creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[UCI]I804:24011-200000280495

2020년 2월
교육학석사(수학교육)학위논문

제 2종 대수적 멱급수의 연분수 전개

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 민 구

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2종 대수적 멱급수의 연분수 전개

Continued fraction expansion of algebraic power series of second type

2020년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 민 구

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2종 대수적 멱급수의 연분수 전개

지도교수 이 관 규

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2019년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 민 구

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

강민구의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 안 영 준 인

심사위원 조선대학교 교수 이 관 규 인

심사위원 조선대학교 교수 오 동 렬 인

2019년 12월

조선대학교 교육대학원

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

CONTENTS

ABSTRACT

제 1 장 멱급수와 연분수 전개 ---------- 1

제 2 장 대수적 멱급수의 해의 존재성 ------ 6

제 3 장 대수적 멱급수의 해의 계산 ------- 14

참고문헌 ---------- 26

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

ABSTRACT

Continued fraction expansion of algebraic power series of second type

Kang Min-Gu
Advisor : Prof. Kwan Kyu Lee, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

The study of the continued fraction expansion of algebraic power series has been going on for a long time. Recent, patterns of the partial quotients of algebraic power series have been formulated or several properties shown. For these progress, a specific method of calculating the partial quotients is required to find the continued fraction expansion of the solution of the equation. In this thesis, the basic properties of the continued fraction expansion of algebraic power series were first summarized. Moreover, Mkaouar's method to compute the continued fraction expansion of algebraic power series of first type is extended to the continued fraction expansion of algebraic power series of second type, that weakens the conditions of first type.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 1 장

멱급수와 연분수 전개

1.1 멱급수

$\mathbb{F}$는 표수가 p인 유한체이다. $\mathbb{F}[T]$는 $\mathbb{F}$위의 다항식환이다. 아래와 같은 식

$$\alpha = \sum_{k \le n_0} a_k T^k, \quad a_{n_0} \neq 0, \quad n_0\text{는 정수}$$

을 형식적 멱급수(formal power series)라고 한다. $\mathbb{F}$위의 T^{-1}에 대한 멱급수의 체를 $\mathbb{F}((T^{-1}))$라고 한다. 멱급수 α에 대해서

$$v(\alpha) = n_0, \quad \lfloor \alpha \rfloor = \sum_{0 \le k} a_k T^k, \quad \mathrm{lc}(\alpha) = a_{n_0}$$

라고 정의한다. 여기서 $v(\alpha)$는 α의 매김값(valuation), $\lfloor \alpha \rfloor$는 α의 다항식 부분, $\mathrm{lc}(\alpha)$는 α의 선두계수(leading coefficient)라고 한다.

예제 1. 멱급수

$$\alpha = T^3 + T^2 + T^{-1} + T^{-2} + T^{-4} + \cdots$$

에 대해서

$$v(\alpha) = 3, \quad \lfloor \alpha \rfloor = T^3 + T^2, \quad \mathrm{lc}(\alpha) = 1$$

이다.

멱급수 α, β에 대해서 $v(\alpha) = v(\beta)$이면

$$v(\alpha + \beta) \le \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$$

이고 $v(\alpha) \neq v(\beta)$이면

$$v(\alpha + \beta) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

가 성립하므로 임의의 멱급수 α, β에 대해서

$$v(\alpha+\beta) \leq \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$$

가 성립한다. 곱에 대해서는

$$v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$$

이다. 또한

$$\mathrm{lc}(\alpha\beta) = \mathrm{lc}(\alpha)\mathrm{lc}(\beta)$$

가 성립한다.

예제 2. $\mathbb{F}_3$ 위에서 정의된 멱급수 α, β, γ가 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\alpha &= T^2 + T + T^{-3} + 2T^{-5} + \cdots \\
\beta &= T^3 + T^2 + 2T^{-2} + T^{-3} + \cdots \\
\gamma &= 2T^2 + T^{-1} + 2T^{-2} + \cdots
\end{aligned}$$

이 때

$$v(\alpha) = 2, \quad (\beta) = 3, \quad v(\gamma) = 2$$

가 성립한다. 두 멱급수의 매김값이 다를 때

$$v(\alpha+\beta) = v(T^3 + 2T^2 + T + 2T^{-2} + T^{-3} + 2T^{-5} + \cdots) = 3,$$

$$\max\{v(\alpha), v(\beta)\} = v(\beta) = 3$$

이므로 $v(\alpha+\beta) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$이다. 한편 두 멱급수의 매김값이 같을 때

$$v(\alpha+\gamma) = v(T + T^{-1} + 2T^{-2} + T^{-3} + 2T^{-5} + \cdots) = 1,$$

$$\max\{v(\alpha), v(\gamma)\} = v(\alpha) = v(\gamma) = 2$$

이므로 $v(\alpha+\beta) < \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$이다. 곱에 대해서는

$$v(\alpha\gamma) = v(2T^4 + 2T^3 + T + \cdots) = 4,$$

$$v(\alpha) + v(\gamma) = 2 + 2 = 4$$

따라서 $v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$이다. 또 멱급수에서 선두계수의 성질에 따르면

$$\mathrm{lc}(\alpha\gamma) = \mathrm{lc}(2T^4 + 2T^3 + T + \cdots) = 2,$$

$$\mathrm{lc}(\alpha)\mathrm{lc}(\gamma) = 1 \cdot 2 = 2$$

이므로 $\mathrm{lc}(\alpha\gamma) = \mathrm{lc}(\alpha)\mathrm{lc}(\gamma)$가 성립한다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

1.2 연분수 전개

다항식 $a_0, a_1, a_2, \cdots$에 대해 멱급수 α를 다음과 같이 나타낸 식을

$$\begin{aligned}\alpha &= [a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots] \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}\end{aligned}$$

α의 연분수 전개(continued fraction expansion)라고 한다. 이 때 $i \geq 1$에 대해 $\deg(a_i) > 0$ 이다. 각각의 다항식 a_i를 α의 i번 째 부분몫(partial quotient)이라고 한다. 또한 $\alpha_i = (\alpha_{i-1} - a_{i-1})^{-1}$라고 정의하면 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, \alpha_i]$이다.

예제 3. 멱급수

$$\alpha = T^3 + T^2 + T^{-1} + T^{-2} + T^{-4} + \cdots$$

의 연분수 전개를 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}a_0 = T^3 + T^2, \quad \alpha_1 &= \frac{1}{T^{-1} + T^{-2} + T^{-4} + \cdots} \\ &= T + 1 + T^{-1} + T^{-3} + T^{-6} + \cdots\end{aligned}$$

이다. α_1에 대해

$$\begin{aligned}a_1 = T + 1, \quad \alpha_2 &= \frac{1}{T^{-1} + T^{-3} + T^{-6} + \cdots} \\ &= T + T^{-1} + T^{-3} + T^{-4} + \cdots\end{aligned}$$

이다. α_2에 대해

$$\begin{aligned}a_2 = T, \quad \alpha_3 &= \frac{1}{T^{-1} + T^{-3} + T^{-4} + \cdots} \\ &= T + T^{-1} + T^{-2} + T^{-3} + \cdots\end{aligned}$$

이다. α_3에 대해

$$a_3 = T, \quad \alpha_4 = \frac{1}{T^{-1} + T^{-2} + T^{-3} + \cdots}$$

$$\vdots$$

이다. 즉

$$\begin{aligned}\alpha &= [T^3 + T^2, T + 1, T, T, \cdots] \\ &= T^3 + T^2 + \cfrac{1}{T + 1 + \cfrac{1}{T + \cfrac{1}{\ddots}}}\end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이다.

