



저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

2021년 2월
박사학위 논문

모드합성법과 수학적 방법을 이용한
연결보 진동해석 연구

조선대학교 대학원

선박해양공학과

양 재 형

모드합성법과 수학적 방법을 이용한 연결보 진동해석 연구

A study on the vibration analysis of connected beam
using Modal Synthesis method and mathematical method

2021년 2월 25일

조선대학교 대학원

선박해양공학과

양재형

모드합성법과 수학적 방법을 이용한 연결보 진동해석 연구

지도교수 윤 덕 영

이 논문을 공학 박사학위신청 논문으로 제출함

2020년 10월

조선대학교 대학원

선박해양공학과

양 재 형

양재형의 박사학위논문을 인준함

위원장	조선대학교 교수	<u>안 규 백</u> (인)
위 원	조선대학교 교수	<u>윤 덕 영</u> (인)
위 원	조선대학교 교수	<u>권 영 섭</u> (인)
위 원	조선대학교 교수	<u>주 성 민</u> (인)
위 원	현대삼호중공업 공학박사	<u>박 정 희</u> (인)

2020 년 12 월

조선대학교 대학원

- 목 차 -

목차	I
LIST OF Tables	IV
LIST OF Figures	V
ABSTRACT	VI
제 1 장 서론	1
제 1 절 연구 배경 및 필요성	1
제 2 절 연구 동향	4
제 3 절 연구 목적 및 방법	7
제 2 장 근사해석에 대한 방법론 검토	9
제 1 절 Beam Theory	9
제 2 절 Euler Beam 방정식	11
제 3 절 함수의 직교화	14
제 3 장 Single Beam 및 Connected Beam에 대한 Mode Shape 특성검토	15
제 1 절 고유진동수 비교	15
제 2 절 모드 형상 비교	16
1. The Property of Beam	
2. Single Beam Mode Shape (Length : 5m)	
3. Connected Structure Mode Shape	

제 4 장	파형가정함수	19
제 1 절	절 경계조건에 따른 파형가정함수 정의	19
1.	Single Beam 양단 경계조건	
2.	고정-고정 경계조건	
3.	고정-단순 경계조건	
4.	고정-자유 경계조건	
5.	단순-고정 경계조건	
6.	단순-단순 경계조건	
제 2 절	절 파형가정함수별 고유진동수 계산	69
1.	Beam 파형함수 계산조건	
2.	고유진동수 계산 결과	
제 5 장	\cap Shape Connected Structure	78
제 1 절	절 파형함수를 이용한 고유진동수 계산	78
1.	고유진동수 계산을 위한 모드합성법	
2.	에너지 산식	
3.	파형함수를 이용한 \cap Shape Connected Structure 고유진동수 계산	
제 6 장	\sqsubset Shape Connected Structure	88
제 1 절	절 파형함수를 이용한 고유진동수 계산	88
1.	고유진동수 계산을 위한 모드합성법	
2.	에너지 산식	
3.	파형함수를 이용한 L Shape Connected Structure 고유진동수 계산	
제 2 절	절 수학적 함수를 이용한 고유진동수 계산	100
1.	고유진동수 계산	
2.	에너지 산식	

3. 수학적 함수를 이용한 L Shape Connected Structure 고유진동수 계산

제 7 장 계산결과 특성검토 및 토의.....	110
제 8 장 결론	117
참고문헌	119

LIST OF Tables

Table 3.1. The properties of Single Beam	16
Table 3.2. Mode Shape of Single Beam	16
Table 3.3. Mode Shape of Connected Beam ($L_A : L_B = 3m : 7m$)	17
Table 3.4. Mode Shape of Connected Beam ($L_A : L_B = 5m : 5m$)	18
Table 3.5. Mode Shape of Connected Beam ($L_A : L_B = 7m : 3m$)	18
Table 4.1. Boundary Condition of Beam	19
Table 4.2. Wave Function of Single Beam	69
Table 4.3. Properties & cross section of Single Beam	70
Table 4.4. Comparison Nature Frequency of C-C Boundary Condition	71
Table 4.5. Comparison Nature Frequency of C-S Boundary Condition	72
Table 4.6. Comparison Nature Frequency of C-F Boundary Condition	73
Table 4.7. Comparison Nature Frequency of S-S Boundary Condition	74
Table 5.1. Wave Function of \cap Shape Connected Structure.....	84
Table 5.2. Properties & cross section of \cap Shape Connected Structure.....	84
Table 5.3. Comparison Natural Frequency of \cap Shape Connected Structure...	85
Table 5.4. Comparison mode shape of \cap Shape Connected Structure ($L_A : L_B = 5m : 5m$)	86
Table 6.1. Wave Function of L Shape Connected Structure.....	93
Table 6.2. Properties & cross section of L Shape Connected Structure	93
Table 6.3. Comparison Natural Frequency of L Shape Connected Structure ...	94
Table 6.4. Comparison Natural Frequency of L Shape Connected Structure	96
Table 6.5. Mathematical Function of 'L' Shape Connected Structure	106
Table 6.6. Properties & cross section of 'L' Shape Connected Structure	106
Table 6.7. Comparison Natural Frequency of 'L' Shape Connected Structure	107
Table 6.8. Comparison Natural Frequency of 'L' Shape Connected Structure	108
Table 7.1. Comparison Nature Frequency of Single Beam	110
Table 7.2. Comparison Nature Frequency of \cap Shape Connected Structure ...	113
Table 7.3. Comparison Nature Frequency of L Shape Connected Structure ...	115

LIST OF Figures

Figure 1.1. SCR 탑재 선박 (a)탑재 전(신조) (b)탑재 후(Retrofit)	1
Figure 1.2. SCR 탑재 Funnel 도면 (a)Side Elev. View (b) SEC. View	3
Figure 2.1. Beam Theory (a) Euler Beam (a) Timoshenko Beam	10
Figure 2.2. 외팔보 변형	11
Figure 2.3. 미소변형 자유물체도	11
Figure 2.4. 함수의 직교	14
Figure 4.1. Comparison of 1st Nature Frequency	75
Figure 4.2. Comparison of 2nd Nature Frequency	75
Figure 4.3. Comparison of 3rd Nature Frequency	76
Figure 5.1. The configuration of connected structure	78
Figure 6.1. The configuration of connected structure	88
Figure 6.2. The configuration of connected structure	100

ABSTRACT

A study on the vibration analysis of connected beam
using Modal Synthesis method and mathematical method

Yang Jae-Hyoung

Advisor : Prof. Yoon Duck-Young, Ph.D.

Department of Naver Architecture and
Ocean Engineering

Graduate School of Chosun University

In accordance with the recent trend of eco-friendly systems in the shipbuilding market, new equipment such as tanks for LNG propulsion, SCR (Selective Catalytic Reduction), and EGR (Exhaust Gas Recirculation) systems that can treat harmful elements of exhaust gas are arranged in hull structure near the ship's main engine. And equipment and structures are inevitably exposed to vibration due to the main exciting force during ship operation. If a vibration problem occurs after construction or delivery, there is a large loss in terms of ship quality such as reinforcement cost and delivery delay. Therefore, it is necessary to review the anti-vibration design to prevent such vibration problems in the design stage. Analytical method using Rayleigh-Ritz method has not been widely used recently due to intensive use of FEM. However, analytical method is still useful, if suitable mode functions can be provided. Vibration analysis of many local structures in ships such as tanks and supports for equipment can be simplified by breaking up into smaller sub systems which are related through geometrical conditions and natural conditions at junctions. In this study, Polynomials for simple supports and fixed supports are suggested to represent each subsystem. It is found that suggested mode functions improve convergence so that component mode synthesis together with suggested mode functions can

widely be used. Frequently, only specific sub-component is more concerned for vibration analysis. In this case, the suitable boundary conditions to consider the static and dynamic coupling from the other sub-component through junctions should be provided. However, the suggestions for such boundary conditions are hardly found. In this study, a boundary condition that can be easily calculated through elimination of generalized coordinates by imposing the satisfaction of each mode at junctions as a constraint condition is proposed.

제 1 장 서론

제 1 절 연구 배경 및 필요성

선체 구조는 Beam·Plate 등 단순한 부재를 이용하여 제작한 조립체로써, 갑판·탱크·격벽·Support 등과 같은 Local Structure는 주요 특정 기진원(주기관 및 프로펠러 등에서 기인하는 기진원)에 의한 과도 진동 응답을 나타낼 수 있다. Local Structure에서 발생하는 과도 진동은 구조에 직접적인 피로 문제를 야기하거나, 탑재 장비들의 오작동의 원인이 될 수 있는 요소가 되기도 한다.

특히, Beam은 선박에서 중요한 구조 요소로써, 설계단계에서의 방진설계를 위한 깊게 검토해야 하는 대상이다. Beam은 기본적인 구조 요소로써 조선분야를 비롯한 다양한 엔지니어링 분야에서 진동 분석에 많은 관심이 있어왔다 [1~41].

최근 선박에 요구되는 친환경 시스템은 주요 기진력(엔진, 프로펠러 등)과 가까운 선미부 및 기관실에 배치되어 진동 문제에 노출될 수 밖에 없다. 특히 최근 IMO 규제 발효에 의해 탑재가 진행되고 있는 SCR (Selective Catalytic Reduction), EGR (Exhaust Gas Recirculation) 등은 배기가스 유해물질 저감 장치로 벙커-C를 연료로 사용하는 선박은 필수적인 장비이다.



Figure 1.1. SCR 탑재 선박 (a)탑재 전(신조) (b)탑재 후(Retrofit)

현재 이와 같은 친환경 설비들은 공급 부족으로 인하여 많은 선박들이 신조 시에 탑재가 불가능한 상황으로, Figure 1.1.(a)와 같이 건조 후 탑재를 위한 Ready 상태로 설계·건조되고 있다. 문제는 탑재 Ready 설계 시 장비 메이커가 확정되지 않

은 경우가 많아 진동 문제를 검토할 수 있는 정보가 없어, 장비 탑재 후 진동 문제가 야기될 수 있다.

특히, 상선의 경우 일반적으로 친환경 설비 외에도 화물 적재 공간 확보를 위해 선박 운항과 관련되는 대부분의 설비가 선미 기관실 구역과 갑판 등에 설치됨에 따라 진동문제에 노출 될 수 밖에 없다. 건조단계, 혹은 인도 후에 진동으로 인한 문제가 발생 할 경우 수리비용, 인도 지연 등 선박 품질 측면에서 손실이 발생하게 된다. 따라서, 저진동 고품질의 선박을 건조하기 위해서는 초기설계 단계부터 장비 및 주변 Structure에 대한 방진설계가 필요하다.

선박 진동 해석 업무는 구조, 유체, 추진시스템 등에 대한 복합적인 전문 지식과 물리적인 현상 규명이 필요한 감쇠효과, 기진력에 대한 평가 등에 대한 노하우 등을 필요로 한다. 또한, 전산 시스템의 발전에 따른 선체구조에 대한 고유진동 해석은 MSC/Nastran, Ansys 등과 같은 범용 유한요소해석 프로그램을 이용하여 전산 해석을 실시하고 있지만, 전산해석을 위한 Modeling 작업, 해석 및 결과 분석 등에 많은 시간이 소요되어 방진 설계안을 반영할 수 있는 적정 공정시간 확보에 애로사항이 발생하게 된다. 또한, 해석 결과에 있어서도 숙련자와 비숙련자 간에 정확도의 차이가 발생하며, 업무 수행 중에 실수에 의한 결과 오류가 발생할 수도 있다.

특히, 후탑재 공사나 수리공사의 경우 절대 공기가 매우 짧아 탑재 설비에 대한 전산해석을 이용한 방진설계가 현실적으로 불가능한 상황이다. 실제로 중소조선소에서 Retrofit을 진행하고 있는 운항선들의 경우 진동 문제를 충분히 검토할 수 있는 여건이 마련되지 않아 방진설계에 많은 어려움을 겪고 있다.

범용프로그램을 이용한 전산해석의 애로사항을 해결하기 위해 대형조선소의 경우 In-House 프로그램을 자체, 혹은 위탁개발하여 사용[43~46]하고 있으나, 이 역시 프로그램 확장성, 사용성 및 접근성 등의 제약조건으로 인하여 사용에 한계가 발생하고 있다. 대형 조선에서 사용하는 In-House 프로그램들은[43~46] 엄밀해를 갖는 Beam 함수를 기본 함수로 적용하고 있어, 실질적인 국부 연결형 Structure에 대해서는 효율적인 방진설계를 도모하기 곤란하다. In-House 프로그램 탑재 및 Structure의 고유진동수 계산을 파형함수를 적용하여 연산과정을 단순화하기 위한 Beam 함수 성질을 갖는 다항식 연구 [1~41]가 진행되어 왔다. 하지만 기존의 Beam Structure에 대한 고유진동수의 계산을 위한 대부분의 연구에 있어 Simple Beam에 대해 Euler Beam, Timoshenko Beam 등의 엄밀해 조건만을 이용하여 계산하고 있고, 윤, 박 등 [16]과 같이 Connected Structure에 대한 연결부 경계조건까지 고려한

연구는 없었다.

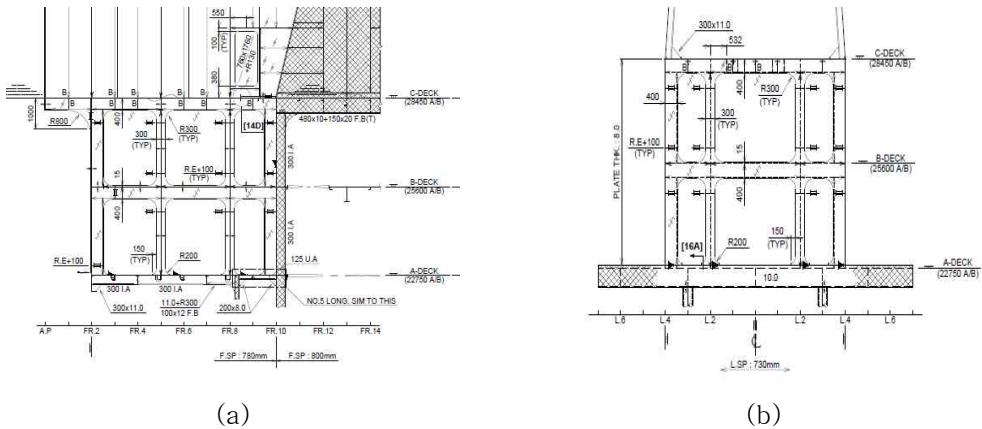


Figure 1.2. SCR 탑재 Funnel 도면 (a)Side Elev. View (b) SEC. View

선체 구조는 Figure 1.2.와 같이 복잡한 형태의 구조를 갖고 있으며, 고유진동수 계산을 위해서는 이에 대한 단순화 작업이 필요하다. Structure의 단순화는 ‘Single Beam’, ‘ㄱ’, ‘L’ Shape Structure 등에 대해 부재 상호간의 연관관계를 확인하여 단순화가 이루어지게 된다. Plate Structure의 경우에도 단면 형상은 Beam으로 이상화하여 파형함수를 도입 후 이를 Plate Structure로 확장하여 고유진동수 계산을 수행하게 된다.

따라서, 단순화된 구조에 대한 다양한 경계조건 및 특성 등을 반영하여 빠르게 계산할 수 있는 고유진동수 계산 방법이 필요한 실정이다.

제 2 절 연구 동향

Beam은 중요한 구조요소로서 이에 대한 진동 분석은 엔지니어나 연구원들에게 있어서 중요한 부분이다. 진동 이론에 대한 많은 교재에서도 Beam의 진동 분석에 대한 사항은 기본 요소로 다루어지고 있으며, 연구 논문도 다수 존재[1~41]하고 있다.

동적 하중을 받는 보는 구조적인 진동과 소음을 야기하게 되며, 이로 인해 발생하는 문제로 승선원들에 불쾌감을 주거나, 구조의 내구성 등에 영향을 미치게 된다. 또한, 진동이 일정 한도를 초과하게 되면 구조적 파손으로도 나아갈 수 있어, 구조의 안전성 측면에서도 Beam의 진동분석은 중요한 요소이다.

일반적으로 Structure의 진동해석은 Ansys, MSC Nastran/Patran 등과 같은 범용 프로그램을 이용하고 있지만, 최근에는 대형 조선소나 선급 등에서 자체 또는, 위탁(공동) 개발되어 제안되는 In-House 프로그램에[43~46] 의해서도 간단한 Structure에 대한 고유진동해석을 수행할 수 있다. 하지만 이러한 방법들은 사용법이 어렵고, 일반적인 접근이 어려운 것이 현실이다.

전산해석에 주로 적용되는 FE-BEM은 거의 모든 형태의 구조에 대한 진동해석에 적용 가능한 방법이지만, 모델링 및 분석 등에 시간이 많이 소요된다. 또한, 숙련자와 비숙련자에 의해 결과에도 차이가 발생한다.

In-House 프로그램[43~46]에 적용되는 고전적 근사해법(Rayleigh-Ritz 방법 등)은 이론적 배경이 유한요소법과 동일한 방법으로서 적용 가능한 Structure의 형상이 사각형 및 원형 등으로 제한적이나, 해석 영역에 대한 기하학적인 분할 과정이 필요 없으므로 유한요소법과 대등한 정확도는 보장되면서 훨씬 적은 노력으로 진동해석을 수행할 수 있는 방법이다. 또한, 해석적 방법과 결합하여 무한 또는 유한 유체 영역에 대한 Plate, 혹은 Beam Structure에 대한 회전 및 탄성지지 등과 같은 Structure의 실제 경계조건을 보다 엄밀하게 고려할 수 있다. 이에 고전적 근사해법은 선체와 같이 대부분의 국부 구조가 Beam, Plate 등 단순한 부재로 제작된 경우 진동해석에 효율적으로 적용할 수 있다.

이러한 근사 해석적 계산 방법의 경우 주로 Beam 함수를 이용한 파형함수를 사용하고 있으나, 연산 과정이 복잡하여 이를 간소화하기 위한 Beam 함수 성질을 갖는 모드 가정함수를 이용한 다항식 연구가 많이 진행되고 있으며, Euler Beam 함수를

많이 이용하였다.

그러나, 양단 단순지지 조건을 갖는 Euler Beam 함수를 제외하고는 수식이 복잡하여 실제 연산에 있어서 많은 어려움이 있었다. 이에 계산의 간편화를 위한 연구와 연산 효율을 향상하기 위하여 다항식을 이용하려는 연구가 이루어졌는데, 주요 연구 동향은 다음과 같다.

Chun[1]은 한쪽 끝은 단순 지지되고, 반대쪽은 자유단의 경계조건을 갖는 Bernoulli-Euler Beam에 대한 고유진동수 및 mode shape에 대한 연구를 수행했으며, Hurty[10, 11]의 경우 오일러 빔 방정식 특성을 이용하여 항공기 날개와 같은 외팔보 형태의 연결 구조 진동 해석을 위해 각 부재의 기능과 연결부의 구속 조건을 정의하여 동적 분석을 시행하였다. H.K. Kim, M.S. Kim[14] 등은 일반적 제한된 경계 조건을 가진 Beam의 고유진동수를 푸리에 급수를 사용하여 찾는 방법을 제시하였고, 서와 김[16]은 Timoshenko Beam을 적용한 Cantilever Beam에 대해 두 가지 경계조건을 적용한 편미분 방정식에 따른 고유진동수 해석을 시행하여 동일한 결과가 도출됨을 증명하였다. Naguleswaran[22]은 탄성 지지구조에서의 Euler Beam의 고유진동수를 결정하는 일반적인 방법에 대해 연구를, Lee와 Saibel[23]은 중간 탄성 또는 강성 지지대, 집중된 질량 및 스프링 질량의 조합을 사용하여 구속된 빔의 진동에 대한 주파수 방정식을 쉽게 찾을 수 있는 일반적인 표현을 개발하였다. Bhat[24]는 박판 유추 구조계에 대해 Euler Beam 함수 성질을 갖는 다항식을 Gram-Schmidt 직교화 방법을 사용하여 도출하고 고전적 경계조건을 갖는 직사각형 박판의 고유진동 해석에 이를 적용하였다.

Ercoli와 Laura[25]는 여러 가지 중간 경계 조건을 갖는 Euler Beam에 대한 진동 해석을 수행하였으며, 이, 윤[28] 등은 일정체적을 갖는 Timoshenko 보에 대한 회전관성과 전단변형을 고려한 자유진동에 대해 연구하였다. 이 연구를 통해 세장비가 매우 작거나 집중하중이 크게 작용하여 전단변형 영향이 크게 작용하는 경우 Timoshenko Beam 이론 적용의 필요함을 증명하였다. Goel[34]은 Laplace 변환을 사용하여 질량이 집중되고 양쪽 끝이 hinge에 의해 지지되고, 회전에 대해 탄성적으로 구속된 Beam의 진동을 연구했다. Abbas[35,36]는 유한 요소 방법을 사용하여 Timoshenko Beam의 특성에 대한 회전 관성, 전단 변형 및 루트 유연성의 결합 효과를 실험적으로 조사하고 그 결과를 이론적 결과와 비교했다. 일반 모드 모양과 고유진동수에 대한 표현에 대해 Rao와 Mirza[37] 및 Maurizi[38] 등은 일반적으로 구

속된 Euler Beam의 경우, Bapat 및 Bapat[39], 병진 및 비틀림 스프링에 의해 여러 지점에서 지지되고 추가로 집중된 질량을 전달하는 빔의 고유 진동수를 계산하기 위해, 전송 매트릭스 방법을 기반으로 효율적인 접근 방식을 개발했다.

한[47,48] 등은 경계조건이 동일한 Euler Beam 함수를 조합하여 진동파형 함수를 정의하고 Plate에 대한 진동해석을 수행하였으며, 김[49] 등은 Timoshenko Beam 함수 성질을 갖는 다항식을 이용하여 Plate와 Beam의 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 고유진동 해석을 수행하였다. 정[50] 등은 판유추 구조계의 경계조건을 단순 및 고정지지의 중간 상태로 보고 적절한 경계조건을 부여하기 위해 Structure 양단에 회전탄성지지 조건을 고려하였으며 전단변형 및 회전관성 효과가 매우 큰 선체 이중저 판구조 등의 진동 해석을 위해 Timoshenko Beam 함수 성질을 갖는 다항식 도출 방안을 제시하였다.

상기의 주요 연구사례를 통해 Beam 함수 성질을 갖는 직교 다항식을 사용할 경우 Beam 함수를 직접 사용했을 경우와 비교하여 대등한 정확도의 진동해석을 수행할 수 있을 뿐만 아니라 연산의 복잡성을 매우 간소화 시킬 수 있음을 알 수 있다. 그러나 이처럼 고유진동수 계산에 있어 적절한 Single Beam에 대한 다양한 형태(다점 지지, 경계조건 단순화, 단면적 변화 등)에서의 간단한 계산방법 혹은, 파형함수를 찾기 위한 연구, Euler Beam과 Timoshenko Beam에 대한 비교 등 그동안 많이 수행되었지만, Connected Beam의 경계조건까지 고려한 고유진동수 계산 방법에 대한 연구는 많지 않은 실정이다.

윤과 박[42]의 경우 연결형 Beam과 Plate의 연결구조의 경계조건을 고려하여 고유진동수 계산방식을 연구하였으며, 본 연구에서는 해당 연구에 대해 확장하고자 한다.

제 3 절 연구 목적 및 방법

선박의 구조 및 장비 손상을 유발하고 승조원의 안락성을 저해하는 선박진동은 설계단계에서 고유진동 특성 파악 및 기진력에 대한 진동 응답 예측 등의 진동 해석을 수행하고, 방진 대책을 수립하여 공진회피가 필요하다.

최근 재료공학의 발달로 구조재료의 경량화와 고강도화가 실현되어 다양한 형상 및 형태를 갖는 거대 구조의 설계 및 시공이 가능하게 되었다. 선박에서도 구조체의 자중을 줄이면서 외력에 대한 저항능력을 증가시키기 위한 구조적인 연구를 많이 진행하여 경량 선체를 갖는 선박이 많이 건조되고 있다. 이와 더불어 친환경 시스템 요구에 따른 추진시스템 및 선형 등의 변화는 기존과는 다른 진동문제를 야기하고 있다. 이미 Global Vibration에 대한 예측 기술은 시운전을 통해 획득된 데이터를 바탕으로 상당히 신뢰도 있는 기술적 향상을 이루어 왔으나, 주요 기진원과 연결되어 있는 Local Structure에 대한 진동문제에 대해서는 설계단계에서 방진설계 검토를 위한 효율적인 계산 방법이 필요한 실정이다.

