creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

**저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.**

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[UCI]I804:24011-200000280192

2020년 2월
교육학석사(수학교육)학위논문

# 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$의 기약성 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

오 일 목

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$의 기약성 연구

On the study of irreducible elements in composite Hurwitz polynomial rings

2020년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

오 일 목

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$의 기약성 연구

지도교수 오 동 렬

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2019년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

오 일 목

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 오일목의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 안 영 준 인

심사위원 조선대학교 교수 이 관 규 인

심사위원 조선대학교 교수 오 동 렬 인

2019년 12월

조선대학교 교육대학원

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

CONTENTS

ABSTRACT

제 1 장 소개 ---------- 1

제 2 장 다항식환 ---------- 3

제 3 장 Hurwitz 다항식과
합성 Hurwitz 다항식환의 정의 및 성질 --- 8

제 4 장 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$의 기약다항식과
$\mathbb{Q}[x]$의 기약다항식 사이의 관계 ------- 12

참고문헌 ---------- 23

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# ABSTRACT

## On the study of irreducible elements in composite Hurwitz polynomial rings

Oh, Ill Mok
Advisor : Prof. Dong Yeol Oh Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

Let $R \subseteq D$ be an extension of commutative rings with identity, and $x$ be an indeterminate over $D$. Let $R[x]$(respectively, $D$) be the ring of polynomials over $R$(respectively, $D$). The ring $R+xD[x]$, called the composite polynomial ring, is between $R[x]$ and $D[x]$. As a generalization of usual polynomial over $R$, Hurwitz polynomial over $R$ was introduced by Keigher. Let $h(R)$ and $h(D)$ be the rings of Hurwitz polynomials over $R$ and $D$, respectively. We introduce the composite Hurwitz polynomial ring $h(R, D)$ between $h(R)$ and $h(D)$. In this thesis, we study when an element of $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ is irreducible, where $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$ are the ring of integers and the field of rational numbers, respectively. By using a relation between composite Hurwitz polynomials in $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ and usual polynomials in $\mathbb{Q}[x]$, we give a necessary and sufficient condition for composite Hurwitz polynomials in $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ to be irreducible.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 제 1 장 소 개

$R$을 단위원 1을 갖는 가환환, 가환환 $D$를 $R$의 확장, $x$를 $D$ 상의 부정원(indeterminate), $R[x]$와 $D[x]$를 각각 $R$과 $D$ 상의 다항식환이라 하자. 다항식환은 가환환 이론의 중요한 연구 대상 중 하나로 많은 연구들이 이루어지고 있으며, 1970년대 후반부터 두 다항식환 $R[x]$와 $D[x]$ 사이에 존재하는 다항식 형태의 환(대표적인 예로 합성 다항식환)에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. $R+xD[x]:=\{f(x)\in D[x]|f(0)\in R\}$은 단위원 1을 갖는 가환환이고, $R[x]\subseteq R+xD[x]\subseteq D[x]$를 만족한다. $R+xD[x]$를 합성 다항식환이라 한다.

1976년 Keigher [4, 5]는 형식적 멱급수환을 변형한 환을 소개하고 이를 Hurwitz 멱급수환이라 이름 지었다. 또한 Hurwitz 멱급수환으로부터 파생된 Hurwitz 다항식환을 소개하고, 가환환 R 상의 Hurwitz 다항식환을 $h(R)$로 표현하였다. 이후 많은 연구자들에 의하여 Hurwitz 멱급수환 및 다항식환의 연구가 활발히 이루어지고 있다[1, 2, 6, 7, 9]. 특히 최근에 [8, 11]에서 정수환 $\mathbb{Z}$ 상의 Hurwitz 다항식과 정수환 $\mathbb{Z}$ 상의 다항식과의 관계를 규명하여 정수환 $\mathbb{Z}$ 상에서의 Hurwitz 다항식 $f(x)\in h(\mathbb{Z})$가 언제 기약 다항식이 되는지 조사하였다.

합성 다항식환의 정의와 마찬가지로 합성 Hurwitz 다항식환을 정의할 수 있다. 단위원 1을 갖는 가환환 $R$을 포함하는 확대환 $D$에 대하여, $R$과 $D$ 상에서 정의된 각각의 Hurwitz 다항식환 $h(R)$과 $h(D)$에 대하여, 이들 사이에 존재하는 합성 Hurwitz 다항식환 $h(R,D)$을 생각할 수 있다. (Hurwitz 다항식환과 합성 Hurwitz 다항식환의 정의는 3장에서 다루도록 한다.)

