



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

2019년 2월
교육학석사(수학교육전공)학위논문

국내 논문 분석을 통한 수학적 모델링의 이해

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

민 아 람



국내 논문 분석을 통한 수학적 모델링의 이해

Understanding of Mathematical Modelling
Through Analysis of Domestic Articles

2019년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

민 아 람



국내 논문 분석을 통한 수학적 모델링의 이해

지도교수 황혜정

이 논문을 교육학석사(수학교육전공)학위 청구논문으로 제출함.

2018년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

민아람

민아람의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 이 관 규 (인)

심사위원 조선대학교 교수 오 동 렬 (인)

심사위원 조선대학교 교수 황 혜 정 (인)

2018년 12월

조선대학교 교육대학원

목 차

목차	i
표목차	ii
ABSTRACT	iii
I. 서론	1
II. 수학적 모델링의 의미와 과정	3
1. 수학적 모델링의 의미	3
2. 수학적 모델링의 과정	6
III. 수학적 모델의 의미와 유형	10
1. 수학적 모델의 의미	10
2. 수학적 모델의 유형	12
IV. 수학적 모델링 문제	14
V. 결론	23
참고문헌	27
부록목차	31

표 목 차

<표 II-1> 24편의 논문에서 수학적 모델링 의미가 인용된 참고문헌들의 빈도 상황 .. 4	4
<표 II-2> 24편의 논문에서 수학적 모델링 과정이 인용된 참고문헌들의 빈도 상황 .. 7	7
<표 II-3> 24편의 논문의 저자별 수학적 모델링 과정	9
<표 III-1> 24편의 논문에서 수학적 모델의 의미가 인용된 참고문헌들의 빈도 상황	11
<표 III-2> 24편의 논문에서 활용된 수학적 모델의 유형	12
<표 IV-1> 24편의 논문 중에서 제시된 수학적 모델링 문제의 특징	14
<표 IV-2> 최근 국외 문헌에서 제시된 수학적 모델링 문제의 특징	16
<표 IV-3> 24편의 논문 중에서 수학적 모델링 문제에 관한 자료 및 문제의 특징	17
<표 IV-4> 수학적 모델링 문제의 구체적 예	20

ABSTRACT

Understanding of Mathematical Modelling Through Analysis of Domestic Articles

Min Aram

Advisor : Prof. HyeJeang Hwang Ph.D.

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

There are growing Interest in mathematical modelling nowadays as it becomes more and more useful in various fields of disciplines. In Korea, many researchers have also conducted research on mathematical modelling, and among them, the precedent research conducted in 2007 has explored a total of 11 national journal articles and 22 master dissertations from 1997 to 2006. The academic journals used at the time were ‘The Mathematical Education’ of The Korean Society of Mathematical Education, ‘Journal of Educational Research in Mathematics’ and ‘School Mathematics’ of Korea Society of Education Studies in Mathematics.

Ten years after the previous study, we will look at articles on mathematical modelling in the past and look at the overall aspects of mathematical modelling. For this reason, we selected a total of 24 articles on the subject of mathematical modelling published from 2007 to 2017 in Korea. The journals we selected include ‘The Mathematical Education’,

‘J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education’ of The Korean Society of Mathematical Education, ‘Journal of Educational Research in Mathematics’, ‘School Mathematics’ of Korea Society of Education Studies in Mathematics and ‘Journal of the Korean school mathematics society’ of The Korean School Mathematics Society.

In this study, by reviewing the 24 articles published in the above mentioned journals, we will explore the meaning of mathematical modelling, the process of mathematical modelling, and then investigate the meaning and type of mathematical model, and the mathematical modelling problem. In this regard, we compared and analyzed 24 articles, and as a result, we conducted the study in two main areas: first, the meaning and process of mathematical modelling and the meaning of mathematical model, second, the mathematical modelling problem.

First, we will use two kinds of data for the meaning and process of mathematical modelling and the meaning of mathematical model. one is what the authors of 24 articles quoted directly and indirectly concerning the contents of various reference data. The other is what the author of 24 articles redefined based on the references. Accordingly, in the former, we will summarize the frequency of the references, and then identify what is the highest and the second most frequently used, then in the latter, we will discuss the concrete contents.

Secondly, when it comes to the mathematical modelling problem, we will summarize, above all, the characteristics of mathematical modelling problem based on 24 articles. After that, we will present mathematical modelling problems which satisfy the characteristics of the mathematical modelling problem summarized above.

I. 서론1)

점점 더 다양해지고 확장하는 여러 학문 분야에서 수학적 모델링의 유용성이 커짐에 따라 학교 수학에 수학적 모델링을 포함시키는 것에 대한 관심이 나날로 증가하고 있다(Cirillo et al, 2016). 이에 관한내용으로 NGA Center&CCSSO(2010)가 발표한 CCSSM에서 공통 핵심 수학 표준을 발표하면서, 수학 실습을 위한 8가지 표준 중 하나로써 수학적 모델링을 부각하고, 우리나라 역시 2015 개정 교육과정에서 수학적 문제 해결 능력을 함양하기 위해 수학적 모델링 능력 신장을 강조하고 있다(교육부, 2015). 수학적 모델링에 대해서 Cavey&Champion(2016)은 실세계 현상을 표현하고자 수학을 활용하는 과정으로 수학적 모델링을 제시하였으며, GAIMME(2016)에 따르면 수학을 사용하여 실세계 현상을 표현 및 분석하고 예측하며 이해를 제공하는 과정을 수학적 모델링이라고 하였다. 또한, Galbraith, et. al.(2010)은 실제적 현상 및 수학 외 타 분야에서 문제를 해결하는 과정을 수학적 모델링이라고 하였다. 교육부(2015)는 수학적 모델링을 다양한 현상을 수학적 모델로 표현하고, 이를 수학적으로 해결하여 그 결과를 활용해서 주어진 실생활 문제를 설명하고 해석하는 모든 과정이라 소개하였다. 아울러 Borba, M. C., et. al.(2016)은 수학적 모델링이 수학 학습에서 비수학적 주제를 자유롭게 선택하고 이미 알고 있는 수학을 적용하거나 새로운 주제를 탐구 및 연구함으로써 학생들에게 문화적 배경을 이해할 수 있는 기회를 제공한다고 하였다.

한편, 황혜정(2007)에서 1997년부터 2006년까지 10년의 기간 동안 대한수학교육학회의 ‘수학교육학연구’, ‘학교수학’과 한국수학교육학회의 ‘수학교육’의 국내 3종의 학회지에 수록된 수학적 모델링을 주제로 한 총 11편의 논문들을 중심으로 탐색하되, 경우에 따라 24편의 석사학위 논문들을 참고하여 수학적 모델링에 관한 연구를 한 차례 진행하였다. 이 선행 연구는 수학적 모델링의 의미에 있어서 대다

1) 본 석사학위 논문은 ‘2007년 이후 국내 논문 결과에 근거한 수학적 모델링 탐색’ 논문을 토대로 수정·보완하여 작성하였다. 이 논문의 저자는 황혜정(조선대학교)와 민아람(조선대학교 대학원)이며, 이 논문은 한국수학교육학회가 주관하는 ‘수학교육 논문집’에 실렸으며, 논문의 발행일은 2018년 5월 15일이었음.

수 연구 논문들이 수학적 모델링 과정을 통하여 수학적 모델링의 의미로 설명한다는 것을 밝혔고, 연구자별 수학적 모델링 과정을 정리하였다. 이외에도 수학적 모델링과 밀접한 연관성을 띠는 수학적 문제해결을 중점적으로 다루어 그들 간의 관계를 고찰해보면서 수학적 모델링의 특징, 수학적 모델링 문제의 특징 그리고 수학적 모델을 살펴보았다. 그러나 11편의 논문 중에 대부분의 논문이 적은 양의 수학적 모델링의 문제를 개발 및 재구성하였고, 수학적 모델링 문제의 특징으로 볼 만한 자료의 양 또한 적어서인지 수학적 모델링 문제의 특징이 명확하게 드러나 있지 않아 이 점을 보완할만한 추가적인 연구의 필요성을 느꼈다. 이러한 상황 속에 10년이 흘러 수학적 모델링에 관한 연구가 보다 풍부해졌으리라 생각되어 다시 한번 수학적 모델링에 관해 전반적으로 탐색해보고, 연구 논문의 수학적 모델링 문제에 포함된 수학적 모델링 문제의 특징을 파악해보고자 하였다.

따라서 본 연구에서는 2007년부터 2017년까지의 기간 동안 국내 5종의 학회지인 대한수학교육학회의 ‘수학교육학연구’와 ‘학교수학’, 한국수학교육학회의 ‘수학교육’과 ‘수학교육 논문집’ 그리고 한국학교수학회의 ‘한국학교수학회논문집’에 수록된 수학적 모델링을 주제로 한 총 24편의 논문들을 대상으로 선정하였다. 또한 내용적 요소에 있어서는 수학적 모델링의 의미, 수학적 모델링 과정, 수학적 모델의 의미와 유형 그리고 수학적 모델링의 문제의 특징에 대해 분석하여 수학적 모델링을 정리해보면서, 동시에 황혜정(2007)에 기술된 2007년 전의 연구결과와 앞으로 다룰 2007년 이후의 연구 결과를 비교해보고자 하였다.

II. 수학적 모델링의 의미와 과정

이 장에서는 본고에서 다루는 총 24편의 논문들을 대상으로 수학적 모델링의 의미와 과정에 대해 살펴보고자 한다. 24편의 논문 중 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델링의 과정을 밝히지 않는 일부의 논문들을 제외하면, 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 하나는 여러 참고문헌들에 서술된 수학적 모델링의 의미와 과정을 직·간접적으로 인용한 경우이고, 나머지 하나는 여러 참고문헌들을 바탕으로 수학적 모델링의 의미와 과정을 재정립한 경우이다. 이에 따라 여러 참고문헌들을 인용하여 수학적 모델링의 의미와 과정을 제시한 경우에는 어떠한 참고문헌을 많이 인용하고 있는지를 파악해보고, 수학적 모델링의 의미와 과정을 재정립한 경우는 보다 구체적인 내용을 다루고자 한다.

1. 수학적 모델링의 의미

우선, 본고에서 다루는 24편의 논문에서 수학적 모델링의 의미를 여러 참고문헌들의 내용을 직·간접적으로 인용해서 소개한 경우에 해당하는 참고문헌의 빈도를 정리하면 <표 II-1>과 같다.

