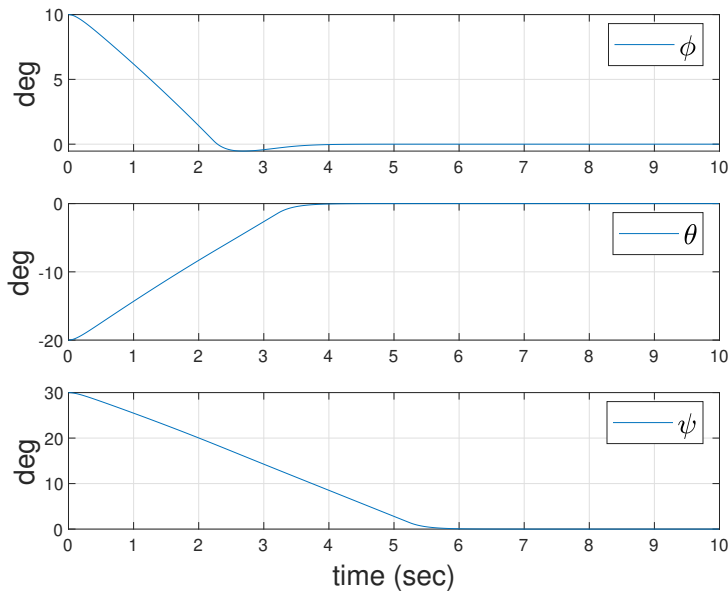


Figure. 23 Time histories of Euler angles using CSMC

Figure. (23)은 CSMC를 활용하여 UAV의 자세를 제어한 결과 그래프이다. 각속도 크기 제한으로 인해 목표 자세로 수렴하기까지의 시간이 다른 제어 기법에 비해 오래 걸리는 것을 볼 수 있으며, 자세가 모두 목표 자세로 수렴하는데 약 6초의 시간이 소요되었다. Fig. (24)은 UAV