1.3 대수적 멱급수의 연분수 전개

다항식 $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_0$에 대해 A_n, A_0가 0이 아닐 때 방정식

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 = 0$$

를 만족하는 멱급수 α를 대수적 멱급수라고 부른다. 대수적 멱급수 α 에 대해서 $F(\alpha) = 0$인 F의 최소차수 n을 α의 차수라고 한다.

Ayadi, Azaza, Beldi [1]는 $\mathbb{F}_3$위의 $\deg A \geq \deg C$이고 C가 A를 나누는 경우를 만족하는 다음 방정식

$$F(x) = C^2x^4 + 2Cx^2 - A^2x + 1$$

의 해 α의 연분수 전개의 부분몫들의 패턴을 보였다. 특별히 $A = C = T$인 경우에 방정식

$$F(x) = T^2x^4 + 2Tx^2 - T^2x + 1$$

의 해 α의 부분몫들을 다음과 같이 구체화하였다. $\Omega_1 = T^2$, $\Omega_2 = T^2, T, 2T^2, 2T$이고 모든 $n \geq 0$에 대해

$$\Omega_{2n+1} = \Omega_{2n}, 2T^2, \frac{1}{T^2}\Omega^{(3)}_{2n-1}, 2T^2, \Omega_{2n}$$
$$\Omega_{2n+2} = \Omega_{2n+1}, T, \frac{1}{2T}\Omega^{(3)}_{2n}, 2T^2, \frac{1}{2T}\Omega_{2n+1}$$

를 만족한다. 이 때 $\alpha = [\Omega_\infty] = [T^2, T, 2T^2, 2T, 2T^2, 2T, 2T^2, T, \cdots]$이다.

Ayadi와 Elouaer [2]는 $\mathbb{F}_7$위의 0이 아닌 다항식 A, C에 대해서 $\deg A > \deg C$이고 C가 A를 나누는 경우를 만족하는 다음 방정식

$$F(x) = x^4 + Cx^2 - A^2x + 4C^2$$

의 해를 구하기 위해 방정식의 형태를 $Ux^8 + Vx^7 + Wx + Z = 0$로 바꾸어 부분몫을 계산하였다. 정리된 식은

$$5(A^4C + C^4)x^8 - ((2A^6 + A^2C^3)/3C)x^7 - (2A^2/3C)x + 1 = 0$$

이다. α의 부분몫을 차례대로 계산해보면

$$\frac{-(2A^6 + A^2C^3)}{5(A^4C + C^4} = [2A^2/C^2, -A^2/C, -A^2/C^2]$$

이므로 $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \cdots]$라고 하면 $a_1 = 2A^2/C^2$, $a_2 = -A^2/C$, $a_3 = -A^2/C^2$이다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

위와 같이 대수적 멱급수의 연분수 전개의 부분몫에 대한 패턴이나 여러 성질들을 정리하기 위해서는 먼저 구체적으로 각각의 부분몫을 계산하는 방법이 요구된다. 일반적인 방정식의 해의 연분수 전개를 구하는 방법은 아직 밝혀지지 않았지만 Mkaouar[3]가 특정 조건을 만족하는 방정식의 해의 연분수 전개를 구하는 방법을 아래와 같이 구체적으로 정리하였다.

정리 1. (Mkaouar). 매김값이 m인 멱급수 α가 다음

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$$

방정식의 해라고 할 때 $\deg(A_n) < \deg(A_{n-1})$이고 $0 \le k \le n-2$에 대해

$$\deg(A_k) < \deg(A_{n-1})$$

를 만족하면 $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \frac{1}{\alpha_1}$에서 $\lfloor \alpha \rfloor = -\lfloor A_{n-1}/A_n \rfloor$이고 $\alpha_1 = (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)^{-1}$을 해로 가지는 다항식 $F_1(x)$도 같은 조건을 만족한다.

위와 같은 정리의 조건을 만족하는 방정식 $F(x)$에 대해 $\lfloor \alpha \rfloor = a_0$를 구할 수 있고 $F_1(x) = F\left(a_0 + \frac{1}{x}\right)x^n$도 정리의 조건을 만족하므로 부분몫들을 반복해서 차례대로 구할 수 있다. 이 논문에서는 Mkaouar[3]의 정리에서 방정식의 조건을 더 약화시킨 경우에 대해 부분몫의 계산 과정을 아래와 같이 밝혔다.

정리 2. 다음 방정식

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$$

에서 $\deg(A_n) < \deg(A_{n-1})$이고 $m = \deg(A_{n-1}) - \deg(A_n)$라 하자. $1 \le k \le n-1$에 대해

$$\deg(A_{n-k-1}) < \deg(A_{n-1}) + (k-1)m$$

을 만족하면 $v(\alpha) = m$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = -\mathrm{lc}(A_{n-1})/\mathrm{lc}(A_n)$인 해 α가 존재한다. 이 때 $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \frac{1}{\alpha_1}$에서 $\lfloor \alpha \rfloor = -\lfloor A_{n-1}/A_n \rfloor$이고 만약 $\alpha \ne \lfloor \alpha \rfloor$이면 $\alpha_1 = (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)^{-1}$을 해로 가지는 다항식 $F_1(x)$는 Mkaouar의 조건을 만족한다.

이러한 방법을 구체화하기 위한 기초내용으로 유한체에서 대수적 멱급수의 매김값에 대한 해의 존재성과 Hensel의 보조정리의 구체적 과정을 2장에서 다루었다. 3장에서는 Mkaouar[3] 정리의 증명 과정을 기초로 하여 조건이 약화된 방정식에서의 부분몫을 구체적인 계산하는 과정을 보였다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2 장

대수적 멱급수의 해의 존재성

2.1 대수적 멱급수의 매김값

다항식 $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_0$에 대해 A_n과 A_0가 0이 아닐 때

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

에서 멱급수 α가 $F(x)$의 해이고 $i \geq 0$에 대해 $v_i = \deg(A_i)$라고 하자.

방정식 $F(x)$와 정수 m에 대해서

$$v_{F,m} = \max\{v_n + mn, v_{n-1} + m(n-1), \cdots, v_1 + m\}$$

라고 하자. 이 때

$$\left|\{1 \leq k \leq n | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| = 1, \quad v_{F,m} = v_0$$

또는

$$\left|\{1 \leq k \leq n | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| \geq 2, \quad v_{F,m} \geq v_0$$

를 만족하는 m값들의 집합을 M_F라 하자.

정리 3. 방정식 $F(x)$와 멱급수 α에 대해

$$F(\alpha) = 0 \quad \text{이면} \quad v(\alpha) \in M_F$$

이다.