그 결과, NCTM(1991)의 것이 가장 많이 인용되었으며 다음으로 많이 인용된 것은 신은주와 권오남(2001)의 것이다. NCTM(1991)은 수학적 모델을 고안하는 과정이 수학적 모델링이며, 이 때 수학적 모델은 현상의 특성을 유사한 수학적 구조로 나타낸 것이라 정의하였다. 신은주와 권오남(2001)은 실제적 상황을 바탕으로 직관 모델을 만들고 이를 수학적 모델로 유도한 후 수학적으로 해결해서 얻은 해를 다시 원래의 실제적 상황에서 확인하는 것을 수학적 모델링의 의미로 밝히고 있으며, 이 때 수학적 모델링을 프로이덴탈(Freudenthal)의 수학과와 동일하게 바라보는 것이 특징이다.

위의 두 참고문헌을 포함하여 인용된 다른 참고문헌들을 보면, 대다수의 참고문헌들이 2007년 전에 작성된 것으로 확인되었는데, 지금까지 수학적 모델링을 주제로

한 연구가 지속됨에도 불구하고 2000년 전후의 문헌을 참고하여 수학적 모델링의 의미를 서술한 연유를 서지희, 윤종국, 이광호(2013)의 논문을 통해 짐작해 볼 수 있다. 서지희, 윤종국, 이광호(2013)에서는 수학적 모델링의 의미에 대해 일치된 견해가 없다는 판단하에 최근 연구된 수학적 모델링의 의미를 언급하지 않고 국내에서 가장 많이 통용되는 정의를 소개하였다. 이처럼 다른 연구자들 또한 이러한 까닭에 오래되었지만 유명한 참고문헌을 인용하였으리라 여겨진다.

<표 II-1> 24편의 논문에서 수학적 모델링 의미가 인용된 참고문헌들의 빈도 상황

빈도	24편의 연구 논문에서 인용된 참고문헌				
7회	NCTM (1991)				
4회	신은주·권오남 (2001)				
3회	Galbraith&Clatworthy (1990)	Swetz (1991)	Zbiek (1998)	Blum (2002)	
2회	Burghes (1980)	Edwards&Hamson (1989)	Niss (1989)	Swetz (1989)	Niss (1992)
	김수미 (1993)	Lesh&Lehrer (2003)	김선희·김기연 (2004)	NGA Center&CCSSO (2010)	
1회	NCTM (1989)	Open University (1990)	Blum (1993)	권기석·박배훈 (1997)	Dossey et al (2002)
	Gravemeijer (2002)	Fujii (2003)	Lesh&Doerr (2003)	Schichl (2004)	Varaki&Earl (2006)
	Doorman&Gravemeijer (2009)		Bliss&Libertini (2016)		

한편, 여러 참고문헌을 기반으로 수학적 모델링의 의미를 재정립한 경우에 해당하는 논문들을 살펴보면 다음과 같다. 강옥기(2010)는 실생활 상황을 바탕으로 구성된 실제적 문제를 수학적으로 해결하여 유사한 상황에 적용하는 과정을 수학적 모델링이라 하였다. 김창수(2013)는 수학적 구조가 포함된 실세계 현상으로부터 출발하여 실세계 상황을 수학적으로 나타내어 해결하고 실세계 상황에 관해 이해하는 것을 수학적 모델링이라 제시하였다. 김민경, 홍지연, 김혜원(2010)에서는 수학적 모델을 제시한 후에 수학적 모델링의 의미를 정의하였는데, 수학적 모델은 실세계 상황을 표현하기 위해 하나 이상의 수학적 실재를 선택하여 선택한 것들 간의 수학적 구조 및 관계의 조합이며 수학적 모델링은 수학적 모델을 수학에 적용하는 활동이라 보았다. 또, 박슬희, 신재홍, 이수진(2014)은 복잡한 실세계 상황을 이해하고 설명하며 예측하려는 목적 하에, 실세계 상황으로부터 수학적 모델을 고안하여 해결한 후 다시 현상에 적용하는 여러 단계의 과정이라 설명하였다. 서지희, 윤종국, 이광호(2013)는 먼저 수학적 모델링 과정을 정의하여 이를 수학적 모델링의 의미라 제시하고 있는데, 수학적 모델링 과정을 실세계 맥락을 탐구하여 이를 기반으로 상황 모델을 개발하고 수학적 모델을 만든 후 일반화 가능한 모델로 유도하는 것이라 말하였다. 손홍찬과 류희찬(2007)은 실세계 문제 상황으로부터 수학적 모델을 도출하여 문제에 관한 답을 얻는 과정이 수학적 모델링의 의미이고, 안종수(2012)는 제시된 상황을 수학적 모델로 구성하는 일련의 과정이며 바꿔 말하면, 실세계 상황을 수학적인 구조로 대응한 것을 형식화하는 과정을 수학적 모델링이라 보았다. 또한, 이지영과 김민경(2016)에서 수학적 모델링은 문제 해결 유형의 하나이며 실세계 문제를 수학적으로 해결하는 것을 수학적 모델링이라 하였고, 정승요와 박만구(2016)는 실세계 문제 혹은 상황을 수학적 모델을 활용해 문제를 해결한 후에 실세계 상황으로 환원하여 재해석하는 과정이라 보고 있다. 홍지연과 김민경(2011)은 비구조화된 실세계 현상을 실세계 관계에 관해 수학적으로 재해석하여 수학적 표상으로 나타내 문제를 해결하는 하나의 방법으로 수학적 모델링을 설명하였다.

이상으로, 수학적 모델링의 의미를 정리하면 실세계를 이해하고자 실세계 현상을 수학적으로 표현하고 해결하는 것이라고 볼 수 있다. 또한 황혜정(2007)의 수학적 모델링의 의미에 관한 연구 결과를 비교해볼 때, 2007년 전의 대다수 연구 논문들은 수학적 모델링에 관한 정의를 은연중에 나타내며 수학적 모델링의 과정을 정립하여 수학적 모델링의 의미를 설명하는 것으로 보이지만, 본고에서 다루는 2007년 이후의 다수의 논문에서는 수학적 모델링의 의미 보다 구체적으로 표현하고 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델링의 과정을 구분하여 제시하고 있다.

2. 수학적 모델링의 과정

본고에서 다루는 24편의 논문에서 여러 참고문헌들의 내용을 직·간접적으로 인용하여 수학적 모델링의 과정을 소개한 경우를 살펴본다. 인용된 참고문헌의 빈도를 정리하면 <표 II-2>와 같다.

그 결과, NCTM(1991)의 것이 가장 많이 인용되었으며 다음으로 많이 인용된 것은 Lesh & Doerr(2003)의 것이다. NCTM(1991)은 실세계 현상을 관찰하고 해석하여 수학적 모델로 변형하고, 수학적 모델을 분석해 수학적 결과를 얻어서, 이를 해석하여 결론을 예측한 후, 다시 실세계 현상에서 결론을 적용하는 폐순환 과정을 수학적 모델링 과정이라 서술하였다. 다음으로 Lesh & Doerr(2003)는 현실 세계 상황을 적합한 모델로 설정하고, 주어진 현실 세계 상황과 연관된 결과를 도출할 수 있도록 모델을 조작하며, 결과를 현실 세계로 환원하여 해석해서 현실 세계를 예측한 후, 모델에 대한 실행과 조작의 유용성을 검증하는 것으로 수학적 모델링 과정을 구성하였다.

이전에 다루었던 수학적 모델링의 의미와 같이, 수학적 모델링 과정에 관해서도 대다수의 논문이 오래된 참고문헌을 활용하고 있었다. 이는 수학적 모델링의 특징인 실세계 상황에서 출발한 후 다시 실세계 상황으로 되돌아가는 것과 수학을 사용한다는 것이 수학적 모델링 과정으로 구성되어야하므로 오래된 참고문헌을 이용해 무방한 까닭이라 판단된다.

<표 II-2> 24편의 논문에서 수학적 모델링 과정이 인용된 참고문헌들의 빈도 상황

빈도	24편의 연구 논문에서 인용된 참고문헌				
6회	NCTM (1991)				
5회	Lesh&Doerr (2003)				
3회	Maki&Thompson (1973)				
2회	Open University (1990)	김수미 (1993)	Dossey et al (2002)	Lesh&Lehrer (2003)	
	Blum&Ferri (2009)	강옥기 (2010)			
1회	Burghes (1980)	NCTM (1989)	Galbraith&Clatworthy (1990)	Swetz (1991)	신현성·김경희 (1998)
	NCTM (2000)	Blum (2002)	Giordano et al (2003)	Lesh et al (2003)	신은주·이종희 (2004)
	김선희 (2005)	손홍찬·류희찬 (2005)	신은주 (2005)	황혜정 (2007)	Gravemeijer et al (2009)
	NGA Center&CCSSO (2010)		김민경 (2010)	Blum (2011)	김인경 (2012)
	Bliss&Libertini (2016)				

한편, 여러 참고문헌을 기반으로 수학적 모델링의 과정을 재정립한 경우의 논문들을 <표 II-3>과 같이 정리해 볼 수 있다. 우선, 강옥기(2010)는 수학적 모델링의 과정을 여섯 단계로 구성하였는데 이는 다음과 같다. 첫째, 실세계 문제 상황을 탐구하여 실제적 문제를 구성하는 단계, 둘째, 가정을 설정해서 실제적 문제를 수학적 모델로 변형하는 단계, 셋째, 수학적 모델을 해결하여 해를 얻는 단계, 넷째,

실제적 문제에서 구한 해가 의미 있는지를 판단해보고 의미가 부족한 경우에는 수학적 모델을 정교화하거나 수학적 모델의 가정을 수정하는 단계, 다섯째, 유의미한 해를 실제적 문제로 환원하여 해석하는 단계, 여섯째, 수학적 모델을 유사한 실세계 상황에 적용하는 단계이다. 신경희와 김연지(2011) 그리고 박슬희, 신재홍, 이수진(2014)에 따르면, 강옥기(2010)의 수학적 모델링 과정을 기반으로 수학적 모델링 과정을 정의하였으며, 이들과 강옥기(2010)의 것과의 차이점은 <표 II-3>에 서와 같이 강옥기(2010)의 ‘실제적 문제를 구성하는 단계’를 세분화하고 강옥기(2010)의 ‘해답을 해설하는 단계’와 ‘유사한 실세계에 적용하는 단계’를 통합한 점이다.²⁾

수학적 모델링에 대해 다른 연구자들과 공동으로 연구한 김민경의 5편의 논문들 중에 1편은 수학적 모델링의 과정을 밝히지 않았지만³⁾, 이를 제외한 4편의 논문에는 수학적 모델링의 과정을 설명하였다. 4편의 논문에 나타난 수학적 모델링 과정을 간략히 나타내면, 실세계의 현상에 직면하는 실생활(실세계) 문제 단계, 문제 상황을 설명할 수 있는 적합한 모델을 찾는 모델 단계, 수학적으로 해결한 후 수학적 결론을 도출하는 수학적 결론 단계, 개발한 모델을 유사 상황에 적용 및 응용하는 모델 적용 단계이다.