이 논문에서는 특별히 정수환 $\mathbb{Z}$와 유리수체 $\mathbb{Q}$에 대한 합성 Hurwitz 다항식환의 다항식의 성질을 분석하였다. $f(x)\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$가 언제 기약 다항식이 되는지를 밝혔다. 정확히 말하면, 유리수체 $\mathbb{Q}$에서 계수를 갖는 다항식이 언제 기약 다항식이 되는지를 판별하는 것은 잘 알려져 있다. $f(x)\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$와 $\mathbb{Q}[x]$의 다항식과의 관계를 이용하여 $f(x)$의 기약성을 조사하였다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

2장에서는 다항식환을 소개하고 다항식환의 잘 알려진 성질들을 소개한다. 3장에서는 Hurwitz 다항식환과 합성 Hurwitz 다항식환을 소개하고 이에 대한 기본적인 성질들을 살펴본다. 4장에서는 정수환 $\mathbb{Z}$와 유리수체 $\mathbb{Q}$에 대한 합성 Hurwitz 다항식환의 다항식의 기약성에 대한 이 논문의 주 결과들을 소개하도록 한다. 자세히 말하자면, 3차 이하인 합성 Hurwitz 다항식 $f(x) \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$에 대하여 $f(x)$가 기약이 되기 위한 필요충분조건을 유리수체 $\mathbb{Q}$ 상에서의 다항식 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$와의 관계를 이용하여 찾았다. 4차인 합성 Hurwitz 다항식 $f(x) \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$에 대해서는 특별한 조건을 가지는 경우에서만의 기약성을 판별할 수 있었다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 제 2 장 다항식환

이 장에서는 다항식환의 기본적인 정의와 성질을 소개한다. 이 장의 결과들은 대수학의 기본적인 결과들로서 잘 알려져 있으며, 그 증명은 생략하도록 한다. 또한 이 장에서 사용하는 기호와 표현식은 참고문헌 [3, 10]를 따르도록 한다.

**정의 2.1** 공집합이 아닌 집합 $R$ 위에서 덧셈 $+$ 과 곱셈 $\cdot$ 이 정의되어 있고 다음이 성립할 때, $(R, +, \cdot)$을 환(ring)이라고 한다. 임의의 $a, b, c \in R$에 대하여

1. $(R, +)$는 덧셈군이다.
   1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (결합법칙)
   2) $a+b = b+a$ (교환법칙)
   3) 각 원소 $a \in R$에 대하여 등식 $a+0 = 0+a = a$ 이 성립하는 특정한 원소 $0 \in R$이 존재한다.
   4) 각 원소 $a \in R$에 대하여 $a$의 덧셈에 대한 역원 $-a \in R$가 존재한다. 즉, $a+(-a) = (-a)+a = 0$이다.
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (결합법칙)
3. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (분배법칙)

앞으로 환 $R$에서 모든 원소 $a, b \in R$의 곱 $a \cdot b$를 간략히 $ab$로 표현하도록 하자.

**정의 2.2** 환 $R$에서 다음 조건을 만족시키는 원소 $1 \in R$이 존재할 때, 1을 $R$의 단위원(identity)이라고 한다.

모든 원소 $a \in R$에 대하여 $a1 = 1a = a$ 이다.

환 $R$에서 모든 원소 $a, b \in R$에 대하여 $ab = ba$이 성립할 때, $R$를 가환환(commutative ring)이라고 한다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

**정의 2.3** 단위원 $1(1\neq 0)$을 가진 가환환 $R$에서 다음이 성립할 때, $R$을 정역(integral domain)이라고 한다.

$$ab=0 \text{ 이면 } a=0 \text{ 또는 } b=0$$

**정의 2.4** 단위원 1을 가진 환 $R$에서 0이 아닌 원소 $a\in R$에 대하여 $ab=ba=1$을 만족하는 원소 $b\in R$가 존재할 때, $a$를 $R$의 단원(unit element)이라고 한다. 또, 이 경우에 $b$를 $a$의 곱셈에 관한 역원(inverse)이라 하고 원소 $b$를 $a^{-1}$로 나타낸다.

다음 정리는 잘 알려진 정리로 증명은 참고문헌 [8, 정리 2.5], [10, 정리 3.2.8]을 참조하도록 한다.

**정리 2.5** 단위원 1을 가진 환 $R$에서 $R$의 단원 전체의 집합을 $U(R)$로 나타내자. 그러면 $U(R)$는 곱셈에 대하여 군을 이루고, 이를 $R$의 단원군(unit group)이라 한다.

**정의 2.6** 환 $R$이 0이 아닌 단위원 1을 가진 환일 때,

$$m\cdot 1=1+\cdots+1=0 \qquad (1\text{이 } m\text{개})$$

을 만족하는 양의 정수 $m$이 존재하는 경우에 이와 같은 양의 정수 중에서 가장 작은 양의 정수 $n$을 환 $R$의 표수(characteristic)라고 한다. 한편, 모든 양의 정수 $m$에 대하여 $m\cdot 1\neq 0$일 때, $R$을 표수 0인 환이라고 한다.

다음 정리는 잘 알려진 정리로 증명은 참고문헌 [10, 정리 3.11.3]을 참조하도록 한다.

**정리 2.7** 환 $R$이 정역이면, $R$의 표수는 0 또는 소수이다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

**정의 2.8** 환 $R$과 부정원 $x$에 대하여 다음과 같은 꼴의 형식적인 무한합(formal infinite sum)을 $R$ 위의 다항식(polynomial)이라고 한다.

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (a_i\in R)$$

(유한 개를 제외한 모든 $i$ 에 대하여 $a_i=0$)

그리고, $R$ 위의 $x$에 관한 다항식 전체의 집합을 $R[x]$로 나타낸다.