선박과 같이 복잡한 Super Structure의 경우 수치 해석적인 방법과 실험적인 방법 모두 Simple Structure의 해석 또는 실험에 비해 많은 계산시간과 노력이 필요하다. 따라서 복잡한 Super Structure를 여러 개의 간단한 부분구조로 나누고, 각 부분구조에 대한 해석 또는 실험 결과를 적절한 결합조건을 적용하여 재처리하는 방법이 필요하다.

복잡한 Super Structure에 대한 신뢰성 있는 방진설계를 위해서는 Structure의 Mass, Stiffness 등의 특성치를 비롯하여, 연결부에 대한 경계조건까지 고려하는 것이 중요하다. 특히 연결부에 대한 경계조건에 있어서는 특정하기가 어려워 이에 대한 본 연구에서는 다양한 경계조건을 부여하여 최적의 경계조건을 추정하였다.

본 연구에서는 Connected Structure의 진동특성을 분석하기 위하여, 우선적으로 구조요소의 기본 구성 요소인 Single Beam에 대한 다양한 조건의 파형함수를 정의하였다. 정의된 Single Beam의 파형형수는 Connected Structure의 연결부 거동형상에 대해 특성과 경계조건에 적용하여 고유진동수를 계산하는 방식으로 연구를 수행하였다.

복잡한 Super Structure의 해석에 있어서 계산의 효율성 향상을 위한 단순화를 위한 과정이 필요하며, 본 논문에서는 Connected Structure에 대한 해석을 위하여

전산해석에서 주로 사용되는 CMS 방법을 적용하여 해석 모델을 단순화하였다. 본 연구에서는 다양한 Local Structure의 고유진동수 해석의 정밀도 및 방진 설계 효율성을 제고하기 위하여 다양한 형태의 경계조건을 부여하여, 특성 파형함수를 도출하고, 고유진동수를 계산하였다.

먼저 2장에서는 근사해석적 방법론을 이용한 고유진동수 계산을 위한 이론들을 검토하였으며,

3장에서는 Connected Structure에 대한 파형함수 정의를 위해 FEA를 통해 Single Beam를 비롯하여 Connected Structure 2개의 유형(‘ㄱ’ Shape Connected Structure, ‘L’ Shape Connected Structure)에 대한 Mode Shape 특성을 고찰하였다. 3장에서 확인된 Connected Structure의 Mode Shape 특성을 바탕으로 5장과 6장에서 각각 ‘ㄱ’ Shape Connected Structure와 ‘L’ Shape Connected Structure에 대해 연결부분의 경계조건을 고려한 파형함수를 정의하였다.

4장에서는 양단 경계조건 변화에 따른 Single Beam의 진동 특성을 확인하기 위하여 경계조건에 따른 파형함수를 정의 후 계산하였다. 여기서 사용되는 양단경계조건은 기하학적 경계조건(Geometric Boundary Condition, 필수경계조건, 이하 GBC)과 자연경계조건(Natural Boundary Condition, 이하 NBC) 등이다. 특히, 본 논문 6장 ‘L’ Shape Connected Structure에 대한 경계조건을 갖는 부재의 파형함수 정의를 위해 다양한 형태의 경계조건을 적용하여 파형함수를 정의하였다.

5장과 6장에서는 각각 ‘ㄱ’ Shape Connected Structure와 ‘L’ Shape Connected Structure에 대해 연결부분의 경계조건을 고려한 파형함수를 검토하였다. 연결부분에 대한 경계조건 검토 시 Single Beam에서와 유사한 방법을 부여하여, Natural Boundary Condition 조건에 따른 고유진동수 결과를 검토하였다. 파형함수의 정의는 4장에서 정의된 다양한 형태의 경계조건을 부여하여 정의한 Euler Beam에 대한 파형함수를 조합하여 사용하였다.

각 장에서의 수치적 계산은 Matlab과 Octave를 이용하였으며, 계산 결과는 범용 프로그램인 MSC Nastran/Patran (이하 FEA)에서 얻어진 결과와 비교하여 신뢰성을 검증하였다.

제 2 장 근사해석에 대한 방법론 검토

제 1 절 Beam Theory

막대 형상을 지닌 Structure의 횡방향으로의 처짐을 모사하기 위한 공학적 이론들은 이미 오래전부터 연구되어 왔다. 그 중에서 가장 기초가 되는 Euler Beam 이론은 부재 내 두께방향으로의 횡전단 변형을 무시하고 단순히 굽힘에 의한 변형만을 반영하고 있다.

해석 방법론에 관련된 논문이나 문헌들을 검토한 결과 일반적으로 파형함수를 이용한 고전적 근사해법에 의한 진동 해석연구에 있어서는 Timoshenko Beam 방정식이나 Euler Beam 방정식을 이용하고 있다.

Timoshenko Beam 이론에서는 Beam의 처짐과 Beam의 기울기를 미지수로 하고 있으며, 그 결과 Beam 요소는 한 절점에서 Beam의 기울기를 자유도로 가지고 된다. 반면 횡전단 변형율을 무시한 Euler Beam에서는 Beam의 기울기와 단면의 기울기가 같다고 가정하기 때문에 Beam의 기울기를 별도 미지수로 하지 않는다.

Euler Beam의 가장 큰 특징은 다음과 같다.

1. Beam 은 균일한 성분을 갖는다.
2. 단면의 응력은 굽힘 방향으로 선형적으로 변하고, 모든 단면의 중심에서 0이다. (즉, 중심축에 수직인 단면은 변형 후에도 수직이라는 가정에 의해, 전단 변형은 무시된다.) 이를 다시 설명하면, 보의 재질은 선형적이고, 균질하며 등방성임으로 후크의 법칙을 따른다.
3. 축 방향 힘은 없다.
4. 변형 후에도 단면의 변화가 없다.
5. 특정 단면에서의 굽힘모멘트는 해당 위치에서의 편향된 형상의 2차 도함수에 따라 선형적으로 변함에 따라, 단면의 변화는 없다.
6. 적용된 하중은 Beam의 중립 축에 직각이며, 고유 평면에 작용한다.
7. z축에 대한 질량관성모멘트와 전단변형은 무시한다.

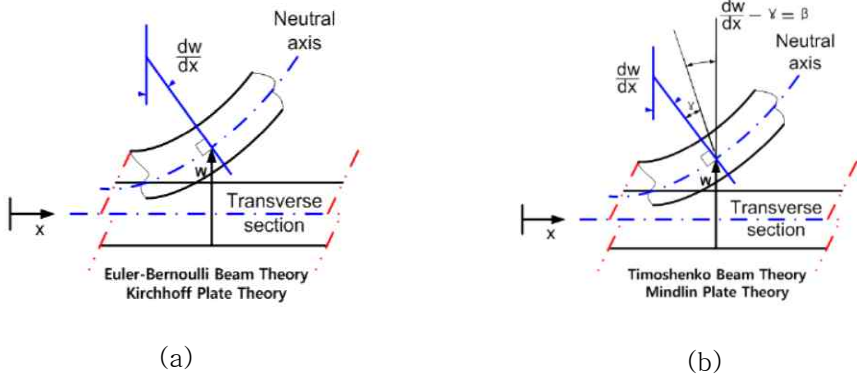


Figure 2.1. Beam Theory (a) Euler Beam (b) Timoshenko Beam

Timoshenko Beam는 횡 전단 변형을 포함한다. 따라서 이 이론은 변형 전 중심축이 수직인 평면은 변형 후에는 중심축에 수직이 아니다. 이로 인해 횡 방향의 전단 변형을 고려할 경우에는 이 이론을 사용하게 된다.

반면에 Euler Beam는 두 개의 Beam가 연결되는 경우, 변형 시 연속적인 이동 변위와 회전 변위를 갖어야 한다. 즉, Beam의 연결 절점에서 이동 변위와 회전 변위는 동일하다. 따라서 이 이론은 변형 전 변형 전 중심축에 수직인 평면은 변형 후에도 중심축에 수직으로 남는다는 가정에 기반한 이론이다.

하지만 부재의 길이에 대한 상대적인 두께비가 증가할수록 두께 방향으로의 전단 변형은 증가하기 때문에 Euler Beam 이론의 정확성이 다소 감소하게 된다. 이러한 이유로 Euler Beam함수를 이용하는 경우에는 단면과 길이의 비에 대한 고려가 필요하다.

일반적으로 Timoshenko Beam 이론은 세장비가 작은 Beam의 진동 문제나 교차의 진동 문제가 중요한 경우에 적용되기도 하지만 그 해석 과정이 다소 복잡하다. 그러나 실제 적용되고 있는 대부분의 부재는 세장비가 비교적 크고 저차의 고유진동수가 주된 관심 영역인 경우가 많기 때문에 상대적으로 해석 과정이 간단한 Euler Beam이론이 주로 이용되고 있다. 이에 따라 본 논문에서도 세장비가 다소 큰 Beam의 저차에 영역에 대한 관심영역에 대한 진동문제에 대한 해석이 주 관심이기 때문에 Euler Beam 이론을 적용하고자 한다.

제 2 절 Euler Beam 방정식

Beam 형상의 가느다란 부재의 역학적 거동을 많은 가정을 통해 가장 단순하게 수학적으로 표현한 Euler Beam 이론을 토대로 하는 1차원 Beam 요소이다. 이 이론에서는 부재 내 두께방향으로의 횡전단 변형을 무시하고 단순히 굽힘에 의한 변형만을 반영하고 있다. 하지만, 구조의 횡 전단 변형에너지가 무시되기 때문에 두께가 길이에 비해 현저히 작지 않은 경우에는 정확도가 떨어지는 단점이 있다. 하지만 Euler Beam 이론은 이론적인 해답을 제공함에 있어서 공학적인 많은 분야에서 Structure의 처짐량을 계산할 때 참고가 되는 해를 제공해 준다.

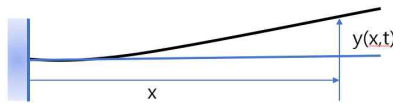


Figure 2.2. Cantilever Beam 변형

위 Figure 2.2.는 Cantilever Beam의 변형을 보여준다. Beam의 연속체 상에서 미소요소에 대해 좌표를 부여하여 자유물체도를 그리면 아래의 Figure 2.3.와 같다.

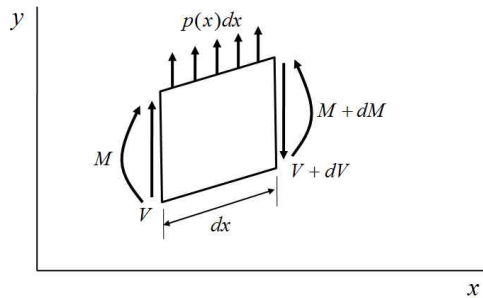


Figure 2.3. 미소변형 자유물체도

$$\text{(여기서, } dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx, dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \text{ 이다.)}$$

Figure 2.3.의 자유물체도에 근거하여 상하(Y축) 및 회전 방향(θ) 운동방정식을

구하면 다음과 같다.

1) Y축 방향 운동에너지

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V + dV - V = dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (2-1)$$

2) θ 방향 운동에너지

$$\begin{aligned} I\alpha &= M + dM - M + (V + dV) \frac{dx}{2} + V \frac{dx}{2} \\ &= dM + V dx \end{aligned} \quad (2-2)$$

Y축에 대한 방정식을 다시 정리하면, 식 (2-3)와 같다.

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2-3)$$

여기서는 단면의 회전에 의한 관성효과를 무시하는 Euler Beam 이론을 이용하고 있으므로 $I = 0$ 이 된다. 이를 θ 방향 방정식 (2-2)에 적용하면, 다음의 식 (2-4) 이 된다.

$$dM + V dx = 0 \rightarrow V = - \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2-4)$$

이 식을 식(2-3)에 대입하여 정리하며, 다음의 식(2-5)와 같다.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = p(x) \quad (2-5)$$

또한, Euler Beam 이론에서 전단변형을 무시할 수 있으므로, 다음과 같은 굽힘모멘트와 곡률과의 관계식을 얻을 수 있다.

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2-6)$$

이 관계식을 식(2-5)식에 대입하면

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = p(x) \quad (2-7)$$

와 같이 정리된다. 자중하에서 정적 평형위치에 관해 진동하는 Beam에서는 단위 길이당 힘은 질량과 가속도로 인한 관성력과 같다. Figure 4.에 보인 바와 같이 관

성력은 $p(x)$ 와 같은 방향이므로 조화 운동을 가정하면 다음과 같이 된다.

$$p(x) = \rho w^2 y \quad (2-8)$$

여기서 ρ 는 Beam의 단위 길이당 질량이다. 이 관계를 이용하면 Beam의 횡진동 방정식은 (2-9) 방정식과 같다.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \rho w^2 y = 0 \quad (2-9)$$

급힘 강성 EI 가 상수인 특별한 경우에 위의 방정식을 다시 쓰면

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - \rho w^2 y = 0 \quad (2-10)$$

이다. 그리고

$$\beta^4 = \rho \frac{w^2}{EI} \quad (2-11)$$

을 대입하면 균일보 진동에 대한 4차 미분 방정식을 얻게 된다.

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \beta^4 Y = 0 \quad (2-12)$$

식 (2-12)에 대한 그 일반해는 다음과 같이 알려져 있다.

$$Y(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \quad (2-13)$$

이 일반해에 주어진 경계조건을 적용하면, 대상 시스템에 대한 고유진동수를 구할 수 있는 파형함수를 구할 수 있다.

제 3 절 함수의 직교화

함수의 직교화는 독립을 위한 충분조건이다. 이를 다시 설명하면, 직교하면 독립이지만, 독립이라고 반드시 직교는 아니라는 것이다. 하지만 직교한다는 것만 증빙하면, 어떤 물리량이든 서로 독립된 특성들로 분리해서 기술이 가능하게 된다.

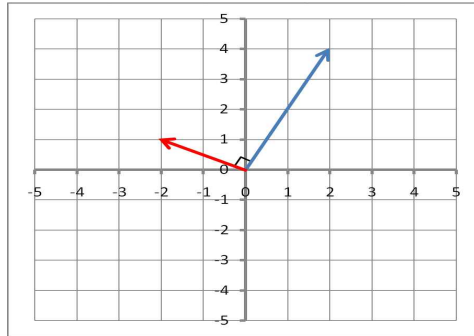


Figure 2.4. 함수의 직교

Figure. 2.4.에서 두 벡터는 독립이면서 직교한다. 이는 다음의 식(2-14)과 같이 표현할 수 있고, 이를 ‘두 벡터의 내적이 0 이면 직교한다.’ 라는 의미이다.

$$(u,v) = 0 \tag{2-14}$$

함수의 직교는 함수의 내적으로 확인할 수 있다. 이를 식(2-15)과 같이 표현하면, 다음의 방정식(2-15)와 같이 표현할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \tag{2-15}$$

이는 두 개의 함수 $f(x), g(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 방정식(2-15)의 조건을 만족하면 두 함수는 서로 직교한다는 의미가 된다.

특히 두 벡터가 직교하면서 그 크기가 1일 때 단위 직교 (Orthonormal) 한다고 한다. 크기가 1이 되면 각 특성들을 표현하고 비교하기가 쉬워진다.

제 3 장 Single Beam 및 Connected Beam에 대한 Mode Shape 특성 검토

제 1 절 고유진동수 비교

Single Beam에 비해 Connected Structure에 대한 고유진동수 계산은 부재 연결 부분에서의 경계조건에 대한 정의 문제로 인하여, 보통의 경우 Connected Structure을 단일 구조로 이상화하여 고유진동수를 계산하고 있다. 하지만 이러한 해석 방식은 Connected Structure에 대한 해석에 있어 한계가 있다고 판단된다.

FEA를 통한 연결형 구조에서의 수평부재 (L_A)과 수직부재 (L_B)에 대한 Mode Shape을 확인해보면, 길이비에 따른 특징을 확인할 수 있다.

먼저, γ Shpae Connected Structure의 경우 $L_A : L_B = 1 : 1$ 인 경우, 차수에 따라 고정-고정 경계조건과 고정-단순 경계조건 등이 차례로 나타남을 알 수 있다. 또한, 길이가 짧아지는 경우, 고정-고정 경계조건에 가까운 형상이 나타난다.

L 형 Connected Structure의 경우, 연결지점에서의 변위로 인하여 Mode Shape에 대한 구분이 어려운 점이 있다. 이러한 점을 감안하여 Mode Shape을 추정하면, $L_A : L_B = 1 : 1$ 에서 고정-단순 경계조건과 고정-자유 경계조건을 유추할 수 있다. 또한, γ 형 Connected Structure와는 달리, 길이가 짧아지는 경우, 저차에서는 고정-단순 경계효과가 잘 나타나지 않으나, 고차로 진행할수록 수평부재에 고정-단순 경계조건의 형상이 나타난다.

Beam의 연결형 구조는 수평부재와 수직부재 간의 상호 연성 작용에 의해 고유진동수 해석에 어려움이 따르며, 연결부에 대한 경계조건 및 빔의 특성치 등이 고려되어야 신뢰성 있는 해석이 가능할 것으로 판단된다.


제 2 절에서는 Single Beam와 Connected Structure 구조의 Mode Shape에 대해 FEA 결과에 대해 확인하였다.

제 2 절 모드 형상 비교

1. The Property of Beam

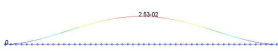


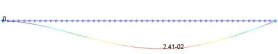
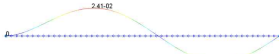
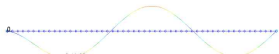
Baem의 Mode Shape 특성 분석을 위한 Beam Properties에 대해 Table 3.1.에 나타내었다. 해당 Properties는 Single Beam과 Connected Structure의 본 논문의 해석에서 공통으로 적용된다.

Table 3.1. The Properties of Single Beam

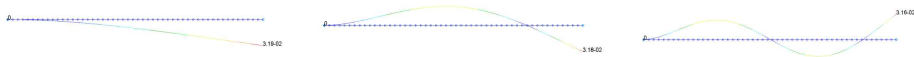
Category	Properties	Cross section
Density [kg/m ³]	7850	
Area [m ²]	0.1	
Young`s modulus [N/m ²]	2.1e11	
Moment of inertia [m ⁴]	3.33e-4	

2. Single Beam Mode Shape (Length : 5m)

Table 3.2. Mode Shape of Single Beam

구분	1차	2차	3차
고정 고정			
고정 단순			

고정
자유



3. Connected Structure Mode Shape

Table 3.3. Mode Shape of Connected Structure ($L_A : L_B = 3m : 7m$)

구분	1차	2차	3차
ㄱ Shape			
L Shape			

Table 3.4. Mode Shape of Connected Structure ($L_A : L_B = 5m : 5m$)

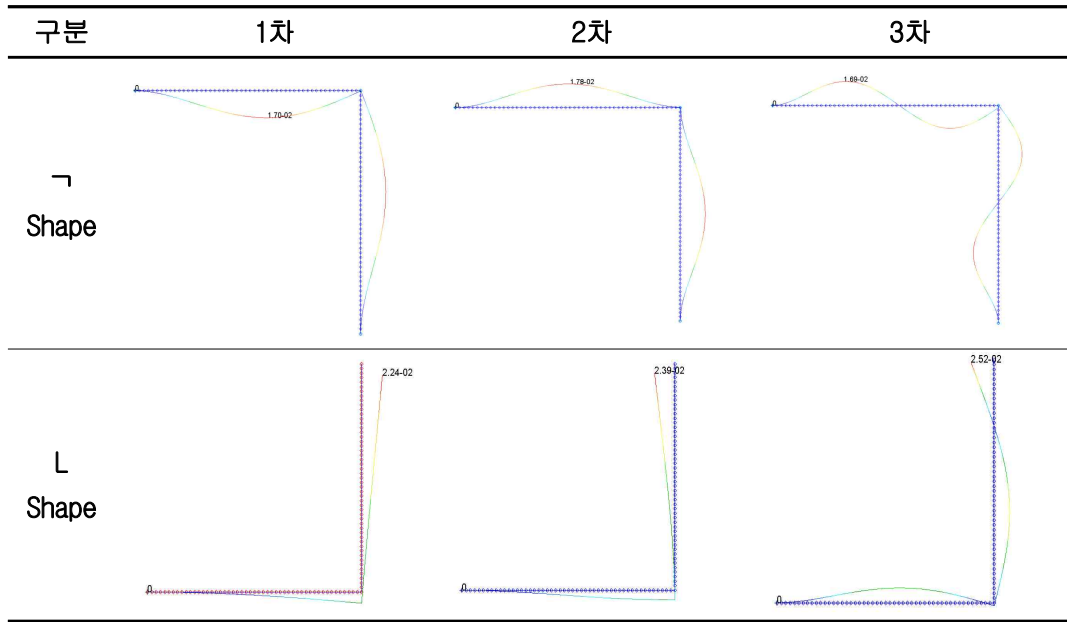
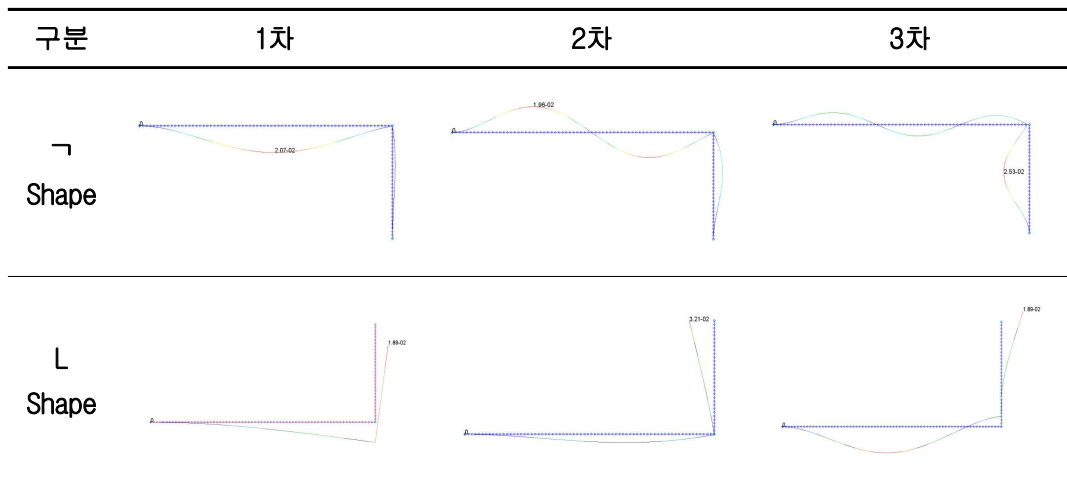


Table 3.5. Mode Shape of Connected Structure ($L_A : L_B = 7m : 3m$)



제 4 장 파형가정함수

제 1 절 경계조건에 따른 파형가정함수 정의

1. Single Beam 양단 경계조건

경계조건 유형별 파형함수는 다음의 Euler Beam 함수 성질을 갖는 4차 방정식을 기본으로 사용하였으며, Beam 파형함수 정의에 사용된 경계조건 유형은 Table 4.1. 와 같이 정의하였다.

여기서 정의된 파형함수는 Connected Beam의 파형함수 정의에 적용하여 계산된다.

Table 4.1. Boundary Condition of Beam

BC	GBC	NBC
고정-고정 (C-C)	$y(0) = 0$	
	$y(l) = 0$	
	$\frac{dy}{dx}(0) = 0$	-
	$\frac{dy}{dx}(l) = 0$	
고정-단순 (C-S)	$y(0) = 0$	
	$y(l) = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2}(l) = 0$
	$\frac{dy}{dx}(0) = 0$	
고정-자유 (C-F)	$y(0) = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2}(l) = 0$
	$\frac{dy}{dx}(0) = 0$	$\frac{d^3y}{dx^3}(l) = 0$

단순-고정 (S-C)	$y(0) = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0$
	$y(l) = 0$	
	$\frac{dy}{dx}(l) = 0$	
단순-단순 (S-S)	$y(0) = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0$
	$y(l) = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2}(l) = 0$

* C : Clamp , S : Simple , F : Free

* BC : Boundary Condition

* GBC : Geometric Boundary Condition , NBC : Natural Boundary Condition

상기의 Table 4.1.을 이용하여, 양단 경계조건을 부여하여 기본 파형함수를 정의하였다. 경계조건 부여 시 NBC를 별도로 부여하여, 파형함수를 유도하여 결과를 함께 비교하였다. 유도된 파형함수를 이용한 계산결과는 신뢰성 검증을 위해 FEA 결과와 비교하였다.