또한 서지희, 윤종국, 이광호(2013)에서는 수학적 모델링의 과정을 실세계 상황을 탐구하는 과정, 실세계 상황으로부터 상황모델을 개발하는 과정, 상황모델을 수학적 모델로 변형하는 과정, 도출한 수학적 결론을 주어진 실세계 상황에서 해석하는 과정으로 제시하였다. 안중수(2012)는 수학을 사용하여 수학적 모델을 구성한 다음 수학적으로 해결하고 얻은 수학적 결과를 다시 실세계에서 해석하는 과정을 수학적 모델링 과정으로 보고 있다. 유홍규와 윤종국(2017)은 문제 상황을 이해하고 현실 모델을 설정하여 수학적 모델로 변형하며 수학적 결론을 도출해서 결론을 재해석하는 것으로 수학적 모델링 과정을 설명하였다.

2) 또한 신경희와 김연지(2011)의 경우, 수학적으로 문제를 해결하는 과정을 모델의 정교화 단계에 포함한 점이 강옥기(2010)과 다르다.
 3) 홍지연과 김민경(2011)은 수학적 모델링 과정을 토대로 수학적 모델링을 활용한 수업 적용 절차를 제시하였는데, 이는 나머지 4편의 논문에서 수록된 수업 적용 절차와 같은 것이어서 5편 모두 같은 맥락의 수학적 모델링 과정으로 여겨진다.

이상으로, 수학적 모델링 과정을 정리해보면, 실세계 상황을 탐구하여 가설을 설정하고, 수학적 구조를 갖춘 수학적 모델로 변형한 후, 문제를 해결해서 수학적 결과를 얻어, 다시 실세계 상황으로 되돌아가 결과를 적용하는 것으로 볼 수 있다. 그리고 <표 II-3>4)을 보면, 수학적 모델링의 단계가 크게 4단계에서 6단계까지 구성된 것을 알 수 있는데 이는 조금 전에 정리한 수학적 모델링 과정을 더 세분화한 것으로 판단된다. 또한 황혜정(2007)의 수학적 모델링 과정에 관한 연구 결과와 비교해보면, 2007년 전의 논문들에 수록된 수학적 모델링 과정과 2007년 이후의 논문의 수학적 모델링 과정에 큰 차이점을 발견할 수 없었다.

<표 II-3> 24편의 논문의 저자별 수학적 모델링 과정

손홍찬 외, 2007	김민경 외, 2009(a)	김민경 외, 2009(b)	강옥기, 2010	김민경 외, 2010	이상구 외, 2010	홍지연 외, 2011	신현성 외, 2011	신경희 외, 2011	강향임, 2012	안종수, 2012	박진형 외, 2013	김창수, 2013	서희외, 2013	박진형 외, 2014	박슬희 외, 2014	이지영 외, 2016	정승요 외, 2016	김혜영 외, 2016	신현성 외, 2016	박진형, 2017	최지선, 2017	최경아, 2017	유홍규 외, 2017	
문제 확인	실생활 문제	실세계 현상	실제적 문제 구성	실세계 문제	가설 설정			맥락 문제		실제 문제		실세계 탐구	실세계 탐구	실제 상황 탐구	실생활 문제									문제 상황 이해
가설 설정	수학적 모델	수학적 모델	수학적 모델	수학적 모델	수학적 모델			수학적 모델		수학적 모델		수학적 모델	수학적 모델	수학적 모델	수학적 모델									현실 모델 설정
모델 해석	수학적 결론	수학적 결론	수학적 문제 해결	수학적 문제 해결	수학적 문제 해결			모델 정교화		수학적 문제 해결				수학적 문제 해결	수학적 결론									수학적 결론 도출
모델 검증			모델 정교화	모델 정교화	실세계 적용					결과 해석		모델 적용	모델 적용	모델 정교화										
모델 실행 판단	모델 적용	결론 및 예측	해답 해설 유사 실세계 적용	모델 적용	모델 확인			모델 적용		실제 문제 비교				실제 상황 적용	모델 적용									결론 재해석
모델 수정					설명 및 예측																			

4) 표의 형식에 해당하는 24편의 논문은 논문 발행 순서로 제시되었음.

Ⅲ. 수학적 모델의 의미와 유형

이 장에서는 본고에서 다루는 총 24편의 논문들을 대상으로 수학적 모델의 의미와 유형에 관해 살펴보려고 한다.

1. 수학적 모델의 의미

우선, 수학적 모델의 의미를 살펴보기에 앞서, 24편의 논문 중 수학적 모델의 의미를 밝히지 않는 일부의 논문들을 제외하면, 크게 두 가지로 나뉠 수 있다. 하나는 수학적 모델의 의미를 여러 참고문헌들에 기술된 내용을 직·간접적으로 인용해서 나타낸 경우이고, 나머지 하나는 여러 참고문헌들을 바탕으로 수학적 모델의 의미를 재정립한 경우이다. 이에 따라 여러 참고문헌들을 인용하여 수학적 모델의 의미를 제시한 경우는 어떠한 참고문헌을 많이 인용하고 있는지를 파악해보고, 수학적 모델의 의미를 재정립한 경우에는 보다 구체적으로 다루고자 한다.

본고에서 다루는 24편의 논문에서 여러 참고문헌들의 내용을 직·간접적으로 인용하여 수학적 모델을 소개한 경우를 살펴보아 인용된 참고문헌의 빈도를 정리하면 <표 III-1>과 같다.

그 결과, 가장 많이 인용된 참고문헌은 Niss(1989)이고, 다음으로 많이 인용된 문헌은 Edward & Hamson(1989), NCTM(1991) 그리고 Blum(2002)의 것이다. 우선, Niss(1989)는 고려 사항에 속하는 선택된 어떤 대상과 그들 사이의 관계 및 구조가 실세계를 나타내는 수학적 대상과 이들 간의 관계 및 구조로 변환되는 것을 수학적 모델로 설명하고, Edward & Hamson(1989)은 특정한 실세계 측면을 수학적 개념을 활용하여 단순화한 것을 수학적 모델이라 말한다. 또, NCTM(1991)은 현상의 특성을 유사한 수학적 구조로 표현한 것이 수학적 모델이며, Blum(2002)에서는 실세계 상황에 포함된 대상, 자료, 관계와 조건을 수학적으로 변형한 것을 수학적 모델이라 정의하고 있다.

이처럼, 앞서 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델링 과정에서 살펴본 바와 같이, 수학적 모델의 의미도 오래된 참고문헌을 이용하고 있다. 이러한 것은 수학적 모델링의 의미를 제시하기 전에 수학적 모델을 설명하는 경우가 많기 때문에, 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델의 의미를 소개하는데 있어서 비슷한 시기의 참고문헌들을 활용하게 된 연유라 짐작된다.

<표 III-1> 24편의 논문에서 수학적 모델의 의미가 인용된 참고문헌들의 빈도 상황

빈도	24편의 연구 논문에서 인용된 참고문헌					
3회	Niss (1989)					
2회	Edwards&Hamson (1989)		NCTM (1991)	Blum (2002)		
1회	Nelson (1977)	Burghes (1980)	Swetz (1989)	Blum&Niss (1991)	정은실 (1991)	홍정희 (1995)
	NCTM (2000)	Dossey et al (2002)	Dossey&English (2003)		장혜원 (2003)	Lesh&Lehrer (2003)
	Richard&Guershon (2003)		Schichl (2004)	김선희 (2005)	English (2006)	손홍찬·류희찬 (2007)
	Niss					

한편, 여러 참고문헌을 기반으로 수학적 모델의 의미를 재정립한 논문들을 다음과 같이 정리해 볼 수 있다. 강옥기(2010)에서는 실세계 상황을 식, 도형, 그래프 등의 수학적인 방법을 사용하여 표현하는 추상적 모델을 수학적 모델이라 하였다. 김민경, 홍지연, 김은경(2009)와 김민경, 홍지연, 김혜원(2010)에 따르면, 실세계 상황을 표현하고자 선택한 하나 이상의 수학적 존재와 그것들 사이의 관계의 조합 이면서, 상황에 포함된 특성과 유사한 수학적 구조를 수학적 모델이라 설명하였다.

또한, 손홍찬과 류희찬(2007)은 실세계 현상을 연구하려는 목적하에 수학적으로 고안된 것이 수학적 모델이며, 안중수(2012)는 “현실의 문제 상황 S에서, 수학적 대상, 관계, 구조들의 모임 M으로의 대응 f로 이루어진 순서쌍 (S, M, f)로 정의한다. 즉, 고려하고 있는 분야에 속하는 어떤 대상, 그 대상 사이의 관계, 구조가 선택되고, 그것이 수학적 대상, 관계, 구조로 바뀌었을 때 바뀐 대상”으로 수학적 모델을 정의하였다(p. 749).

이상으로, 수학적 모델을 정리하면 실세계 상황을 수학적인 개념 및 방법으로 표현한 것이라 볼 수 있다. 앞에서 다루었던 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델링의 과정에 비해 수학적 모델을 설명하는 부분이 보다 적은 것에 관해 24편의 논문에서 그 이유가 드러나 있지는 않다. 그렇지만 아마도 이미 많은 부분에서 수학적 모델이 사용되고 알려져 있으며, 24편의 논문이 수학적 모델이 아닌 수학적 모델링을 주제로 한 논문이므로 24편의 논문 저자에게 수학적 모델의 의미가 보다 주요한 요소가 아닌 것으로 판단되었으리라 여겨진다.