증명. 멱급수 α가 방정식 $F(x)$에 대해

$$F(\alpha) = A_n \alpha^n + A_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + A_1 \alpha + A_0 = 0$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이고 A_0를 이항하면

$$A_n\alpha^n + A_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + A_1\alpha = -A_0$$

이다. 그러면

$$v(A_n\alpha^n + A_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + A_1\alpha) = v(-A_0)$$

을 만족하게 된다. 이 때 $\left|\{1 \le k \le n | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| = 1$이면

$$\max\{mn + v_n, m(n-1) + v_{n-1}, \cdots, m + v_1\} = v_{F,m} = v_0$$

이다. 한편 $\left|\{1 \le k \le n | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| \ge 2$이면

$$v_{F,m} \ge \max\{mn + v_n, m(n-1) + v_{n-1}, \cdots, m + v_1\} = v_0$$

이고 따라서

$$v_{F,m} \ge v_0$$

가 된다. 그러면 $m \in M_F$이다.

예제 4. 다음 아래와 같은 방정식

$$F(x) = x^4 + T^2x^3 + T^3x^2 + 2T^2 \in \mathbb{F}_3[T][x]$$

의 해 α에 대해 $v(\alpha) = m$이라고 하자. 방정식 $F(x)$로 부터

$$\begin{aligned} v_0 &= \deg(2T^2) = 2 \\ v_1 &= \deg(0) = -\infty \\ v_2 &= \deg(T^3) = 3 \\ v_3 &= \deg(T^2) = 2 \\ v_4 &= \deg(1) = 0 \end{aligned}$$

이고 $v_{F,m} = \max\{4m, 3m+2, 2m+3\}$라고 하자. 먼저

$$\left|\{1 \le k \le 4 | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| = 1$$

인 경우 아래 그래프가 v_0에서 만나는 점은

$$v_{F,m} = v_0 = 2$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

이다. m은 정수이므로 $\{-\frac{1}{2}\} \notin M_F$이다. 또한

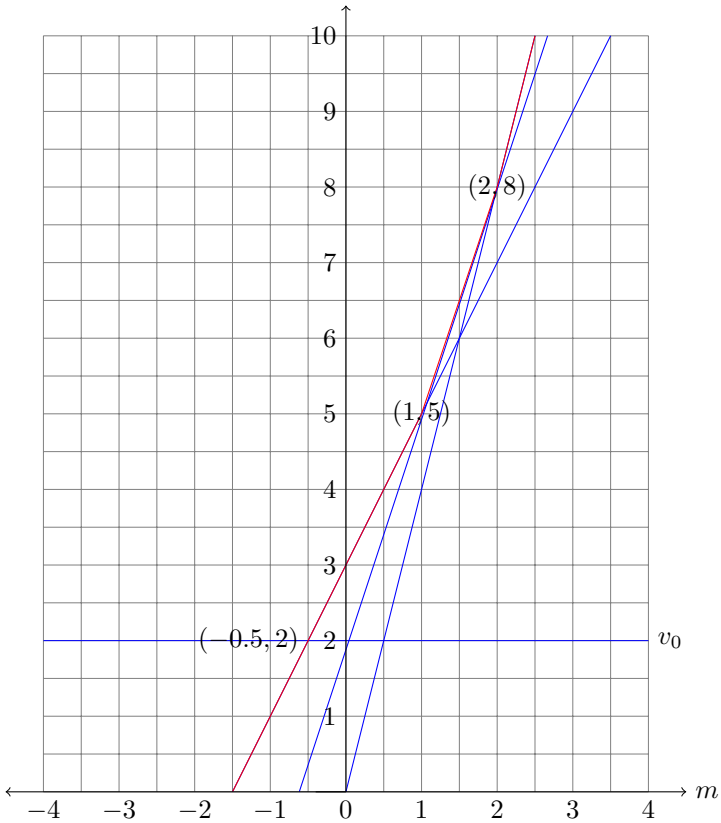
$$\left|\{1 \le k \le 4 | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| \ge 2$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

인 경우 $v_{F,m} \geq v_0$를 만족하는 m값이 꺾인점에서 존재할 수 있다. 이 때 가능한 m값은

$$m = 1, 2$$

이다. 여기서 $v_{F,1} \geq v_0 = 2$, $v_{F,2} \geq v_0 = 2$이므로 $m \in M_F = \{1, 2\}$이다. 따라서 방정식 $F(x)$의 해 α에 대해 $v(\alpha)$는 $1, 2$ 중 하나가 된다.



예제 5. 다음 아래와 같은 방정식

$$F(x) = x^4 + T^2x^3 + Tx^2 + T^2x + 2T^4 \in \mathbb{F}_3[T][x]$$

의 해 α에 대해 $v(\alpha) = m$이라고 하자. 방정식 $F(x)$로 부터

$$\begin{aligned} v_0 &= \deg(T^4) = 4 \\ v_1 &= \deg(T^2) = 2 \\ v_2 &= \deg(T) = 1 \\ v_3 &= \deg(T^2) = 2 \\ v_4 &= \deg(1) = 0 \end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이고 $v_{F,m} = \max\{4m, 3m+2, 2m+1, m+2\}$라고 하자. 먼저

$$\left|\{1 \le k \le 4 | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| = 1$$

인 경우 아래 그래프가 v_0에서 만나는 점은

$$v_{F,m} = v_0 = 4$$

$$m = \frac{2}{3}$$

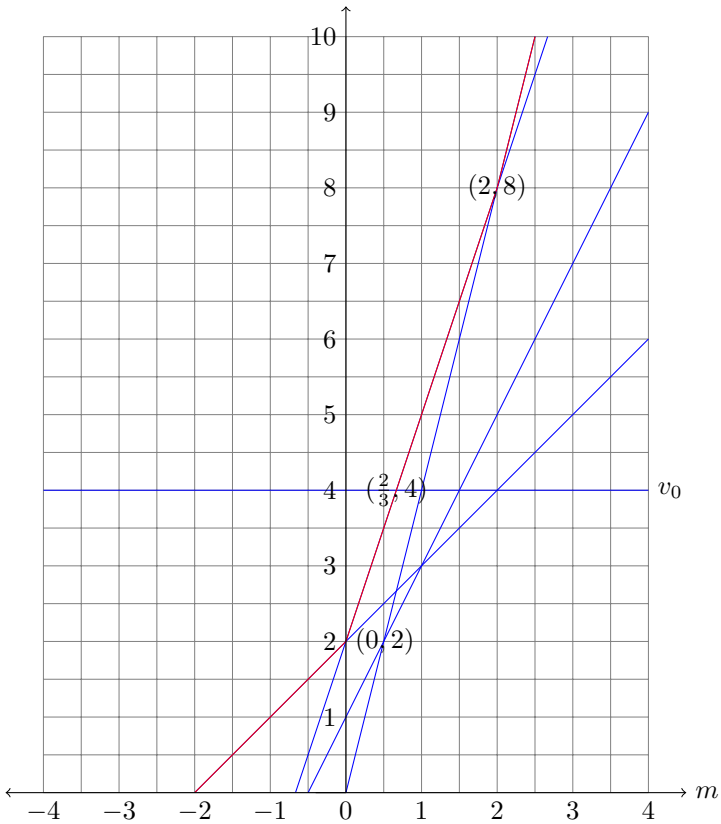
이다. m은 정수이므로 $\{\frac{2}{3}\} \notin M_F$이다. 또한

$$\left|\{1 \le k \le 4 | v_n + mk = v_{F,m}\}\right| \ge 2$$

인 경우 $v_{F,m} \ge v_0$를 만족하는 m값이 꺾인점에서 존재할 수 있다. 이 때 가능한 m값은

$$m = 0, 2$$

이다. 여기서 $v_{F,0} < v_0 = 4$, $v_{F,2} \ge v_0 = 4$이므로 $m \in M_F = \{2\}$ 이다. 따라서 방정식 $F(x)$의 해 α에 대해 $v(\alpha)$는 2가 된다.