위의 정의에서 $a_0, a_1x, \cdots, a_nx^n, \cdots$을 다항식 $f(x)$의 항(term)이라 하고 특히 $a_0$를 상수항이라고 하며 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$을 $f(x)$의 계수(coefficient)라고 한다. 그리고, $i>n$ 인 모든 $i$에 대하여 $a_i=0$ 일 때, $f(x)$를

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

으로 나타낸다. $a_n\neq 0$ 일 때, $n$을 $f(x)$의 차수(degree)라 하고 $n$을 $\deg f(x)$로 나타낸다. 또한 다항식 중에서 상수항을 제외한 모든 계수가 0인 $f(x)=a_0$를 상수다항식(constant polynomial)이라 하고, 특히 상수항을 포함한 모든 계수가 0인 상수다항식을 영다항식(zero polynomial)이라고 한다. 환 $R$의 원소 $a$와 상수다항식 $f(x)=a$를 동일시하여 $R\subseteq R[x]$이라 생각한다.

그리고, $R$ 위의 두 다항식

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \quad g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m \qquad (n<m)$$

에 대하여 덧셈 $+$과 곱셈 $\cdot$을 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)+g(x):=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots+b_mx^m$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$f(x)g(x) := c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m} x^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

$$\left( c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0 \right)$$

다음 정리는 잘 알려진 정리로 증명은 참고문헌 [10, 정리 3.5.2]을 참조하도록 한다.

**정리** 2.9 환 $R$ 위의 $x$에 관한 다항식 전체의 집합을 $R[x]$로 나타내면, $R[x]$는 앞에서 정의한 덧셈과 곱셈에 대하여 환을 이루고, $R$ 위의 다항식환(polynomial ring)이라고 한다.

**정의** 2.10 정역 $D$에서 영도 단원도 아닌 원소 $p$에 대하여

$$p = ab \quad \text{이면} \quad a \in U(D) \text{ 또는 } b \in U(D)$$

일 때, $p$를 $D$의 기약(irreducible)이라 한다.

또한 정역 $D$ 상의 다항식환 $D[x]$에서 다항식 $f(x)$가 기약이면 $f(x)$를 기약다항식(irreducible polynomial)이라고 하고, 기약다항식이 아닌 경우 가약다항식(reducible polynomial)이라고 한다.

**정의** 2.11 가환환 $R$에서 $S$가 $R$의 부분환일 때, $S$ 위의 다항식

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in S[x]$$

와 원소 $u \in R$에 대하여 $f(u)$는 다음과 같은 $R$의 원소를 나타낸다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$f(u)=a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0 \in R$$

특히 $f(u)=0$일 때, $u$를 $R$ 안에서의 다항식 $f(x)$의 근(root) 또는 방정식 $f(x)=0$의 근이라고 한다.

다음 정리는 잘 알려진 정리로 증명은 참고문헌 [10, 정리 4.3.2]을 참조하도록 한다.

**정리 2.12** 차수가 1이상인 다항식 $f(x)=a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$가 정수를 계수로 가지고 유리수체 $\mathbb{Q}$ 안에서 근 $u$를 가질 때, $u=\dfrac{b}{a}$ ($a, b$는 서로 소인 정수) 이라고 하면 $a|a_n, b|a_0$이다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 제 3 장 Hurwitz 다항식과 합성 Hurwitz 다항식환의 정의 및 성질

환 $R$에서 계수를 갖는 다항식 집합 $R[x]$에서 두 연산 $+$, $*$ 을 다음과 같이 정의하면 $(R[x], +, *)$는 환이 되고, 이러한 환을 'Hurwitz 다항식환' 이라 부르며 $h(R)$로 나타낸다. 이 장에서 사용하는 Hurwitz 다항식환의 기본적인 성질들과 표현식은 [4, 5]에서 참고하여 따르도록 한다.

환 $R$ 위의 임의의 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\ g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m \qquad (n\le m)$$

에 대하여 두 연산 $+$, $*$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)+g(x):=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots+b_mx^m$$

$$f(x)*g(x):=c_0+c_1x+\cdots+c_ix^i+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}$$

$$\left(c_i=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_kb_{i-k}=\binom{i}{0}a_0b_i+\binom{i}{1}a_1b_{i-1}+\cdots+\binom{i}{t}a_tb_{i-t}+\cdots+\binom{i}{i}a_ib_0\right) \quad (t\le i)$$

다음 정리는 Hurwitz 다항식환의 기본적인 성질로 증명은 참고문헌 [5]을 참조하도록 한다.