2. 수학적 모델의 유형

다음으로, 수학적 모델을 다루고 있는 논문 중에 수학적 모델의 유형이 확인 가능한 논문은 15편이며, 수학적 모델의 유형에 관해 분류하면 <표 III-2>⁵⁾와 같이, 식 그림, 그래프, 표, 수직선이라 할 수 있다.⁶⁾

<표 III-2> 24편의 논문에서 활용된 수학적 모델의 유형

논문 \ 수학적 모델의 유형	식	그림	그래프	표	수직선	기타
손홍찬과 류희찬 (2007)	○	○	○	○		
김민경, 홍지연, 김은경 (2009)						

5) 표의 종측에 해당하는 24편의 논문은 논문 발행 순서로 제시되었음.

6) 24편의 논문에 수록된 연구 결과로써, 수학적 모델의 유형을 언급한 경우는 그대로 분류하였고, 언급하지 않은 경우는 주어진 수학적 모델링 문제에 따른 학생의 풀이 과정을 바탕으로 본고의 필자가 수학적 모델의 유형을 임의대로 분류하였다.

김민경, 홍지연, 강선미 (2009)					
강옥기 (2010)	○		○		
김민경, 홍지연, 김혜원 (2010)	○	○			
이상구, 고래영, 이재화 (2010)	○				
홍지연과 김민경 (2011)	○	○			
신현성과 이명화 (2011)	○	○			
신경희와 김연지 (2011)	○		○	○	○
강향임 (2012)	○		○		
안종수 (2012)					
박진형과 이경화 (2013)	○	○			
김창수 (2013)					
서지희, 윤종국, 이광호 (2013)	○		○		
박진형과 이경화 (2014)		○			
박슬희, 신재홍, 이수진 (2014)					
이지영과 김민경 (2016)	○	○			
정승요와 박만구 (2016)					
김혜영과 김래영 (2016)	○	○			
신현성과 최희선 (2016)					
박진형 (2017)	○		○		
최지선 (2017)					
최경아 (2017)					
유홍규와 윤종국 (2017)		○			

위의 <표 III-2>에서 알 수 있는 바와 같이, 식은 13편의 논문에서 사용된 유형으로, 수학적 모델의 유형 중 가장 많이 활용되었다. 이러한 까닭은 일반적으로 주어진 문제 상황을 수학적으로 표현할 때, 식을 다루는 것이 익숙하고 문제 해결에 이점이 있으므로 식이 많이 이용되었으리라 짐작된다. 또한 9편의 논문에서 그림을 활용하여 문제를 해결하였으나, 다수의 논문이 식과 함께 사용되었고 일부의 논문만이 주어진 문제 상황의 특성에 따라 단독으로 활용되었다고 보여진다. 이외에 다른 수학적 모델의 유형인 그래프, 표, 수직선은 식과 함께 사용되었음을 확인할 수 있다.

IV. 수학적 모델링 문제

이 장에서는 본고에서 다루는 24편의 논문들을 바탕으로 수학적 모델링의 문제의 특징을 살펴보고자 한다. 24편의 논문에서 13편의 논문이 수학적 모델링 문제의 특징으로 볼 수 있는 부분을 다루었고, 20편의 논문은 수학적 모델링의 문제 상황을 구체적으로 명시하였다. 우선, 수학적 모델링 문제의 특징이 제시된 13편의 논문들을 간략히 나타내면 <표 IV-1>과 같다. 가장 많은 특징으로는 실세계 맥락과 연계되어야 하거나(김민경 외, 2009(a)7); 홍지연, 김민경, 2010; 신경희, 김연지, 2011; 강향임, 2012; 김창수, 2013; 박진형, 이경화, 2013; 신현성, 최희선, 2016; 이지영, 김민경, 2016), 실세계 현상을 토대로 비구조화된 문제 혹은 주변 생활에서 흔하게 접할 수 있는 내용(안중수, 2012)으로 수학적 모델링 문제 상황이 구성되어야 함을 설명하였다. 다음으로는 수학적 구조를 포함하거나(김창수, 2013), 수학적 개념을 사용해 수학적 모델을 형성할 수 있어야 함을 설명하였으며(김민경 외, 2010; 신경희, 김연지, 2011; 박진형, 이경화, 2013; 박슬히 외, 2014), 박진형(2017)은 다양한 수학적 모델을 생성할 것을 제시하였다. 또한, 공통적인 수학적 모델링 문제의 특징을 찾기 어렵고 수학적 모델링 특징에 관해 보다 더 많은 자료의 필요성을 느껴서, 최근의 국외 참고문헌을 <표 IV-2>로 정리하였다.

<표 IV-1> 24편의 논문 중에서 제시된 수학적 모델링 문제의 특징

연구 논문	수학적 모델링 문제의 특징
김민경 외 (2009(a))	· 실세계 맥락과 연계
김민경 외 (2010)	· 실세계 현상을 토대로 하는 비구조화된 문제 · 수학적 개념을 포함하여 수학적 모델을 유도

7) 김민경 외(2009(a))는 김민경, 홍지연, 김은경(2009)를 뜻함.

홍지연, 김민경 (2011)	· 실세계 맥락 상황과 연계
신경희, 김연지 (2011)	· 수학적 모델을 형성 · 실제 맥락과 연계
강향임 (2012)	· 실세계 맥락과 연계
안종수 (2012)	· 실생활 주변에서 흔하게 접할 수 있는 내용
박진형, 이경화 (2013)	· 실세계 맥락을 바탕으로 학습자에게 적절한 어려움을 주어야함 · 수학적 모델을 수립할 수 있어야함
김창수 (2013)	· 실생활 현상을 포함 · 수학적 구조를 가지고 있어야함
서지희 외 (2013)	· 학습자에게 흥미로운 주제를 제공하여 수학적 사고능력을 신장
박슬희 외 (2014)	· 모델을 고안할 수 있는 비구조화된 문제 · 고유한 모델 구성이 수반되며 최종 산출물을 요구하는 문제 · 한 가지 이상의 해결 방법이 있는 문제
이지영, 김민경 (2016)	· 실생활 맥락과 연계
신현성, 최희선 (2016)	· 실세계를 바탕으로 현실적인 사실을 포함 · 열린 문제 상황과 열린 해결 방법
박진형 (2017)	· 다양한 수학적 모델을 생성 · 다양한 방식으로 문제 상황을 표현 할 수 있는 기회 제공 · 수학적 모델을 검토하고 정당화하는 활동을 포함

<표 IV-2> 최근 국외 문헌에서 제시된 수학적 모델링 문제의 특징

연구자	수학적 모델링 문제의 특징
Galbraith (2007)	<ul style="list-style-type: none"> · 현실 세계와 밀접한 내용을 수학적으로 다루어야 함 · 수학적으로 쉽게 다루는 것이 가능한 질문이 문제 상황에 포함됨 · 수학을 사용하여 공식화 가능 · 수학적으로 해결 시 해석을 동반해야 함
Blum and Ferri (2016)	<ul style="list-style-type: none"> · 실제와 같거나 현실적인 상황을 문제 상황으로 다루어야 함 · 다양한 해결 방법 사용 · 충분히 복잡하여 도전감을 가질 수 있도록 해야 함 · 문제에 관심을 가질 수 있도록 흥미로울 것 · 접근 할 수 있는 수학적 지식 관련 내용이 수반되어야 함 · 다양한 역량이 필요됨
Irillo, Bartell, & Wager (2016)	<ul style="list-style-type: none"> · 수학 밖의 외부 세계와 수학을 연결해야 함 · 흥미가 유발되며 쉽게 해결가능하지 않은 문제 · 선행 지식을 이용하여 문제를 해결할 수 있어야 함 · 모델을 표현하며 전달이 가능한 기회를 제공 · 개인적 경험과 연결하여 높은 참여도를 유도 · 다양한 모델을 형성

<표 IV-1>과 <표 IV-2>를 보면, 수학적 모델링 문제의 특징은 수학적 모델링의 의미와 과정, 수학적 모델에 비해 더 다양한 견해를 가지고 있는데, 이는 연구자가 지니는 수학적 모델링을 바라보는 관점과 수학적 모델링이 추구해야 할 역할에 관한 의견에 따라 수학적 모델링 문제의 특징을 제시한 까닭이라 판단된다. 이상으로, 본고의 24편의 논문 중 13편의 논문을 중심으로 최근 국외 문헌을 참고하여 수학적 모델링 문제의 특징을 종합해보면, 학습자에게 흥미와 도전감을 불러일으키면서 ‘현실세계와 연계’된 상황을 지니고, 수학적 선행 지식에 기반을 둔 ‘수학적

모델을 형성'하며, 여러 가지 방법의 접근을 통해 '다양하게 문제를 해결'할 수 있어야 하는 것으로 볼 수 있다.

이제, 수학적 모델링 문제의 특징을 바탕으로, 20편의 논문의 문제 상황에 함의된 수학적 모델링 문제의 특징을 살펴보고자 한다. 20편의 논문에 수록된 문제의 자료 및 특징은 <표 IV-3>과 같다.⁸⁾ 그 결과, 수학적 모델링 문제의 특징을 나타내는 <표 IV-3>의 비고란을 보면, 다수의 논문들에서 현실세계와 연계되며 수학적 모델을 형성하는 특징을 확인 할 수 있었으며, 일부의 논문에서만 다양하게 문제를 해결하는 특징을 살펴볼 수 있었다.

<표 IV-3> 24편의 논문 중에서 수학적 모델링 문제에 관한 자료 및 문제의 특징

논문	모델링 문제 제목	내용	출처	명칭	비고
손홍찬 외 (2007)	캔 문제	도형의 넓이와 부피	재구성 (총 2문제)	문제	수학적 모델 형성
	수영장 박테리아 문제	지수함수			
김민경 외 (2009(a)) 9)	(설치 미술 작품 꾸미기)	도형의 넓이	개발 (1문제)	모델링 과제	현실세계와 연계 수학적 모델 형성 다양하게 문제해결
강옥기 (2010)	(용기 안 효모의 증식)	(점화식, 함수)	재구성 (총 3문제)		현실세계와 연계 수학적 모델 형성
	(빌딩에서 물체 떨어뜨리기)	(함수)			
	(두 도시 사이의 거리 구하기)	(삼각함수)			
김민경 외 (2010)	스페이스	비, 비율, 비례식	개발 (1문제)	문항	현실세계와 연계 수학적 모델 형성

8) <표 IV-3>에서 수학적 모델링 문제 제목과 내용란에 괄호는 해당하는 논문에 제목과 내용이 명확히 명시되지 않아 필자가 임의로 쓴 부분을 뜻함.