조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

2.2 대수적 멱급수의 해

다항식 $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_0$에 대해서 A_n과 A_0가 0이 아닐 때 멱급수 α가 방정식

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

의 해 이고 $v(\alpha) = m > 0$라고 하자. 그러면 $m \in M_F$이다. 이 때 $\beta = T^{-m}\alpha$라고 하면 β는

$$\begin{aligned} G(y) &= F(T^m y) \\ &= A_n T^{mn} y^n + A_{n-1} T^{m(n-1)} y^{n-1} + \cdots + A_0 \end{aligned}$$

의 해가 되고 이 때 $i \geq 0$에 대해 $v_i = \deg(A_i)$라고 하면

$$v_F = \max\{v_n + mn, v_{n-1} + m(n-1), \cdots, v_1 + m, v_0\} = v_{F,m}$$

이다. $t = T^{-1}$이고 $0 \leq k \leq n$에 대해 $a_k = A_k T^{mk - v_F}$라고 하면

$$\begin{aligned} g(y) &= T^{-v_F} G(y) \\ &= a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0 \end{aligned}$$

이다. 또 $I = \{0 \leq k \leq n | \deg(A_k) + mk = v_F\}$에 대해

$$h_{F,m}(y) = g(y) \mod t = \sum_{k \in I} \mathrm{lc}(A_k) y^k$$

이다.

정리 4. 방정식

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

와 멱급수 α에 대해서

$$F(\alpha) = 0$$

이고 이 때 $v(\alpha) = m$, $\mathrm{lc}(\alpha) = c$이면

$$h_{F,m}(c) = 0$$

이다.

증명. $v(\alpha) = m$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = c$이므로 $\alpha = cT^m + \cdots$라 하자. $F(\alpha) = 0$이므로

$$A_n(cT^m + \cdots)^n + A_{n-1}(cT^m + \cdots)^{n-1} + \cdots + A_0 = 0$$

이다. 식을 정리하면

$$A_n(c^n T^{mn} + \cdots) + A_{n-1}(c^{n-1} T^{m(n-1)} + \cdots) + \cdots + A_0 = 0$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이다. 따라서 $I = \{0 \le k \le n | \deg(A_k) + mk = v_F\}$에 대해

$$\sum_{k \in I} \mathrm{lc}(A_k) c^k = h_{F,m} = 0$$

이므로 $h_{F,m}(c) = 0$이 된다.

예제 6. 다음 아래와 같은 방정식

$$F(x) = x^4 + T^2 x^3 + T^3 x^2 + 2T^2 \in \mathbb{F}_3[T][x]$$

의 해 α에 대해 $v(\alpha) = m > 0$이라고 하자. 예제 4를 통해 가능한 m값이 $m \in \{1, 2\}$임을 보였다. 먼저 $m = 1$인 경우를 보면

$$\begin{aligned} G(y) &= F(Ty) \\ &= T^4 y^4 + T^5 y^3 + T^5 y^2 + 2T^2 \\ g(y) &= G(y) T^{-5} \\ &= T^{-1} y^4 + y^3 + y^2 + 2T^{-3} \\ &= t y^4 + y^3 + y^2 + 2t^3, \quad t = T^{-1} \\ h_{F,1}(y) &= g(y) \mod t \\ &= y^3 + y^2 \end{aligned}$$

이다. 이 때 $c = 2$에 대해 $h_{F,1}(c) = 0$이므로 $\mathrm{lc}(\alpha) \in \{2\}$이다.

또 $m = 2$인 경우를 보면

$$\begin{aligned} G(y) &= F(T^2 y) \\ &= T^8 y^4 + T^8 y^3 + T^7 y^2 + 2T^2 \\ g(y) &= G(y) T^{-8} \\ &= y^4 + y^3 + T y^2 + 2T^{-6} \\ &= y^4 + y^3 + t y^2 + 2t^6, \quad t = T^{-1} \\ h_{F,2}(y) &= g(y) \mod t \\ &= y^4 + y^3 \end{aligned}$$

이다. 이 때 $c = 2$에 대해 $h_{F,2}(c) = 0$이므로 $\mathrm{lc}(\alpha) \in \{2\}$이다.

정리 5. 정수 $m \in M_F$이라고 하자. 이 때 $c \in \mathbb{F}$에 대해

$$h_{F,m}(c) = 0, \quad h'_{F,m}(c) \neq 0$$

을 만족하면 멱급수 α에 대해 $v(\alpha) = m$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = c$인 해 α가 존재한다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

증명. $n \geq 1$에 대해서

$$g(b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1}t^{n-1}) = 0 \mod t^n$$

이 성립한다고 가정하자. 그러면 $a \in \mathbb{F}$, 법 t^{n+1}에 대해

$$\begin{aligned} g(b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1}t^{n-1} + at^n) &= g(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}t^{n-1}) + ag'(b_0)t^n \\ &= g(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}t^{n-1}) + ah'_{F,m}(c)t^n \end{aligned}$$

가정으로부터 $g(b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1}t^{n-1}) \mod t^{n+1} = dt^n$ 이고 $h'_{F,m}(c) \neq 0$이므로 $a = -\frac{d}{h'_{F,m}(c)}$가 된다. 따라서

$$g\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_{n-1}t^{n-1} - \frac{d}{h'_{F,m}(c)}t^n\right) = 0 \mod t^{n+1}$$

이다. 결과적으로 $b_n = -\frac{d}{h'_{F,m}(c)}$이고 이를 반복할 수 있다.

예제 7. 아래와 같은 방정식

$$F(x) = x^4 + T^2x^3 + T^3x^2 + 2T^2 \in \mathbb{F}_3[T][x]$$

에 대해 $m = 2$이고 $c = 2$라고 하자. $F(x)$에 대해

$$\begin{aligned} G(y) &= F(T^2y) \\ &= T^8y^4 + T^8y^3 + T^7y^2 + 2T^2 \\ g(y) &= G(y)T^{-8} \\ &= y^4 + y^3 + Ty^2 + 2T^{-6} \\ &= y^4 + y^3 + ty^2 + 2t^6, \quad t = T^{-1} \\ h_{F,2}(y) &= g(y) \mod t \\ &= y^4 + y^3 \\ h'_{F,2}(y) &= g'(y) \mod t \\ &= y^3 \end{aligned}$$

이고 이 때 $h_{F,2}(c) = 0$이고 $h'_{F,2}(c) \neq 0$이므로 정리 5에 의해 $v(\alpha) = 2$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = 2$인 해 α가 존재한다. 따라서

$$\begin{aligned} g(2 + b_1 t) \mod t^2 &= -b_1 t + t = 0 \quad \text{이므로} \quad b_1 = 1 \\ g(2 + t + b_2 t^2) \mod t^3 &= -b_2 t^2 + t^2 = 0 \quad \text{이므로} \quad b_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이와 같이 차례대로 계속 구할 수 있다. 이 때

$$\beta = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots$$

라 하면 $t = T^{-1}$이고 $\alpha = T^2\beta$이므로

$$\alpha = b_0 T^2 + b_1 T + b_2 + b_3 T^{-1} + \cdots$$

이다. 따라서 $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor = 2T^2 + T + 1$이다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 3 장

대수적 멱급수의 해의 계산

3.1 제 1종 대수적 멱급수의 연분수 전개

Mkaouar [3]는 아래와 같은 조건을 만족하는 방정식 $F(x)$에서 해의 연분수 전개를 계산하는 방법을 보였다. 이는 2절에서 보일 제 2종 대수적 멱급수의 연분수 전개의 내용과 비교하기 위해 증명도 같이 보였다.