**정리 3.1** 단위원 1을 갖는 가환환 $R$에 대하여 $(R[x], +, *)$ 또한 단위원 1을 갖는 가환환이다.

$R\subseteq D$인 환 $R, D$라 하자. $R$의 연산들이 $D$의 연산들과 일치하고 $R$이 $D$의 부분환이면, $D$를 $R$의 확대환이라 한다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

환 $R$은 단위원 1을 갖는 가환환이고, $D$는 $R$의 확대환이라 하자. 그러면 $D$는 단위원 1을 갖는 가환환이고 $h(R, D)$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h(R, D) := \{f \in h(D) | f(0) \in R\}$$

**정리 3.2** $h(R, D)$는 단위원 1을 갖는 가환환이다.

**증명** $h(R, D) \subseteq h(D)$이고, $h(D)$는 정리 3.1에 의하여 단위원 1을 갖는 가환환임을 알 수 있다. $h(R, D)$는 $h(D)$의 부분환임을 쉽게 보일 수 있고 따라서 $1 \in h(R, D)$이다. 즉, $h(R, D)$는 단위원 1을 갖는 가환환이다.■

위에서 정의한 $h(R, D)$를 합성 Hurwitz 다항식환이라고 한다.

**정리 3.3** 환 $R$이 단위원 1을 갖는 가환환일 때, 다음은 동치이다.

1. $h(R)$은 정역이다.
2. $R$의 표수는 0이고, $R$은 정역이다.

**증명** [8, 정리 3.2], [11, 정리 3,2]의 내용을 참조하여 다시 한번 증명하도록 하자.

(1)⇒(2) 임의의 0이 아닌 $a \in R$에 대하여 $a \in h(R)$이고 $a \cdot n = a \cdot (n \cdot 1) = 0$ 이다. 따라서 $n \cdot 1 = 0$이 성립하고 $n = 0$ 이므로 $R$의 표수는 0이다.
이제 $R$이 정역임을 보이자. $R \subseteq h(R)$ 이므로 $a, b \in R$에 대하여 $a, b \in h(R)$이다. $a * b = a \cdot b = 0$이 성립하고 $h(R)$이 정역이므로 $a = 0$ 이거나 $b = 0$ 이다. 그러므로 $R$은 정역이다.

(2)⇒(1) 다항식환 $h(R)$의 임의의 두 다항식 $f(x), g(x)$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

에 대하여 $\deg f(x) = n, \deg g(x) = m, n, m \neq 0$ 이라 하면

$f(x) * g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_i x^i + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}$ 이다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이 때 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0,\ b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=0$ 이므로

$$\begin{aligned}
c_{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}a_k b_{n+m-k} \\
&= \binom{n+m}{0}a_0 b_{n+m}+\binom{n+m}{1}a_1 b_{n+m-1}+\cdots+\binom{n+m}{n-1}a_{n-1}b_{m+1}+\binom{n+m}{n}a_n b_m \\
&\quad +\binom{n+m}{n+1}a_{n+1}b_{m-1}+\cdots+\binom{n+m}{n+m}a_{n+m}b_0 \\
&= \binom{n+m}{n}a_n b_m
\end{aligned}$$

이다. 또한 $a_n\neq 0, b_m\neq 0$ 이고 $R$ 의 표수가 0 이므로 $c_{n+m}\neq 0$ 이다. 따라서 $h(R)$은 정역이다. ■

이 논문에서는 합성 Hurwitz 다항식환의 다항식의 기약성을 판별해야 하므로 $h(R,D)$이 정역이 되는지 알아보도록 하자.

**정리 3.4** $R\subseteq D$는 단위원 1을 갖는 확대환이라 할 때, 다음은 동치이다.

1. $h(R,D)$는 정역이다.
2. $D$의 표수는 0이고, $D$는 정역이다.

**증명** (1)⇒(2) 합성 Hurwitz 다항식환 $h(R,D)$을 정역이라 하자.
$h(R)\subseteq h(R,D)\subseteq h(D)$ 이므로 Hurwitz 다항식환 $h(R)$은 정역임을 알 수 있다. 정리 3.3에 의하여 환 $R$은 표수가 0인 정역이고 환 $D$는 $R$의 확대환이므로 $D$의 표수 또한 0이다.
이제 환 $D$가 정역임을 보이자. $D$가 정역이 아니라고 가정하고 0이 아닌 $D$의 원소 $a,b$에 대하여 $ab=0$이라 하자. $(ax)*(bx)=2abx^2=0$ 이므로 합성 Hurwitz 다항식환 $h(R,D)$가 정역이라는 가정에 모순이다. 따라서 $D$는 정역이다.

(2)⇒(1) 환 $D$가 표수가 0인 정역이므로 정리 3.3에 의하여 Hurwitz 다항

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

식환 $h(D)$은 정역이 되고 $h(R, D) \subseteq h(D)$ 이므로 합성 Hurwitz 다항식환 $h(R, D)$ 또한 정역이다. ■

**따름정리 3.5** $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$는 정역이다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 제 4 장 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$의 기약다항식과 $\mathbb{Q}[x]$의 기약다항식 사이의 관계

이 장에서는 유리수체와 정수환 상에서의 합성 Hurwitz 다항식의 기약판별법을 알아보도록 하자.

먼저, 상수다항식인 경우 임의의 $a\in\mathbb{Z}$에 대해 $a=bc=b*c=a$이 성립하므로 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$와 $\mathbb{Z}[x]$에서 모두 기약이거나 모두 가약이다. 그 중 기약인 경우를 정리 4.2에서 살펴보기 전에 필요한 보조정리부터 보도록 하자.