본 장에서 Simple Beam에 대해 여러 유형의 파형함수를 정의한 이유는

첫째, Boundary Condition 중 NBC에 의한 고유진동수 영향을 확인하기 위해서이다. 동일 Boundary Condition에 의한 함수일 경우 NBC 조건에 따라 파형함수의 형태가 상이함에 따라, 이에 따른 고유진동수 결과의 차이를 확인이 필요하다.

둘째, L Shape Connected Structure의 자유 경계조건을 갖는 부재에 대한 파형함수 정의를 위함이다. 해당 Structure의 경우 γ Shape Connected Structure과는 다르게 자유 경계조건이 부여되는 수직부재에서의 파형함수 정의가 어려워, 여러 조건의 파형함수를 조합하여 최적의 파형함수 조건을 구하기 위함이다.

2. 고정-고정 경계조건

고정-고정 경계조건의 함수를 $\psi(x)$ 라 정의하고, 양단에 다음의 경계조건을 적용하여, 기본 파형함수를 구하였다. Clamp-Clamp Beam의 함수에서의 경계조건은 필수 경계조건만 적용되었다.

파형함수형태	GBC	NBC
4차 방정식	$\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$ $\psi'(0) = 0$, $\psi'(1) = 0$	-

가. 4차 방정식 파형함수

- 기본함수

$$\psi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \quad (4-1)$$

- 양단경계조건

BC	GBC	NBC
고정-고정 (C-C)	$\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$ $\psi'(0) = 0$, $\psi'(1) = 0$	-

* C-C : Clamp-Clamp

양단 경계조건을 기본함수 (4-1)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\psi(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\psi(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$\psi'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\psi'(1) = 0 \rightarrow 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = a_4$, $a_3 = -2a_4$ 를 기본함수 (4-1)식에 대입하면,

$$\psi_1(\xi) = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2$$

$$\psi_1(\xi) = \xi^2(\xi - 1)^2 \tag{4-2}$$

와 같이 고정-고정 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 에너지 산식을 적용하여 고유진동수 계산 시 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리하여 표현하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad , \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \tag{4-3}$$

$$\psi_1(\eta) = A_1(\eta + 1)^2(\eta - 1)^2$$

$$\psi_1(\eta) = A(\eta^4 - 2\eta^2 + 1) \tag{4-4}$$

2차 모드 이상의 고정-고정 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-5)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\psi_k = A_k \left[\psi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \psi_{k-i} \right] \tag{4-5}$$

(A_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-5)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \psi_i \cdot \psi_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \tag{4-6}$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-5)를 이용한 고정-고정 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-7)을 통해 구할 수 있다.

$$\psi_2(\eta) = A_2[\psi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \psi_1] \tag{4-7}$$

방정식 (4-7)식 양변에 ψ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-9)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot d\eta = A_2 \int_{-1}^1 [\psi_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \psi_1^2] d\eta = 0 \quad (4-8)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \psi_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \psi_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-9)$$

방정식 (4-7) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 A_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \psi_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\psi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \psi_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-10)$$

(A_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-9),(4-10)에서 구한 계수들을 방정식 (4-7)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 고정-고정 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-11)을 통해 구할 수 있다.

$$\psi_3(\eta) = A_3[\psi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_2 - a_{32} \cdot \psi_1] \quad (4-11)$$

방정식 (4-11) 양변에 ψ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \psi_2 \cdot \psi_3 \cdot d\eta = A_3 \int_{-1}^1 [\psi_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_2^2 - a_{32} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2] d\eta = 0 \quad (4-12)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \psi_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \psi_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-13)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-11)식 양변에 ψ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \psi_1 \cdot \psi_3 \cdot d\eta = A_3 \int_{-1}^1 [\psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 - a_{32} \cdot \psi_1^2] d\eta = 0 \quad (4-14)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \psi_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-15)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-11)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 A_3 계수를 구할 수 있다.

$$A_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \psi_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\psi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_2 - a_{32} \cdot \psi_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-16)$$

(A_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-13),(4-15) 및 (4-16)에서 구한 계수들을 방정식 (4-11)식에 대입하면 3차 모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 방정식 (4-5)를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

3. 고정-단순 경계조건

고정-단순 경계조건인 함수를 $\phi(x)$ 라 정의하고, 양단에 다음의 경계조건을 적용하여, 기본 파형함수를 구하였다. 고정-단순 Beam의 함수에서의 경계조건은 필수경계조건과 자연경계조건이 모두 적용되면, 조합을 통해 4차와 3차 방정식의 기본 파형함수를 구하였다.

파형함수형태	GBC	NBC
4차 방정식	$\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ $\phi'(0) = 0$	$\phi''(1) = 0$
3차 방정식	$\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ $\phi'(0) = 0$	-

가. 4차 방정식 파형함수

· 기본함수

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-17)$$

· 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
고정-단순 (C-S)	$\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ $\phi'(0) = 0$	$\phi''(1) = 0$

* C-S : Clamp-Simple

양단 경계조건을 기본함수 (4-17)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식

을 구하면 아래와 같다.

$$\phi(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\phi'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\phi(1) = 0 \rightarrow a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$\phi''(1) = 0 \rightarrow 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = \frac{3}{2}a_4$, $a_3 = -\frac{5}{2}a_4$ 를 기본함수 (4-17)식에 대입하면

$$\phi_1(\xi) = \xi^4 - \frac{5}{2}\xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2$$

$$\phi_1(\xi) = \xi(\xi - 1)(2\xi^2 - 3\xi) \quad (4-18)$$

와 같이 고정-단순 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 에너지 산식을 적용하여 고유진동수 계산 시 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리하여 표현하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-19)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1(\eta + 1)^2(\eta - 1)(\eta - 2)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1(\eta^4 - \eta^3 - 3\eta^2 + \eta + 2) \quad (4-20)$$

2차 모드 이상의 고정-단순 경계조건인 파형 함수는 다음의 방정식 (4-21)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\phi_k = B_k \left[\phi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \phi_{k-i} \right] \quad (4-21)$$

(B_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-21)에서 구한 파형함수의 운동방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \phi_i \cdot \phi_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \quad (4-22)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-21)를 이용한 고정-단순 경계조건인 2차 모드 파형함수

는 방정식 (4-23)을 통해 구할 수 있다.

$$\phi_2(\eta) = B_2[\phi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1] \quad (4-23)$$

방정식 (4-23)식 양변에 ϕ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-25)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = B_2 \int_{-1}^1 [\phi_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1^2] d\eta = 0 \quad (4-24)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \phi_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \phi_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-25)$$

방정식 (4-23) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 B_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$B_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \phi_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\phi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-26)$$

(B_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-25),(4-26)에서 구한 계수들을 방정식 (4-23)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 고정-단순 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-27)을 통해 구할 수 있다.

$$\phi_3(\eta) = B_3[\phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1] \quad (4-27)$$

방정식 (4-27) 양변에 ϕ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot d\eta = B_3 \int_{-1}^1 [\phi_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2^2 - a_{32} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2] d\eta = 0 \quad (4-28)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \phi_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \phi_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-29)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-27)식 양변에 ϕ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \phi_1 \cdot \phi_3 \cdot d\eta = B_3 \int_{-1}^1 [\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1^2] d\eta = 0 \quad (4-30)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \phi_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-31)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-27)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 B_3 계수를 구할 수 있다.

$$B_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \phi_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-32)$$

(B_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-29),(4-31) 및 (4-32)에서 구한 계수들을 방정식 (4-27)식에 대입하면 3차모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-21)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 방향식을 구할 수 있다.

나. 3차 방정식 파형함수

- 기본함수

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-33)$$

- 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
고정-단순 (C-S)	$\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ $\phi'(0) = 0$	-

* C-S : Clamp-Simple

양단 경계조건을 기본함수 (4-33)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\phi(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\phi'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\phi(1) = 0 \rightarrow a_2 + a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = -a_3$ 를 기본함수 (4-33)식에 대입하면

$$\phi_1(\xi) = \xi^3 - \xi^2$$

$$\phi_1(\xi) = \xi^2(\xi - 1) \quad (4-34)$$

와 같이 고정-단순 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재 정리하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-35)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1(\eta + 1)^2(\eta - 1)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1(\eta^3 + \eta^2 - \eta - 1) \quad (4-36)$$

2차 모드 이상의 고정-단순 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-37)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\phi_k = B_k[\phi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \phi_{k-i}] \quad (4-37)$$

(B_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (3-37)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \phi_i \cdot \phi_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \quad (4-38)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 (4-37)식을 이용한 고정-단순 경계조건의 2차 모드 파형함수는 (4-39)식을 통해 구할 수 있다.

$$\phi_2(\eta) = B_2[\phi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1] \quad (4-39)$$

(4-39)식 양변에 ϕ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-41)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = B_2 \int_{-1}^1 [\phi_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1^2] d\eta = 0 \quad (4-40)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \phi_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \phi_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-41)$$

(4-39) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 B_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$B_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \phi_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\phi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-42)$$

(B_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-41),(4-42)에서 구한 계수들을 (4-39)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구

할 수 있다.

또한, 고정-단순 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-43)을 통해 구할 수 있다.

$$\phi_3(\eta) = B_3[\phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1] \quad (4-43)$$

방정식 (4-43) 양변에 ϕ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot d\eta = B_3 \int_{-1}^1 [\phi_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2^2 - a_{32} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2] d\eta = 0 \quad (4-44)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \phi_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \phi_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-45)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-43)식 양변에 ϕ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \phi_1 \cdot \phi_3 \cdot d\eta = B_3 \int_{-1}^1 [\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1^2] d\eta = 0 \quad (4-46)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \phi_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-47)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-43)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 B_3 계수를 구할 수 있다.

$$B_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \phi_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-48)$$

(B_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-45),(4-47) 및 (4-48)에서 구한 계수들을 방정식 (4-11)식에 대입하면 3차모

드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-37)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

4. 고정-자유 경계조건

고정-자유 경계조건의 함수를 $\theta(x)$ 라 정의하고, 양단에 다음의 경계조건을 적용하여, 기본 파형함수를 구하였다. 고정-자유 Beam의 함수에서의 경계조건은 필수경계조건과 자연경계조건이 모두 적용되면, 조합을 통해 4차, 3차 그리고, 2차 방정식의 기본 파형함수를 구하였다.

파형함수형태	GBC	NBC
4차방정식	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta'''(1) = 0$ $\theta''(1) = 0$
3차 방정식 1형	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta''(1) = 0$
3차 방정식 2형	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta'''(1) = 0$
2차 방정식	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	-

가. 4차 방정식 파형함수

- 기본함수

$$\theta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-49)$$

- 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
고정-자유 (C-F)	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta'''(1) = 0$ $\theta''(1) = 0$

* C-F : Clamp-Free

양단 경계조건을 기본함수 (4-49)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\theta''(1) = 0 \rightarrow 2a_1 + 6a_3 + 12a_4 = 0$$

$$\theta'''(1) = 0 \rightarrow 6a_3 + 24a_4 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = 6a_4$, $a_3 = -4a_4$ 를 기본함수 (4-49)식에 대입하면

$$\theta_1(\xi) = \xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2$$

$$\theta_1(\xi) = \xi^2(\xi^2 - 4\xi + 6) \tag{4-50}$$

와 같은 고정-자유 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \tag{4-51}$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta+1)^2(\eta^2 - 6\eta + 17)$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2 + 28\eta + 17) \tag{4-52}$$

2차 모드 이상의 고정-자유 경계조건인 파형 함수는 다음의 방정식 (4-53)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\theta_k = C_k \left[\theta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \theta_{k-i} \right] \tag{4-53}$$

(C_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-53)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \theta_i \cdot \theta_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \tag{4-54}$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-53)를 이용한 고정-자유 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-55)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_2(\eta) = C_2[\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1] \quad (4-55)$$

방정식 (4-55)식 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-57)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = C_2 \int_{-1}^1 [\theta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-56)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-57)$$

방정식 (4-55) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 C_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-58)$$

(C_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-57), (4-58)에서 구한 계수들을 방정식 (4-55)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 고정-자유 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-59)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_3(\eta) = C_3[\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1] \quad (4-59)$$

방정식 (4-59) 양변에 θ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2^2 - a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2] d\eta = 0 \quad (4-60)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-61)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-59)식 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-62)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-63)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-59)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 A_3 계수를 구할 수 있다.

$$C_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-64)$$

(C_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-61), (4-63) 및 (4-64)에서 구한 계수들을 방정식 (4-59)식에 대입하면 3차모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-53)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

나. 3차 방정식 제1 파형함수

· 기본함수

$$\theta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-65)$$

· 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
고정-자유 (C-F)	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta''(1) = 0$

* C-F : Clamp-Free

양단 경계조건을 기본함수 (4-65)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\theta''(1) = 0 \rightarrow 2a_2 + 6a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = -3a_3$ 를 기본함수 (4-65)식에 대입하면

$$\theta_1(\xi) = \xi^3 - 3\xi^2$$

$$\theta_1(\xi) = \xi^2(\xi - 3) \quad (4-66)$$

와 같이 고정-자유 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재 정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-67)$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta+1)^2(\eta-5)$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta^3 - 3\eta^2 - 9\eta - 5) \quad (4-52)$$

2차 모드 이상의 고정-자유 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-68)을 사용

하여 일반화 할 수 있다.

$$\theta_k = C_k [\theta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \theta_{k-i}] \quad (4-68)$$

(C_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-68)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \theta_i \cdot \theta_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \quad (4-69)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-68)를 이용한 고정-자유 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-70)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_2(\eta) = C_2 [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1] \quad (4-70)$$

방정식 (4-70)식 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-72)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = C_2 \int_{-1}^1 [\theta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-71)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-72)$$

방정식 (4-70) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 C_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-73)$$

(C_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-72), (4-73)에서 구한 계수들을 방정식 (4-70)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 고정-자유 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-74)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_3(\eta) = C_3[\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1] \quad (4-74)$$

방정식 (4-74) 양변에 θ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2^2 - a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2] d\eta = 0 \quad (4-75)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-76)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-74)식 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-77)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-78)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-74)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 C_3 계수를 구할 수 있다.

$$C_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-79)$$

(C_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-76), (4-78) 및 (4-79)에서 구한 계수들을 방정식 (4-74)식에 대입하면 3차모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-68)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

다. 3차 방정식 제2 파형함수

- 기본함수

$$\theta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-80)$$

- 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
고정-자유 (C-F)	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta'''(1) = 0$

* C-F : Clamp-Free

양단 경계조건을 기본함수 (4-80)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\theta'''(1) = 0 \rightarrow a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = 1$ 를 기본함수 (4-80)식에 대입하면

$$\theta_1(\xi) = \xi^2 \quad (4-81)$$

와 같이 고정-자유 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재 정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-82)$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta+1)^2$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta^2 + 2\eta + 1) \quad (4-83)$$

2차 모드 이상의 고정-자유 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-84)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\theta_k = C_k \left[\theta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \theta_{k-i} \right] \quad (4-84)$$

(C_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-84)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \theta_i \cdot \theta_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \quad (4-85)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-84)를 이용한 고정-자유 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-86)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_2(\eta) = C_2 [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1] \quad (4-86)$$

방정식 (4-86)식 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-88)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = C_2 \int_{-1}^1 [\theta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-87)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-88)$$

방정식 (4-86) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 C_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-89)$$

(C_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-88), (4-89)에서 구한 계수들을 방정식 (4-86)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 고정-자유 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-90)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_3(\eta) = C_3[\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1] \quad (4-90)$$

방정식 (4-90) 양변에 θ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2^2 - a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2] d\eta = 0 \quad (4-91)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-92)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-90)식 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-93)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-94)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-90)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 C_3 계수를 구할 수 있다.

$$C_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-95)$$

(C_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-92), (4-94) 및 (4-95)에서 구한 계수들을 방정식 (4-90)식에 대입하면 3차모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-84)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

라. 2차 방정식 파형함수

- 기본함수

$$\theta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-96)$$

- 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
고정-자유 (C-F)	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	-

* C-F : Clamp-Free

양단 경계조건을 기본함수 (4-96)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = 1$ 를 기본함수 (4-96)식에 대입하면

$$\theta_1(\xi) = \xi^2 \quad (4-97)$$

와 같은 고정-자유 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-98)$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta+1)^2$$

$$\theta_1(\eta) = C_1(\eta^2 + 2\eta + 1) \quad (4-99)$$

2차 모드 이상의 고정-자유 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-100)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\theta_k = C_k \left[\theta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \theta_{k-i} \right] \quad (4-100)$$

(C_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-100)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \theta_i \cdot \theta_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \quad (4-101)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-100)를 이용한 고정-자유 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-102)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_2(\eta) = C_2 [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1] \quad (4-102)$$

방정식 (4-102) 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-104)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = C_2 \int_{-1}^1 [\theta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-103)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-104)$$

방정식 (4-102) 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 C_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-105)$$

(C_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-104), (4-105)에서 구한 계수들을 방정식 (4-102)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 고정-자유 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-106)을 통해 구할 수 있다.

$$\theta_3(\eta) = C_3[\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1] \quad (4-106)$$

방정식 (4-106) 양변에 θ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2^2 - a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2] d\eta = 0 \quad (4-107)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-108)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-106)식 양변에 θ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^1 [\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-109)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \theta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-110)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-106)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 C_3 계수를 구할 수 있다.

$$C_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \theta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-111)$$

(A_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-108), (4-110) 및 (4-111)에서 구한 계수들을 방정식 (4-106)식에 대입하면 3차 모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-100)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

5. 단순-고정 경계조건

단순-고정 경계조건의 함수를 $\gamma(x)$ 라 정의하고, 양단에 다음의 경계조건을 적용하여, 기본 파형함수를 구하였다. 단순-고정 Beam의 함수에서의 경계조건은 필수경계조건과 자연경계조건이 모두 적용되면, 조합을 통해 4차와 3차 방정식의 기본 파형함수를 구하였다.

파형함수형태	GBC	NBC
4차 방정식	$\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 0$ $\gamma'(1) = 0$	$\gamma''(0) = 0$
3차 방정식	$\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 0$ $\gamma'(1) = 0$	-

가. 4차 방정식 파형함수

- 기본함수

$$\gamma(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-112)$$

- 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
단순-고정 (S-F)	$\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 0$ $\gamma'(1) = 0$	$\gamma''(0) = 0$

* S-F : Simple-Free

양단 경계조건을 기본함수 (4-112)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \gamma(0) = 0 &\rightarrow a_0 = 0 \\ \gamma''(0) = 0 &\rightarrow a_2 = 0 \\ \gamma(1) = 0 &\rightarrow a_1 + a_3 + a_4 = 0 \\ \gamma'(1) = 0 &\rightarrow a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \end{aligned}$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_1 = \frac{1}{2}a_4$, $a_3 = -\frac{3}{2}a_4$ 를 기본함수 (4-112)식에 대입하면,

$$\begin{aligned} \gamma_1(\xi) &= \xi^4 - \frac{3}{2}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi \\ \gamma_1(\xi) &= \xi(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) \end{aligned} \tag{4-113}$$

와 같이 단순-고정 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \tag{4-114}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\eta) &= D_1(\eta+1)(\eta^3 - 3\eta + 2) \\ \gamma_1(\eta) &= D_1(\eta^4 + \eta^3 - 3\eta^2 - \eta + 2) \end{aligned} \tag{4-115}$$

2차 모드 이상의 단순-고정 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-112)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\gamma_k = D_k \left[\gamma_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \gamma_{k-i} \right] \tag{4-116}$$

(D_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-112)에서 구한 파형함수의 운동방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \gamma_i \cdot \gamma_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \tag{4-117}$$

(i, j : 진동차수 , δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-5)를 이용한 단순-고정 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-118)을 통해 구할 수 있다.

$$\gamma_2(\eta) = D_2[\gamma_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1] \quad (4-118)$$

방정식 (4-118)식 양변에 γ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-120)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = D_2 \int_{-1}^1 [\gamma_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1^2] d\eta = 0 \quad (4-119)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \gamma_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-120)$$

방정식 (4-118) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 D_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\gamma_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-121)$$

(D_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-120), (4-121)에서 구한 계수들을 방정식 (4-118)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 단순-고정 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-122)을 통해 구할 수 있다.

$$\gamma_3(\eta) = D_3[\gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1] \quad (4-122)$$

방정식 (4-122) 양변에 γ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\gamma_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2^2 - a_{32} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2] d\eta = 0 \quad (4-123)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \gamma_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-124)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-122)식 양변에 γ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1^2] d\eta = 0 \quad (4-125)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \gamma_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-126)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-122)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 D_3 계수를 구할 수 있다.

$$D_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-127)$$

(D_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-124), (4-126) 및 (4-127)에서 구한 계수들을 방정식 (4-122)식에 대입하면 3차 모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-116)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

나. 3차 방정식 파형함수

- 기본함수

$$\gamma(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-128)$$

- 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
단순-고정 (S-F)	$\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 0$ $\gamma'(1) = 0$	-

* S-F : Simple-Free

양단 경계조건을 기본함수 (4-128)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\gamma(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\gamma(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$\gamma'(1) = 0 \rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_1 = a_3, a_2 = -2a_3$ 를 기본함수 (4-128)식에 대입하면

$$\gamma_1(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi$$

$$\gamma_1(\xi) = \xi(\xi - 1)^2 \quad (4-129)$$

와 같이 단순-고정 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-130)$$

$$\gamma_1(\eta) = D_1(\eta + 1)(\eta - 1)^2$$

$$\gamma_1(\eta) = D_1(\eta^3 - \eta^2 - \eta + 1) \quad (4-131)$$

2차 모드 이상의 고정-자유 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-132)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\gamma_k = D_k[\gamma_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \gamma_{k-i}] \quad (4-132)$$

(D_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-132)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \gamma_i \cdot \gamma_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \quad (4-133)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-132)를 이용한 고정-자유 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-134)을 통해 구할 수 있다.

$$\gamma_2(\eta) = D_2[\gamma_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1] \quad (4-134)$$

방정식 (4-134)식 양변에 γ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-136)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = D_2 \int_{-1}^1 [\gamma_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1^2] d\eta = 0 \quad (4-135)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \gamma_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-136)$$

방정식 (4-134) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 D_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\gamma_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-137)$$

(D_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-136), (4-137)에서 구한 계수들을 방정식 (4-134)식에 대입하면 2차모드 파형함

수를 구할 수 있다.

또한, 고정-자유 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-138)을 통해 구할 수 있다.

$$\gamma_3(\eta) = D_3[\gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1] \quad (4-138)$$

방정식 (4-138) 양변에 γ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\gamma_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2^2 - a_{32} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2] d\eta = 0 \quad (4-139)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \gamma_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-140)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-138)식 양변에 γ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1^2] d\eta = 0 \quad (4-141)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \gamma_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-142)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-11)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 D_3 계수를 구할 수 있다.

$$D_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-143)$$

(D_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-140), (4-142) 및 (4-143)에서 구한 계수들을 방정식 (4-138)식에 대입하면 3차

모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-132)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

6. 단순-단순 경계조건

단순-단순 경계조건의 함수를 $\delta(x)$ 라 정의하고, 양단에 다음의 경계조건을 적용하여, 기본 파형함수를 구하였다. 단순-단순 Beam의 함수에서의 경계조건은 필수경계조건과 자연경계조건이 모두 적용되면, 조합을 통해 4차, 3차 그리고, 2차 방정식의 기본 파형함수를 구하였다.