정리 1. (Mkaouar). 매김값이 m인 멱급수 α가 다음

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$$

방정식의 해라고 할 때 $\deg(A_n) < \deg(A_{n-1})$이고 $0 \le k \le n-2$에 대해

$$\deg(A_k) < \deg(A_{n-1})$$

를 만족하면 $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \frac{1}{\alpha_1}$에서 $\lfloor \alpha \rfloor = -\lfloor A_{n-1}/A_n \rfloor$이고 $\alpha_1 = (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)^{-1}$을 해로 가지는 다항식 $F_1(x)$도 같은 조건을 만족한다.

증명. 멱급수 α가 다항식 $F(x)$의 해 이므로

$$A_n\alpha^n + A_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + A_1\alpha + A_0 = 0$$

이다. 양변을 $A_n\alpha^{n-1}$으로 나누면

$$\alpha + \frac{A_{n-1}}{A_n} + \cdots + \frac{A_1}{A_n\alpha^{n-2}} + \frac{A_0}{A_n\alpha^{n-1}} = 0$$

이다. 이 때 $0 \le k \le n-2$에 대해 $v(A_k\alpha^k) < v(A_{n-1}\alpha^{n-1})$ 이다. 따라서 $v(A_n\alpha^n) = v(A_{n-1}\alpha^{n-1})$이고 $v(\alpha) = \deg(A_{n-1}) - \deg(A_n)$이다. $0 \le k < n-1$에 대해

$$v\left(\frac{A_k}{A_n\alpha^{n-k-1}}\right) = \deg A_k - \deg A_n - (n-k-1)(\deg A_{n-1} - \deg A_n) < 0$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

가 성립하므로 $a_0 = -\lfloor A_{n-1}/A_n \rfloor$이고 이 때 $\deg a_0 = \deg(A_{n-1}) - \deg(A_n)$이다. 따라서

$$A_{n-1} = (-a_0)A_n + R$$

로 나타낼 수 있고 $\deg(R) < \deg(A_n)$이다. α_1은 다음 방정식

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F\big(a_0 + \frac{1}{x}\big)x^n \\ &= \sum_{0\le i\le n} A_i\big(a_0 + \frac{1}{x}\big)^i x^n \\ &= \sum_{0\le i\le n} A_i(a_0x+1)^i x^{n-i} \\ &= \sum_{0\le i\le n}\sum_{0\le j} A_i\binom{i}{j}(a_0x)^{i-j}x^{n-i} \\ &= \sum_{0\le j} x^{n-j}\sum_{0\le i\le n} A_i\binom{i}{j}{a_0}^{i-j} \end{aligned}$$

의 해이다. 여기서 $0 \le j \le n$에 대해

$$C_{n-j} = \sum_{0\le i\le n} A_i\binom{i}{j}{a_0}^{i-j}$$

라 하자. 그러면

$$F_1(x) = C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0$$

이다. 먼저

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{0\le i\le n} A_i{a_0}^i \\ &= \Big(\sum_{0\le i\le n-2} A_i{a_0}^i\Big) + A_{n-1}{a_0}^{n-1} + A_n{a_0}^n \\ &= \Big(\sum_{0\le i\le n-2} A_i{a_0}^i\Big) + R{a_0}^{n-1} \end{aligned}$$

이다. 이 때

$$\begin{aligned} \deg(R{a_0}^{n-1}) &= \deg(R) + (n-1)\deg(a_0) \\ &< \deg(A_n) + (n-1)\deg(a_0) \\ &= \deg(A_n) + \deg(A_{n-1}) - \deg(A_n) + (n-2)\deg(a_0) \\ &= \deg(A_{n-1}) + (n-2)\deg(a_0) \end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이므로 따라서 $\deg(C_n) < \deg(A_{n-1}) + (n-2)\deg(a_0)$를 만족한다. 한편으로는

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= \sum_{1\le i\le n} iA_i {a_0}^{i-1} \\ &= \left(\sum_{1\le i\le n-2} iA_i {a_0}^{i-1}\right) + (n-1)A_{n-1}{a_0}^{n-2} + nA_n{a_0}^{n-1} \\ &= \left(\sum_{1\le i\le n-2} iA_i {a_0}^{i-1}\right) + (n-1)R{a_0}^{n-2} + A_n{a_0}^{n-1} \end{aligned}$$

이므로 $\deg(C_{n-1}) = \deg(A_{n-1}) + (n-2)\deg(a_0)$이다. 결과적으로 $\deg(C_n) < \deg(C_{n-1})$가 성립해서 다시 위 정리의 조건을 만족하므로 반복적으로 부분몫들을 계산할 수 있다. 이러한 조건을 만족하는 방정식의 해를 제 1종 대수적 멱급수라고 부른다.

3.2 제 2종 대수적 멱급수의 연분수 전개

2절에서는 정리 1의 조건을 더 약화시킨 방정식에서의 해의 연분수 전개를 계산하는 방법을 정리하였다. 먼저 앞서 소개한 정리 2의 방정식의 조건보다 더 강한 조건을 만족하는 방정식에서의 해의 계산 과정을 보였다.

정리 6. 다음 방정식

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$$

에서 $\deg(A_n) < \deg(A_{n-1})$이고 $m = \deg(A_{n-1}) - \deg(A_n)$일 때 $1 \le k \le n-1$에 대해

$$\deg(A_{n-k-1}) < \deg(A_{n-1}) + km$$

을 만족하면 $v(\alpha) = m$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = -\mathrm{lc}(A_{n-1})/\mathrm{lc}(A_n)$인 해 α가 존재한다.

증명. 우선

$$\begin{aligned} G(y) &= F(T^m y) \\ &= A_n T^{mn} y^n + A_{n-1}T^{m(n-1)}y^{n-1} + \cdots + A_0 \end{aligned}$$

에서 $k = 1, 2, \cdots, n-1$에 대해

$$\begin{aligned} \deg\left(A_{n-k-1}T^{m(n-k-1)}\right) &= \deg(A_{n-k-1}) + m(n-k-1) \\ &< \deg(A_{n-1}) + mk + m(n-k-1) \\ &= \deg(A_{n-1}) + m(n-1) \\ &= \deg\left(A_{n-1}T^{m(n-1)}\right) \end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

가 성립한다. 또한

$$\begin{aligned}\deg(A_nT^{mn}) &= \deg(A_n) + mn \\ &= \deg(A_{n-1}) - m - mn \\ &= \deg(A_{n-1}) - m(n-1) \\ &= \deg\left(A_{n-1}T^{m(n-1)}\right)\end{aligned}$$

가 성립한다. 이제 $a = \mathrm{lc}(A_n)$, $b = \mathrm{lc}(A_{n-1})$이라고 하면

$$\begin{aligned}h_{F,m}(y) &= ay^n + by^{n-1} \\ h'_{F,m}(y) &= any^{n-1} + b(n-1)y^{n-2}\end{aligned}$$

이다. 분명히 $a \neq 0$, $b \neq 0$이므로 이 때 $c = -\frac{b}{a}$라고 하면

$$\begin{aligned}h_{F,m}(c) &= ac^n + bc^{n-1} \\ &= (ac+b)c^{n-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}h'_{F,m}(c) &= anc^{n-1} + b(n-1)c^{n-2} \\ &= \big(anc + b(n-1)\big)c^{n-2} \\ &= \big((ac+b)n - b\big)c^{n-2} \\ &= (-b)c^{n-2} \neq 0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $c = -\frac{b}{a}$에 대해 $h_{F,m}(c) = 0$이고 $h'_{F,m}(c) \neq 0$ 이므로 정리 5에 의해서 $v(\alpha) = m$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = -\mathrm{lc}(A_{n-1})/\mathrm{lc}(A_n)$ 인 해 α가 존재한다.