**보조정리 4.1**

1. $f,g\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에 대하여, $\deg(f*g)=\deg f+\deg g$
2. $U(h(\mathbb{Z},\mathbb{Q}))=\{\pm 1\}$

**증명** (1)⇒(2) 임의의 $f,g\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에 대하여

$$f(x)*g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots+\binom{n+m}{n}a_nb_m$$

이고 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$가 정역이므로 $a_n\neq 0, b_m\neq 0$ 일 때 $\binom{n+m}{n}a_nb_m\neq 0$이다.

따라서 $\deg(f*g)=\deg f+\deg g$ 이다.

(2)⇒(1) 영다항식이 아닌 두 다항식 $f(x), g(x)\in U(h(\mathbb{Z},\mathbb{Q}))$가 존재한다고 하자. $f(x)*g(x)=g(x)*f(x)=1$ 이고 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$는 정역이므로
$\deg(1)=\deg(f*g)=\deg f+\deg g=0$ 이다. 이 때 $\deg f=\deg g=0$ 이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 상수다항식이고 따라서 $U(h(\mathbb{Z},\mathbb{Q}))=\{\pm 1\}$이다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

**정리 4.2** $f(x) \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$를 영이 아닌 상수다항식이라 하자. $f(x) = \pm p$가 기약일 필요충분조건은 $p$가 소수라는 것이다.

**증명** $\Rightarrow$) $p$가 소수가 아니라고 가정하자.

즉, $p$는 합성수이고 $p = ab$를 만족하는 정수 $a, b$가 존재한다고 가정하자 $(1 < a \leq b < p)$. 그러면 $f(x) = \pm p = \pm ab = \pm a * b$ 가 되어 $f(x)$가 기약이라는 사실에 모순이다.

따라서 $p$는 소수이다.

$\Leftarrow$) $f(x)$가 기약이 아니라고 하자. 그러면 $f(x)$는 상수다항식의 곱으로 인수분해된다. 즉, $f(x) = \pm p = \pm 1 \cdot p = \pm 1 * p$ 이고 $U(h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})) = \{\pm 1\}$ 이므로 $f(x)$가 기약이 아니라는 가정에 모순이다. ■

다음은 $\deg f \geq 1$인 $f(x) \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$이 가약이 되기 위한 충분조건을 살펴보자.

**정리 4.3** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ 일 때, $a_0 \neq \pm 1$이면 $f(x)$는 가약이다.

**증명** (ⅰ) $a_0 = 0$이면 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_k x^k \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ $(1 \leq k \leq n)$ 이다.

그러면 $a_i \in \mathbb{Q}$이고 임의의 $\pm 1$이 아닌 $m \in \mathbb{Z}$에 대하여 $\frac{a_i}{m} \in \mathbb{Q}$이다. 그러므로 $f(x) = m \cdot \left( \frac{a_n}{m} x^n + \cdots + \frac{a_k}{m} x^k \right)$로 나타낼 수 있고 $U(h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})) = \{\pm 1\}$이므로 $f(x)$는 가약이다.

(ⅱ) $a_0 \neq \pm 1$이고 $a_0 \neq 0$이면 $f(x) = a_0 * \left( \frac{a_n}{a_0} x^n + \cdots + \frac{a_1}{a_0} x + 1 \right)$ 로 나타낼 수 있다.

$U(h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})) = \{\pm 1\}$ 이므로 $f(x)$는 가약이다. ■

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

따라서 차수가 1 이상인 다항식 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$의 기약성에 대하여 알아보기 위해서 $a_0 = \pm 1$ 이라고 가정해야 한다. $a_0 = -1$인 경우는 $a_0 = 1$ 일 때와 단순히 부호를 바꾸는 것뿐이기 때문에 따로 다루지 않도록 한다.

차수가 1인 다항식 $f(x)=ax \pm 1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$라 하면 $f(x)$는 명백히 기약이다. 그러므로 차수가 2 이상인 경우에 대해서 알아보도록 하자.

**정리 4.4** 임의의 $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$에 대하여 $a_2 \neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)=a_2 x^2 + a_1 x + 1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$는 가약이다.
2. $g(x)=x^2 - a_1 x + \frac{1}{2}a_2 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

**증명** (1) ⇔ (2) 다항식 $f(x)$가 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$에서 가약이라고 가정하자. $f(x)$의 상수항은 1이므로, $f(x)$는 $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (\alpha x + 1) * (\beta x + 1) \\ &= 2\alpha\beta x^2 + (\alpha + \beta)x + 1 \\ &= a_2 x^2 + a_1 x + 1 \end{aligned}$$

따라서 $\alpha + \beta = a_1, \alpha\beta = \frac{1}{2}a_2$ 이다.