파형함수형태	GBC	NBC
4차 방정식	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	$\delta''(0) = 0, \delta''(1) = 0$
3차 방정식 1형	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	$\delta''(0) = 0$
3차 방정식 2형	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	$\delta''(1) = 0$
2차 방정식	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	-

가. 4차 방정식 파형함수

· 기본함수

$$\delta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-144)$$

· 양단경계조건

BC	GBC	NBC
단순-단순 (S-S)	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	$\delta''(0) = 0, \delta''(1) = 0$

* S-S: Simple-Simple

양단 경계조건을 기본함수 (4-144)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\delta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\delta''(0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$\delta(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_3 + a_4 = 0$$

$$\delta''(1) = 0 \rightarrow a_3 + 2a_4 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_1 = a_4, a_3 = -2a_4$ 를 기본함수 (4-144)식에 대입하면,

$$\delta_1(\xi) = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi$$

$$\delta_1(\xi) = \xi(\xi^3 - 2\xi^2 + 1) \tag{4-145}$$

와 같이 단순-단순 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 에너지 산식을 적용하여 고유진동수 계산 시 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리하여 표현하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \tag{4-146}$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta + 1)(\eta - 1)(\eta^2 - 5)$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta^4 - 6\eta^2 + 5) \tag{4-147}$$

2차 모드 이상의 단순-단순 경계조건인 파형 함수는 다음의 방정식 (4-148)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\delta_k = E_k \left[\delta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \delta_{k-i} \right] \quad (4-148)$$

(E_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-148)에서 구한 파형함수의 운동방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \delta_i \cdot \delta_j \cdot d\eta = \mu_{ij} \quad (4-149)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-148)를 이용한 단순-단순 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-150)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_2(\eta) = E_2 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1] \quad (4-150)$$

방정식 (4-150)식 양변에 ψ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-152)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = E_2 \int_{-1}^1 [\delta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-151)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-152)$$

방정식 (4-150) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-153)$$

(E_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-152), (4-153)에서 구한 계수들을 방정식 (4-150)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 단순-단순 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-154)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_3(\eta) = E_3[\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1] \quad (4-154)$$

방정식 (4-154) 양변에 δ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\delta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2^2 - a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2] d\eta = 0 \quad (4-155)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-156)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-154)식 양변에 δ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = E_3 \int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-157)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-158)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-154)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_3 계수를 구할 수 있다.

$$E_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-159)$$

(E_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-156), (4-158) 및 (4-159)에서 구한 계수들을 방정식 (4-154)식에 대입하면 3차 모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-148)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

나. 3차 방정식 제1 파형함수

- 기본함수

$$\delta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-160)$$

- 양단경계조건

BC	GBC	NBC
단순-단순 (S-S)	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	$\delta''(0) = 0$

* S-S: Simple-Simple

양단 경계조건을 기본함수 (4-160)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\delta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\delta''(0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$\delta(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_1 = -a_3$ 를 기본함수 (4-160)식에 대입하면

$$\delta_1(\xi) = \xi^3 - \xi$$

$$\delta_1(\xi) = \xi(\xi^2 - 1) \quad (4-161)$$

와 같이 단순-단순 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-162)$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta+1)(\eta-1)(\eta+3)$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta^3 + 3\eta^2 - \eta - 3)$$

(4-163)

2차 모드 이상의 단순-단순 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-164)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\delta_k = E_k [\delta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \delta_{k-i}] \quad (4-164)$$

(E_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-164)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \delta_i \cdot \delta_j \cdot d\eta = \mu_{ij} \quad (4-165)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-164)를 이용한 단순-단순 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-166)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_2(\eta) = E_2 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1] \quad (4-166)$$

방정식 (4-166)식 양변에 δ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-168)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = E_2 \int_{-1}^1 [\delta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-167)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-168)$$

방정식 (4-166) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-169)$$

(E_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-168), (4-169)에서 구한 계수들을 방정식 (4-166)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다.

또한, 단순-단순 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-70)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_3(\eta) = E_3[\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1] \quad (4-170)$$

방정식 (4-170) 양변에 δ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\delta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2^2 - a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2] d\eta = 0 \quad (4-171)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-172)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-170)식 양변에 δ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = E_3 \int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-173)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-174)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-170)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_3 계수를 구할 수 있다.

$$E_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-175)$$

(E_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-172), (4-174) 및 (4-175)에서 구한 계수들을 방정식 (4-170)식에 대입하면 3차

모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-164)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

다. 3차 방정식 제2 파형함수

- 기본함수

$$\delta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-176)$$

- 양단경계조건

BC	GBC	NBC
단순-단순 (S-S)	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	$\delta''(1) = 0$

* S-S: Simple-Simple

양단 경계조건을 기본함수 (4-176)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\delta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\delta(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_3 = 0$$

$$\delta''(1) = 0 \rightarrow 2a_1 + 6a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_1 = 3a_3, a_2 = -3a_3$ 를 (4-176)식에 대입하면

$$\delta_1(\xi) = \xi^3 - 3\xi^2 + 3\xi$$

$$\delta_1(\xi) = \xi(\xi^2 - 3\xi + 3) \quad (4-177)$$

와 같이 단순-단순 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-178)$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta+1)(\eta^2 - 4\eta + 7)$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta^3 - 3\eta^2 + 3\eta + 7) \quad (4-179)$$

2차 모드 이상의 단순-단순 경계조건의 파형 함수는 다음의 방정식 (4-180)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\delta_k = E_k \left[\delta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \delta_{k-i} \right] \quad (4-180)$$

(E_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-180)에서 구한 파형함수의 운동방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \delta_i \cdot \delta_j \cdot d\eta = \mu_{ij} \quad (4-181)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-180)를 이용한 단순-단순 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-182)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_2(\eta) = E_2 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1] \quad (4-182)$$

방정식 (4-182)식 양변에 ψ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-184)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = E_2 \int_{-1}^1 [\delta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-183)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-184)$$

방정식 (4-182) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-185)$$

(E_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-184), (4-185)에서 구한 계수들을 방정식 (4-182)식에 대입하면 2차모드 파형함

수를 구할 수 있다.

또한, 단순-단순 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-186)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_3(\eta) = E_3[\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1] \quad (4-186)$$

방정식 (4-186) 양변에 δ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\delta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2^2 - a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2] d\eta = 0 \quad (4-187)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-188)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-186)식 양변에 δ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = E_3 \int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-189)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-190)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-186)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_3 계수를 구할 수 있다.

$$E_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-191)$$

(E_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-188), (4-190) 및 (4-191)에서 구한 계수들을 방정식 (4-187)식에 대입하면 3차

모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-180)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

라. 2차 방정식 파형함수

- 기본함수

$$\delta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4-192)$$

- 양단경계조건

BC	GBC	NBC
단순-단순 (S-S)	$\delta(0) = 0, \delta(1) = 0$	-

* S-S: Simple-Simple

양단 경계조건을 기본함수 (4-192)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\delta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\delta(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_2 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_1 = -a_2$ 를 (4-192)식에 대입하면

$$\delta_1(\xi) = \xi^2 - \xi$$

$$\delta_1(\xi) = \xi(\xi - 1) \quad (4-193)$$

와 같이 단순-단순 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \quad (-1 \leq \eta \leq 1) \quad (4-194)$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta + 1)(\eta - 1)$$

$$\delta_1(\eta) = E_1(\eta^2 - 1) \quad (4-195)$$

2차 모드 이상의 단순-단순 경계조건인 파형 함수는 다음의 방정식 (4-196)을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\delta_k = E_k \left[\delta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \delta_{k-i} \right] \quad (4-196)$$

(E_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값)

방정식 (4-196)에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i = j = 1$ 에 만족하는 값이다.

$$\int_{-1}^1 \delta_i \cdot \delta_j \cdot d\eta = \mu_{ij} \quad (4-197)$$

(i, j : 진동차수, δ_{ij} : Kronecker delta)

이를 이용하여 방정식 (4-196)를 이용한 단순-단순 경계조건의 2차 모드 파형함수는 방정식 (4-198)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_2(\eta) = E_2 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1] \quad (4-198)$$

방정식 (4-198)식 양변에 ψ_1 을 곱하여 적분하여 정리하여 (4-200)와 같이 계수를 구할 수 있고,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = E_2 \int_{-1}^1 [\delta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-199)$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-200)$$

방정식 (4-198) 식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_2 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_2^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-201)$$

(E_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값)

(4-200), (4-201)에서 구한 계수들을 방정식 (4-198)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구할 수 있다. 또한, 단순-단순 경계조건의 3차모드 파형함수는 방정식 (4-202)을 통해 구할 수 있다.

$$\delta_3(\eta) = E_3[\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1] \quad (4-202)$$

방정식 (4-202) 양변에 δ_2 를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_2 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^1 [\delta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2^2 - a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2] d\eta = 0 \quad (4-203)$$

와 같고, 여기서 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{32} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_2^2 \cdot d\eta} \quad (4-204)$$

와 같이 정리되어, 계수를 구할 수 있다. 다시 방정식 (4-202)식 양변에 δ_1 을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_3 \cdot d\eta = E_3 \int_{-1}^1 [\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1^2] d\eta = 0 \quad (4-205)$$

과 같이 정리되며, 직교관계식에 의해 $\int_{-1}^1 a_{31} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot d\eta = 0$ 이 되면,

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^1 \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \delta_1^2 \cdot d\eta} \quad (4-206)$$

와 같이 계수를 구할 수 있다. 또한, 방정식 (4-202)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용하여 E_3 계수를 구할 수 있다.

$$E_3^2 = \frac{\int_{-1}^1 \delta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 [\delta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \delta_2 - a_{32} \cdot \delta_1]^2 \cdot d\eta} \quad (4-207)$$

(E_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수)

(4-204), (4-206) 및 (4-207)에서 구한 계수들을 방정식 (4-202)식에 대입하면 3차 모드 파형함수를 구할 수 있다.

4차 이상 모드함수는 (4-196)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

제 2 절 파형가정함수별 고유진동수 계산

1. Beam 파형함수 계산조건


제 1 절에서 정의된 경계조건별 Single Beam에 대한 파형함수들에 대해 Table 4.2.에 나타내었고, 고유진동수 계산을 위한 Beam 형상 및 물성치 등에 대해서는 Table 4.3.에 나타내었다.

Table 4.2. Wave Function of Single Beam

양단 경계조건	파형함수	Remark
C-C	$x^4 - 2x^3 + x^2$	CC
C-S	$x^4 - 2.5x^3 + 1.5x^2$	CS1
	$x^3 - x^2$	CS2
C-F	$x^4 - 4x^3 + 6x^2$	CF1
	$x^3 - 3x^2$	CF2
	x^2	CF3
	x^2	CF4
S-C	$x^4 - 1.5x^3 + 0.5x$	SC1
	$x^3 - 2x^2 + x$	SC2
S-S	$x^4 - 2x^3 + x$	SS1
	$x^3 - x$	SS2
	$x^3 - 3x^2 + 3x$	SS3
	$x^2 - x$	SS4

* C : Clamp , S : Simple , F : Free

Table 4.3. Properties & cross section of Single Beam

분류	Properties	Cross section
Density [kg/m ³]	7850	
Length [m]	1 , 2 , 3 , 4, , 8 , 9	
Area [m ²]	0.1	
Young`s modulus [N/m ²]	2.1e11	
Moment of inertia [m ⁴]	3.33e-4	

2. 고유진동수 계산 결과

경계조건 유형별로 정의된 파형함수에 대해 다음과 같이 Natural Frequency 계산결과를 정리하였으며, 계산된 결과는 신뢰성 검증을 위해 FEA 결과와 비교하였다. 그 결과에 대해 Table 4.4.부터 7까지 정리하여 나타내었다.

Table 4.4. Comparison Natural Frequency of C-C Boundary Condition

길이 (m)	차수	CC_FEA (Hz)	CC_ANA (Hz)	Error Ratio(%)
2	1	249.8	265.8	6.0
	2	644.3	732.8	12.1
	3	1170.5	1436.8	18.5
3	1	114.9	118.1	2.7
	2	306.8	325.7	5.8
	3	578.6	638.6	9.4
4	1	65.4	66.5	1.7
	2	177.0	183.2	3.4
	3	339.0	359.2	5.6
5	1	42.1	42.5	0.9
	2	114.6	117.2	2.2
	3	221.2	229.9	3.8
6	1	29.3	29.5	0.7
	2	80.1	81.4	1.6
	3	155.4	159.6	2.6
7	1	21.6	21.7	0.5
	2	59.1	59.8	1.2
	3	115.0	117.3	2.0
8	1	16.5	16.6	0.6
	2	45.4	45.8	0.9
	3	88.4	89.8	1.6
9	1	13.1	13.1	0.0
	2	35.9	36.2	0.8
	3	70.1	71.0	1.3

Table 4.5. Comparison Natural Frequency of C-S Boundary Condition

길이 (m)	차수	CS_FEA (Hz)	CS1_ANA (Hz)	CS2_ANA (Hz)	Error Ratio(%)
2	1	176.9	183.1	183.2	3.4
	2	544.0	593.6	593.7	8.4
	3	1060.3	1238.0	1238.6	14.4
3	1	80.2	81.4	81.4	1.5
	2	253.6	263.8	263.8	3.9
	3	511.8	550.2	550.5	7.0
4	1	40.4	45.8	45.8	11.8
	2	145.1	148.4	148.4	2.2
	3	296.9	309.5	309.7	1.4
5	1	29.1	29.3	29.3	0.7
	2	93.6	95.0	95.0	1.5
	3	192.7	198.1	198.2	2.8
6	1	20.3	20.3	20.4	0.2
	2	65.3	66.0	66.0	1.1
	3	135.0	137.6	137.6	1.9
7	1	14.9	14.9	15.0	0.3
	2	48.1	48.5	48.5	0.8
	3	100.0	101.1	101.1	1.1
8	1	11.4	11.4	11.4	0
	2	36.9	37.1	37.1	0.5
	3	76.6	77.4	77.4	1.0
9	1	9.0	9.0	9.0	0
	2	29.2	29.3	29.3	0.3
	3	60.6	61.1	61.2	0.9

Table 4.6. Comparison Natural Frequency of C-F Boundary Condition

길이 (m)	차수	CF_FEA (Hz)	CF1_ANA (Hz)	CF2_ANA (Hz)	CF3_ANA (Hz)	CF4_ANA (Hz)	Error Ratio (%)
2	1	41.5	41.8	41.8	41.8	41.8	0.7
	2	250.3	261.8	261.8	261.8	261.8	4.4
	3	646.4	734.0	733.1	733.1	733.1	11.9
3	1	18.5	18.6	18.6	18.6	18.6	0.5
	2	114.1	116.4	116.4	116.4	116.4	2.0
	3	311.3	326.2	325.8	325.8	325.8	4.5
4	1	10.4	10.4	10.4	10.4	10.4	0
	2	64.7	65.5	65.5	65.5	65.5	1.2
	3	178.6	183.5	183.3	183.3	183.3	2.6
5	1	6.7	6.7	6.7	6.7	6.7	0
	2	41.6	41.9	41.9	41.9	41.9	0.7
	3	115.3	117.4	117.3	117.3	117.3	1.7
6	1	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	0
	2	28.9	29.1	29.1	29.1	29.1	0.7
	3	80.5	81.6	81.5	81.5	81.5	1.3
7	1	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	0
	2	21.3	21.4	21.4	21.4	21.4	0.5
	3	59.3	59.9	59.8	59.8	59.8	0.9
8	1	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	0
	2	13.3	16.4	16.4	16.4	16.4	18.9
	3	45.5	45.9	45.8	45.8	45.8	0.7
9	1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	0
	2	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	0
	3	36.0	36.2	36.2	36.2	36.2	0.6

Table 4.7. Comparison Natural Frequency of S-S Boundary Condition

길이 (m)	차수	SS_FEA (Hz)	SS1_ANA (Hz)	SS2_ANA (Hz)	SS3_ANA (Hz)	Error Ratio (%)
2	1	115.8	117.3	117.3	99.8	1.3
	2	446.0	469.1	469.1	469.1	4.9
	3	947.5	1055.4	1055.4	1057.0	10.2
3	1	51.8	52.2	52.2	44.4	0.8
	2	203.9	208.5	208.5	208.5	2.2
	3	446.6	469.1	469.1	469.8	4.8
4	1	29.2	29.3	29.3	24.9	0.3
	2	115.8	117.3	117.3	117.3	1.3
	3	256.5	263.8	263.8	264.3	2.8
5	1	18.7	18.8	18.8	16.0	0.5
	2	74.4	75.1	75.1	75.1	0.9
	3	165.8	168.9	168.9	169.1	1.8
6	1	13.0	13.0	13.0	11.1	0
	2	51.8	52.1	52.1	52.1	0.6
	3	115.8	117.3	117.3	117.4	1.3
7	1	9.6	9.6	9.6	8.1	0
	2	38.1	38.3	38.3	38.3	0.5
	3	85.4	86.2	86.2	86.3	0.9
8	1	7.3	7.3	7.3	6.2	0
	2	29.2	29.3	29.3	29.3	0.3
	3	65.5	66.0	66.0	66.1	0.8
9	1	5.8	5.8	5.8	4.9	0
	2	23.1	23.2	23.2	23.2	0.4
	3	51.8	52.1	52.1	52.2	0.6

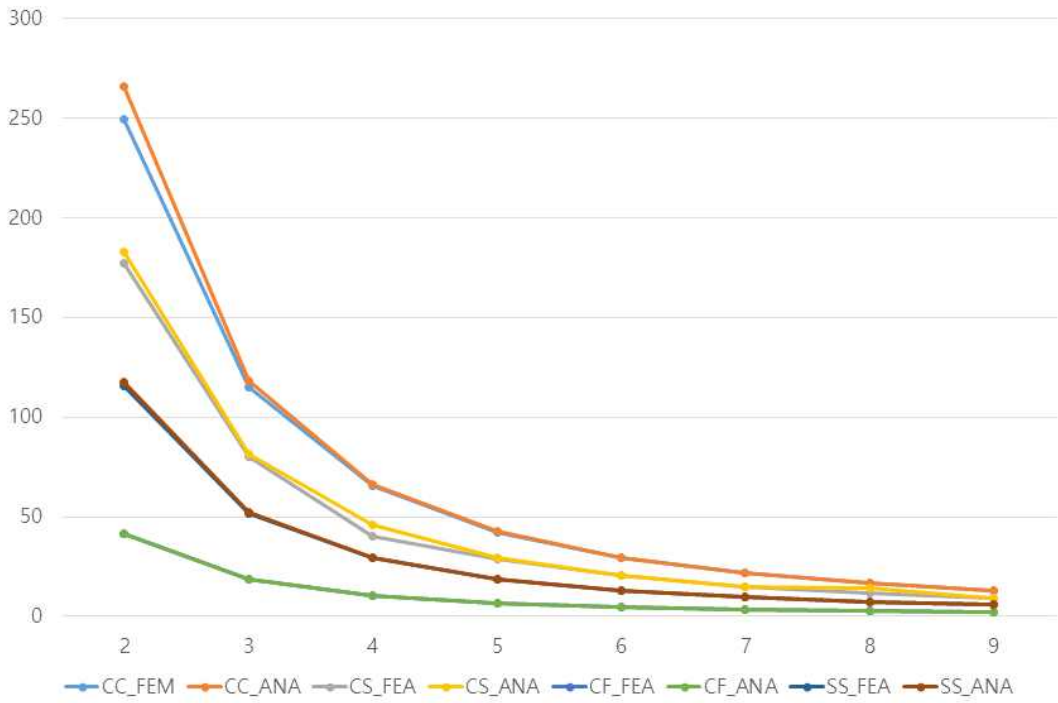


Figure 4.1. Comparison of 1st Natural Frequency

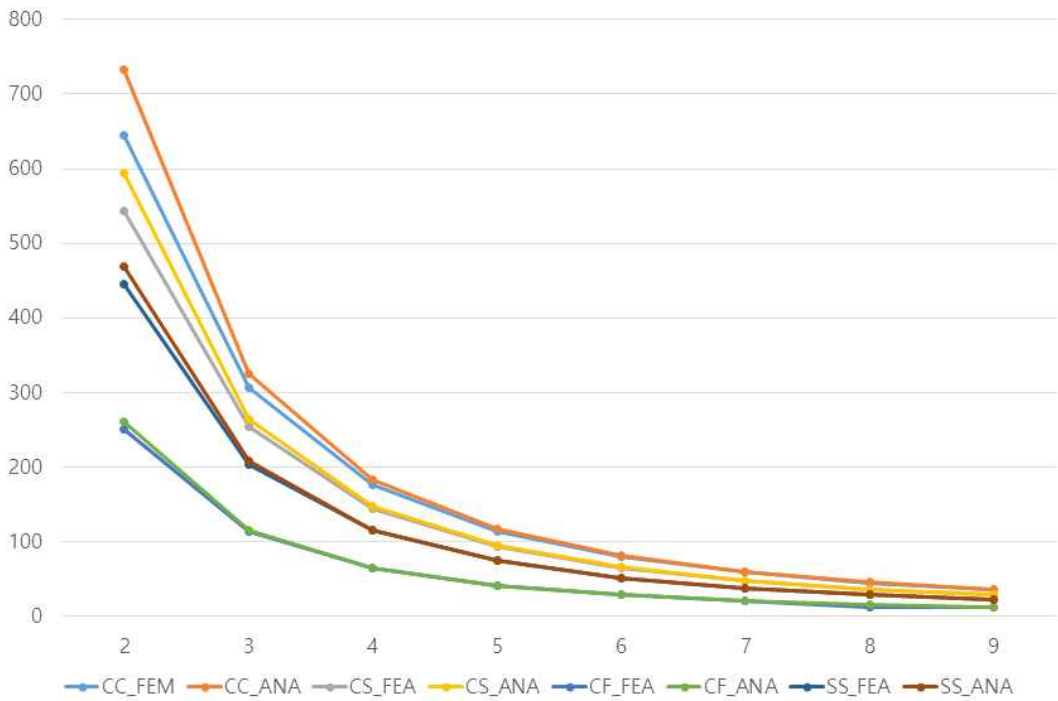


Figure 4.2. Comparison of 2nd Natural Frequency

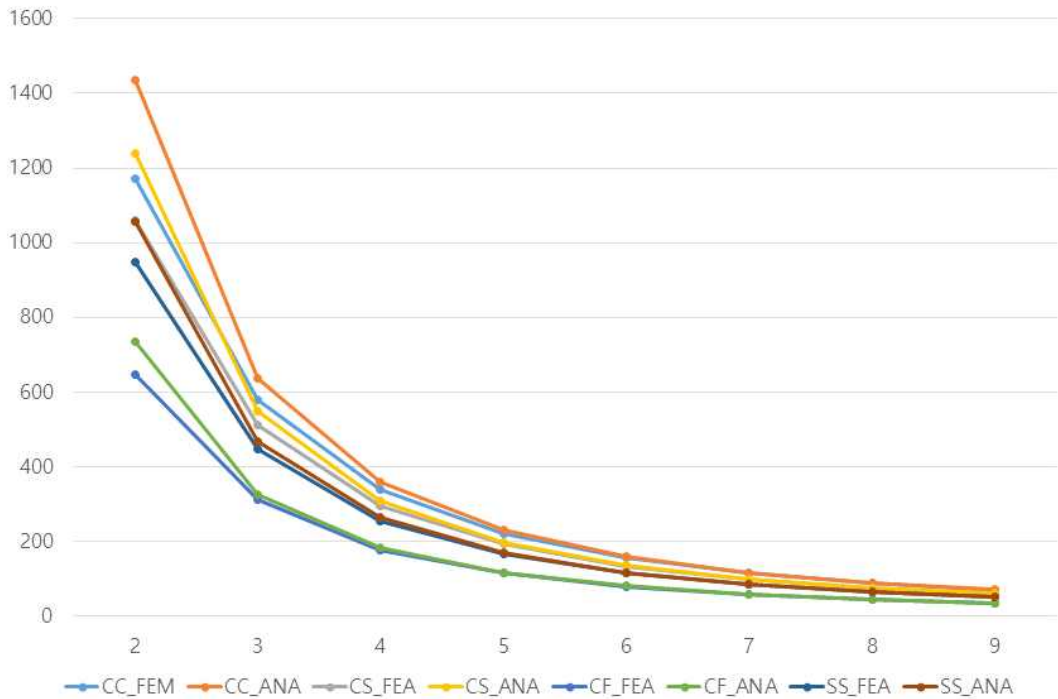


Figure 4.3. Comparison of 3rd Natural Frequency

본 장에서는 Connected Beam Structure의 기본이 되는 Single Beam에 대한 진동특성을 분석하기 위하여, Single Beam에 다양한 유형의 양단 경계조건을 부여하고, 길이별 (2부터 9까지) 해석을 수행하였다. 이를 통해 다음과 같이 Single Beam에 대한 특성을 확인할 수 있었다.

Table 4.4.부터 7.까지는 양단 경계조건별로 고유진동수 해석 결과를 정리하였고, Figure 4.1.부터 4.3.까지는 차수별로 경계조건 고유진동수 해석 결과를 길이별로 비교하였다. 이들의 결과를 통해 다음과 같은 사항을 확인할 수 있었다.