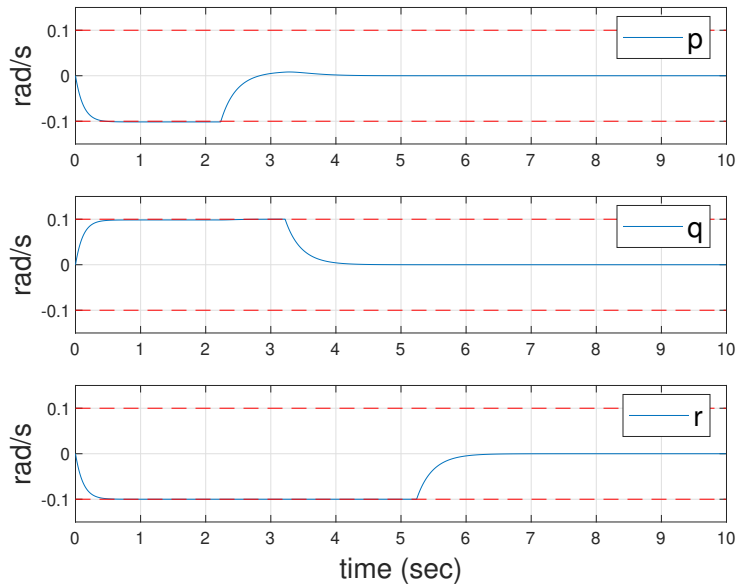


Figure. 24 Time histories of angular rate using CSMC

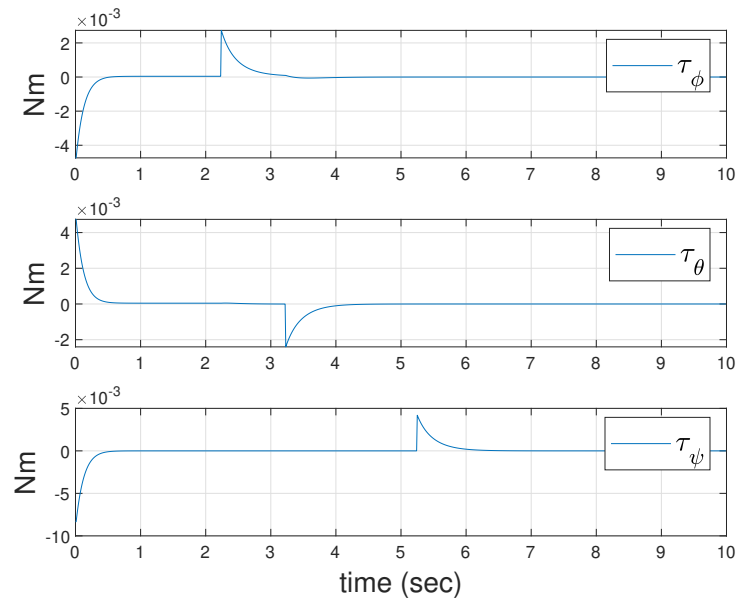


Figure. 25 Time histories of control input using CSMC

의 각속도에 대한 그래프이며, 초기 각속도가 0일 때 목표 자세로 추종하기 위해 허용가능한 최대 각속도인 0.1 rad/s 를 넘지않으면서 각속도가 움직이는 것을 볼 수 있다. UAV의 자세가 목표 자세로 수렴한 이후 각속도는 0이 되는 것을 볼 수 있으며, 각속도 제한을 고려하여 설계한 CSMC가 제어 목적에 맞게 잘 작동하고 있는 것을 확인하였다. Fig. (25)은 제어 입력에 대한 그래프이다. 시뮬레이션 초반에 목표 자세로 추종하기 위해 제어 입력이 발생하고, 최대 각속도로 도달한 이후 제어 입력이 0이 되면서 최대 각속도를 넘지 않도록 제어하는 것을 볼 수 있다. 이 부분을 제어하는 슬라이딩 변수는 식 (133)이 된다. 시뮬레이션이 진행되면서 목표 자세로 어느정도 수렴한 이후 각속도를 줄이기 위해 다시 제어 입력이 발생하는 것을 볼 수 있으며, 슬라이딩 변수가 식 (134)으로 변경되는 구간이다. 목표 자세로 수렴한 이후에는 제어 입력이 0이 되는 것을 볼 수 있다. 따라서 각속도 제한을 만족하면서 모델을 제어하기 위해 설계된 CSMC의 성능을 시뮬레이션을 통해 검증하였다.

VII. 결론

UAV는 다양한 임무에 활용되고 있으며, 필연적으로 바람과 같은 외부 교란, 추가적인 페이로드로 인한 모델 불확실성 등 험난한 자연 환경에서 임무를 수행할 수 있다. 본 논문에서는 UAV의 자세 제어를 위해 외부 교란과 모델 불확실성에 강인한 특징을 가지는 슬라이딩 모드 제어 기법을 적용하였다. 슬라이딩 모드 제어의 기본적인 개념을 설명하고 리아푸노프 이론을 통해 제어 기법의 안정성을 확인하였으며, 간단한 시뮬레이션을 진행하였다. 슬라이딩 모드 제어는 외부 교란 등에 의한 강인성을 보장하기 위해 활용된 도달 법칙의 부호 함수로 인해 채터링이라는 고주파의 떨림 현상이 나타나며, 이 문제를 해결하기 위해 수정된 경계층 제어, 근사 기법 등을 활용한 수정된 도달 법칙을 적용하였다. 수정된 도달 법칙이 잘 동작하는지 시뮬레이션을 통해 확인하였다. 기본적인 슬라이딩 모드 제어의 다른 단점으로는 모델이 목표 값으로 수렴하기 위해 무한한 시간이 걸린다는 단점이 있다. 유한 시간 내에 목표 값으로 수렴하는 것을 보장하기 위해 수정된 슬라이딩 변수를 활용한 터미널 슬라이딩 모드 제어, 빠른 터미널 슬라이딩 모드 제어 기법을 설명하고 각각의 제어 성능을 확인하기 위해 시뮬레이션을 진행하였다.

슬라이딩 모드 제어의 채터링을 문제를 해결하기 위한 수정된 도달 법칙은 외부 교란과 모델 불확실성에 대한 강인성이 저하된다는 문제가 있다. 이를 해결하기 위해 채터링이 감소되면서 강인성을 보장할 수 있는 슈퍼 트위스팅 알고리즘을 소개하였다. 슈퍼 트위스팅 알고리즘은 채터링의 원인인 부호 함수를 적분하여 사용함으로써 채터링의 감소시키면서, 슬라이딩 변수의 시간에 대한 2차 미분에서 부호 함수의 존재로 인해 강인성이 보장된다. 외란 등이 존재하는 환경에서 슈퍼 트위스팅 알고리즘의 안정성을 판별하기 위해 리아푸노프 이론을 적용하였으며, 안정하다는 것을 증명하였다. 또한, 시뮬레이션을 통해 UAV의 자세 제어를 위한 슈퍼 트위스팅 알고리즘의 제어 성능을 검증하였다.

UAV의 실제 비행에는 여러 가지 제약 조건이 존재할 수 있으며, 제약 조건에는 구동기의 물리적인 한계 등으로 인한 제어 입력 제한, 목표 촬영 등의 임무를 성공시키기 위한 각속도 제한 등이 있다. 이러한 제약 조건을 만족하면서 목표 자세로 수렴하기 위해 슬라이딩 모드 제어 기

법을 응용하여 개선된 제어 기법을 설계하였다. 첫 번째로, 제어 입력 제한이 존재하는 환경에서 UAV를 제어하기 위해 모델 예측 슬라이딩 모드 제어 기법을 소개하였으며, 이 기법을 통해 제어를 설계하고 시뮬레이션을 통해 제어 성능을 검증하였다. 두 번째로, 각속도 제한이 존재하는 환경에서 UAV를 제어하기 위해 제한 슬라이딩 모드 제어 기법을 설명하였다. 이 기법의 개념과 제어 원리를 설명하고 UAV의 자세 제어를 설계하였다. 설계한 제어기는 시뮬레이션을 통해 제어 성능을 확인하였다.