그러므로 $g(x)=x^2 - a_1 x + \frac{1}{2}a_2$는 두 개의 유리수해 $\alpha, \beta$를 가진다. ■

이제, $a_3 \neq 0$인 다항식 $f(x)=a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$의 기약성을 판별해보도록 하자.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

**정리 4.5** 다항식 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$에 대하여 $a_3 \neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$는 가약이다.
2. $g(x)=6x^3-6a_1x^2+3a_2x-a_3 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

**증명** (1) ⇒ (2) 다항식 $f(x)$가 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$에서 가약이라고 가정하자. $f(x)$는 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ 위에서 가약이므로 상수다항식이 아닌 일차식과 이차식의 Hurwitz 다항식의 곱으로 표현되고 또한 $f(x)$의 상수항은 1이므로 적당한 $b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{Q}$에 대하여 $f(x)$는 다음과 같이 인수분해 된다.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (b_2x^2+b_1x+1) * (c_1x+1) \qquad \text{-①} \\
&= \binom{3}{2}b_2c_1x^3+\left\{\binom{2}{1}b_1c_1+\binom{2}{0}b_2\right\}x^2+(b_1+c_1)x+1 \\
&= 3b_2c_1x^3+(2b_1c_1+b_2)x^2+(b_1+c_1)x+1 \\
&= a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1
\end{aligned}
$$

이를 정리하면,

$a_3=3b_2c_1,\ a_2=b_2+2b_1c_1,\ a_1=b_1+c_1$ 이고

$b_1=a_1-c_1,\ b_2=a_2-2(a_1-c_1)c_1=a_2-2a_1c_1+2{c_1}^2$ -②

이므로 $a_3=3(a_2-2a_1c_1+2{c_1}^2)c_1=6{c_1}^3-6a_1{c_1}^2+3a_2c_1$ 이다.

따라서 $6{c_1}^3-6a_1{c_1}^2+3a_2c_1-a_3=0$ 이고 $g(x)=6x^3-6a_1x^2+3a_2x-a_3 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해 $c_1$를 가진다.

(2) ⇒ (1) 다항식 $g(x)=6x^3-6a_1x^2+3a_2x-a_3 \in \mathbb{Q}[x]$가 유리수해 $c_1$를 가진다고 가정하자. 식 ②을 식 ①에 대입하여 정리하면 식 ①은 다음과 같이 나타난다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\left\{(a_2-2a_1c_1+2{c_1}^2)x^2+(a_1-c_1)x+1\right\} * (c_1x+1)$$

$$=\binom{3}{2}(a_2-2a_1c_1+2{c_1}^2)c_1x^3+\left\{(a_2-2a_1c_1+2{c_1}^2)+\binom{2}{1}(a_1-c_1)c_1\right\}x^2+(c_1+a_1-c_1)x+1$$

$$=(6{c_1}^3-6a_1{c_1}^2+3a_2c_1)x^3+a_2x^2+a_1x+1$$

$$=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1$$

$$=f(x)$$

따라서 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서 가약이다. ■

**따름정리 4.6** 다항식 $f(x)=a_3x^3+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에 대하여 $a_3\neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)=a_3x^3+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$는 가약이다.
2. $g(x)=6x^3-a_3\in\mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

**따름정리 4.7** 다항식 $f(x)=a_3x^3+a_1x+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에 대하여 $a_3\neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)=a_3x^3+a_1x+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$는 가약이다.
2. $g(x)=6x^3-6a_1x^2-a_3\in\mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

간단한 예제를 통해 3차 합성 Hurwitz 다항식의 기약성을 판별해보도록 하자.

**예제 4.8** 다항식 $f(x)=x^3+x^2+x+1$의 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서의 기약성을 판별해보자. 정리 4.5에 의하여 다항식 $g(x)=6x^3-6x^2+3x-1$이 유리수해를 갖는지 정리 2.12을 이용하여 판단해주면 된다. 즉, $\pm\dfrac{(-1)\text{의 약수}}{6\text{의 약수}}$ 중

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$g(x)=0$을 만족시키는 유리수는 없으므로 유리수해가 존재하지 않는다. 따라서 다항식 $f(x)$는 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서 기약임을 알 수 있다.

**예제 4.9** 다항식 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x+1$의 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서의 기약성을 판별해보자. 위의 예제에서와 마찬가지로 정리 4.5에 의하여 다항식 $g(x)=6x^3-\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$이 유리수해를 갖는지 정리 2.12을 이용하여 판단해주면 된다. 모든 항의 계수가 정수계수를 갖도록 정리하면 $g(x)=\frac{1}{2}(12x^3-3x^2-2x-1)$이 되고 $\pm\frac{(-1)\text{의 약수}}{12\text{의 약수}}$ 중 $g(x)=0$을 만족시키는 유리수는 없으므로 유리수해가 존재하지 않는다. 따라서 다항식 $f(x)$는 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서 기약임을 알 수 있다.

**예제 4.10** 다항식 $f(x)=-x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{6}x+1$의 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서의 기약성을 판별해보자. 위의 예제에서와 마찬가지로 정리 4.5에 의하여 다항식 $g(x)=6x^3+x^2-4x+1$이 유리수해를 갖는지 정리 2.12을 이용하여 판단해주면 된다. 즉, $\pm\frac{1\text{의 약수}}{6\text{의 약수}}$ 중 $g(x)=0$을 만족시키는 유리수가 존재하므로 유리수해가 존재한다. 따라서 다항식 $f(x)$는 합성 Hurwitz 다항식환 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서 가약임을 알 수 있고 $f(x)=\left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1\right)*\left(\frac{1}{2}x+1\right)$로 표현된다.