첫째, Single Beam의 고유진동수는 길이와 경계조건에 상관없이 차수가 증가함에 따라 증가하고, 길이가 증가하면서 고유진동수는 감소한다.

둘째, 동일 양단경계조건에서 Natural Boundary Condition에 따라 파형함수의 형태의 차이가 있지만, 고유진동수 결과는 같다. 이는 Geometric Boundary Condition인 변위와 경사각에 비해, Natural Boundary Condition인 모멘트와 전단력이 결과에 미치는 영향은 없다고 판단할 수 있다. 특히, 전단력은 Euler Beam에서는 고려 대상이 아니기 때문에 영향이 없다고 가정할 수 있다.

셋째, Figure 4.1.부터 4.3.까지의 비교 그래프에서 보면 진동의 차수가 증가하고, 길이가 증가하면서 고유진동수가 수렴하고 있는 것을 볼 수 있다. 이는 경계조건에 의한 영향이 고차로 갈수록, 그리고 길이가 길어질수록 차츰 감소하고 있다고 볼 수 있다.

본 데이터 정리에서 단면적 vs 길이의 비가 1인 결과는 제외하였다. 이유는 앞서 2장 Beam Theory에서도 언급하였듯이 Euler Beam은 단면적에 비해 길이가 긴 Beam에 대해 적용되는 이론이며, 단면적 vs 길이의 비가 1인 Beam의 경우 Euler Beam 방정식을 적용하여 해석할 경우 FEA 결과보다 높게 나타난다. 이처럼 단면적 vs 길이의 비가 1인 경우나 고차의 경우는 Timoshenko Beam 이론을 적용하는 것이 바람직하다.

제 5 장 ◡ Shape Connected Structure

제 1 절 파형함수를 이용한 고유진동수 계산

1. 고유진동수 계산을 위한 모드합성법

실제 Structure의 경우 Simple Beam 이나 Simple Plate로 이루어진 경우는 드물고 많은 경우 Connected Structure로 되어있다. Connected Structure의 고유진동수 계산을 위해서는 연결 부위에 대한 구속조건의 적절한 보정이 필요하고, 자유도계 증가로 인한 계산 성능의 저하를 가져오게 된다.

따라서, 복잡한 Connected Structure의 해석을 위해 전체 Structure의 연결부에서 연속 조건을 만족시키는 부분모드 합성법 [53]을 이용하고자 한다.

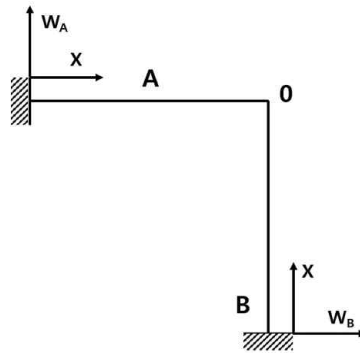


Figure 5.1. The configuration of connected structure

Figure 5.1. 과 같은 '◡' Shape Connected Structure의 수평 부재를 $W_A(\eta)$, 수직 부재를 $W_B(\eta)$ 라하고 두 부재의 파형함수는 아래와 같이 고정과 단순 등의 두가지 지지 조건의 조합된 함수로 정의한다.

$$W_A(\eta) = \sum_{i=1}^m (\psi_i(\eta)p_{A_i}(\eta) + \phi_i(\eta)q_{A_i}(t)) \quad (5-1)$$

$$W_B(\eta) = \sum_{j=1}^n (\psi_j(\eta)p_{B_j}(\eta) + \phi_j(\eta)q_{B_j}(t)) \quad (5-2)$$

여기서, $p_{Ai}(t), q_{Ai}(t), p_{Bi}(t), q_{Bi}(t)$ 는 일반 좌표계이다.

이 두 식은 다음과 같은 Slope, Moment 등에 대한 연속조건을 만족시켜야 한다.

[Slope Continuity]

$$\frac{y'_A(1)}{l_A} = \frac{y'_B(1)}{l_B} \quad (5-3)$$

$$\frac{1}{l_A} [\phi'_1 q_{A1} + \dots + \phi'_m q_{Am}] = \frac{1}{l_B} [\phi'_1 q_{B1} + \dots + \phi'_n q_{Bn}] \quad (5-4)$$

$$q_{Bn} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\phi'_1}{\phi'_n} \cdot q_{A1} + \dots + \frac{\phi'_m}{\phi'_n} \cdot q_{Am} \right] - \left[\frac{\phi'_1}{\phi'_n} \cdot q_{B1} + \dots + \frac{\phi'_{n-1}}{\phi'_n} \cdot q_{Bn-1} \right] \quad (5-5)$$

[Moment Continuity]

$$\frac{y''_A(1)}{l_A^2} + \frac{y''_B(1)}{l_B^2} = 0 \quad (5-6)$$

$$\frac{1}{l_A^2} [\psi''_1 p_{A1} + \dots + \psi''_m p_{Am}] + \frac{1}{l_B^2} [\psi''_1 p_{B1} + \dots + \psi''_n p_{Bn}] \quad (5-7)$$

$$p_{Bn} = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\psi''_1}{\psi''_n} \cdot p_{A1} + \dots + \frac{\psi''_m}{\psi''_n} \cdot p_{Am} \right] - \left[\frac{\psi''_1}{\psi''_n} \cdot p_{B1} + \dots + \frac{\psi''_{n-1}}{\psi''_n} \cdot p_{Bn-1} \right] \quad (5-8)$$

위 식에서 보는 바와 같이 경사각에 대한 연속조건은 단순지지 조건을 만족시키는 q 자유도계만 관여하고, 고정지지 경계조건은 p자유도계만 관여함을 알 수 있다. 이런 관계를 행렬로 표현하면 확실히 알 수 있다.

또한, 부분모드 합성법을 이용함으로써 연결지점에서 $2(m+n)$ 개의 좌표계를 $2(m+n-1)$ 개로 축약시켰다.

연결부위의 경사각과 모멘트 연속조건에 의해 생성된 (5-9)식을 다음에 언급할 (5-24)식에 대입함으로써 일반화 좌표계만큼의 고유진동수를 얻을 수 있다.

$$\left\{ \begin{array}{c} p_{A1} \\ \vdots \\ p_{Am} \\ q_{A1} \\ \vdots \\ q_{Am} \\ p_{B1} \\ \vdots \\ p_{Bn-1} \\ p_{Bn} \\ q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn-1} \\ q_{Bn} \end{array} \right\} = \begin{array}{cccccccccccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\psi_1''}{\psi_n''} & \cdots & -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\psi_m''}{\psi_n''} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\psi_1''}{\psi_n''} & \cdots & \frac{\psi_{n-1}''}{\psi_n''} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\phi_1'}{\phi_n'} & \cdots & \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\phi_m'}{\phi_n'} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\phi_1'}{\phi_n'} & \cdots & \frac{\phi_{n-1}'}{\phi_n'} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} p_{A1} \\ \vdots \\ p_{Am} \\ q_{A1} \\ \vdots \\ q_{Am} \\ p_{B1} \\ \vdots \\ p_{Bn-1} \\ q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn-1} \end{array} \right\} \quad (5-9)$$

2. 에너지 산식

일반적으로 파형가정함수를 이용한 고전적 근사해법에 의한 진동 해석을 위해서는 해석 대상계의 탄성에너지 및 운동에너지 산식이 필요하다. 본 연구에서는 연결 구조에 대한 진동해석 정식화 방법에 대한 유용성을 확인하기 위해 Euler Beam 함수 성질을 갖는 다항식을 파형가정함수로 정의하였다.

Euler Beam 함수 성질을 이용한 파형가정함수는 제4장에서 정의하였다.

- 고정-고정 경계조건의 파형가정함수 ($\psi(\eta)$)

$$y(x,t) = \sum_i^m \psi_i(x) \cdot p_i(t) \quad (5-10)$$

$p_i(t)$ 는 일반화 좌표, 직교 관계를 고려한 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \dot{y}^2(x,t) dx \quad (5-11)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \sum_i \sum_j \dot{p}_i(t) \cdot \dot{p}_j(t) \int_0^l \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx \quad (5-12)$$

$m = \rho A$, 일반화 질량은

$$m_{ij} = m \cdot \int_0^l \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx \quad (5-13)$$

무차원 길이 좌표 $\eta = \frac{2x}{l} - 1$ 를 사용하면,

$$m_{ij} = m \cdot \int_{-1}^1 \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot \frac{l}{2} d\eta \quad (5-14)$$

$$m_{ij} = \frac{ml}{2} \cdot \int_{-1}^1 \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta \quad (5-15)$$

탄성에너지는

$$U = \frac{1}{2} \cdot EI \cdot \int_0^l y''^2(x,t) \cdot dx \quad (5-16)$$

$$U = \frac{1}{2} EI \sum_i \sum_j p_i(t) \cdot p_j(t) \cdot \int_0^l \psi''_i(x) \cdot \psi''_j(x) \cdot dx \quad (5-17)$$

일반화 강성은,

$$k_{ij} = EI \cdot \int_0^l \psi''_i(x) \cdot \psi''_j(x) \cdot dx \quad (5-18)$$

$$k_{ij} = EI \cdot \int_{-1}^1 \frac{4}{l^2} \cdot \psi''_i(\eta) \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \psi''_j(\eta) \cdot \frac{1}{2} \cdot d\eta \quad (5-19)$$

$$k_{ij} = \frac{8EI}{l^3} \cdot \int_{-1}^1 \psi''_i(\eta) \cdot \psi''_j(\eta) \cdot d\eta \quad (5-20)$$

여기서, ρ 는 Beam의 질량밀도, A 는 보강재의 단면적, L 은 보강재의 길이이며 E 는 보강재의 굽힘 강성을 나타낸다.

위의 수식을 보존계에 대한 Lagrange 운동 방정식에 대입함으로써 Beam에 대한 M , K 비감쇠 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{p}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta p_i} + \frac{\delta U}{\delta p_i} = 0 \quad (5-21)$$

$$\frac{ml}{2} [M] \{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3} [K] \{p\} = 0 \quad (5-22)$$

matrix (6-9)을 (6-22)식에 적용하면 아래 수식으로 표현 가능하다.

$$\frac{ml}{2} [M][C] \{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3} [K][C] \{p\} = 0 \quad (5-23)$$

$$\frac{ml}{2} [C'] [M] [C] \{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3} [C'] [K] [C] \{p\} = 0 \quad (5-24)$$

Fig.7에서 $y_A(\eta)$ 과 $y_B(\eta)$ 사이에 연성은 없으므로 질량 및 강성 행렬은 아래와 같은 형태를 갖는다.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}$$

m_A : $y_A(\eta)$ 질량 m_B : $y_B(\eta)$ 질량

k_A : $y_A(\eta)$ 강성 k_B : $y_B(\eta)$ 강성

Fig.7의 연결 Structure 전체 질량 행렬과 강성 행렬은 아래처럼 표현할 수 있다

$$[m_a] = \frac{ml_A}{2} \begin{vmatrix} \psi_1\psi_1 \cdots \psi_1\psi_n & \psi_1\phi_1 \cdots \psi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\psi_1 \cdots \psi_n\psi_n & \psi_n\phi_1 \cdots \psi_n\phi_n \\ \psi_1\phi_1 \cdots \psi_1\phi_n & \phi_1\phi_1 \cdots \phi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\phi_1 \cdots \psi_n\phi_n & \phi_n\phi_1 \cdots \phi_n\phi_n \end{vmatrix} \quad (5-25)$$

$$[m_b] = \frac{ml_A}{2} \begin{vmatrix} \psi_1\psi_1 \cdots \psi_1\psi_n & \psi_1\phi_1 \cdots \psi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\psi_1 \cdots \psi_n\psi_n & \psi_n\phi_1 \cdots \psi_n\phi_n \\ \psi_1\phi_1 \cdots \psi_1\phi_n & \phi_1\phi_1 \cdots \phi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\phi_1 \cdots \psi_n\phi_n & \phi_n\phi_1 \cdots \phi_n\phi_n \end{vmatrix} \quad (5-26)$$

$$[k_a] = \frac{EI_A}{l_A^3} \begin{vmatrix} \psi''_1\psi''_1 \cdots \psi''_1\psi''_n & \psi''_1\phi''_1 \cdots \psi''_1\phi''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi''_n\psi''_1 \cdots \psi''_n\psi''_n & \psi''_n\phi''_1 \cdots \psi''_n\phi''_n \\ \psi''_1\phi''_1 \cdots \psi''_1\phi''_n & \phi''_1\phi''_1 \cdots \phi''_1\phi''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi''_n\phi''_1 \cdots \psi''_n\phi''_n & \phi''_n\phi''_1 \cdots \phi''_n\phi''_n \end{vmatrix} \quad (5-27)$$

$$[k_b] = \frac{EI_B}{l_B^3} \begin{vmatrix} \psi''_1\psi''_1 \cdots \psi''_1\psi''_n & \psi''_1\phi''_1 \cdots \psi''_1\phi''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi''_n\psi''_1 \cdots \psi''_n\psi''_n & \psi''_n\phi''_1 \cdots \psi''_n\phi''_n \\ \psi''_1\phi''_1 \cdots \psi''_1\phi''_n & \phi''_1\phi''_1 \cdots \phi''_1\phi''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi''_n\phi''_1 \cdots \psi''_n\phi''_n & \phi''_n\phi''_1 \cdots \phi''_n\phi''_n \end{vmatrix} \quad (5-28)$$

위에서 나열한 행렬값들을 식(6-24)에 대입함으로써 비감쇠 운동방정식으로부터 Connected Beam Structure의 고유진동수를 얻을 수 있다.

3. 파형함수를 이용한 ‘ㄱ’ Shape Connected Structure 고유진동수 계산

Connected Structure의 대한 진동해석 정식화 방법에 대한 유용성 검증을 위해 먼저 Euler Beam 함수 성질을 갖는 다항식을 파형함수로 정의하여 고유진동수를 계산하였으며, 계산 결과와 유한요소법 해석 결과를 비교 / 검토하였다.

계산방법의 유용성을 검증하기 위하여 사용된 ‘ㄱ’ Shape Connected Structure 형상 및 특성치를 Table 5.2.에 나타내었다.

Table 5.1. Wave Function of ㄱ Shape Connected Structure

Category	Fundamental Mode Function		연결부 연속조건
Case 1	Fix-Fix 4차 방정식	$x^4 - 2x^3 + x^2$	Slope
	Fix-Simple 4차 방정식	$x^4 - 2.5x^3 + 1.5x^2$	
Case 2	Fix-Fix 4차 방정식	$x^4 - 2x^3 + x^2$	Moment
	Fix-Simple 3차 방정식	$x^3 - x^2$	
Case 3	Fix-Fix 4차 방정식	$x^4 - 2x^3 + x^2$	Slope
	Fix-Simple 4차 방정식	$x^4 - 2.5x^3 + 1.5x^2$	
Case 4	Fix-Fix 4차 방정식	$x^4 - 2x^3 + x^2$	Slope
	Fix-Simple 3차 방정식	$x^3 - x^2$	

Table 5.2. Properties & cross section of ㄱ Shape Connected Structure

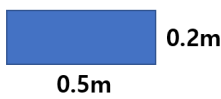
Category	Properties	Cross section
Density [kg/m ³]	7850	
Length [m]	from 1 : 9 to 9 : 1	
Area [m ²]	0.1	
Young`s modulus [N/m ²]	2.1e11	
Moment of inertia [m ⁴]	3.33e-4	

Table 5.3. Comparison Natural Frequency of \cap Shape Connected Structure

길이비(m) ($L_A : L_B$)	차수	FEA	Case_1	Case_2	Case_3	Case_4	Error Ratio (%)
1 : 9	1	12.3	13.6	13.6	13.0	13.0	9.6
	2	34.0	37.8	37.8	36.2	36.2	10.1
	3	66.0	47.0	47.0	47.0	47.0	-40.4
2 : 8	1	15.0	17.2	17.2	16.5	16.5	12.8
	2	41.7	47.4	47.4	45.6	45.6	12.0
	3	81.9	91.8	91.8	89.4	89.4	10.8
3 : 7	1	18.8	21.5	21.5	20.9	20.9	12.6
	2	52.1	58.3	58.3	57.2	57.2	10.6
	3	89.3	85.9	85.9	85.4	85.4	-4.0
4 : 6	1	24.1	26.3	26.3	26.1	26.1	8.4
	2	54.6	51.0	51.0	50.8	50.8	-7.1
	3	75.3	79.9	79.9	79.2	79.2	5.8
5 : 5	1	29.1	29.4	29.4	29.4	29.4	1.0
	2	41.9	42.6	42.6	42.6	42.6	1.6
	3	92.9	95.3	95.3	95.3	95.3	2.5
6 : 4	1	24.1	26.2	26.2	26.1	26.1	8.0
	2	54.6	51.0	51.0	50.8	50.8	-7.1
	3	75.2	79.9	79.9	79.2	79.2	5.9
7 : 3	1	18.8	21.5	21.5	20.9	20.9	12.6
	2	52.1	58.3	58.3	57.2	57.2	10.6
	3	89.3	85.9	85.9	85.4	85.4	-4.0
8 : 2	1	15.0	17.2	17.2	16.5	16.5	12.8
	2	41.7	47.4	47.4	45.6	45.6	12.0
	3	81.9	91.8	91.8	89.4	89.4	10.8
9 : 1	1	12.3	13.6	13.6	13.0	13.0	9.6
	2	34.0	37.8	37.8	36.2	36.2	10.1
	3	66.6	47.0	47.0	47.0	47.0	-41.7

Table 5.4. Comparison mode shape of ‘ \sqcap ’ Shape Connected Structure
 ($L_A : L_B = 5m : 5m$)

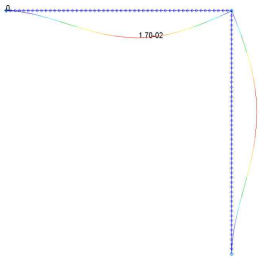
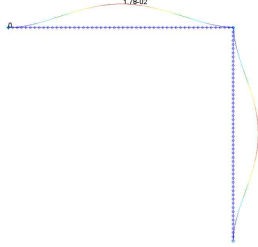
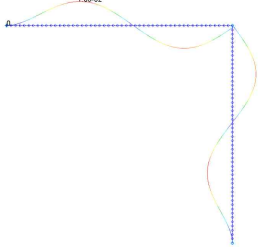
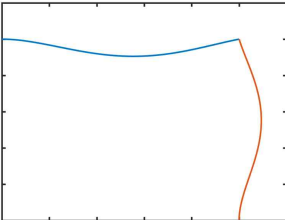
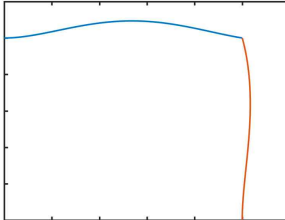
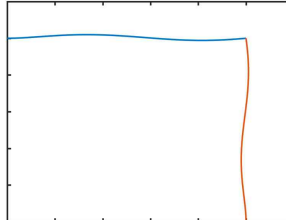
구분	1차	2차	3차
FEA			
Case_1			

Table 5.3.에 ‘ γ ’ Shape Connected Structure 에 대한 정식화 계산결과와 FEA 결과를 정리하였고, Table 5.4.에는 Mode Shape을 비교하였다.

정식화에 의한 고유진동수 계산결과를 Table 5.3.에서 보면 부재길이가 단면적에 비해 크고, 수평부재 vs 수직부재의 길이 차이가 작을수록 오차가 작게 나타났다. 또한, 단면적 vs 부재길이의 비가 유사하고, 고차일수록 오차가 크게 나타났다.

길이가 긴 부재 일수록 Euler Beam의 성질이 잘 반영되어 오차율이 적게 나타나고 있음을 알 수 있으며, 이는 길이에 의한 강성의 영향과 전단변형 효과가 줄어들어 나타나는 것이라고 판단된다. Single Beam의 진동특성 분석을 보면, 고정-고정 경계조건에서 길이가 짧을수록 고유진동수가 높게 나타나는 것에서 알 수 있다.

Mode shape의 형상을 보면 저차에서는 FEM 결과와 유사하지만, 고차로 진행할수록 상이한 모습을 보여주는데, 이는 연결부위에서 FEM과 정식화 계산과의 구속조건 차이와 저차모드에 관심을 두고 정의한 파형함수의 차수에 의한 영향으로 판단된다. 하지만, 관심 대상 Connected Structure 의 고유진동수와 모드는 FEM 결과와 유사하다는 점에서 유용한 계산 방법이라 판단된다.

또한, Natural Boundary Condition 조건에 따른 고정-단순 경계조건에서의 파형함수 유형을 4차 함수 조건과 3차 함수 조건으로 각각 적용하여 계산하였으나, Simple Beam에서의 결과와 같이 두 조건에서 동일한 값이 도출되었다. 본 연구에서 자유단 경계조건을 갖는 L Shape Connected Beam에 대한 파형함수 정의를 위해 다양한 형태의 파형함수에 대해 Single Beam에서 도출하였으나, 앞선 Single Beam에서의 계산 결과와 본 장에서의 계산 결과를 미루어 동일한 경계조건에서의 파형함수는 Natural Boundary Condition의 조건에 의해 파형함수 유형이 다르더라도 유사한 계산 결과를 나타낼 것으로 판단된다.

제 6 장 L Shape Connected Structure

제 1 절 파형함수를 이용한 고유진동수 계산

1. 고유진동수 계산을 위한 모드합성법

Figure 6.1. 같은 L Shape Connected Structure의 해석을 위해 5장의 γ Shape Connected Structure에 대한 고유진동수 계산과 동일하게, 전체 Structure의 연결 부에서 연속 조건을 만족시키는 부분모드 합성법[24]을 이용하고자 한다.

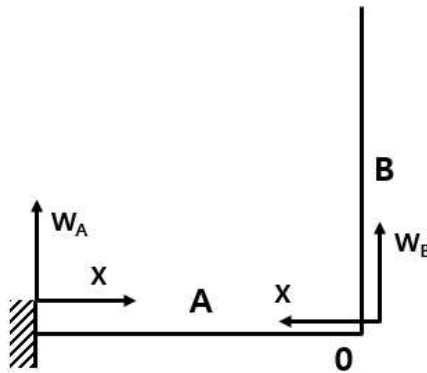


Figure 6.1. The configuration of connected Structure

Figure 6.1. 과 같은 L Shape Connected Structure의 수평 부재를 $W_A(\eta)$, 수직 부재를 $W_B(\eta)$ 라 하고 두 부재의 파형함수는 아래와 같이 고정-단순 경계조건과 고정-자유 경계조건 등 두가지 지지 조건의 조합된 함수로 정의한다.

$$W_A(\eta) = \sum_{i=1}^m (\phi_i(\eta) p_{Ai}(\eta)) + \eta^2 p_{Ai}(t) \quad (6-1)$$

$$W_B(\eta) = \sum_{j=1}^n (\gamma_j(\eta) p_{Bj}(\eta)) + \eta q_{Bj}(t) \quad (6-2)$$

여기서, $p_{Ai}(t), q_{Ai}(t), p_{Bi}(t), q_{Bi}(t)$ 는 일반 좌표계이다. 또한, η^2, η 는 각각 변위

및 회전에 대한 변수이며, x방향에 대한 변위는 U_b 이다.

이 두 식은 다음과 같은 경사각과 변위에 대한 연속조건을 만족시켜야 한다.

[Slope Continuity]

$$\frac{W'_A(1)}{l_A} = \frac{W'_B(0)}{l_B} \quad (6-3)$$

$$\frac{1}{l_A} [\phi'_1 q_{A1} + \dots + \phi'_m q_{Am-1} + 2\eta q_{Am}] = \frac{1}{l_B} [\gamma'_1 q_{B1} + \dots + \gamma'_n q_{Bn-1} + q_{Bn}] \quad (6-4)$$

$$q_{Bn} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\phi'_1}{\phi'_n} \cdot q_{A1} + \dots + \frac{\phi'_m}{\phi'_n} \cdot q_{Am-1} + \frac{2\eta}{\phi'_n} \cdot q_{Am} \right] - \left[\frac{\gamma'_1}{\gamma'_n} \cdot q_{B1} + \dots + \frac{\gamma'_{n-1}}{\gamma'_n} \cdot q_{Bn-1} \right] \quad (6-5)$$

[Displacement Continuity]

$$\frac{W_A(1)}{l_A} = U_b(0) \quad (6-6)$$

$$\frac{1}{l_A} [\phi_1 p_{A1} + \dots + \phi_m p_{Am-1} + \eta^2 p_{Am}] = p_{Bn} \quad (6-7)$$

$$p_{Bn} = U_b \quad (6-8)$$

부분모드 합성법을 이용함으로써 연결지점에서 $2m+2n$ 개의 좌표계를 $2m+2n-2$ 개로 축약시켰다.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} \phi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha} \phi_{m-1} & \frac{1}{\alpha} \frac{2\eta}{\phi_m} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha \phi_m & \cdots & \alpha \phi_m & \alpha \phi_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & U_b & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{m-1} \end{Bmatrix} \quad (6-9)$$

2. 에너지 산식

일반적으로 파형가정함수를 이용한 고전적 근사해법에 의한 진동 해석을 위해서는 해석 대상계의 탄성에너지 및 운동에너지 산식이 필요하다. L Shape Connected Structure의 진동해석을 위해 γ Shape Connected Structure과 동일한 방법을 이용하였다.