다음 예제의 방정식 $F(x)$는 정리 6의 조건을 만족하고 특별히 $F_1(x)$가 정리 1의 조건을 만족한다. 이 경우 방정식 $F(x)$의 해의 연분수 전개를 구체적으로 아래와 같이 계산하였다.

예제 8. 다음 방정식

$$F(x) = x^4 + T^2x^3 + T^3x^2 + 2T^2 \in \mathbb{F}_3[T][x]$$

에 대해 멱급수 α의 매감값이 m이라고 하자. 앞서 예제 4를 통해 $m \in M_F = \{1, 2\}$임을 보였다. 이 중 $m = 2$일 때 $A_4 = 1$, $A_3 = T^2$, $A_2 = T^3$, $A_1 = 0$, $A_0 = 2T^2$에 대해 위 조건 $\deg(A_4) = \deg(1) < \deg(A_3) = \deg(T^2)$을 만족하고 $1 \leq k \leq 3$에 대해 $\deg(A_{3-k}) < \deg(A_3) + 2k$을 만족한다. 그러면 $v(\alpha) = 2$이고

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$\mathrm{lc}(\alpha) = -\mathrm{lc}(A_{n-1})/\mathrm{lc}(A_n) = 2$인 해 α가 존재한다. $F(x)$에 대해

$$\begin{aligned}
G(y) &= F(T^2 y) \\
&= T^8 y^4 + T^8 y^3 + T^7 y^2 + 2T^2 \\
g(y) &= G(y) T^{-8} \\
&= y^4 + y^3 + T y^2 + 2T^{-6} \\
&= y^4 + y^3 + t y^2 + 2t^6, \quad t = T^{-1} \\
h_{F,2}(y) &= g(y) \mod t \\
&= y^4 + y^3 \\
h'_{F,2}(y) &= g'(y) \mod t \\
&= y^3
\end{aligned}$$

이다. 따라서 $c = 2$에 대해 $h_{F,2}(c) = 0$이고 $h'_{F,2}(c) \neq 0$이므로 예제 7을 참고하면

$$\begin{aligned}
g(2 + b_1 t) \mod t^2 &= -b_1 t + t = 0 \quad \text{이므로} \quad b_1 = 1 \\
g(2 + 2t + b_2 t^2) \mod t^3 &= -t^2 + b_2 t^2 = 0 \quad \text{이므로} \quad b_2 = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

위와 같이 차례대로 구할 수 있다. 결과를 통해 $\alpha = 2T^2 + T + 1 + \cdots$이고 $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor = 2T^2 + T + 1$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= F\left(2T^2 + T + 1 + \frac{1}{x}\right) x^4 \\
&= (2T^5 + 2T^3 + 2T^2 + T + 1)x^4 + (2T^6 + T^5 + 2T^4 + 1)x^3 \\
&\quad + T^3 x^2 + (T+1)x + 1
\end{aligned}$$

이고 이 때 $F_1(x)$에 대해 $\deg(2T^5 + 2T^3 + 2T^2 + T + 1) < \deg(2T^6 + T^5 + 2T^4 + 1)$가 성립해서 정리 1의 조건을 만족하므로 아래와 같이 반복해서 부분몫들을 구체적으로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\left\lfloor \frac{2T^6 + T^5 + 2T^4 + 1}{2T^5 + 2T^3 + 2T^2 + T + 1} \right\rfloor \\
&= 2T + 1
\end{aligned}$$

이다. $F_2(x)$는

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= F_1\left(2T + 1 + \frac{1}{x}\right) x^4 \\
&= (T^4 + 2T^3 + 1)x^4 + (T^8 + T^6 + 2T + 2)x^3 + T^3 + x^2 + (2T^2 + 2)x + 2T^5 \\
&\quad + 2T^3 + 2T^2 + T + 1
\end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_2 &= -\left\lfloor \frac{T^8+T^6+2T+2}{T^4+2T^3+1} \right\rfloor \\ &= 2T^4+T^2+2T+2 \end{aligned}$$

이다. $F_3(x)$는

$$\begin{aligned} F_3(x) &= F_2\left(2T^4+T^2+2T+2+\frac{1}{x}\right)x^4 \\ &= (2T^{12}+T^{11}+2T^{10}+\cdots+T^6+1)x^4+(2T^{16}+T^{15} \\ &+2T^{13}+\cdots+T^2+1)x^3+T^3x^2+x+(T^4+2T^3+1) \end{aligned}$$

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_3 &= -\left\lfloor \frac{2T^{16}+T^{15}+2T^{13}+\cdots+T^2+1}{2T^{12}+T^{11}+2T^{10}+\cdots+T^6+1} \right\rfloor \\ &= 2T^4+2T^3+T^2+T+2 \end{aligned}$$

이다. $F_4(x)$는

$$\begin{aligned} F_4(x) &= F_3\left(2T^4+2T^3+T^2+T+2+\frac{1}{x}\right)x^4 \\ &= (T^{22}+T^{21}+2T^{20}+\cdots+T^5+2T^2)x^4+(T^{24}+2T^{23} \\ &+T^{22}+\cdots+2T^5+T^4)x^3+T^3x^2+(2T^{10}+2T^9+T^8 \\ &+2T^5+2T^2+2T)x+(2T^{12}+T^{11}+2T^{10}+\cdots+T^6+1) \end{aligned}$$

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_4 &= -\left\lfloor \frac{T^{24}+2T^{23}+T^{22}+\cdots+2T^5+T^4}{T^{22}+T^{21}+2T^{20}+\cdots+T^5+2T^2} \right\rfloor \\ &= 2T^2+2T+2 \end{aligned}$$

이다. $F_5(x)$는

$$\begin{aligned} F_5(x) &= F_4\left(2T^2+2T+2\frac{1}{x}\right)x^4 \\ &= (T^{27}+T^{26}+2T^{25}+\cdots+T+1)x^4+(2T^{28}+2T^{27} \\ &+T^{26}+\cdots+T^3+T^2)x^3+T^3x^2+(2T^{21}+2T^{20}+T^{19} \\ &+\cdots+T^3+T^2)x+(T^{22}+T^{21}+2T^{20}+\cdots+T^5+2T^2) \end{aligned}$$

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_5 &= -\left\lfloor \frac{2T^{28}+2T^{27}+T^{26}+\cdots+T^3+T^2}{T^{27}+T^{26}+2T^{25}+\cdots+T+1} \right\rfloor \\ &= T \end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이다. 결과적으로 $F(x)$의 해 α의 연분수 전개를

$$\alpha = \left[2T^2+T+1, 2T+1, 2T^4+2T^3+T^2+T+2, 2T^4+T^2+2T+2, 2T^2+2T+2, T, \cdots\right]$$

위와 같이 구체적으로 계산할 수 있다.