지금부터는 $a_4\neq 0$인 다항식 $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$의 기약성에 대해 알아보도록 하자. $f(x)$가 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ 상에서 기약이 아니면 $f(x)$는 상수다항식이 아닌 두 개의 Hurwitz 다항식의 곱으로 표현된다. 다시 말해, $f(x)$는 일차식과 삼차식 또는 이차식과 이차식의 곱으로 인수분해 된다. 먼저 $f(x)$가 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ 상에서 일차식과 삼차식의 곱으로 인수분해 되는 경우의 가약성을 판별해보도록 하자.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

**정리 4.11** 다항식 $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1 \in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$가 가약이고 $a_4 \neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)$가 일차식과 삼차식의 곱으로 인수분해 된다.
2. $g(x)=24x^4-24a_1x^3+12a_2x^2-4a_3x+a_4 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

**증명** (1) ⇒ (2) 다항식 $f(x)$가 $h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$에서 가약이라고 가정하자. 다항식 $f(x)$의 상수항은 1 이므로 적당한 $b_1, b_2, b_3, c_1 \in \mathbb{Q}$에 대해 $f(x)$는 다음과 같이 인수분해 된다.

$$f(x)=\left(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+1\right)*\left(c_1x+1\right) \qquad -①$$

$$=\binom{4}{3}b_3c_1x^4+\left\{\binom{3}{2}b_2c_1+\binom{3}{3}b_3\right\}x^3+\left\{\binom{2}{1}b_1c_1+\binom{2}{2}b_2\right\}x^2+\left\{\binom{1}{0}c_1+\binom{1}{1}b_1\right\}x+1$$

$$=4b_3c_1x^4+\left(3b_2c_1+b_3\right)x^3+\left(2b_1c_1+b_2\right)x^2+\left(b_1+c_1\right)x+1$$

$$=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1$$

따라서, $\begin{cases} 4b_3c_1=a_4 \\ 3b_2c_1+b_3=a_3 \\ 2b_1c_1+b_2=a_2 \\ b_1+c_1=a_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} b_1=a_1-c_1 \\ b_2=a_2-2a_1c_1+2{c_1}^2 \\ b_3=a_3-3a_2c_1+6a_1{c_1}^2-6{c_1}^3 \end{cases} \qquad -②$$

이고 이를 정리하면 $a_4=-24{c_1}^4+24a_1{c_1}^3-12a_2{c_1}^2+4a_3c_1$ 이다.

따라서 $24{c_1}^4-24a_1{c_1}^3+12a_2{c_1}^2-4a_3c_1+a_4=0$ 이고

$g(x)=24x^4-24a_1x^3+12a_2x^2-4a_3x+a_4 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해 $c_1$를 가진다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

(2) ⇒ (1) 다항식 $g(x)=24x^4-24a_1x^3+12a_2x^2-4a_3x+a_4\in\mathbb{Q}[x]$가 유리수해 $c_1$를 가진다고 가정하자. 식 ②를 식 ①에 대입하여 정리하면 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(a_3-3a_2c_1+6a_1c_1^2-6c_1^3\right)x^3+\left(a_2-2a_1c_1+2c_1^2\right)x^2+\left(a_1-c_1\right)x+1\right\}*\left(c_1x+1\right)\\
&=\binom{4}{3}\left(a_3-3a_2c_1+6a_1c_1^2-6c_1^3\right)c_1x^4\\
&\quad+\left\{\binom{3}{2}\left(a_2-2a_1c_1+2c_1^2\right)c_1+\left(a_3-3a_2c_1+6a_1c_1^2-6c_1^3\right)\right\}x^3\\
&\quad+\left\{\binom{2}{1}\left(a_1-c_1\right)c_1+\left(a_2-2a_1c_1+2c_1^2\right)\right\}x^2+\left(a_1-c_1+c_1\right)x+1\\
&=\left(4a_3c_1-12a_2c_1^2+24a_1c_1^3-24c_1^4\right)x^4\\
&\quad+\left(3a_2c_1-6a_1c_1^2+6c_1^3+a_3-3a_2c_1+6a_1c_1^2-6c_1^3\right)x^3\\
&\quad+\left(2a_1c_1-2c_1^2+a_2-2a_1c_1+2c_1^2\right)x^2+a_1x+1\\
&=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1\\
&=f(x)
\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$는 가약이다. ■

**따름정리 4.12** 다항식 $f(x)=a_4x^4+1\in h(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$가 가약이고 $a_4\neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)$가 일차식과 삼차식의 곱으로 인수분해 된다.
2. $g(x)=24x^4+a_4\in\mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

**따름정리 4.13** 다항식 $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$가 가약이고 $a_4 \neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)$가 일차식과 삼차식의 곱으로 인수분해 된다.
2. $g(x)=24x^4-4a_3x+a_4 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

**따름정리 4.14** 다항식 $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$가 가약이고 $a_4 \neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)$가 일차식과 삼차식의 곱으로 인수분해 된다.
2. $g(x)=24x^4+12a_2x^2-4a_3x+a_4 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

한편, 4차 Hurwitz 다항식 $f(x)$가 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ 상에서 기약이 아닐 때 이차식과 이차식의 곱으로 인수분해 되는 경우에 대해서는 $a_4 \neq 0$인 Hurwitz 다항식 $f(x)=a_4x^4+1$의 가약성만을 판별할 수 있었고 더 복잡한 4차 이상의 고차 Hurwitz 다항식의 기약성을 밝히지는 못하였다. 이에 대한 후속 연구가 필요할 것으로 보인다.