- 고정-단순 경계조건의 파형가정함수 ($\phi(\eta)$)

$$y(x,t) = \sum_i^m \phi_i(x) \cdot p_i(t) \quad (6-10)$$

$p_i(t)$ 는 일반화 좌표, 직교 관계를 고려한 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \dot{y}^2(x,t) dx \quad (6-11)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \sum_i \sum_j \dot{p}_i(t) \cdot \dot{p}_j(t) \int_0^l \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot dx \quad (6-12)$$

$m = \rho A$, 일반화 질량은

$$m_{ij} = m \cdot \int_0^l \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot dx \quad (6-13)$$

무차원 길이 좌표 $\eta = \frac{2x}{l} - 1$ 를 사용하면,

$$m_{ij} = m \cdot \int_{-1}^1 \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot \frac{l}{2} d\eta \quad (6-14)$$

$$m_{ij} = \frac{ml}{2} \cdot \int_{-1}^1 \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta \quad (6-15)$$

탄성에너지는

$$U = \frac{1}{2} \cdot EI \cdot \int_0^l y''^2(x,t) \cdot dx \quad (6-16)$$

$$U = \frac{1}{2} EI \sum_i \sum_j p_i(t) \cdot p_j(t) \cdot \int_0^l \phi''_i(x) \cdot \phi''_j(x) \cdot dx \quad (6-17)$$

일반화 강성은,

$$k_{ij} = EI \cdot \int_0^l \phi''_i(x) \cdot \phi''_j(x) \cdot dx \quad (6-18)$$

$$k_{ij} = EI \cdot \int_{-1}^1 \frac{4}{l^2} \cdot \phi''_i(\eta) \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \phi''_j(\eta) \cdot \frac{1}{2} \cdot d\eta \quad (6-19)$$

$$k_{ij} = \frac{8EI}{l^3} \cdot \int_{-1}^1 \phi''_i(\eta) \cdot \phi''_j(\eta) \cdot d\eta \quad (6-20)$$

여기서, ρ 는 Beam의 질량밀도, A 는 보강재의 단면적, L 은 보강재의 길이이며 E 는 보강재의 굽힘 강성을 나타낸다.

위의 수식을 보존계에 대한 Lagrange 운동 방정식에 대입함으로써 Beam에 대한 M , K 비감쇠 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{p}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta p_i} + \frac{\delta U}{\delta p_i} = 0 \quad (6-21)$$

$$\frac{ml}{2} [M] \{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3} [K] \{p\} = 0 \quad (6-22)$$

matrix (6-9)을 (6-22)식에 적용하면 아래 수식으로 표현 가능하다.

$$\frac{ml}{2} [M][C] \{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3} [K][C] \{p\} = 0 \quad (6-23)$$

$$\frac{ml}{2} [C'] [M] [C] \{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3} [C'] [K] [C] \{p\} = 0 \quad (6-24)$$

Figure 6.1에서 $y_A(\eta)$ 과 $y_B(\eta)$ 사이에 연성은 없으므로 질량 및 강성 행렬은 아래와 같은 형태를 갖는다.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}$$

m_A : $y_A(\eta)$ 질량 m_B : $y_B(\eta)$ 질량

k_A : $y_A(\eta)$ 강성 k_B : $y_B(\eta)$ 강성

Figure 6.1 L Shape Connected Structure 전체 질량 행렬과 강성 행렬은 아래처럼 표현할 수 있다

$$[m_a] = \frac{ml_A}{2} \begin{vmatrix} \phi_1\phi_1 \cdots \phi_1\phi_n & \phi_1\gamma_1 \cdots \phi_1\gamma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n\phi_1 \cdots \phi_n\phi_n & \phi_n\gamma_1 \cdots \phi_n\gamma_n \\ \phi_1\gamma_1 \cdots \phi_1\gamma_n & \gamma_1\gamma_1 \cdots \gamma_1\gamma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n\gamma_1 \cdots \phi_n\gamma_n & \gamma_n\gamma_1 \cdots \gamma_n\gamma_n \end{vmatrix} \quad (6-25)$$

$$[m_b] = \frac{ml_B}{2} \begin{vmatrix} \phi_1\phi_1 \cdots \phi_1\phi_n & \phi_1\gamma_1 \cdots \phi_1\gamma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n\phi_1 \cdots \phi_n\phi_n & \phi_n\gamma_1 \cdots \phi_n\gamma_n \\ \phi_1\gamma_1 \cdots \phi_1\gamma_n & \gamma_1\gamma_1 \cdots \gamma_1\gamma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n\gamma_1 \cdots \phi_n\gamma_n & \gamma_n\gamma_1 \cdots \gamma_n\gamma_n \end{vmatrix} \quad (6-26)$$

$$[k_a] = \frac{8EI_A}{l_A^3} \begin{vmatrix} \phi''_1\phi''_1 \cdots \phi''_1\phi''_n & \phi''_1\gamma''_1 \cdots \phi''_1\gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n\phi''_1 \cdots \phi''_n\phi''_n & \phi''_n\gamma''_1 \cdots \phi''_n\gamma''_n \\ \phi''_1\gamma''_1 \cdots \phi''_1\gamma''_n & \gamma''_1\gamma''_1 \cdots \gamma''_1\gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n\gamma''_1 \cdots \phi''_n\gamma''_n & \gamma''_n\gamma''_1 \cdots \gamma''_n\gamma''_n \end{vmatrix} \quad (6-27)$$

$$[k_b] = \frac{8EI_B}{l_B^3} \begin{vmatrix} \phi''_1\phi''_1 \cdots \phi''_1\phi''_n & \phi''_1\gamma''_1 \cdots \phi''_1\gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n\phi''_1 \cdots \phi''_n\phi''_n & \phi''_n\gamma''_1 \cdots \phi''_n\gamma''_n \\ \phi''_1\gamma''_1 \cdots \phi''_1\gamma''_n & \gamma''_1\gamma''_1 \cdots \gamma''_1\gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n\gamma''_1 \cdots \phi''_n\gamma''_n & \gamma''_n\gamma''_1 \cdots \gamma''_n\gamma''_n \end{vmatrix} \quad (6-28)$$

위에서 나열한 행렬값들을 식(6-24)에 대입함으로써 비감쇠 운동방정식으로부터 L Shape Connected Structure의 고유진동수를 얻을 수 있다.

3. 파형함수를 이용한 ‘L’ Shape Connected Structure 고유진동수 계산

L Shape Connected Structure의 대한 진동해석 정식화 방법에 대한 유용성 검증을 위해 먼저 Euler Beam 함수 성질을 갖는 다항식을 파형함수로 정의하여 고유진동수를 계산하였으며, 계산 결과와 유한요소법 해석 결과를 비교 / 검토하였다.

Table 6.1. Wave Function of L Shape Connected Structure

Category	Fundamental Mode Function		연결부 연속조건
Case 1	Fix-Simple 4차 방정식	$x^4 - 2.5x^3 + 1.5x^2$, x^2 (변위)	Slope, Displacement
	Fix-Free 4차 방정식	$x^4 - 4x^3 + 6x^2$, x (회전)	
Case 2	Fix-Simple 3차 방정식	$x^3 - x^2$, x^2 (변위)	
	Fix-Free 4차 방정식	$x^4 - 4x^3 + 6x^2$, x (회전)	

Table 6.2. Properties & cross section of L Shape Connected Structure


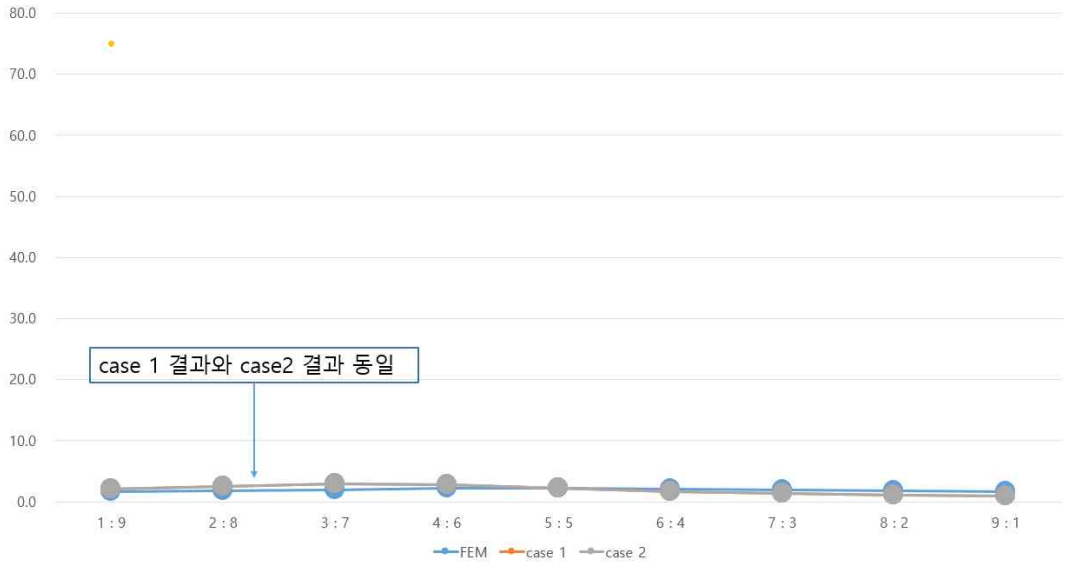
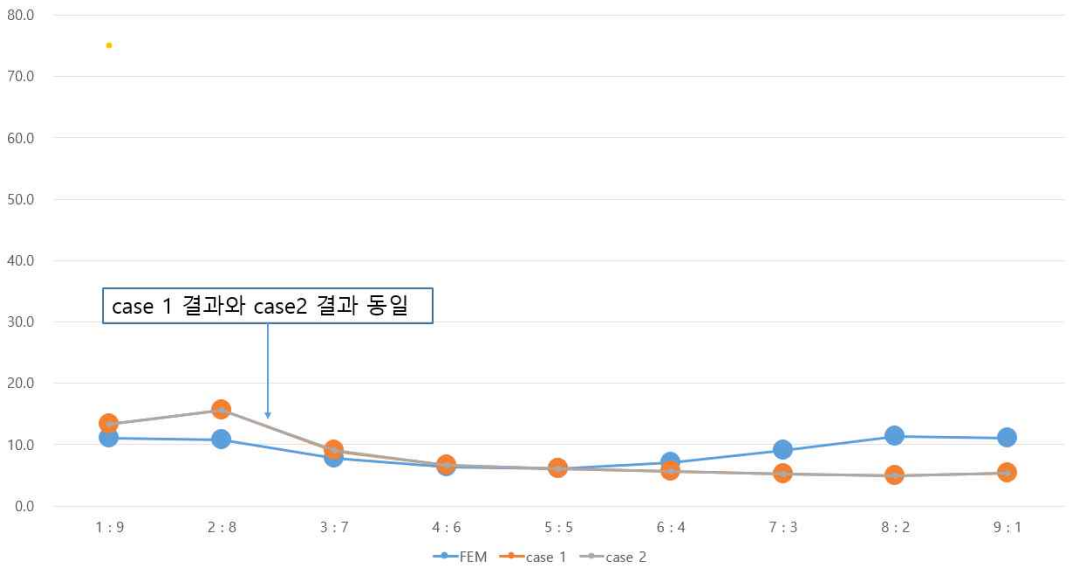
Category	Properties	Cross section
Density [kg/m ³]	7850	
Length [m]	5	
Area [m ²]	0.1	 0.5m 0.2m
Young`s modulus [N/m ²]	2.1e11	
Moment of inertia [m ⁴]	3.33e-4	

Table 6.3. Comparison Natural Frequency of L Shape Connected Structure

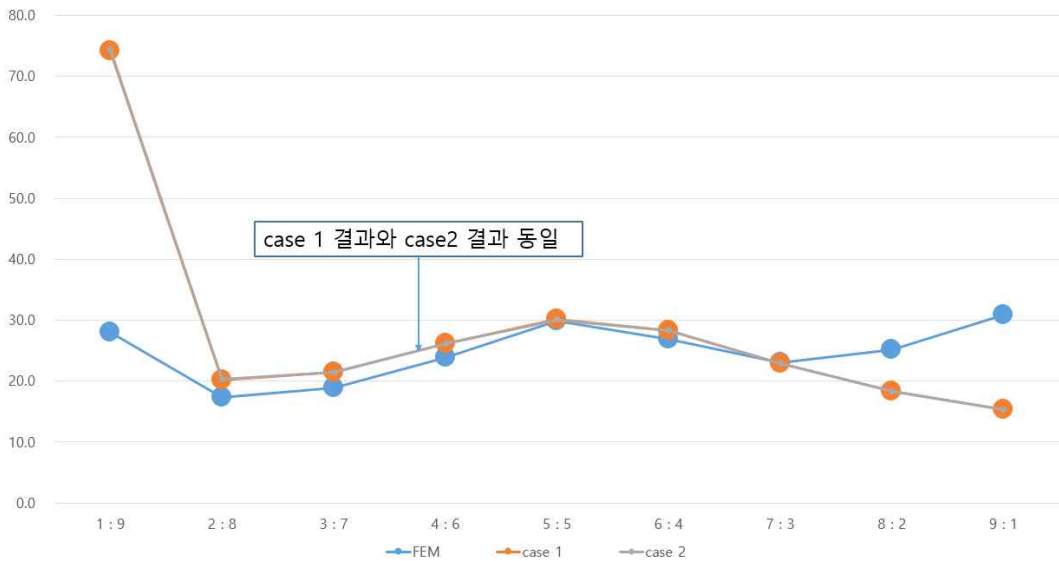
길이비(m) (L _A : L _B)	차수	FEA	Case_1	Case_2	Error Ratio(%)
1 : 9	1	1.7	2.1	2.1	19.0
	2	11.1	13.3	13.3	16.5
	3	28.0	74.1	74.1	62.2
2 : 8	1	1.8	2.5	2.5	28.0
	2	10.7	15.6	15.6	62.2
	3	17.3	20.2	20.2	28.0
3 : 7	1	2.0	2.9	2.9	31.0
	2	7.8	9.0	9.0	13.3
	3	18.9	21.5	21.5	12.1
4 : 6	1	2.2	2.8	2.8	21.4
	2	6.3	6.6	6.6	4.5
	3	23.9	26.1	26.1	8.4
5 : 5	1	2.2	2.2	2.2	0
	2	6.1	6.1	6.1	0
	3	29.8	30.1	30.1	1.0
6 : 4	1	2.1	1.7	1.7	-23.5
	2	7.0	5.7	5.7	-22.8
	3	26.9	28.2	28.2	4.6
7 : 3	1	2.0	1.3	1.3	-53.8
	2	9.1	5.2	5.2	-75.0
	3	23.0	22.9	22.9	-0.4
8 : 2	1	1.8	1.1	1.1	-63.6
	2	11.3	5.0	5.0	-126.0
	3	25.1	18.4	18.4	-36.4
9 : 1	1	1.7	0.9	0.9	-88.9
	2	11.1	5.4	5.4	-105.6
	3	30.8	15.4	15.4	-100.0



(a) 1st



(b) 2nd



(3) 3rd

Table 6.4. Comparison Natural Frequency of L Shape Connected Structure

Table 6.3.에 ㄱ형 Connected Beam에 대한 정식화 계산결과와 FEA 결과를 정리하였고, Table 6.4는 비교 그래프를 나타내었다.

정식화에 의한 고유진동수 계산결과 수평부재와 수직부재의 길이가 동일한 조건을 제외하고는, 오차율이 매우 크게 나타나고 있어 ‘ㄱ’ Shape Connected Structure에 비해 데이터 신뢰도가 매우 낮음을 알 수 있다.

설계단계에서 파형함수를 이용한 진동특성을 해석하기 위해서는 전 구간에 걸쳐 신뢰성 있는 데이터가 도출되어야 하지만, 본 장에서 살펴본 바와 같이 ‘L’ Shape Connected Structure는 그러하지 못하고 있다. 이는 끝단이 자유 경계조건을 갖는 수직부재에 대한 파형 정의에 어려움이 있어 발생한 것이라 판단된다.

수직부재에 대한 추가적인 파형 정의를 위하여 고정 경계조건을 갖는 Beam에 대해서 반대쪽에 대한 경계조건을 각각 전단, 모멘트 의 경계 조건을 부여하여 파형함수를 다음과 같이 정의하여 보았다. (이는 추가적인 파형을 검토하기 위한 경계조건으로써 각각 고정-전단, 고정-모멘트 경계조건이라고 정한다.)

경계조건의 함수를 $\theta(x)$ 라 정의하고, 양단에 다음의 경계조건을 적용하여, 기본 파형함수를 구하였다. 해당 파형함수에 부여되는 경계조건은 3개로 기본함수는 3차 함수에서 시작하게 된다.

먼저 고정-전단 경계조건에 대한 파형함수를 정의하면 다음과 같다.

· 기본함수

$$\theta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (6-29)$$

· 양단 경계조건

BC	GBC	NBC
고정-전단 (C-SF)	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta''(1) = 0$

* C-SF : Clamp-Shear Force

양단 경계조건을 기본함수 (6-29)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\theta''(1) = 0 \rightarrow a_2 + 3a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = -3a_3$ 를 기본함수 (6-29)식에 대입하면,

$$\theta_1(\xi) = \xi^3 - 3\xi^2$$

$$\theta_1(\xi) = \xi^2(\xi - 3) \quad (6-30)$$

와 같이 고정-전단 경계조건에 대한 파형함수가 정리되어, 고정-자유 경계조건 3차 방정식 제 1 파형함수 (4-66)식과 같은 파형함수가 된다.

또한, 고정-모멘트 경계조건에 대한 파형함수를 정의하면 다음과 같다.

· 기본함수

$$\theta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (6-31)$$

· 양단 경계조건

양단경계조건	GBC	NBC
고정-모멘트 (C-M)	$\theta(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$\theta'''(1) = 0$

* C-M : Clamp-Moment

양단 경계조건을 기본함수 (6-31)에 대입하여 계수 값을 구하기 위한 방정식을 구하면 아래와 같다.

$$\theta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\theta'''(1) = 0 \rightarrow a_3 = 0$$

상기 방정식을 정리하여 얻은 계수, $a_2 = 1$ 를 기본함수 (6-31)식에 대입하면

$$\theta_1(\xi) = \xi^2 \quad (6-32)$$

와 같이 고정-모멘트 경계조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 이는 고정-자유 경계조건 3차 방정식 제 2 파형함수 (4-81)식과 같은 파형함수가 된다.

수직부재의 자유단 경계조건에 대한 다양한 파형 정의를 위해 전단 및 모멘트 경계조건에 대해 임의의 파형함수를 추정하였으나, 이는 고정-자유 경계조건 파형함수의 Natural Boundary Condition 조건에 따른 함수조건과 동일한 함수가 도출됨에 따라 이를 적용한 계산이 불필요하다 판단하였다.

이처럼, 자유 경계조건에 대한 파형정의를 위해 다양한 유형의 함수 조건을 도입하여 계산하였으나, 'L' Shape Connected Structure의 전영역에 대한 고유진동수

추정에 어려움이 있음을 확인하였다. 2절에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해, Beam의 Mode Shape을 고려하지 않은 단순 수학적 방정식을 도입하였다.

제 2 절 수학적 함수를 이용한 고유진동수 계산

1. 고유진동수 계산

Figure 6.2. 같은 ‘L’ Shape Connected Structure의 해석을 위해 파형함수를 이용한 계산은 수평부재와 수직부재가 동일한 길이를 갖는 경우의 고유진동수만이 FEA 결과와의 비교에서 신뢰성을 얻었다. 고유진동 해석에 있어서 특정 조건에서의 결과에 대해서만 신뢰성이 있는 것은 고유진동수 검토를 위한 방법으로 옳지 않다고 판단하였다. 본 절에서는 이의 해결을 위해 단순 수학적 방정식 모델을 이용하여, Connected Structure의 Mode Shape을 배제하고 특성치만을 고려하여 계산하였다.

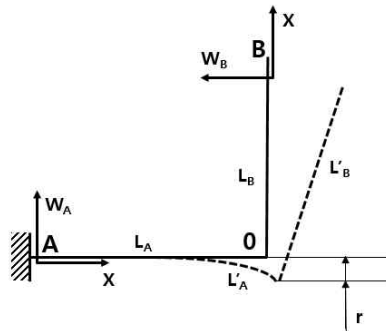


Figure 6.2. The configuration of connected structure

Figure 6.2. 같은 ‘L’ Shape Connected Structure의 수평 부재를 $W_A(x_A, t)$, 수직 부재를 $W_B(x_B, t)$ 라하고 두 부재의 파형함수는 아래와 같이 조합된 함수로 정의한다.

$$W_A(x_A, t) = L_A \sum_{i=1}^m (\phi_i(\zeta) p_i) \quad (6-29)$$

$$W_B(x_B, t) = L_B (r_i + \sum_{j=1}^n (\psi_j(\xi) q_i)) \quad (6-30)$$

여기서, p_i, q_i 는 일반 좌표계이고, r_i 는 연결점에서의 변위 이다.

이 두 식은 다음과 같은 경사각과 변위에 대한 연속조건을 만족시켜야 한다.

[Slope Continuity]

$$L_A \sum \phi_i(1)p_i = L_B \cdot r \quad (6-31)$$

$$r = \frac{L_A}{L_B} \sum \phi(1)p_i = \frac{1}{\beta} \sum p_i \quad (6-32)$$

$$r = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{\beta} (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n) \quad (6-33)$$

[Displacement Continuity]

$$L_A \sum \phi'_i(1)p_i = \sum \gamma'_i(0)q_i \quad (6-34)$$

$$q_1 = \sum (i+1)p_i \quad (6-35)$$

$$q_m = \sum_{i=1}^m (i+1)p_i = 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 + \dots + (m+1)p_m \quad (6-36)$$

부분모드 합성법을 이용함으로써 연결지점에서 $2m+2n$ 개의 좌표계를 $2m+2n-2$ 개로 축약시켰다. 연결부위의 경사각과 변위 연속조건에 의해 생성된 (6-37)식을 다음에 언급할 (6-52)식에 대입함으로써 일반화 좌표계만큼의 고유진동수를 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \\ r \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & \cdots & m+1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{1}{\beta} & \cdots & \frac{n}{\beta} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ r \end{Bmatrix} \quad (6-37)$$

2. 에너지 산식

수평부재 (W_A)와 수직부재 (W_B)에 대한 함수를

$$W_A(x_A, t) = L_A \sum_{i=1}^m (\phi_i(\zeta) p_i) \quad (6-38)$$

$$W_B(x_B, t) = L_B (r_i + \sum_{i=1}^n (\psi_i(\xi) q_i)) \quad (6-39)$$

로 정의한다.