정리 6은 정리 1의 조건보다 더 넓은 범위의 방정식에서 해의 첫번 째 부분몫을 구할 수 있지만 반복해서 부분몫을 차례대로 구하는데 어려움이 있다. 따라서 조건을 $1 \le k \le n-1$에 대해 $\deg(A_{n-k-1}) < \deg(A_{n-1}) + (k-1)m$로 강화시켜 대수적 멱급수의 연분수 전개를 계산하는 방법에 대해 소개하겠다. 특별히 아래 정리의 조건을 만족하는 방정식의 해를 제 2종 대수적 멱급수의 연분수 전개라고 하겠다.

정리 2. 다음 방정식

$$F(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$$

에서 $\deg(A_n) < \deg(A_{n-1})$이고 $m = \deg(A_{n-1}) - \deg(A_n)$라 하자. $1 \le k \le n-1$에 대해

$$\deg(A_{n-k-1}) < \deg(A_{n-1}) + (k-1)m$$

을 만족하면 $v(\alpha) = m$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = -\mathrm{lc}(A_{n-1})/\mathrm{lc}(A_n)$인 해 α가 존재한다. 이 때 $\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \frac{1}{\alpha_1}$에서 $\lfloor\alpha\rfloor = -\lfloor A_{n-1}/A_n\rfloor$이고 만약 $\alpha \ne \lfloor\alpha\rfloor$이면 $\alpha_1 = (\alpha - \lfloor\alpha\rfloor)^{-1}$을 해로 가지는 다항식 $F_1(x)$는 Mkaouar의 조건을 만족한다.

증명. 위 정리의 조건 $\deg(A_{n-k-1}) < \deg(A_{n-1}) + (k-1)m$은 정리 6의 조건보다 강화된 조건이므로 앞의 증명을 통해 $v(\alpha) = m$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = -\mathrm{lc}(A_{n-1})/\mathrm{lc}(A_n)$인 해 α가 존재한다.

우선 a_0가 α의 첫 번째 부분몫이라고 하면

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

이다. 이 때 α_1은 다음 방정식

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= F\big(a_0 + \frac{1}{x}\big)x^n \\
&= \sum_{0\le i\le n} A_i\big(a_0 + \frac{1}{x}\big)^i x^n \\
&= \sum_{0\le i\le n} A_i\big(a_0 x + 1\big)^i x^{n-i} \\
&= \sum_{0\le i\le n}\sum_{0\le j} A_i \binom{i}{j}\big(a_0 x\big)^{i-j} x^{n-i} \\
&= \sum_{0\le j} x^{n-j} \sum_{0\le i\le n} A_i \binom{i}{j} {a_0}^{i-j}
\end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

의 해이다. $0 \le j \le n$에 대해

$$C_{n-j} = \sum_{0 \le i \le n} A_i \binom{i}{j} {a_0}^{i-j}$$

라 하자. 그러면

$$F_1(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{0 \le i \le n} A_i {a_0}^i \\ &= \left(\sum_{0 \le i \le n-2} A_i {a_0}^i \right) + A_{n-1} {a_0}^{n-1} + A_n {a_0}^n \end{aligned}$$

이다. 그런데 $F(a_0) \ne 0$이므로 $C_n \ne 0$이다. 이 때 $\deg(a_0) = m$이고 $k = 1, 2, \cdots, n-1$에 대해

$$\begin{aligned} \deg \left(\sum_{0 \le i \le n-2} A_i {a_0}^i \right) &= \deg \left(A_{n-k-1} {a_0}^{n-k-1} \right) \\ &= \deg(A_{n-k-1}) + (n-k-1)m \\ &< \deg(A_{n-1}) + (k-1)m + (n-k-1)m \\ &= \deg(A_{n-1}) + (n-2)m \end{aligned}$$

를 만족한다. 먼저

$$\begin{aligned} F\big(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\big) &= A_n \big(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\big)^n + A_{n-1} \big(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\big)^{n-1} + A_{n-2} \big(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\big)^{n-2} + \cdots + A_0 \\ &= \big(A_n a_0 + A_{n-1} + A_n \frac{1}{\alpha_1}\big) \big(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\big)^{n-1} + A_{n-2} \big(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\big)^{n-2} + \cdots + A_0 \end{aligned}$$

이다. $k = 1, 2, \cdots, n-1$에 대해

$$\begin{aligned} \deg \left(A_{n-k-1} {a_0}^{n-k-1} \right) &= \deg(A_{n-k-1}) + (n-k-1)m \\ &< \deg(A_{n-1}) + (k-1)m + (n-k-1)m \\ &= \deg(A_{n-1}) + (n-2)m \end{aligned}$$

이다. $F\big(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\big) = 0$이므로

$$\begin{aligned} \deg \left((a_0 A_n + A_{n-1}) {a_0}^{n-1} \right) &= \deg(a_0 A_n + A_{n-1}) + (n-1)m \\ &< \deg(A_{n-1}) + (n-2)m \end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이다. 결과적으로

$$\deg(a_0A_n + A_{n-1}) + (n-1)m < \deg(A_{n-1}) + (n-2)m$$

이다. 즉

$$\begin{aligned}\deg(a_0A_n + A_{n-1}) &< \deg(A_{n-1}) - m \\ &= \deg(A_n)\end{aligned}$$

이다. 여기서 $A_{n-1} = QA_n + R$이라고 하면 $\deg(R) < \deg(A_n)$이고

$$\deg(a_0A_n + A_{n-1}) = (a_0 + Q)A_n + R < \deg(A_n)$$

이므로 $a_0 = -Q$이다. 따라서 $a_0 = -\lfloor A_{n-1}/A_n \rfloor$이다. 이제

$$\begin{aligned}\deg C_n &= \deg\left(A_{n-1}{a_0}^{n-1} + A_n{a_0}^n\right) \\ &= \deg\left((a_0A_n + A_{n-1}){a_0}^{n-1}\right) \\ &< \deg(A_n) + (n-1)m \\ &= \deg(A_n) + \deg(A_{n-1}) - \deg(A_n) + (n-2)m \\ &= \deg(A_{n-1}) + (n-2)m\end{aligned}$$

이다. 즉 $\deg(C_n) < \deg(A_{n-1}) + (n-2)m$이다. 한편

$$\begin{aligned}C_{n-1} &= \sum_{0\le i\le n} iA_i{a_0}^{i-1} \\ &= \left(\sum_{0\le i\le n-2} iA_i{a_0}^{i-1}\right) + (n-1)A_{n-1}{a_0}^{n-2} + nA_n{a_0}^{n-1}\end{aligned}$$

이다. 여기서 $k = 1, 2, \cdots, n-1$에 대해

$$\begin{aligned}\deg\left(\sum_{0\le i\le n-2} iA_i{a_0}^{i-1}\right) &= \deg\left(A_{n-k-1}{a_0}^{n-k-2}\right) \\ &= \deg A_{n-k-1} + (n-k-2)m \\ &< \deg(A_{n-1}) + (k-1)m + (n-k-2)m \\ &= \deg(A_{n-1}) + (n-3)m\end{aligned}$$