참고문헌

- [1] X. Wang, Z. Huang, G. Sui, H. Lian *et al.*, “Analysis on the development trend of future uav equipment technology,” *Academic Journal of Engineering and Technology Science*, vol. 2, no. 1, 2019.
- [2] H. Menouar, I. Guvenc, K. Akkaya, A. S. Uluagac, A. Kadri, and A. Tuncer, “Uav-enabled intelligent transportation systems for the smart city: Applications and challenges,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 55, no. 3, pp. 22–28, 2017.
- [3] J.-K. Park, A. Das, and J.-H. Park, “Application trend of unmanned aerial vehicle (uav) image in agricultural sector: Review and proposal,” *Korean Journal of Agricultural Science*, vol. 42, no. 3, pp. 269–276, 2015.
- [4] D. Cabecinhas, R. Cunha, and C. Silvestre, “A nonlinear quadrotor trajectory tracking controller with disturbance rejection,” *Control Engineering Practice*, vol. 26, pp. 1–10, 2014.
- [5] H. Liu, J. Xi, and Y. Zhong, “Robust attitude stabilization for nonlinear quadrotor systems with uncertainties and delays,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 7, pp. 5585–5594, 2017.
- [6] R. Xu and U. Ozguner, “Sliding mode control of a quadrotor helicopter,” in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2006, pp. 4957–4962.
- [7] C. Nicol, C. Macnab, and A. Ramirez-Serrano, “Robust neural network control of a quadrotor helicopter,” in *2008 Canadian conference on electrical and computer engineering*. IEEE, 2008, pp. 001 233–001 238.

- [8] T. Madani and A. Benallegue, “Backstepping control for a quadrotor helicopter,” in *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2006, pp. 3255–3260.
- [9] A. Mehta and B. Bandyopadhyay, *Frequency-shaped and observer-based discrete-time sliding mode control*. Springer, 2015.
- [10] R. Fessi, S. Bouallègue, J. Haggège, and S. Vaidyanathan, “Terminal sliding mode controller design for a quadrotor unmanned aerial vehicle,” in *Applications of sliding mode control in science and engineering*. Springer, 2017, pp. 81–98.
- [11] X. Yu and M. Zhihong, “Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 2, pp. 261–264, 2002.
- [12] F. Muñoz, I. González-Hernández, S. Salazar, E. S. Espinoza, and R. Lozano, “Second order sliding mode controllers for altitude control of a quadrotor uas: Real-time implementation in outdoor environments,” *Neurocomputing*, vol. 233, pp. 61–71, 2017.
- [13] H. Jayakrishnan, “Position and attitude control of a quadrotor uav using super twisting sliding mode,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 1, pp. 284–289, 2016.
- [14] J. Zhou, Z. Liu, and R. Pei, “Sliding mode model predictive control with terminal constraints,” in *Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation (Cat. No. 00EX393)*, vol. 4. IEEE, 2000, pp. 2791–2795.
- [15] Y. Wang, W. Chen, M. Tomizuka, and B. N. Alsuwaidan, “Model predictive sliding mode control: for constraint satisfaction and robustness,” in *Dynamic Systems and Control Conference*, vol. 56147. American Society of Mechanical Engineers, 2013, p. V003T44A005.
- [16] T. Luukkonen, “Modelling and control of quadcopter,” *Independent research project in applied mathematics, Espoo*, vol. 22, p. 22, 2011.

- [17] Y. Yang, “Vtol development for obstacle awareness and collision avoidance,” *Domestic Master’s Thesis Graduate School Chosun University*, 2018.
- [18] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, A. Levant *et al.*, *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014, vol. 10.
- [19] K. Runcharoon and V. Srichatrapimuk, “Sliding mode control of quadrotor,” in *2013 The International Conference on Technological Advances in Electrical, Electronics and Computer Engineering (TAECE)*. IEEE, 2013, pp. 552–557.
- [20] N. B. Cheng, L. W. Guan, L. P. Wang, and J. Han, “Chattering reduction of sliding mode control by adopting nonlinear saturation function,” in *Advanced Materials Research*, vol. 143. Trans Tech Publ, 2011, pp. 53–61.
- [21] G. Tarchala, “Influence of the sign function approximation form on performance of the sliding-mode speed observer for induction motor drive,” in *2011 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. IEEE, 2011, pp. 1397–1402.
- [22] S.-h. Jang, Y.-y. Yang, and H. Leeghim, “Performance analysis for quadrotor attitude control by super twisting algorithm,” *Journal of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences*, vol. 48, no. 5, pp. 373–381, 2020.
- [23] Y.-C. Liu and C.-Y. Lin, “Model predictive control with integral control and constraint handling for mechatronic systems,” in *Proceedings of the 2010 International Conference on Modelling, Identification and Control*. IEEE, 2010, pp. 424–429.
- [24] Z. Zhu, Y. Xia, and M. Fu, “Adaptive sliding mode control for attitude stabilization with actuator saturation,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 10, pp. 4898–4907, 2011.