여기서, W_A, W_B 는 $\zeta = \frac{x_A}{L_A}, \xi = \frac{x_B}{L_B}$ 으로 무차원화하고, 수평부재는 2차 방정식, 수직부재는 1차 방정식으로 가정하면, (6-38)식과 (6-39)식의 함수부분은 다음과 같이 재정의할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^m (\phi_i(\zeta) p_i(t)) = \sum_{i=1}^m \zeta^{i+1} p_i$$

$$\sum_{j=1}^n (\gamma_j(\xi) q_j(t)) = \sum_{j=1}^n \xi^j q_j$$

이를 이용하여, 일반화 질량은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 m_{A_{pp_i}} &= m_A L_A^3 \int_0^l \phi_i(\zeta) \cdot \phi_j(\zeta) d\zeta & (6-40) \\
 &= m_A L_A^3 \int_0^l \zeta^{i+1} \zeta^{j+1} d\zeta \\
 &= m_A L_A^3 \int_0^l \zeta^{i+j+2} d\zeta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{B_{qq_i}} &= m_B L_B^3 \int_0^l \psi_i(\xi) \cdot \psi_j(\xi) d\xi & (6-41) \\
 &= m_B L_B^3 \int_0^l \xi^i \xi^j d\xi \\
 &= m_A L_A^3 \int_0^l \xi^{i+j+1} d\xi \\
 &= m_A L_A^3 \frac{\alpha \beta^3}{\xi^{i+j+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{Brr} &= m_B L_B^3 \int_0^l d\xi & (6-42) \\
 &= m_B L_B^3 \\
 &= m_A L_A^3 \alpha \beta^3
 \end{aligned}$$

$$\left(\alpha = \frac{m_b}{m_a}, \beta = \frac{L_B}{L_A} \right)$$

일반화 강성은 다음과 같다.

$$k_{ij} = \frac{EI}{L} \cdot \int_0^l \psi''_i(x) \cdot \psi''_j(x) \cdot dx \quad (6-43)$$

$$\begin{aligned}
 K_{A_{ppj}} &= \frac{EI_A}{L_A} \int_0^l \phi''_i(\zeta) \cdot \phi''_j(\zeta) d\zeta & (6-44) \\
 &= \frac{EI_A}{L_A} \int_0^l (i+1)i\zeta^{i-1} (j+1)j\zeta^{j-1} d\zeta \\
 &= \frac{EI_A}{L_A} \frac{(i+1)i(j+1)j}{i+j-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{B_{qqj}} &= \frac{EI_B}{L_B} \int_0^l \psi''_i(\xi) \cdot \psi''_j(\xi) d\xi & (6-45) \\
 &= \frac{EI_B}{L_B} \int_0^l (i-1)i(j-1)j\xi^{i-2}\xi^{j-2} d\xi \\
 &= \frac{EI_B}{L_B} \frac{(i-1)j(j-1)j}{i+j-3} \\
 &= \frac{EI_A}{L_A} \beta r \frac{(i-1)i(j-1)j}{i+j-3} \\
 \left(r = \frac{1}{\beta^2} \frac{EI_B}{EI_A} \right)
 \end{aligned}$$

여기서, ρ 는 Beam의 질량밀도, A는 Beam의 단면적, L은 Beam의 길이이며, EI는 Beam의 굽힘 강성을 나타낸다.

위의 수식을 Lagrange 운동 방정식에 대입함으로써 Beam에 대한 M, K 비감쇠 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{p}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta p_i} + \frac{\delta U}{\delta p_i} = 0 \quad (6-46)$$

$$[k_a] = \frac{EI_A}{L_A} \begin{bmatrix} \phi''_1 \phi''_1 & \cdots & \phi''_1 \phi''_n & \phi''_1 \gamma''_1 & \cdots & \phi''_1 \gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n \phi''_1 & \cdots & \phi''_n \phi''_1 & \phi''_n \gamma''_1 & \cdots & \phi''_n \gamma''_n \\ \phi''_1 \gamma''_1 & \cdots & \phi''_1 \gamma''_n & \gamma''_1 \gamma''_1 & \cdots & \gamma''_1 \gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n \gamma''_1 & \cdots & \phi''_n \gamma''_n & \gamma''_n \gamma''_1 & \cdots & \gamma''_n \gamma''_n \end{bmatrix} \quad (6-53)$$

$$[k_b] = \frac{EI_A}{L_A} \begin{bmatrix} \phi''_1 \phi''_1 & \cdots & \phi''_1 \phi''_n & \phi''_1 \gamma''_1 & \cdots & \phi''_1 \gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n \phi''_1 & \cdots & \phi''_n \phi''_1 & \phi''_n \gamma''_1 & \cdots & \phi''_n \gamma''_n \\ \phi''_1 \gamma''_1 & \cdots & \phi''_1 \gamma''_n & \gamma''_1 \gamma''_1 & \cdots & \gamma''_1 \gamma''_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''_n \gamma''_1 & \cdots & \phi''_n \gamma''_n & \gamma''_n \gamma''_1 & \cdots & \gamma''_n \gamma''_n \end{bmatrix} \quad (6-54)$$

$$[k_c] = |0| \quad (6-55)$$

위에서 나열한 행렬값들을 식(6-49)에 대입함으로써 비감쇠 운동방정식으로부터 ‘L’ Shape Connected Structure의 고유진동수를 얻을 수 있다.

3. 수학적 함수를 이용한 ‘L’ Shape Connected Structure 고유진동수 계산

‘L’ Shape Connected Structure의 대한 진동해석 정식화 방법에 대한 유용성 검증을 위해 다항식 함수로 정의하여 고유진동수를 계산하였으며, 계산 결과와 유한요소법 해석 결과를 비교 / 검토 하였다.

계산방법의 유용성을 검증하기 위하여 사용된 ‘L’ Shape Connected Structure 형상 및 특성치를 Table 6.6.에 나타내었다.

Table 6.5. Mathematical Function of ‘L’ Shape Connected Structure

Category	Fundamental Function	연결부 연속조건
case 3 W_A	x^2	Slope, Displacement
W_B	x	

Table 6.6. Properties & cross section of ‘L’ Shape Connected Structure

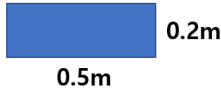
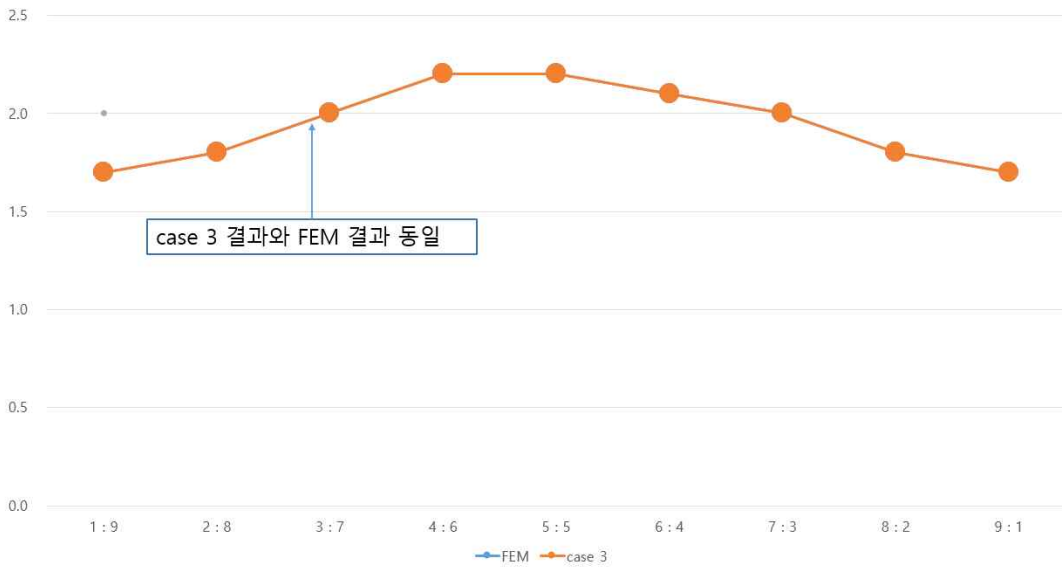
Category	Properties	Cross section
Density [kg/m ³]	7850	
Length [m]	5	
Area [m ²]	0.1	
Young`s modulus [N/m ²]	2.1e11	
Moment of inertia [m ⁴]	3.33e-4	

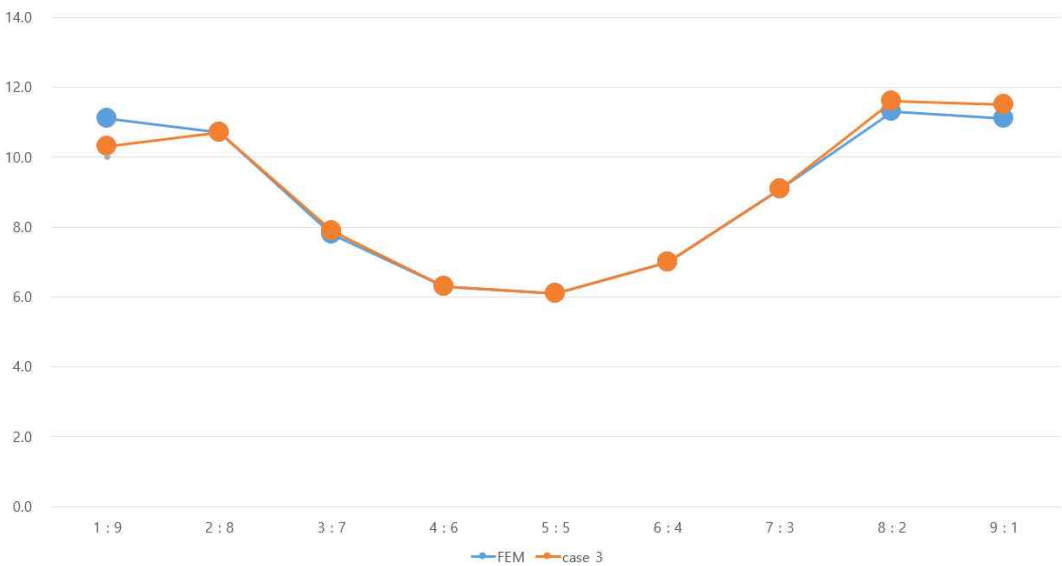
Table 6.7. Comparison Natural Frequency of ‘L’ Shape Connected Structure

길이비(m) ($L_A : L_B$)	차수	FEA	case 3	Error Ratio(%)
1 : 9	1	1.7	1.7	0
	2	11.1	10.3	-7.8
	3	28.0	30.2	7.3
2 : 8	1	1.8	1.8	0
	2	10.7	10.7	0
	3	17.3	18.6	7.0
3 : 7	1	2.0	2.0	0
	2	7.8	7.9	1.3
	3	18.9	22.1	14.5
4 : 6	1	2.2	2.2	0
	2	6.3	6.3	0
	3	23.9	22.6	-5.8
5 : 5	1	2.2	2.2	0
	2	6.1	6.1	0
	3	29.8	29.7	-0.3
6 : 4	1	2.1	2.1	0
	2	7.0	7.0	0
	3	26.9	28.0	3.9
7 : 3	1	2.0	2.0	0
	2	9.1	9.1	0
	3	23.0	24.1	4.6
8 : 2	1	1.8	1.8	0
	2	11.3	11.6	2.6
	3	25.1	26.6	5.6
9 : 1	1	1.7	1.7	0
	2	11.1	11.5	3.5
	3	30.8	37.6	18.1

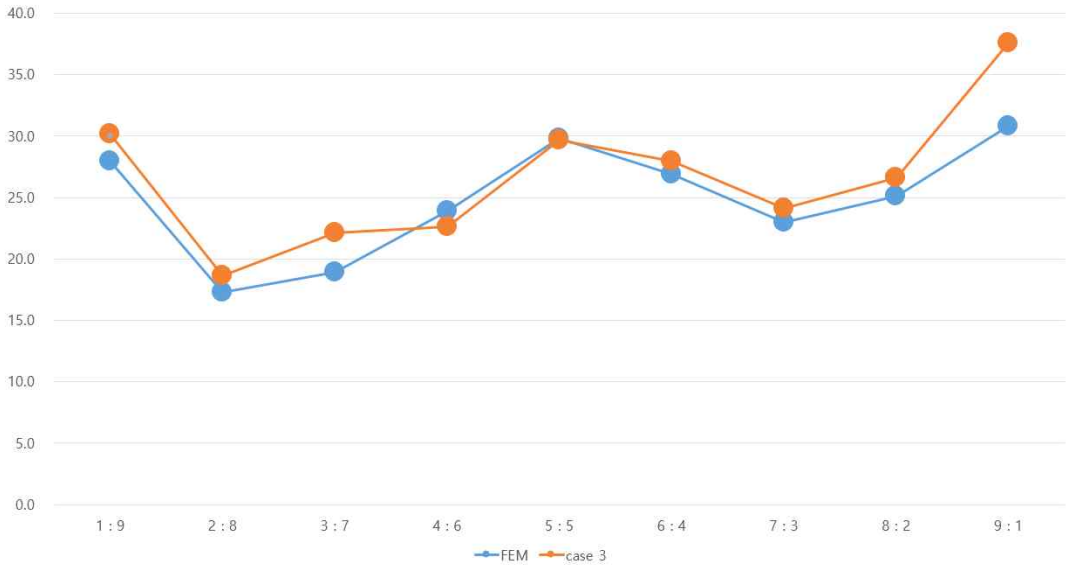
Table 6.8. Comparison Natural Frequency of 'L' Shape Connected Structure



(a) 1st Natural Frequency



(b) 2nd Natural Frequency



(c) 3rd Natural Frequency

Table 6.7.에는 ‘L’ Shape Connected Structure에 대한 계산결과와 FEA 결과를 정리하였고, Table 6.8.에는 비교 그래프를 나타내었다.

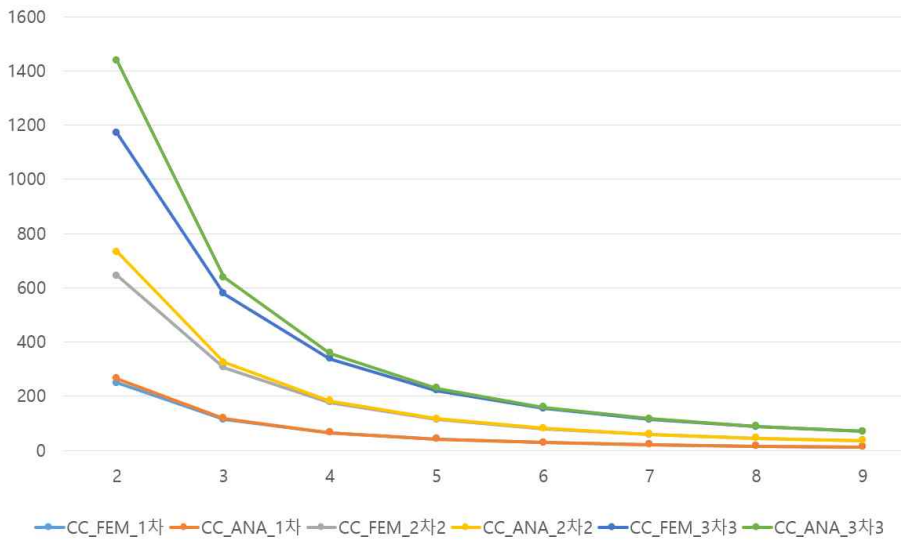
여전히 고차에서는 결과가 FEA와 상이하지만, 주관심 영역인 저차에서는 파형함수를 이용한 고유진동수 계산결과에 비해, 단순 수학적 방정식에 의한 계산 결과는 전 구간에 걸쳐서 매우 높은 신뢰도를 얻을 수 있었다.

수학적 모델의 경우 기본 함수와 같이 $y = x^n$ 의 Mode Shape을 나타내게 되며, 이는 실질적인 Mode Shape과는 많은 차이를 나타내고 있지만 고유진동수 계산만을 검토할 경우 유용한 계산 방법이라 판단된다.

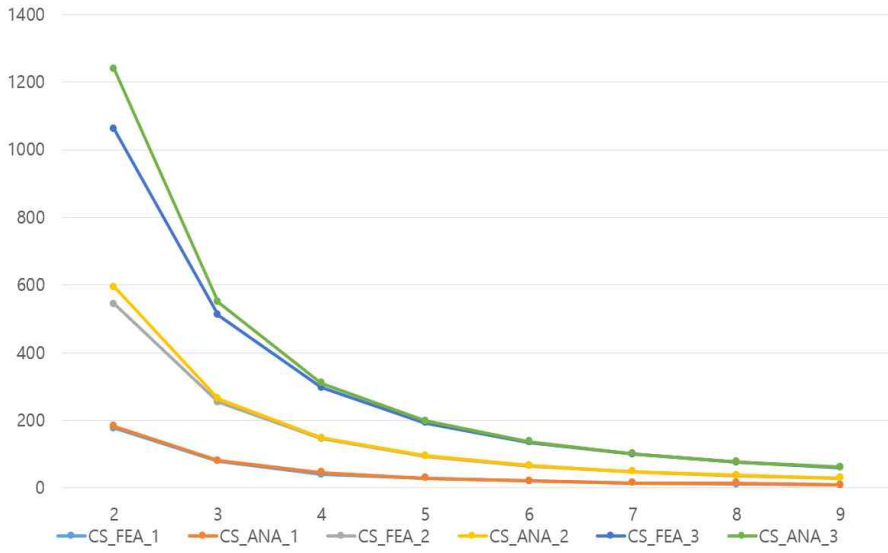
제 7 장 계산결과 특성검토 및 토의

Single Beam 파형함수에 대한 고유진동수 계산 결과와 FEA 결과를 Table 7.1.와 같이 비교하였다. 양단 경계조건에 대해 Geometric Boundary Condition은 고정하고, Natural Boundary Condition을 다양하게 적용하여 여러 유형의 파형함수를 정의하고, 이에 대한 계산 결과를 비교하였다.

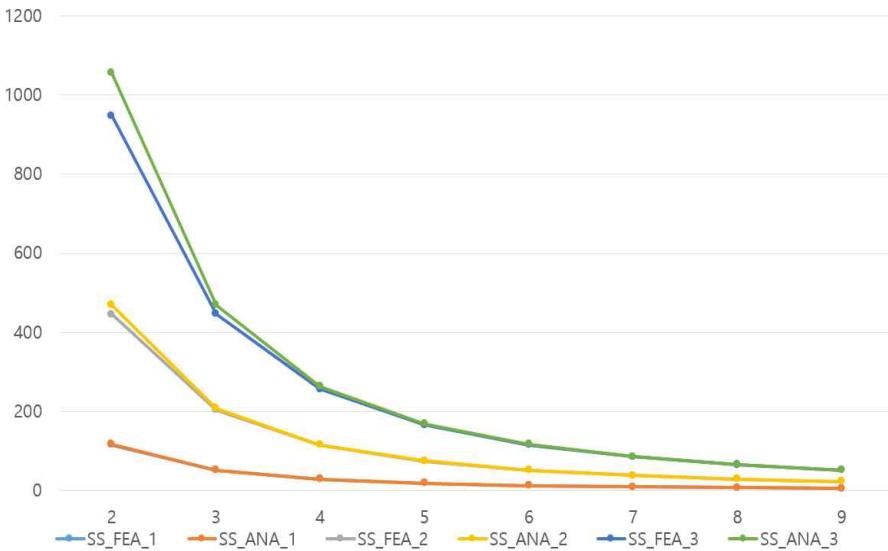
Table 7.1. Comparison Natural Frequency of Single Beam



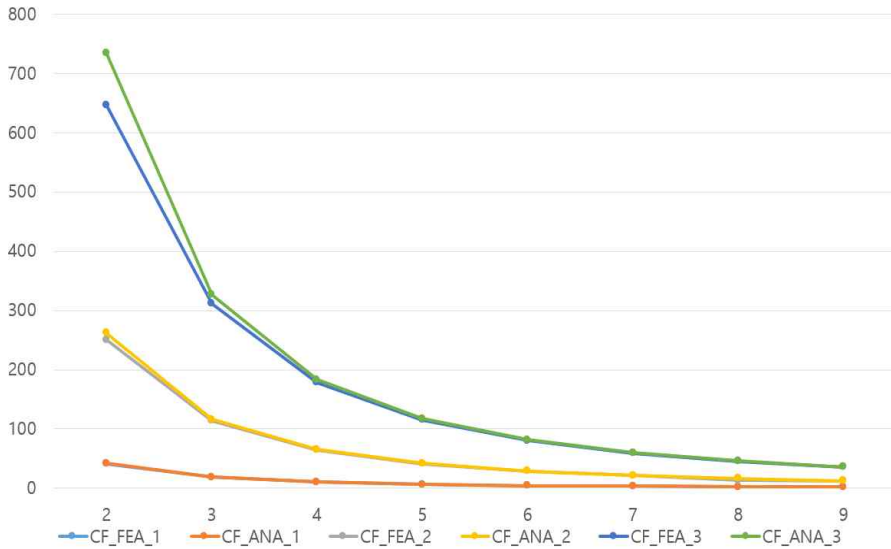
(a) C-C Boundary Condition



(b) C-S Boundary Condition



(c) S-S Boundary Condition



(d) C-F Boundary Condition

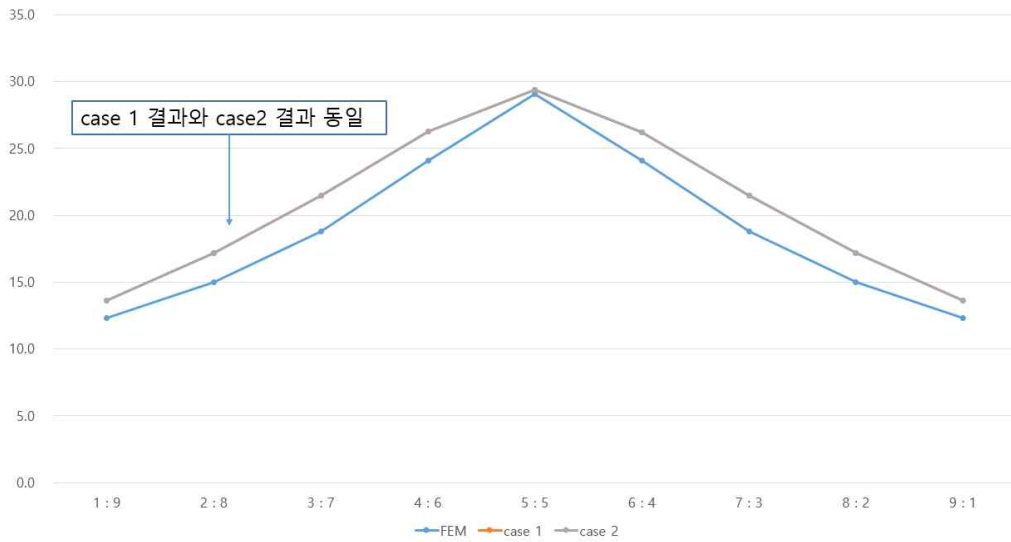
* C : Clamp , S : Simple , F : Free

Beam의 길이 변화에 따른 고유진동수 감소는 길이에 따른 강성의 변화에 따라 일정한 영향을 미치고 있다. 이로 인해, 파형함수별 고유진동수 값이 상이하지만, 그래프 모두 길이가 길어짐에 따라 감소하는 일정한 형태의 곡선을 나타내고 있다. 이는 Beam의 길이가 길어짐에 따라 강성이 고유진동수에 미치는 영향의 감소되어 나타는 특징이다. 또한, 길이가 길어지면서, 경계조건 유형에 의한 효과가 작아지고 있음을 알 수 있다.

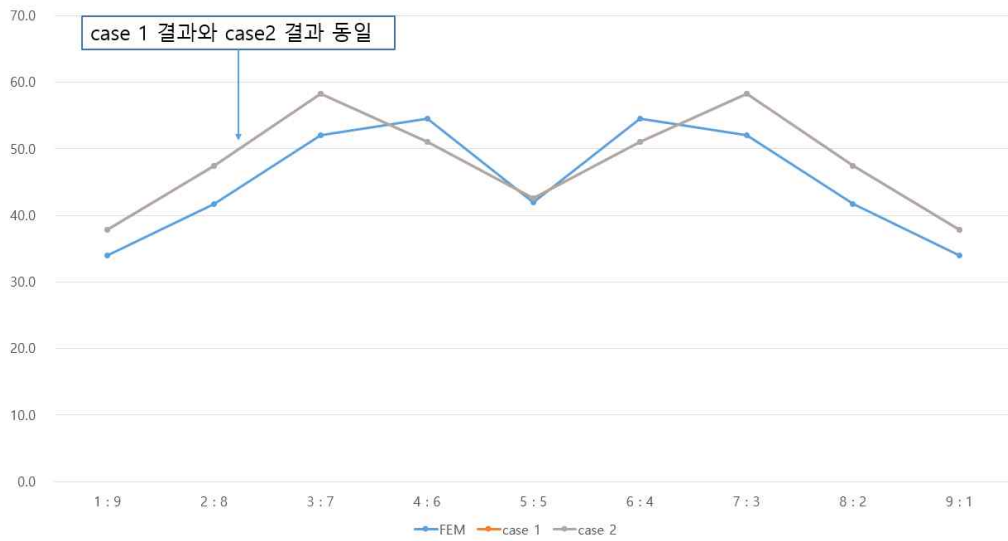
동일한 양단경계조건에서 Natural Boundary Condition의 조건에 따라 파형함수의 형태가 4차함수부터 2차함수까지 다양하게 나타나지만, 고유진동수 계산 결과는 동일하게 도출되었다. 이는 Natural Boundary Condition인 Moment 및 Shear Force 구속조건 등이 Euler Beam에서의 고유진동수 계산에 영향이 없다고 판단할 수 있다. 이는 Connected Structure 연결부에서의 구속조건을 변경을 통한 계산에서도 동일한 고유진동수가 계산되어 확인할 수 있다.