이상구 외 (2010)	(신종 인플루엔자)	(미분)	(1문제)		현실세계와 연계 수학적 모델 형성 다양하게 문제해결
홍지연 외 (2011)	마케팅 퍼포먼스	입체도형의 겉넓이	개발	문제 과제	현실세계와 연계 수학적 모델 형성 다양하게 문제해결
신현성 외 (2011)			(총 7문제)		
신경희 외 (2011)	버스정류장의 위치 선정	(최소가 되는 이동거리 계산)	재구성 (총 2문제)	모델링 과제	수학적 모델 형성
강향임 (2012)	(스턴트맨의 촬영 동선)	함수 만들기	개발 (총 1문제)	맥락 문제	수학적 모델 형성
안중수 (2012)	효율적 작업시간	(일차방정식 활용)	개발 (총 10문제)	모델링 문제	수학적 모델 형성
	최고 높이에 도달	(이차함수의 그래프)			
	자연식품 건강만족도	(이차함수)			
	최대 이익	(이차방정식)			
	넓이의 합	(이차방정식)			
	소금물 농도	(연립방정식)			
	강수량	(함수의 그래프)			
	폭죽	(이차함수의 그래프)			
	설탕물 농도	(연립방정식)			
패키지 여행단	(이차방정식)				
박진형 외 (2013)	(당구공 경로)	일차함수	개발 (총 1문제)	모델링 과제	수학적 모델 형성
김창수 (2013)	(효율적 작업)	비와 비율	선정	문제	수학적 모델 형성
	(거리와 시간)				

서지희 외 (2013)	쓰나미 속력 구하기	함수 및 함수의 그래프	개발 (총 1문제)	과제	현실세계와 연계 수학적 모델 형성
박진형 외 (2014)	확률 과제	확률의 덧셈정리와 곱셈정리	개발 (총 4문제)	모델링 과제	수학적 모델 구축
박슬희 외 (2014)	노트북 장만하기	통계적 방식 활용	개발 (1문제)	모델링 문제	현실세계와 연계 수학적 모델 구축 다양하게 문제해결
이지영 외 (2016)	신호등 문제	약수와 배수	개발 (총 2문제)	문제	알 수 없음
	마라톤 문제	약분과 통분, 분수의 덧셈과 뺄셈			
김혜영 외 (2016)	도매상	(비와 비율)	선정 (김혜영, 2015) (7문제)		수학적 모델 구축
	진우와 승민	(일차방정식 활용)			
	31	(수형도, 경우의 수)			
	회문숫자	(정당화)			
	반평생	(방정식)			
	합이 1	(부등식)			
	공평하게 나눠먹기	(약수와 배수)			
신현성 외 (2016)	티셔츠 가게 주인의 선택	알 수 없음	개발 (총 5문제)		알 수 없음
	우편배달의 고민				
	국립공원 호수 생태계				
	농사대행 업체의 홍보				
	시내주차장 설치				
박진형 (2017)	(아이스커피 만들기)	다양한 함수	개발 (총 1문제)	모델링 과제	현실세계와 연계 수학적 모델 구축 다양하게 문제해결

유홍규 외 (2017)	우리 학교 야구팀의 수비위치 선정	보로노이 다이어그램 틀로네 삼각분할	4문제	모델링 과제	현실세계와 연계 수학적 모델 구축
	근거리 기준 초등학교 배정				
	체인점의 새로운 매장 선정				

더불어서, 수학적 모델링 문제의 특징인 현실세계와 연계된 상황을 지니고, 수학적 모델을 형성하며, 다양하게 문제를 해결할 수 있는 것으로 구성된 문제를 24편의 논문에서 살펴보면, <표 IV-4>와 같다.¹⁰⁾

<표 IV-4> 수학적 모델링 문제의 구체적 예

★★초등학교 5학년 학생들은 합동미술시간에 설치미술 작품을 꾸미기로 하였습니다. 5학년 1반-6반의 6개 학급이 같은 시간에 운동장과 그 주변 시설물들을 이용하여 작품을 만들려고 합니다. ★★초등학교 5학년 6개 학급이 가능한 같은 넓이의 공간을 사용하도록 하려면, 5학년 각 반은 어느 위치에서 얼마만큼의 넓이를 사용하여 설치미술 작품을 꾸미면 될지 축척을 결정하고 지도를 그려 나타내어 봅시다.

< 김민경 외(2010) 문제 >

9) 김민경 외(2009(a))는 김민경, 홍지연, 김은경(2009)를 뜻함.

10) 이상구 외(2010)의 수학적 모델링 문제는 구체적인 문제 상황이 주어지지 않으며, 신종인플루엔자에 관해 수학적 모델링을 하였다.

◇◇◇초등학교 6학년 3반 학생들은 미술과 체육시간에 모둠별 공연으로 마네킹 퍼포먼스를 하려고 합니다. 모둠원들 중에서 한 사람을 정하여 그 사람을 마네킹으로 꾸며 공연을 하려고 합니다. 마네킹에 여러 가지 장식을 하기에 앞서 마네킹으로 선정된 모둠원의 몸 전체에 살색 색지를 붙이려고 합니다. 얼마만큼의 살색 색지가 필요한지 필요한 살색 색지의 넓이를 알아보시다.

< 홍지연, 김민경(2011) 문제 >

[문제1] 나도 노트북 하나 장만해볼까?

인터넷 강의를 듣거나 숙제를 하기 위해서 또는 기존에 가지고 있던 노트북의 성능이 떨어져 사용하기 불편할 때 새로운 노트북 구입을 생각 하게 된다. 하지만 값비싼 노트북을 디자인이 예뻐서 또는 최고의 사양을 갖추었다고 무턱대고 구입할 순 없다. 노트북을 구매할 계획이 있다면 노트북의 사양, 사용용도, 가격, 훗날 받게 될 AS까지 꼼꼼하게 비교하고 따져보아야 후회 없는 선택을 할 수 있다. 서로 다른 노트북 중에 제품 선택을 위한 ‘소비자를 위한 구매 팁’을 만들어 보고, 어떤 컴퓨터를 선택하는 것이 최선인지 생각해보자.

제품	브랜드	가격 (만원)	무게 (kg)	크기 (인치)	배터리 (시간)	부품		
						CPU	하드	RAM
Mac**	A사	149	1.08	11	5	1.7GHz intel core i5	128G	4G
SEN**	S사	120.9	1.79	14	7	1.7GHz intel core i5	500G	4G
Xno**	L사	234.9	1.21	13.3	6	1.9GHz intel core i7	256G	4G
VAI**	O사	129.9	2.27	14	3	2.5GHz intel core i5	640G	4G
Ins**	D사	109.3	2.65	15.6	1.5	2.5GHz intel core i7 프로세서	1TB	4G

< 박슬희 외(2014) 문제 >

1. 다음은 실온에서 커피용액의 온도 변화를 10초 간격으로 측정한 자료이다. 아래에 주어진 자료를 바탕으로 커피용액의 온도를 구할 수 있는 함수를 가능한 한 많이 찾아보고 그 과정을 설명하시오.
(스프레드시트를 사용한 경우, 그 과정과 내용을 적으시오.)

시간(초)	온도(°C)
0	61.4
10	60.5
20	59.4
30	58.5
40	57.5
50	55.8
60	55.7
70	55.0
80	54.6
90	54.4
100	54.3
110	54.4
120	54.3
130	54.0
140	54.4
150	53.2

시간(초)	온도(°C)
160	53.1
170	52.6
180	52.4
190	52.2
200	52.2
210	51.6
220	51.2
230	50.9
240	50.7
250	50.6
260	50.3
270	50.1
280	49.7
290	49.5
300	49.2

2. 1번에서 구한 함수들의 그래프를 각각 그려보고, 이를 이용하여 1번에서 각 함수들을 구한 방법들을 비교하시오.
3. 2번에서 각 함수들을 구한 방법들을 비교해 보았다. 이를 바탕으로 시간에 따른 커피용액의 온도를 구할 수 있는 함수를 하나만 구하고 그 이유를 자세히 설명하시오.

< 박진형(2017) 문제 >

V. 결론

본 연구에서는 수학적 모델링을 주제로 한 2007년부터 2017년까지 국내 5종의 학회지에 게재된 총 24편의 논문을 바탕으로 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델링의 과정, 수학적 모델의 의미와 유형 그리고 수학적 모델링의 문제의 특징에 관해 중점적으로 다루어보면서, 동시에 황혜정(2007)의 수학적 모델링 의미와 과정에 관한 연구 결과를 참고하여 비교해보았다.

먼저, 수학적 모델링의 의미를 살펴본 결과, 수학적 모델링은 실세계를 이해하고자 실세계 현상을 수학적으로 표현하고 해결하는 것이라고 볼 수 있다. Cavey&Champion(2016)은 실세계 현상을 표현하고자 수학을 활용하는 과정으로 수학적 모델링이라 제시하였으며, Galbraith, et. al.(2010)은 실제적 현상 및 수학 외 타 분야에서 문제를 해결하는 과정을 수학적 모델링이라고 하였다. Schmidt B.(2011)에 따르면 수학적 모델링은 일반적으로 현실적이고 열린 문제를 수학을 사용하여 해결하는 것을 말한다. 이러한 수학적 모델링의 의미는 황혜정(2007)의 연구 결과와 비교한 바와 같이, 2007년 전의 대다수의 논문들이 수학적 모델링의 의미에 관해 형식화하지 않고, 수학적 모델링 과정을 설명하면서 수학적 모델링의 의미를 소개한 점에 비해, 2007년 이후의 다수의 논문에서는 수학적 모델링의 의미를 보다 구체화하여 표현하며 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델링의 과정을 구분하여 제시하였다는 점에서 진일보한 것으로 생각된다. 또한, 수학적 모델링의 의미를 밝히는데 사용된 대다수의 참고문헌의 작성 시점이 오래된 것은 수학적 모델링의 의미에 관해 일치된 견해가 없다는 판단 하에 국내에서 가장 많이 통용되는 유명한 참고문헌을 소개한 연유로 볼 수 있다.