이다. $a = \mathrm{lc}(A_n)$, $b = \mathrm{lc}(A_{n-1})$, $c = \mathrm{lc}(a_0) = -\frac{b}{a}$이라고 하자. 선두계수의 성질을 이용하여 $(n-1)A_{n-1}{a_0}^{n-2} + nA_n{a_0}^{n-1}$를 계산하면

$$\begin{aligned}(n-1)bc^{n-2} + nac^{n-1} &= \big((n-1)b + nac\big)c^{n-2} \\ &= \big(n(b+ac) - b\big)c^{n-2} \\ &= (-b)c^{n-2} \neq 0\end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이다. 따라서 $\deg(C_{n-1}) = \deg\left(A_{n-1}{a_0}^{n-2}\right) = \deg(A_{n-1}) + (n-2)m$이다. 위 결과를 바탕으로 $\deg(C_n) < \deg(C_{n-1})$가 성립한다. 또한 $1 \le k \le n-1$에 대해

$$\begin{aligned}\deg(C_{n-k-1}) &\le \deg\left(A_{n-1}{a_0}^{n-k-2}\right)\\ &< \deg\left(A_{n-1}{a_0}^{n-2}\right)\\ &= \deg(C_{n-1})\end{aligned}$$

가 성립하므로 방정식 $F_1(x)$는 정리 1의 조건을 만족하게 된다.

따라서 Mkaouar[3]의 정리로부터 $i \ge 1$에 대해 a_i의 부분몫을 구체적으로 계산할 수 있다.

예제 9. 다음 방정식

$$F(x) = x^4 + T^2x^3 + Tx^2 + T^2x + 2T^4 \in \mathbb{F}_3[T][x]$$

에 대해 멱급수 α의 매김값이 m이라고 하자. 예제 5를 통해 $m \in M_F = \{2\}$임을 보였다. 여기서 $m = 2$일 때 $A_4 = 1$, $A_3 = T^2$, $A_2 = T$, $A_1 = T^2$, $A_0 = 2T^4$에 대해 위 조건 $\deg(A_4) = \deg(1) < \deg(A_3) = \deg(T^2)$이고 $1 \le k \le 3$에 대해 $\deg(A_{3-k}) < \deg(A_3) + 2(k-1)$을 만족한다. 그러면 $v(\alpha) = 2$이고 $\mathrm{lc}(\alpha) = -\mathrm{lc}(A_{n-1})/\mathrm{lc}(A_n) = 2$인 해 α가 존재한다. 먼저

$$\begin{aligned}a_0 = \lfloor\alpha\rfloor &= -\left\lfloor\frac{T^2}{1}\right\rfloor\\ &= 2T^2\end{aligned}$$

이다. $F_1(x)$는

$$\begin{aligned}F_1(x) &= F\left(T^2 + \frac{1}{x}\right)x^4\\ &= (T^5 + T^4)x^4 + (2T^6 + T^3 + T^2)x^3 + Tx^2 + T^2x + 2T^4\end{aligned}$$

이고 이 때 $F_1(x)$에 대해 $\deg(T^5 + T^4) < \deg(2T^6 + T^3 + T^2)$가 성립해서 정리 1의 조건을 만족하므로 아래와 같이 반복해서 부분몫들을 구체적으로 계산할 수 있다. 방정식 $F_1(x)$에서

$$\begin{aligned}a_1 &= -\left\lfloor\frac{2T^6 + T^3 + T^2}{T^5 + T^4}\right\rfloor\\ &= T + 2\end{aligned}$$

이다. $F_2(x)$는

$$\begin{aligned}F_2(x) &= F_1\left(T + 2 + \frac{1}{x}\right)x^4\\ &= (2T^7 + T^6 + T^5 + T^4 + T + 1)x^4 + (T^8 + T^7 + 2T^5\\ &\quad + 2T^4 + 2T^2 + T)x^3 + Tx^2 + (2T^4 + T^3 + T^2)x + T^5 + T^4\end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_2 &= -\left\lfloor \frac{T^8+T^7+2T^5+2T^4+2T^2+T}{2T^7+T^6+T^5+T^4+T+1} \right\rfloor \\ &= T+2 \end{aligned}$$

이다. $F_3(x)$는

$$\begin{aligned} F_3(x) &= F_2\left(T+2+\frac{1}{x}\right)x^4 \\ &= (2T^8+T^7+T^5+1)x^4+(2T^{10}+T^9 \\ &+T^8+\cdots+2T^3+2)x^3+Tx^2+(2T^5+T^4+T+2)x \\ &+(2T^7+T^6+T^5+T^4+T+1) \end{aligned}$$

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_3 &= -\left\lfloor \frac{2T^{10}+T^9+T^8+\cdots+2T^3+2}{2T^8+T^7+T^5+1} \right\rfloor \\ &= 2T^2+1 \end{aligned}$$

이다. $F_4(x)$는

$$\begin{aligned} F_4(x) &= F_3\left(2T^2+1+\frac{1}{x}\right)x^4 \\ &= (T^{13}+T^{12}+T^{10}+\cdots+T^4+2T^3)x^4+(T^{14}+2T^{13} \\ &+2T^{11}+\cdots+T^4+T^3)x^3+Tx^2+(2T^7+2T^6+2T^4 \\ &+2T^3+2T^2)x+(2T^8+T^7+T^5+1) \end{aligned}$$

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_4 &= -\left\lfloor \frac{T^{14}+2T^{13}+2T^{11}+\cdots+T^4+T^3}{T^{13}+T^{12}+T^{10}+\cdots+T^4+2T^3} \right\rfloor \\ &= 2T+2 \end{aligned}$$

이다. $F_5(x)$는

$$\begin{aligned} F_5(x) &= F_4\left(2T+2+\frac{1}{x}\right)x^4 \\ &= (T^{15}+2T^{14}+2T^{13}+\cdots+T+1)x^4+(2T^{16}+2T^{15} \\ &+T^{13}+\cdots+T^4+T)x^3+Tx^2+(2T^{12}+T^{11}+T^{10} \\ &+\cdots+T^4+2T^3)x+(T^{13}+T^{12}+T^{10}+\cdots+T^4+2T^3) \end{aligned}$$

이고 이 때

$$\begin{aligned} a_5 &= -\left\lfloor \frac{2T^{16}+2T^{15}+T^{13}+\cdots+T^4+T}{T^{15}+2T^{14}+2T^{13}+\cdots+T+1} \right\rfloor \\ &= T+2 \end{aligned}$$

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이다. 결과적으로 $F(x)$ 의 해 α 의 연분수 전개를

$$\alpha = \left[2T^2, T+2, T+2, 2T^2+1, 2T+2, T+2, \cdots\right]$$

위와 같이 구체적으로 계산할 수 있다.

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

참고문헌

[1] Kh. Ayadi, A. Azaza, and S. Beldi. Diophantine approximation and continued fraction expansion for quartic power series over $\mathbb{F}_3$. preprint.

[2] Kh. Ayadi and I. Elouaer. On the continued fraction expansion of some quartic power series in characteristic $p = 7$. preprint.

[3] M. Mkaouar. Sur les fractions continues des series formelles quadratiques sur $\mathbb{F}_q(x)$. Acta Arithmetica, 97(3):241−251, 2001.