다음으로, γ Shape Connected Structure의 파형함수를 이용한 고유진동수 계산 결과와 FEA 결과를 비교하여 Table 7.2.에 나타내었다.

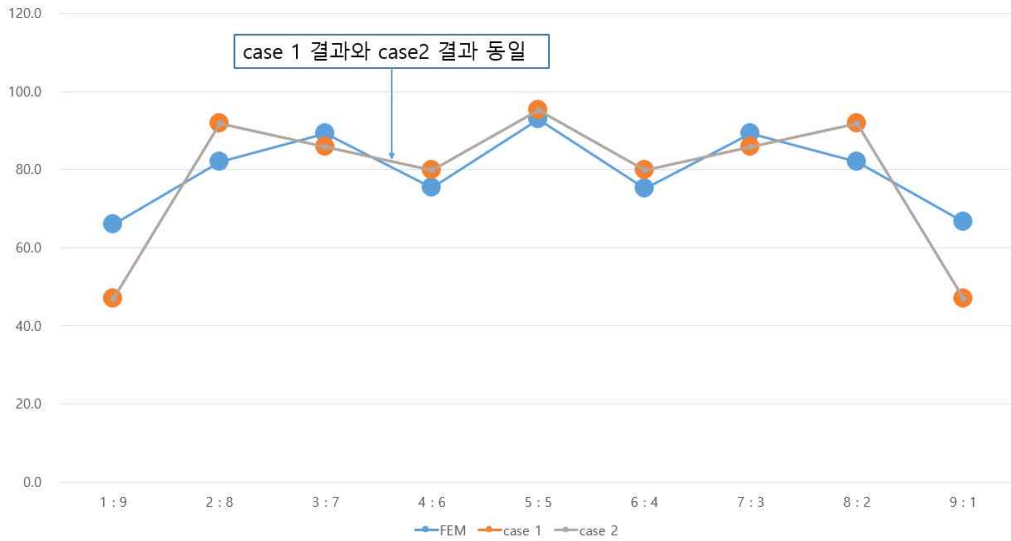
Table 7.2. Comparison Natural Frequency of \cap Shape Connected Structure



(a) 1st Natural Frequency



(b) 2nd Natural Frequency



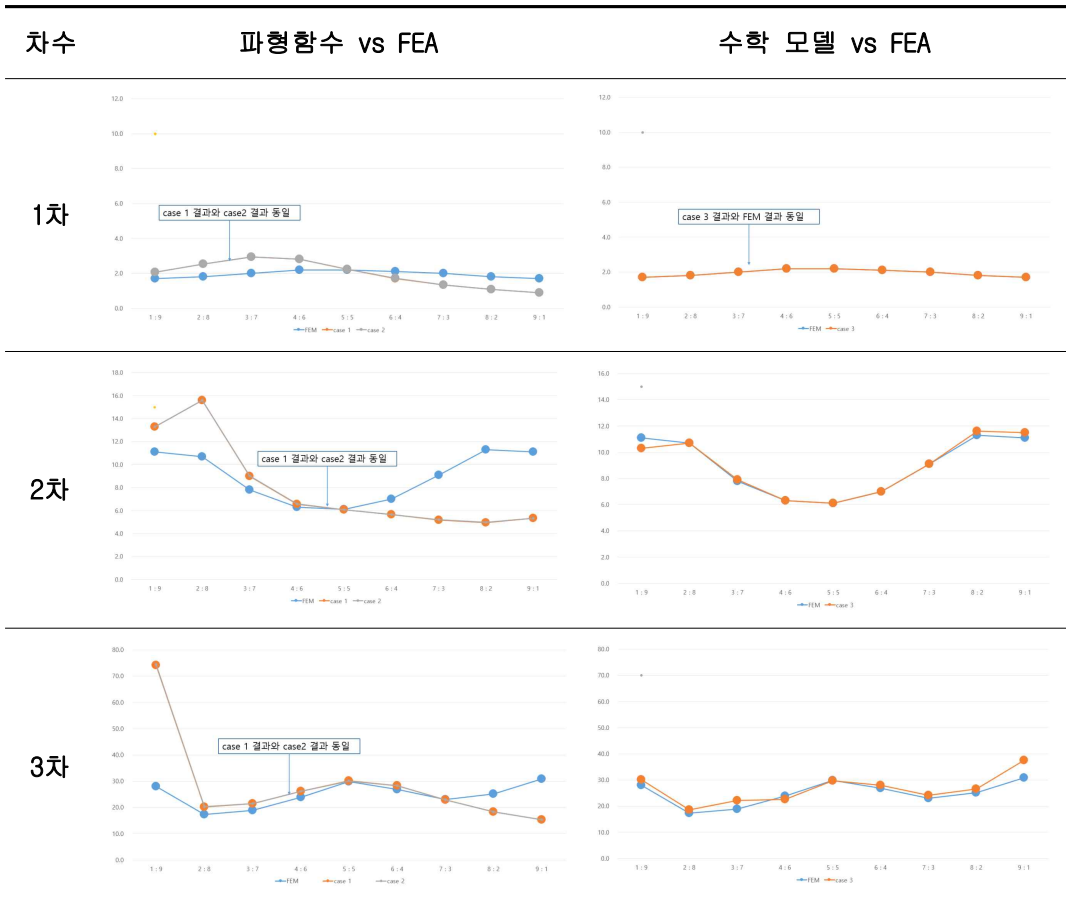
(c) 3rd Natural Frequency

Single Beam의 진동 특성에서도 알 수 있듯이 차수가 증가면서 고유진동수는 증가하고 있다. 하지만, 수평부재와 수직부재의 길이 변화에 따른 고유진동수를 살펴보면, 저차에서 수직부재/수평부재의 비 (혹은 수평부재/수직부재의 비)가 1에 가까울수록 고유진동수가 증가하고 있다. 이는 길이 변화에 따른 강성의 변화가 미치는 영향으로 판단된다.

↳ Shape Connected Structure의 경우 양단이 고정된 조건의 특성에 의해 연결지점에서의 경계조건 기여도를 반영한 파형함수를 정의할 수 있었으며, Table 7.2.에서 알 수 있듯이 전구간에 걸쳐 FEA 결과와 비교하여, 신뢰성 있는 계산 결과를 얻을 수 있었다. 이는 양단이 고정된 Connected Structure의 경우 파형함수 정의를 통한 공진 검토가 유용한 방법임을 판단할 수 있다.

L Shape Connected Structure의 파형함수 및 수학 방정식을 이용한 고유진동수 계산 결과와 FEA 결과를 비교하여 Table 7.3.에서 비교하였다.

Table 7.3. Comparison Natural Frequency of L Shape Connected Structure



비교 결과에서 알 수 있듯이 L Shape Connected Structure의 경우는 양단이 고정되어 있는 γ Shape Connected Structure와는 달리 자유 경계조건을 갖는 수직부재의 영향에 의해 연결 부위에서의 경계조건 기여도를 반영한 Mode Shape에 대해 파형함수로 특정하기 어려운 점이 있다. 이로 인해서 파형함수를 이용한 진동 계산의 경우 특정 부분(수평부재와 수직부재의 길이가 동일한 경우)에서만 FEA와 비교하여 신뢰성 있는 결과가 확인되었으며, 전 구간에 대한 신뢰성 있는 결과를 얻지 못하였다.

이의 해결을 위하여, 실제 모드 형상은 고려하지 않고, 단순히 빔의 특성치, 즉,

강성과 질량 등으로만 고유진동수를 계산할 수 있는 수학적 모델을 적용하였다. 이를 통해 파형함수를 이용한 γ Shape Connected Structure과 같이, 전구간에 걸쳐 FEA 결과와 비교하여 신뢰성 있는 데이터를 얻을 수 있었다. 비록 수학적 모델이 모드 형상을 담고 있지 않아, Mode Shape 비교는 불가능하지만, LShape Connected Structure에 대한 공진검토를 위한 충분한 방법이 될 수 있다고 판단한다.

또한, γ , L Shape Connected Structure의 연결부의 연속조건에 대해 Natural Boundary Condition 조건(Moment 연속조건)의 유무)에 따라 고유진동수를 계산하였으나, 동일한 값이 도출되었다. 이는 Natural Boundary Condition이 고유진동수 계산에 영향을 주지 않고 있다고 판단 할 수 있다. 이의 추가적인 검증을 위해 Connected Structure의 고유진동수 계산 시 연결조건에서의 경계조건을 다양하게 변경하여 공진진동수를 계산하였다.

연결부에 대한 연속 조건에 대해 Single Beam의 파형함수 정의에서와 유사하게 Geometric Boundary Condition (Slope 조건)은 고정하고, Natural Boundary Condition (Moment 조건)을 변경하여 계산한 결과 모두 유사한 계산 결과가 도출되었다. 이는 Simple Beam과 Connected Structure에서 모두 동일한 계산 결과가 도출된 것으로 보아 Natural Boundary Condition은 Euler Beam을 이용한 고유진동수 계산에서 영향이 거의 없음을 알 수 있다.

L Shape Connected Structure의 계산 결과에서 특이한 부분은 수직부재와 수직부재의 길이가 동일한 지점을 중심으로 저차에서의 고유진동수 계산 결과가 대칭을 보이고 있다는 점이다. 이는 양쪽 끝단이 고정되어 있는 γ Shape Connected Structure에서 나타나는 특징으로, 한쪽 끝단이 자유 경계조건을 갖는 L Shape Connected Structure에서 저차에서 동일한 결과가 나타나는 부분에 대해서는 추가적인 연구가 필요한 부분이다.

제 8 장 결론

Beam은 중요한 구조요소로서, 조선분야를 포함한 많은 공학분야에서 중요하게 다루어지고 있다. 동적 하중을 받는 Beam은 구조적인 진동과 소음을 야기하게 되며, 이로 인해 발생하는 문제로 승선원들에 불쾌감을 주거나, 구조의 내구성 등에 영향을 미치게 된다. 또한, 진동이 일정 한도를 초과하게 되면 파손으로도 나아갈 수 있어, 구조의 안전성 측면에서도 보의 진동분석은 중요한 요소이다. 또한, 제작 후에 나타나는 진동문제의 해결을 위해서는 수정을 위한 비용, 시간 및 품질 등의 많은 문제가 발생하기 때문에 설계 단계에서부터 구조의 진동특성을 고려한 방진설계는 매우 중요하다.

본 논문에서는 공학분야에서 주요 구조 요소인 Beam의 고유진동수를 계산하기 위해 다양한 연구를 수행하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, Single Beam에 대해 여러 유형의 경계조건을 반영한 파형함수를 정의하고, 이에 대한 진동특성에 대해 FEA 결과와 비교하였다. 경계조건은 Beam의 길이가 증가하면서 그 영향은 감소한다. 또한, 경계조건에 따라 파형함수는 4차·3차 그리고, 2차 등의 다른 형태의 함수를 갖게 되지만, 각 함수에 대한 계산 결과는 동일함을 확인하였다. 이를 통해 다양한 형태의 Connected Structure의 계산 시 낮은 차수의 함수를 이용하여 계산하여도 신뢰성 있는 계산 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 이는 Connected Structure의 파형함수 정의 시 고정-단순 파형함수에 대해 4차와 3차 파형함수를 각각 적용하여 계산하여 동일한 결과가 도출됨을 확인하였다.

둘째, 양단이 고정되어 연결지점에서의 경계조건 기여도를 반영한 파형함수의 정의가 가능한 \cap Shape Connected Structure는 FEA 계산 결과와 비교하여 전 구간에서 신뢰성 있는 결과를 확인하였다. 이를 통해 양단이 고정된 경계조건을 갖는 Connected Structure의 경우 파형함수의 정의를 통한 공진검토가 설계단계에서 유용하게 사용될 수 있음을 알 수 있다.

셋째, \cap Shape Connected Structure와는 달리 L Shape Connected Structure는 수직부재 자유 경계조건의 영향을 반영할 수 있는 파형함수 정의의 어려움으로 인하여, FEA 계산결과와 비교하였을 때 특정 영역에서만 신뢰성 있는 결과를 확인할 수 있었다. 하지만, Beam의 특성치만을 고려하도록 한 수학적 방정식을 이용한 계

산 결과에서는 전 영역에 걸쳐 매우 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있었다.

넷째, Natural Boundary Condition은 고유진동수 계산에 많은 영향을 주지 않음을 확인하였다. CMS를 이용한 진동해석 시 좌표계의 축약에는 관여하고 있지만, Single Beam 및 Connected Structure의 고유진동수 계산에 있어 Natural Boundary Condition의 유무는 계산 결과에 많은 영향을 주지 않았다.

본 논문을 통해 경계조건이 Beam의 진동특성에 미치는 영향을 계산을 통해 확인하였다. 또한, Connected Structure에 대해서는 끝단의 경계조건에 따라 공진검토를 위한 방법을 제시하였고, 이를 FEA 결과와 비교하여 전구간에 사용할 수 있음을 확인하였다.

이를 통해 Connected Structure에 유형에 따른 설계단계에서의 공진검토에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

[참고 문헌]

- [1] K.R. Chun, Free vibration of a beam with one end spring-hinged and the other free, Journal of Applied Mechanics, 39, 1154-1155, 1972.
- [2] S.Y. Lee, H.Y. Ke, Free vibrations of a non-uniform beam with general elastically restrained boundary conditions, Journal of Sound and Vibration, 136, 425-437, 1990.
- [3] W.L. Li, Free Vibrations of beams with general boundary conditions, Journal of Sound and Vibration, 237, 709-772, 2000.
- [4] J.T.-S. Wang, C.-C.Lin, Dynamic analysis of generally supported beams usign Fourier series, Journal of Sound and Vibration, 196(3), 285-293, 1996
- [5] M. Gurgoze, A note on vibrations of generally restrained beams, Journal of Sound and Vibration, 96(4), 461-468, 1984.
- [6] B.A.H.Abbas, Vibration of Timoshenko beams with elastically restrained ends, Journal of Sound and Vibration, 97(4), 541-548, 1984.
- [7] G. V. Rao, N.R. Naidu, Free vibration and stability behaviour of uniform beams and columns with non-linear elastic end rotational restraints, Journal of Sound and Vibration, 176(1), 130-135, 1994.
- [8] K.H.Kang, K.J.Kim, Modal properties of beams and plates on resilient supports with rotational and translational complex stiffness, Journal of Sound and Vibration, 190(2), 207-220, 1996
- [9] R.Grief, Beam displacement excitation from a support, Journal mechanical Engineering Science, 16(6), 437-439, 1974
- [10] Hurty WC. Vibrations of structural systems by component mode synthesis. Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers. 1960; 86(4):51-70.
- [11] Hurty WC. Dynamic analysis of structural systems using component modes. AIAA J 1965; 3(4):678-85.
- [12] van Rensburg, N. F. G. and der Merwe, A. J., 2006, "Natural Frequencies

and Modes of a Timoshenko Beam,” Wave Motions, Vol. 44, pp.58~69.

[13]Majkut, L., 2009, “Free and Forced Vibrations of Timoshenko Beams Described by Single Difference Equation,” Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 47, No. 1, pp. 193~210.

[14] H.K. Kim, M.S. Kim, Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier series. Journal of Sound and Vibration, 245, 771-784, 2001.

[15] S. Naguleswaran, Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam on up to five resilient supports including ends, Journal of Sound and Vibration, 261, 372-384, 2003.

[16] 서민호(순천대학교), 김용우(순천대학교), Timoshenko 보의 두 가지 주파수 방정식에 따른 고유 진동수 및 고유 진동형 비교, 대한기계학회대한기계학회 춘추

[17] M.C. Ece, M. Aydogdu, V. Taskin, Vibration of a variable cross-section beam, Mechanics Research Communications, 34,78-84, 2007.

[18] S.B. Coşkun, M.T. Atay, B. Ozturk, Transverse Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beams Using Analytical Approximate Techniques, Advances in Vibration Analysis Research, Chapter 1, Intech, 2011.

[19] J. Lee, Free vibration analysis of beams with non-ideal clamped boundary conditions, Journal of Mechanical Science and Technology, 27, 297-303, 2013.

[20] Z. Liu, Y. Yin, F. Wang, Y. Zhao, L. Cai, Study on modified differential transform method for free vibration analysis of uniform Euler-Bernoulli beam. Structural Engineering and Mechanics 48: 697-709, 2013.

[21] A. Prokic, M. Besevic, D. Lukic, A numerical method for free vibration analysis of beams, Latin American Journal of Solids and Structures, 11: 1432-1444, 2014

[22] S. Naguleswaran, Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam on up to five resilient supports including ends, Journal of Sound and Vibration 261, 372-384. 2003.

[23] W.F.Z. Lee, E. Saibel, Free vibration of constrained beams, Journal of

Applied Mechanics 19 , 471-477. 1952.

[24] R.B.Bhat, Natural Frequency of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Rayleigh-Rytz Method, Journal of Sound and Vibration 102(4),1985,493~499.

[25] L.Ercoli and P.A,A.Laura, Analytical and Experimental Investigation on Continuous Beams Carrying Elastically Mounted Masses, Journal of Sound and Vibration, 114, 1987

[26]H. Abramovich, O. Hamburger, Vibration of a uniform cantilever Timoshenko beam with translational and rotational springs and with a tip mass, Journal of Sound and Vibration, 154(1), 67~80, 1992

[27]R.Grief, S.C.Mottendorf, Structure vibrations and Fourier series, Journal of Sound and Vibration, 48(1), 113~122, 1976.

[28] 이병구, 이태은, 윤희민, 일정체적 Timoshenko 보의 자유진동, 한국소음진동 공학회논문집 제 22권 (3), 223~233, 2012.

[29]T. W. LEE., Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring-hinged and carrying a mass at the other free end. Journal of Applied Mechanics 40, 813-815, 1973

[30]J.C.MacBain, J.Genin,. Effect of support flexibility on the fundamental frequency of vibrating beams, Journal of the Franklin Institute 296, 259-273, 1973.

[31]D. Afolabi, Natural frequencies of cantilever, blades with resilient roots., Journal of Sound and Vibration 48, 429-441. 1986.

[32]J.C.MacBain, J.Genin, Energy dissipation of a vibrating Timoshenko beam considering support and material damping, International Journal of Mechanical Science 17, 255-265. 1975.

[33]M. J. Maurizi, R. E. Rossi, J. A. Reyes, Vibration frequencies for a beam with one end spring-hinged and subjected to a translational restraint at the other end., Journal of Sound and Vibration 48, 565-568. 1976.

[34]R.P.Goel, Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends., Journal of Sound and Vibration 47, 9-14. 1976.

- [35] B. A. H. Abbas, Vibration of Timoshenko beams with elastically restrained ends., *Journal of Sound and Vibration* 97, 541-548. 1984.
- [36] B.A.H.Abbas, H.Irretier, Experimental and theoretical investigations of the effect of root flexibility on the vibration characteristics of cantilever beams., *Journal of Sound and Vibration* 130, 353-362. 1989.
- [37] C.K.Rao, S.Mirza, A note on vibrations of generally restrained beams., *Journal of Sound and Vibration* 130, 453-465. 1989.
- [38] M. J. Maurizi, R. E. Rossi, J. A. Reyes, A note on generally restrained beams, *Journal of Sound and Vibration* 147, 167-171. 1991.
- [39] C. N. Bapat, C. Bapat, Natural frequencies of a beam with non-classical boundary conditions and concentrated masses., *Journal of Sound and Vibration* 112, 177-182. 1987.
- [40] A. H. Register, A note on vibrations of generally restrained, end-loaded beams., *Journal of Sound and Vibration* 172, 561-571. 1974.
- [41] G. V. Rao, N. R. Naidu, Free vibration and stability behaviour of uniform beams and columns with non-linear elastic end rotational restraints, *Journal of Sound and Vibration* 176, 130-135. 1974.
- [42] 윤덕영, 박정희, 단순 및 고정 지지된 Euler 보합수 성질을 갖는 다항식을 이용한 ‘ \lrcorner ’ 형태 벽면 구조의 고유진동해석, *한국소음진동공학회 논문집*, 24(12), 948~953, 2014.
- [43] 한성용, 권혁, 부가물을 갖는 국부 판넬의 진동해석 프로그램 개발, *한국소음진동공학회 추계학술대회 논문집*, 311~321, 2000.
- [44] 이장우, 박진화, 보강판 고유진동수 계산 프로그램 개발, *대한조선학회 춘계학술대회 논문집*, 499~504, 2003.
- [45] GL.LocVibs User Guide, Germanischer Lloyd, 2004.
- [46] 조대승, 김병희, 김진형, 이기문, 신성광, “선박 국부 보강판 고유진동해석 프로그램 개발, *대한조선학회 선박해양 구조연구회 동계 연구발표회 논문집*, 2004.
- [47] Han, S.Y., Vibration Analysis of Local Plate for the Hull Structure. *Bulletin of the Society of Naval Architects of Korea*, 31(3), 33-35. 1994.

[48] Han, S.Y. Kweon, H., Development of the Program for Vibration Analysis of Local Plate with Appendage. Proceedings of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering Conference, 311-321. 2000.

[49] Kim,B.H., Kim,J.H. and Cho,D.S. Free Vibration Analysis Stiffened Plates Using Polynomials Having the Property of Timoshenko Beam Functions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering Conference, 623-628. 2004.

[50] Chung, J.H, Chung,T.Y. and Kim, K.C., Vibration Analysis of Mindlin Plates Using Polynomials Having the Property of Timoshenko Beam Functions, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, 29(1), 158-172. 1992.

[51] S.C. Mittendorf, R. Greif, Vibrations of segmented beams by a Fourier series component mode method, Journal of Sound and Vibration 55, 431-441. 1977.

[52] 한국선급, 텍스트북스, 선박진동 소음 제어지침,3판, 133~137, 2014.

[53] William T. THOMSON, Theory of Vibration with Applications. 5th Edition, Prentice Hall. New Jersey, 360-365. 1993.

감사의 글

출구가 없을 것 같았던 긴 터널을 빠져나온 기분입니다. 학위 과정을 마무리하면서 지난 시간을 되돌아보니 아쉬움과 후회가 남습니다. 고마운 많은 분들에게 감사의 마음을 제대로 전하지 못하였기에 더욱 그러한 것 같습니다. 제가 이렇게 성장하기까지 긴 시간이 필요하였지만, 그 시간 속에 힘이 되고 방향을 잡아 주셨던 많은 분들께 감사의 말씀을 전하고자 합니다.

먼저 본 논문이 완성되기까지 세심한 지도와 많은 격려로 이끌어 주신 윤덕영 교수님께 진심으로 감사드립니다. 또한 논문 작성과정에서 아낌 없는 지도로 많은 가르침을 주신 박정희 박사님께도 감사드리며, 어려운 일이 있을 때마다 멘토의 역할을 맡아주신 최태욱 박사님께도 감사드립니다. 심사과정에서 많은 조언을 주신 권영섭 교수님, 안규백 교수님, 주성민 교수님께도 감사드립니다.

회사생활과 논문 진행을 병행하기에는 사랑하는 아내의 도움이 매우 컵습니다. 늘 응원해주면서, 집안일과 육아까지 모두 도맡아서 했던 사모님. 감사하고 사랑합니다.

마지막으로 항상 옆에서 노심초사하신 존경하는 양가 부모님들과 가족에게도 감사의 말씀을 드립니다. 그리고 논문을 핑계로 곁에 많이 있어 주지 못했지만 바르게 자라주고 있는 귀여운 아들 현준이와 딸 예원이에 게 사랑한다는 말을 전합니다.

2021년 2월
양재형 올림