더불어, 수학적 모델링 과정은 실세계 상황을 탐구하여 가설을 설정하고, 수학적 구조를 갖춘 수학적 모델로 변형한 후, 문제를 해결해서 수학적 결과를 얻어, 다시 실세계 상황으로 되돌아가 결과를 적용하는 것이라 말할 수 있다. 수학적 모델링 과정을 설명하는 최근 연구로써, Pollak, H. O.(2012)은 수학적 모델링 과정을 실제 상황의 측면을 수학적 용어 및 구조로 변환하여 수학적 모델을 얻고 이를 해결

하여 다시 실제의 상황으로 되돌아가는 과정이라 제시하였다. Bliss, et. al.(2014)에서 수학적 모델링 과정은 문제 상황을 정의하고 가정을 설정하며 변수를 결정하여 해결책을 얻은 후 결과를 분석하고 모델을 평가해서 결론을 공유하는 반복적 과정이다. 이처럼, 수학적 모델링 과정이 크게 4단계에서 6단계로 구성된 것을 알 수 있는데, 이는 앞서 정리한 수학적 모델링 과정의 네 단계를 보다 세분화한 것으로 맥락적 측면에서 동일한 내용이라 판단된다. 또, 수학적 모델링 과정을 정의하는데 인용된 오래된 문헌들과 황혜정(2007)의 수학적 모델링 과정에 관한 연구 결과 그리고 최근 연구의 수학적 모델링 과정을 비교해보면, 수학적 모델링 과정을 표현하는 단어만이 변화했음을 알 수 있다.

수학적 모델의 의미는 실세계 상황을 수학적인 개념 및 방법으로 표현한 것이라 할 수 있다. 수학적 모델의 의미 또한 이전의 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델링의 과정처럼 오래된 참고문헌을 활용한 까닭은 일반적으로 수학적 모델링의 의미를 제시하기에 앞서 수학적 모델의 의미를 포함하여 설명하는 경우가 많기에 수학적 모델링의 의미와 수학적 모델의 의미에 관한 참고문헌의 시기들이 유사한 것이라 짐작된다.

또한, 수학적 모델의 유형 중에 식이 가장 많이 활용된 것은 주어진 수학적 모델링 상황을 수학적으로 표현하고자 할 때, 식을 활용하는 것이 보다 익숙하고 문제를 해결하는데 편리하다는 점이 그 이유이지 않을까 사료된다. 대다수의 논문에서도 많은 비중으로 식을 사용하였고 식과 더불어서 나머지 유형인 그림, 그래프, 표, 수직선을 이용하였으며, 일부의 논문만이 그림을 단독으로 활용하였는데 이러한 모습은 주어진 문제 상황의 특성에 따라 그림만을 활용하였으리라 보인다.

한편, 수학적 모델링 문제의 특징은 수학적 모델링의 의미와 과정, 수학적 모델에 비해 더 다양하게 설명되고 있는데, 이는 수학적 모델링에 관한 이해가 연구자마다 각기 조금씩 달라서 바람직하다 여겨지는 수학적 모델링의 특징에 따라 수학적 모델링 문제의 특징이 달라진 것으로 판단된다. 본고에서는 수학적 모델링 문제의 특징으로 학습자에게 흥미와 도전감을 불러일으키면서 ‘현실세계와 연계’된 상황을 지니고, 수학적 선행 지식에 기반을 둔 ‘수학적 모델을 형성’하며, ‘다양하게

문제를 해결'할 수 있어야 하는 것으로 보았다.

이상으로 수학적 모델링에 관한 결론을 정리하였으며, 나날로 커지는 수학적 모델링에 관한 관심과 중요성으로 수학적 모델링의 연구는 지속될 것이므로 향후 다음과 같은 사항을 반영하길 바라는 마음으로 제안하고자 한다.

첫째, 수학적 모델링의 실제지향적 측면을 위해 보다 다양한 영역과 폭 넓은 연구 대상에 관한 연구가 활성화 되어야 할 것이다. 앞에 언급하였던 수학적 모델링 문제를 다루면서, 20편의 논문 저자별 수학적 모델링 문제에 관한 특징 및 정보들을 살펴보면, 수학적 모델링 문제는 문자와 식 영역과 함수 영역의 내용으로 주로 구성되어 있다. 물론, 수학적 모델링이 실세계 상황을 표현하며 분석하고 예측하려는 목적으로 수학을 사용하는 과정이라는 점에서 식이나 그래프를 바탕으로 도출한 수학적 결과를 실세계 상황에 해석하는 것에 '문자와 식' 영역과 '함수' 영역의 문제를 많이 사용하는 것은 자연스러운 일이다. 그렇지만, 학생들이 학교수학을 통해 지금껏 얻은 선행 지식을 활용해서 다양한 영역의 수학적 모델링 문제를 해결하게 된다면 그 과정에서 학생들의 인지적 사고가 고차원적으로 더욱 활발하게 향상될 것이라 여겨진다. 더불어 수학적 모델링의 연구를 수행하는 과정에서 지금보다 폭 넓은 학년을 선정하고 학생들의 학업 성취 수준을 고려하는 것은 물론 다양한 영역으로 구성된 내용을 포함하여 수학적 모델링 연구가 지속적으로 다뤄질 수 있도록 주의를 기울여야 할 것이다.

둘째, 적절한 수학적 모델링 문제가 개발되어 수학적 모델링을 지금보다 효과적으로 활용할 수 있어야 할 것이다. 수학적 모델링에 관해 지금껏 많은 양의 이론적 논의가 이루어지고 있으면서도, 양질의 수학적 모델링 문제에 관한 연구들은 적게 수행되어 왔다는 것을 알 수 있었다. 이러한 판단은 본고의 필자가 수학적 모델링 문제의 특징을 살펴보는 과정에서, 국내의 많은 선행 연구의 저자들이 생각하는 수학적 모델링 문제의 특징에 관한 명확한 견해가 잘 드러나지 않아 수학적 모델링 문제의 특징을 한 마디로 정리하는 것에 대한 한계점으로 드러났다. 또한 필자가 연구를 수행하면서 발견한 일부의 선행 연구에서 수학적 모델링의 문제로써 전형적인 교과서의 문장체가 확인되었는데, 대부분의 교과서 문제는 학생들에게 제한된 모델링 기

회를 주며 주어진 모델만을 사용하도록 구성되었으므로(Meyer, 2015), 수학적 모델링의 문제로서 적절하다고 보기에는 무리가 따른다. 따라서 향후에는 수학적 모델링의 의미와 과정을 고려하면서 이에 적합한 수학적 모델링 문제에 관한 논의와 연구가 활발하게 진행되어야 할 것으로 사료된다.

참고문헌

- 강옥기. “수학적 모델링의 정교화 과정 연구”. 『수학교육학연구』, **20(1)**, 73-84, 2010.
- 강향임. “수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화”. 『학교수학』, **14(4)**, 409-429, 2012.
- 교육부. 『수학과 교육과정(교육부 고시 제 2015-74호 별책20)』, 세종: 교육부, 2015.
- 김민경·민선희·강선미. “초등교사들의 수학적 모델링에 대한 인식 조사 연구”. 『한국학교수학회논문집』, **12(4)**, 411-431, 2009.
- 김민경·홍지연·김은경. “수학적 모델링 사례 분석을 통한 초등 수학에서의 지도 방안 연구”. 『수학교육』, **48(4)**, 365-385, 2009.
- 김민경·홍지연·김혜원. “수학적 모델링 적용을 위한 문제상황 개발 및 적용”. 『수학교육』, **49(3)**, 313-328, 2010.
- 김창수. “수학적 모델링문제 해결에서의 의미에 관한 연구”. 『한국학교수학회논문집』, **16(3)**, 561-582, 2013.
- 김혜영·김래영. “루브릭(RUBRIC) 쓰기에 나타난 수학적 모델링 연구”. 『수학교육 논문집』, **30(3)**, 263-280, 2016.
- 박슬희·신재홍·이수진. “중학생의 수학적 모델링 정교화 과정에 관한 사례 연구”. 『한국학교수학회논문집』, **17(4)**, 657-677, 2014.
- 박진형. “수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진 사례 연구”. 『수학교육학 연구』, **27(1)**, 69-88, 2017.
- 박진형·이경화. “수학적 모델링 과정에서 수산화의 기호학적 분석”. 『수학교육학 연구』, **23(2)**, 95-116, 2013.
- 박진형·이경화. “모델링 활동을 통한 메타수준 학습에 대한 연구”. 『학교수학』, **16(3)**, 409-444, 2014.
- 서지희·윤중국·이광호. “중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교

- 수·학습 자료의 개발 및 적용: 쓰나미를 소재로”. 『학교수학』, **15(4)**, 785-799, 2013.
- 손홍찬·류희찬. “수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할”. 『학교수학』, **9(4)**, 467-486, 2007.
- 신경희·김연지. “절댓값 기호를 포함한 일차함수와 그래프의 개념발달에 관한 수학적 모델링 사례연구”. 『수학교육』, **50(2)**, 165-184, 2011.
- 신은주·권오남. “탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구”. 『수학교육학연구』, **11(1)**, 157-177, 2001.
- 신현성·이명화. “실세계 상황에서 수학적 모델링 과제설정 효과”. 『한국학교수학회논문집』, **14(4)**, 423-442, 2011.
- 신현성·최희선. “수학적 모델링의 과제공간에서 과제복잡성의 평가척도(rating scheme)설정 - 예비수학교사를 대상으로”. 『한국학교수학회논문집』, **19(4)**, 357-371, 2016.
- 안중수. “함수 단원의 수학적 모델링 자료를 활용한 수업이 학생들의 학습능력 향상에 미치는 영향”. 『한국학교수학회논문집』, **15(4)**, 747-770, 2012.
- 유홍규·윤종국. “영재교육을 위한 수학적 모델링 프로그램의 개발 및 적용 :보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 중심으로”. 『수학교육 논문집』, **31(3)**, 257-277, 2017.
- 이상구·고래영·이재화. “신종 인플루엔자의 수학적 모델링”. 『수학교육 논문집』, **24(4)**, 877-889, 2010.
- 이지영·김민경. “초등학생의 수학적 모델링 적용과정에서 나타나는 의사소통에 관한 연구: 5학년 수와 연산을 중심으로”. 『수학교육』, **55(1)**, 41-71, 2016.
- 정승요·박만구. “수학과 교육과정의 변화에 따른 초등학교 3, 4학년 교과서의 수학적 모델링 관련 제시 방법 분석”. 『한국학교수학회논문집』, **19(1)**, 103-122, 2016.
- 최경아. “수학 교과 역량 관점에서의 수학적 모델링에 관한 선행 연구 탐색”. 『한