**정리 4.15** 다항식 $f(x)=a_4x^4+1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$가 가약이고 $a_4 \neq 0$일 때, 다음 두 조건은 동치이다.

1. $f(x)$가 이차식과 이차식의 곱으로 인수분해 된다.
2. $g(x)=6x^4-a_4 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해를 가진다.

**증명** (1) $\Rightarrow$ (2) 다항식 $f(x)$가 $h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$에서 가약이라고 가정하자. 다항식 $f(x)$의 상수항은 1이므로 적당한 $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$에 대해 $f(x)$는 다음과 같이 인수분해 된다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$f(x) = (b_2x^2 + b_1x + 1) * (c_2x^2 + c_1x + 1) \qquad -①$$

$$= \binom{4}{2} b_2c_2x^4 + \left\{\binom{3}{1} b_1c_2 + \binom{3}{2} b_2c_1\right\} x^3 + \left\{\binom{2}{0} c_2 + \binom{2}{1} b_1c_1 + \binom{2}{2} b_2\right\} x^2 + \left\{\binom{1}{0} c_1 + \binom{1}{1} b_1\right\} x + 1$$

$$= 6b_2c_2x^4 + (3b_1c_2 + 3b_2c_1)x^3 + (2b_1c_1 + b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + 1$$

$$= a_4x^4 + 1$$

따라서,

$$\begin{cases} 6b_2c_2 = a_4 \\ 3b_1c_2 + 3b_2c_1 = 0 \\ 2b_1c_1 + b_2 + c_2 = 0 \\ b_1 + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = -c_1 \\ -2{c_1}^2 + b_2 + c_2 = 0 \\ -3c_1c_2 + 3(2{c_1}^2 - c_2)c_1 = 0 \end{cases}$$

이고 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} c_2 = {c_1}^2 \\ b_2 = {c_1}^2 \\ 6b_2c_2 = 6{c_1}^4 = a_4 \end{cases} \qquad -②$$

따라서 $6{c_1}^4 - a_4 = 0$ 이고 $g(x) = 6x^4 - a_4 \in \mathbb{Q}[x]$는 유리수해 $c_1$를 가진다.

(2) ⇒ (1) 다항식 $g(x) = 6x^4 - a_4 \in \mathbb{Q}[x]$가 유리수해 $c_1$를 가진다고 가정하자. 식②를 식①에 대입하여 정리하면 다음과 같이 나타난다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\left(c_1^{\,2}x^2 - c_1x + 1\right) * \left(c_1^{\,2}x^2 + c_1x + 1\right)$$

$$= \binom{4}{2}c_1^{\,2}c_1^{\,2}x^4 + \left\{\binom{3}{1}(-c_1)c_1^{\,2} + \binom{3}{2}c_1^{\,2}c_1\right\}x^3 + \left\{c_1^{\,2} + \binom{2}{1}(-c_1)c_1 + c_1^{\,2}\right\}x^2 + (c_1 - c_1)x + 1$$

$$= 6c_1^{\,4}x^4 + 1$$

$$= a_4x^4 + 1$$

$$= f(x)$$

따라서 $f(x) = a_4x^4 + 1 \in h(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$는 가약이다. ■

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

# 참고문헌

[1] A. Benhissi, Ideal structure of Hurwitz series ring, Contrib. Alg. Geom. 48 (1997), 251-256.

[2] A. Benhissi and F. Koja, Basic properties of Hurwitz series ring, Ric. Mat. 61 (2012), 255-273

[3] J.B. Fraleigh, First Course in Abstract Algebra 7, Addison Wesley (2002) 강영욱·강병련 옮김, 현대대수학 제 7판, 피어슨 코리아 (2009).

[4] W.F. Keigher, Adjunctions and comonads in differential algebra, Pacific J. Math. 59 (1975), 99-112.

[5] W.F. Keigher, On the ring of Hurwitz series, Comm. Algebra 25 (1997), 1845-1859.

[6] J.W. Lim and D.Y. Oh, Composite Hurwitz rings satisfying the ascending chain conditions on principal ideals, Kyungpook Math. J. 56 (2016) 1115-1123.

[7] J.W. Lim and D.Y. Oh, Chain conditions on composite Hurwitz series rings, Open Mathematics, 15 (2017) 1161-1170.

[8] Y.L. Seo and D.Y. Oh, Irreducibility of Hurwitz polynomials over the ring of integers, Korean J. Math. 27 (2019) 465-474.

[9] Z. Liu, Hermite and PS-rings of Hurwitz series, Comm. Algebra 28 (2000), 299-305.

[10] 김응태·박승안, 현대대수학 제8판, 경문사 (2011).

[11] 정학진, Hurwitz 다항식 환의 대수적 성질 연구, 조선대학교 석사학위 논문 (2016).