- 국학교수학회논문집』, *20(2)*, 187-210, 2017.
- 최지선. “수학적 모델링 수업에 대한 초등 교사의 인식”. 『수학교육학연구』, *27(2)*, 313-328, 2017.
- 홍지연·김민경. “걸넓이 학습을 위한 수학적 모델링에서 나타난 추상화 과정 및 걸넓이 이해에 관한 연구”. 『한국학교수학회논문집』, *14(1)*, 043-064, 2011.
- 황혜정. “수학적 모델링의 이해 - 국내 연구 결과 분석을 중심으로”. 『학교수학』, *9(1)*, 65-97, 2007.
- Bliss, K. M., Fowler, K. R. & Galluzzo, B. J.. *Math Modeling: Getting Started and Getting Solutions*, Philadelphia, PA: SIAM, 2014.
- Blum, W. & Ferri, R. B.. “Advancing the Teaching of Mathematical Modeling: Research-Based Concepts and Examples”. *Annual Perspectives in Mathematics Education: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* 1:65-76, 2016.
- Borba, M. C., et. al. “Modeling Using Data Available on the Internet”. *Annual Perspectives in Mathematics Education: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*, 1:143-152, 2016.
- Cavey, L. O. & Champion, J.. “Learning Secondary School Mathematics through Authentic Mathematical Modeling Tasks”. *Annual Perspectives in Mathematics Education : Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* 1:131-142, 2016.
- Galbraith, P. L.. “Dreaming a ‘possible dream’: More windmills to conquer”. *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* 1:44-62, 2007.
- Irillo, M., Bartell, T. G., & Wager, A. A. (2016). “Teaching Mathematics for SocialJustice through Mathematical Modeling”. *Annual Perspectives in*

- Mathematics Education : Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* 1:87-96, 2016.
- Lesh, R. & Doerr, H. M.. *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 2003.
- Meyer, D.. “Missing the Promise of Mathematical Modeling”. *Mathematics Teacher* 108:578-583, 2015.
- NCTM. *Mathematical modeling in the secondary school curriculum: A resource guide of classroom exercises*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.
- NGA Center & CCSSO. *Common Core State Standards for Mathematics*, Washington D.C.: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010.
- Pollak, H. O.. “What Is Mathematical Modeling?”. *Mathematical Modeling Handbook* 1:viii-xi, 2012.
- Schmidt B.. “Modelling in the Classroom: Obstacles from the Teacher’s Perspective”. *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* 1:641-651. 2011.

부 록 목 차

<부록1> 24편의 논문에서 수학적 모델링 의미를 직·간접적으로 인용한 상황	32
<부록2> 24편의 논문에서 수학적 모델링 과정을 직·간접적으로 인용한 상황	33
<부록3> 24편의 논문에서 수학적 모델의 의미를 직·간접적으로 인용한 상황	34
<부록4> 24편의 논문 간의 연계성	35

<부록1> 24편의 논문에서 수학적 모델링 의미를 직·간접적으로 인용한 상황11)

논문 참고문헌	손 홍권 외, 2007	김 민경 외, 2009 (a)	김 민경 외, 2009 (b)	강 욱기 2010	김 민경 외, 2010	이 상구 외, 2010	홍 기연 외, 2011	신 현성 외, 2011	신 경희 외, 2012	강 향업 2012	안 종수 2012	박 진형 외, 2013	김 광수 2013	서 지희 외, 2013	박 진형 외, 2014	박 승희 외, 2014	이 지영 외, 2016	정 승요 외, 2016	김 혜영 외, 2016	신 현성 외, 2016	박 진형 2017	최 지선 2017	최 경아 2017	유 홍규 외 2017	
Burghes (1980)									○		○														
Edwards & Hamson (1989)					○		○																		
NCTM(1989)				○																					
Niss(1989)					○												○								
Swetz(1989)						○			○																
Galbraith & Clatworthy (1990)					○		○										○								
Open University (1990)																	○								
NCTM(1991)									○					○											
Swetz(1991)		○									○						○								
Swetz & Hartzler (1991)				○	○		○						○				○								
Niss(1992)																	○						○		
김수미(1993)													○				○								
Blum(1993)																			○						
권기석·박배훈 (1997)											○														
Zbiek(1998)					○		○										○								
신은주·권오남 (2001)					○								○				○						○		
Blum (2002)																							○		
Blum 외 (2002)									○											○					
Dossey et al (2002)	○																								
Gravemeijer (2002)																							○		
Fujii(2003)											○														
Lesh & Doerr(2003)																								○	
Lesh & Lehrer(2003)													○					○							
김선희·김기연 (2004)											○		○												
Schichl(2004)																	○								
Varaki & Earl(2006)																			○						
Doorman & Gravemeijer (2009)																								○	
CCSSI(2010)																	○								
CCSSM (2010)																								○	
Bliss & Libertini (2016)																								○	

<부록2> 24편의 논문에서 수학적 모델링 과정을 직·간접적으로 인용한 상황¹²⁾

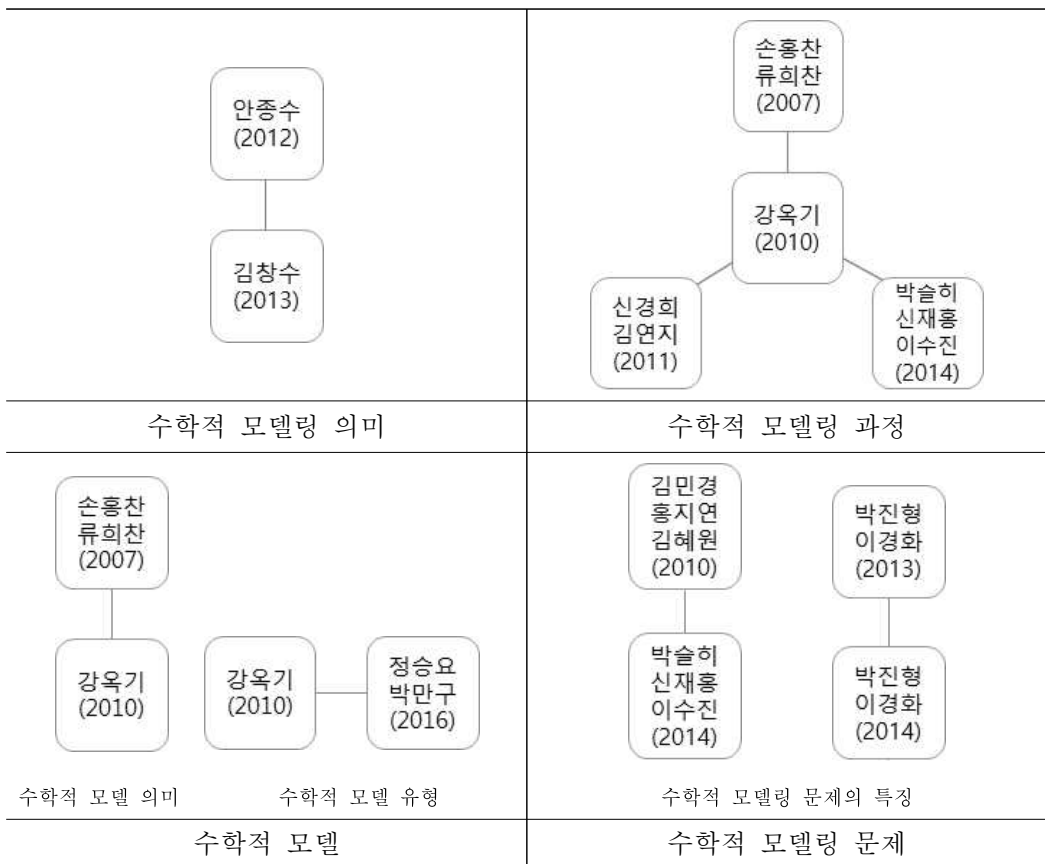
논문 참고문헌	손 홍권 외, 2007	김 민경 외, 2009 (a)	김 민경 외, 2009 (b)	강 욱기 외, 2010	김 민경 외, 2010	이 상규 외, 2010	홍 지연 외, 2011	신 현정 외, 2011	신 경희 외, 2011	강 향임 외, 2012	안 중수 외, 2012	박 진행 외, 2013	김 창수 외, 2013	서 진희 외, 2013	박 진행 외, 2014	박 승희 외, 2014	이 지영 외, 2016	정 승요 외, 2016	김 해영 외, 2016	신 현정 외, 2016	박 진행 외, 2017	최 지선 외, 2017	최 경아 외, 2017	유 홍규 외, 2017
Maki & Thompson (1973)		○			○												○							
Burghes (1980)									○															
NCTM (1989)				○																				
Open University (1990)		○															○							
Galbraith& Clatworthy (1990)		○																						
NCTM (1991)		○	○		○				○								○							
Swetz (1991)									○															
Swetz & Hartzler (1991)				○																				
김수미 (1993)														○										○
신현성·김경희 (1998)											○													
NCTM (2000)	○																							
Blum et al (2002)									○															
Dossey et al (2002)	○			○																				
Giordano, Weir & Fox (2003)	○																							
Lesh & Doerr (2003)		○			○												○	○						○
Lesh & Leher (2003)			○															○						
Lesh et al (2003)					○																			
신은주·이종희 (2004)				○																				
김선희 (2005)											○													
손홍찬·류희찬 (2005)											○													
신은주 (2005)														○										
황혜정 (2007)																						○		
Blum & Ferri (2009)																						○		○
Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack (2009)																							○	
CCSSM (2010)																							○	

11) 표의 횡축에 해당하는 24편의 논문은 논문 발행 순서로 제시되었음.

<부록4> 24편의 논문 간의 연계성

본고에서 다루고 있는 수학적 모델링에 관한 24편의 논문들을 대상으로, 논문 간의 연계성을 파악하고자 각 논문의 참고문헌을 바탕으로 논문 간의 연계된 내용을 정리하였다.¹⁴⁾ 그 중에서 앞서 살펴보았던 수학적 모델링 의미와 과정, 수학적 모델, 수학적 모델링 문제의 관점으로 논문 간의 관계를 도식화하여 하단의 표로 나타내었다.

<표 부록4-1> 수학적 모델링의 의미와 과정, 수학적 모델, 수학적 모델링 문제에서 24편의 논문 간의 연계성



14) ‘<표 부록4-2> 24편의 논문 간의 참고 및 인용에 관한 내용’이 24편의 논문 간의 연계성을 서론과 결론까지 포함하여 정리한 것임.

이제 수학적 모델링 의미, 수학적 모델링 과정, 수학적 모델, 수학적 모델링 문제와 관련하여 24편의 논문 간 연계성에 대해 구체적으로 살펴보고자 한다.

첫째, 수학적 모델링 의미에 관해서, 김창수(2013)은 안종수(2012)의 논문에서 수학적 모델링은 현상에서 시작하여 현상의 단편을 탐색하는 것이라는 수학적 모델링의 의미를 참고하였다.

둘째, 수학적 모델링 과정으로, 손홍찬과 류희찬(2007)에 따르면, 수학적 모델링의 특징을 제시하였고, 이를 바탕으로 강옥기(2010)는 정교화 과정을 구체화하여 정의하였으며, 이 후 신경희와 김연지(2011)과 박슬희, 신재홍, 이수진(2014)에서는 손홍찬과 류희찬(2007)과 강옥기(2010)의 내용을 참고하여 수학적 모델링 과정을 설명하였다. 먼저, 신경희와 김연지(2011)은 손홍찬과 류희찬(2007)과 강옥기(2010)의 의견을 바탕으로 수학적 모델링 문제에 관한 더 정교한 해를 구하기 위한 정교화 과정을 첫째, 구한 수학적 모델의 변인의 수를 점점 늘리며 변형하는 것, 둘째, 상황을 나타내는 자료들을 통해 유도된 분포 경향을 수학적 모델로 변형하는 것이라 설명하며, 강옥기(2010)이 제시한 수학적 모델링의 정교화 과정을 종합하여 수학적 모델링 과정을 고안하고 연구 결과를 분석하고 있다. 또한 박슬희, 신재홍, 이수진(2014)은 손홍찬과 류희찬(2007)과 강옥기(2010)를 통해 수학적 모델의 정교화는 실세계 상황에 더욱 적합하도록 변인을 추가하거나 혹은 제한 없는 범위를 활용해 변인 간의 관계를 세밀하게 구성하는 활동의 결과물로 제시하며, 강옥기(2010)에 기술된 수학적 모델링의 정교화 과정을 바탕으로 수학적 모델링의 과정을 정의해서 학생들의 모델링 활동을 분석하고 있다. 그리하여 박슬희, 신재홍, 이수진(2014)는 연구 결과로써 “모델링 활동 과정 중에 해결하고자 하는 목적에 맞추어 구성된 문제 자체의 수정이 일어날 수 있다는 점이다. ... 학생들은 모델 자체의 문제로 문제가 해결이 되지 않거나, 모델을 통해 어떤 해를 얻었을 때 그 해가 의미가 없다고 판단 될 때 설정된 문제를 수정하는 모습을 보였고, 이는 모델의 정교화가 발생하는 경우를 학생들이 자신이 구성한 수학적 모델에서 얻어진 해가 의미가 없을 때에 대해서 발생한다고 보고한 강옥기(2010)의 모델과의 차이점이라고 할 수 있다.”라고 밝히고 있다(p. 669).

셋째, 수학적 모델로는 수학적 모델의 유형을 기술한 손홍찬과 류희찬(2007), 강옥기(2010)과 수학적 모델의 의미를 설명하는 강옥기(2010), 정승요와 박만구(2016)의 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 손홍찬과 류희찬(2007)에서는 수학적 모델의 유형으로 수식, 그래프, 기하학적 도형 등을 말하고 있으며, 이 밖에 다른 연구 논문들과 달리 스프레드시트 모델을 따로 분류하여 소개하고 있다. 스프레드시트 모델은 스프레드시트 환경에 맞도록 대수식을 적절히 변형하는 스프레드 수식이나 이 수식에서 생성되는 그래프, 표, 스크롤바 등을 사용하는 시뮬레이션 상황을 말한다. 이 논문에서는 스프레드시트 모델에서 시뮬레이션 상황을 제외한 나머지를 수학적 모델이라 정의하였다.¹⁵⁾ 이후 강옥기(2010)는 손홍찬과 류희찬(2007)의 수학적 모델에 대한 내용을 바탕으로 수학적 모델의 유형을 “수학에서 사용하는 문자, 기호, 식, 그래프, 도표 그리고 컴퓨터에서 사용하는 스프레드 수식 등은 모두 수학적 모델이다.”라고 서술했다(p. 74). 또한 강옥기(2010)는 수학적 모델의 의미를 설명하기에 앞서 일반적인 모델을 구체적 모델과 추상적 모델로 나누었는데, 구체적 모델은 실제로 있는 사물의 특성을 이해하고자 축소 혹은 확대하여 만든 것이며, 추상적 모델은 추상적 방법을 통해 현상 및 사물의 특성을 나타낸 것이다. 이후에 손홍찬과 류희찬(2007)의 수학적 모델의 정의를 참고하면서 더욱 일반화하여 수학적 모델의 의미를 실세계 현상을 수학적인 방법으로 나타낸 추상적 모델이라 제시하였다. 이를 토대로 정승요와 박만구(2016)도 수학적 모델을 설명하기 전에 모델을 구체적 모델과 추상적 모델로 나눈 후, 수학적인 의미를 담고 있는 추상적 모델이 수학적 모델이라고 서술했다.

넷째, 박진형과 이경화(2014), 박슬희, 신재홍, 이수진(2014)에서는 수학적 모델링 문제에 관해 살펴볼 수 있는데, 먼저 박진형과 이경화(2014)는 학생들이 수학적 모델링의 수학적 모델을 형성할 수 있는 충분한 선행지식을 가지고 있더라도 수학적 모델을 유도하는 과정이 무척이나 도전적이라는 박진형과 이경화(2013)의 연구 결과를 들어 수학적 모델링 문제 상황을 정리하였다. 또한 박슬희, 신재홍, 이수진(2014)에서는 수학적 모델링 문제 개발에 있어서 김민경, 홍지연, 김혜원

15) 이와 다르게 수학적 모델링 과정에서 공학적 도구인 Geogbra를 활용한 논문인 강향임(2012)에서는 수학적 모델의 유형을 식과 그래프 같은 것으로 보고 있다.

(2010)의 수학적 모델링 문제의 특징을 참고하였음을 밝히고 있다.

<표 부록4-2> 24편의 논문 간의 인용 및 참고에 관한 내용

년도	저자	참고문헌	주요 내용
2007	손홍찬 외		
2009	김민경 외 (a) ¹⁶⁾		
	김민경 외 (b) ¹⁷⁾		
2010	강욱기	손홍찬·류희찬 (2007)	<ul style="list-style-type: none"> · 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구 · 수학적 모델의 개념 일반화 · 수학적 모델링 과정을 정의하기 위한 수학적 모델링의 특징
	김민경 외	김민경·홍지연·김은경 (2009)	· 선행 연구 고찰
	이상구 외		
2011	홍지연 외		
	신현성 외		
	신경희 외	손홍찬·류희찬 (2007)	<ul style="list-style-type: none"> · 수학적 모델링의 정교화 과정 소개 · 선행 연구 고찰
		김민경·홍지연·김은경 (2009)	· 수학적 모델링의 목적
	강욱기 (2010)	<ul style="list-style-type: none"> · 수학적 모델링의 정교화 과정 소개 및 고안 · 선행 연구 고찰 · '모델의 정교화 단계'에서의 연구 결과 및 분석 	
2012	강향임		
	안종수		
2013	박진형 외		
	김창수	안종수 (2012)	· 수학적 모델링 의미
	서지희 외		
2014	박진형 외	박진형·이경화 (2013)	· '모델링 문제 상황'에서의 모델링 과제 및 수업 설계 방안
	박슬희 외	손홍찬·류희찬 (2007)	<ul style="list-style-type: none"> · 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구 · 수학적 모델링의 정교화 과정 소개
		강욱기 (2010)	<ul style="list-style-type: none"> · 수학적 모델링의 정교화 과정 소개, 제시 및 고안 · 수학적 모델링의 정교화 과정 분석 및 차이점

		김민경·홍지연·김혜원 (2010)	· 수학적 모델링 문제 개발에 관한 선행 연구
		신경희·김연지 (2011)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구
2016	이지영 외	김민경·홍지연·김은경 (2009)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구
		김민경·홍지연·김혜원 (2010)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구
	정승요 외	김민경·홍지연·김은경 (2009)	· 수학 교과서에 나타난 수학적 모델링 선행 연구
		김민경·민선희·강선미 (2009)	· 결론 및 제언
		강옥기 (2010)	· 수학적 모델에서의 '모델' 소개
		신현성·이명화 (2011)	· 결론 및 제언
	김혜영 외		
신현성 외	신현성·이명화 (2011)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구	
2017	박진형		
	최지선	김민경·홍지연·김은경 (2009)	· 결론 및 시사점
		김민경·민선희·강선미 (2009)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구
	최경아	김민경·민선희·강선미 (2009)	· 요약 및 시사점
		강옥기 (2010)	· 수학 교과 역량 '창의·융합'에 관한 선행 연구
		안중수 (2012)	· 수학 교과 역량 '태도 및 실천'에 관한 선행 연구
		서지희·윤종국·이광호 (2013)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구
		박슬희·신재홍·이수진 (2014)	· 수학 교과 역량 '창의·융합'에 관한 선행 연구
		정승요·박만구 (2016)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구 · 요약 및 시사점
		이지영·김민경 (2016)	· 서론 - 국내의 수학적 모델링 선행 연구 · 수학 교과 역량 '의사소통'에 관한 선행 연구
		박진형 (2017)	· 수학 교과 역량 '창의·융합'에 관한 선행 연구
유흥규 외			

16) 김민경 외(2009(a))는 김민경, 홍지연, 김은경(2009)를 뜻함.

17) 김민경 외(2009(b))는 김민경, 민선희, 강선미(2009)를 뜻함.