[UCI]I804:24011-200000266737

2018년 2월

교육학석사(수학교육)학위논문

정사면체에 외접하는 구의 성질

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

최 우 영

정사면체에 외접하는 구의 성질

On the properties of spheres which are circumscribed to regular tetrahedron

2018년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

최 우 영

정사면체에 외접하는 구의 성질

지도교수 오 동 렬

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2017년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

최 우 영

최우영의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장	조선대학교 교수	안 영 준 인
심사위원	조선대학교 교수	이 관 규 인
심사위원	조선대학교 교수	오 동 렬 인

2017년 12월

조선대학교 교육대학원

CONTENTS

ABSTRACT

On the properties of spheres which are circumscribed to tegular tetrahedron

Choi Woo-Young
Advisor : Prof. Dong Yeol Oh Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

There is the circle which is circumscribed to a regular triangle. It is known that for each point A in the circumscribed circle on a regular triangular, the sum of squares of distance from A to each vertices of a regular triangular is constant. In this article, we prove such a well-known result in a another way and generalize it to regular polygons, that is, we prove that for each point A in the circumscribed circle on a regular polygon, the sum of squares of distance from A to each vertices of a regular polygon is constant. We also prove that for each point A in the circumscribed sphere on a regular tetrahedron, the sum of squares of distance from A to each vertices of a regular tetrahedron is constant.

1장 소개

평면 도형에 대한 성질 연구는 그 역사가 고대로부터 시작하여 매우 오래되었으며, 그 기간 동안 이루어진 많은 결과들이 있다. (그러나 참고 문헌을 찾기는 매우 어렵다.) 특히 평면도형에 외접하는 외접원과 평면 도형과의 성질에 대한 연구 결과 들이 있다. 임의의 평면도형에 외접하는 외접원이 항상 존재하는 것은 아니나, 정다각형에 외접하는 외접원이 존재한다는 사실은 자명하다. 특히 정삼각형에 외접하는 외접원의 경우, 외접원위의 임의의 점에서 정삼각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하다는 사실은 잘 알려져 있다[2]. 위의 사실로부터 정다각형에 외접하는 외접원의 경우, 외접원위의 임의의 점에서 정다각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정한지에 대한 자연스러운 질문을 할 수 있다. 또한 평면 도형 정삼각형을 확장한 정사면체에 대하여서도 성립하는지에 대한 자연스러운 질문(즉 정사면체에 외접하는 구 위의 임의의 점에서 정사면체 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정한가)을 할 수 있다. 이 논문에서는 이런 자연스러운 질문에 대한 연구를 하였다.

2장에서는 평면 도형의 기본 성질과 3, 4 장에서 필요한 평면 도형의 성질들을 기존의 평면 도형의 결과들을 제시하였다. 정삼각형의 외접원 위의 임의의 점에서 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하다는 [2] 의 증명 방법은 임의의 정다각형으로의 확장이 어렵다. 3장에서는 [2] 의 증명 방법과 다른 방법을 이용하여 정삼각형의 외접원 위의 임의의 점에서 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하다는 사실을 증명하였으며 또한 이 결과를 확장하여 임의의 정다각형의 외접원위의 임의의 점에서 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하다는 사실을 증명하였다. 4장에서는 3장에서 사용한 증명 방법을 3차원으로 확장하여 임의의 정사면체에 외접하는 구 위의 임의의 점에서 정사면체의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하다는 사실을 증명하였다.

2장 평면도형의 기본 성질

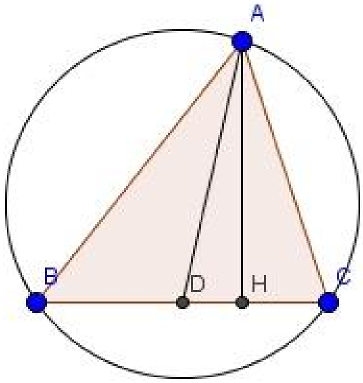
이번 장에서는 평면도형에 대한 기본성질 및 3장에서 필요한 평면도형의 성질들을 간략히 소개하도록 한다.

다음의 파푸스의 중선정리는 잘 알려진 유명한 정리이다[2]. 3장에서 파푸스의 중선정리가 자주 나오므로 이 장에서 다시 한 번 증명하도록 한다.

정리 2.1 (파푸스의 중선정리)임의의 $\triangle ABC$ 가 존재할 때, 선분$\overline{BC}$의 중점을 D라 할 때

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$$

가 항상 성립한다.



증명

점A에서 선분$\overline{BC}$로 수선의 발을 내리 점을 점H라 하자. 이러면 다음과 같은 세 가지 직각삼각형에 대한 피타고라스의 정리를 사용한 식이 나타난다.

$\triangle ABH$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \cdots\cdots\cdots$①

$\triangle AHC$에서 $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \cdots\cdots\cdots$②

$\triangle ADH$에서 $\overline{AD}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{DH}^2 \cdots\cdots\cdots$③

$\overline{BH} = \overline{BD} + \overline{DH}$, $\overline{CH} = \overline{CD} - \overline{DH}$ 이므로

$\overline{BH}^2 = \overline{BD}^2 + 2\overline{BD}\times\overline{DH} + \overline{DH}^2 \cdots\cdots\cdots$④

$\overline{CH}^2 = \overline{CD}^2 - 2\overline{CD}\times\overline{DH} + \overline{DH}^2 \cdots\cdots\cdots$⑤

④+⑤를 하면, $\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{BD}\times\overline{DH} - 2\overline{CD}\times\overline{DH} + 2\overline{DH}^2$ 인데, $\overline{BD} = \overline{CD}$ 이므로, $\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = 2\overline{BD}^2 + 2\overline{DH}^2 \cdots\cdots\cdots$⑥

①+②를 하면, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = 2\overline{AH}^2 + 2\overline{BD}^2 + 2\overline{DH}^2$인데 오른쪽 식에 ③을 대입하면 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2$이다.

정리 2.2

$\triangle ABC$는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고, $\overline{BC}$의 중점을 점D라 잡을 때, $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$이고, $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ 이다.

증명

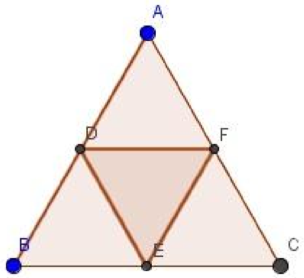
$\overline{BC}$의 중점을 D라 하였으므로 $\overline{BD} = \overline{CD}$이다. $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\angle ABC = \angle ACB$이다. 즉, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\angle ABC = \angle ACB$에 의하여 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$는 SAS합동이다.
$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$이므로 $\angle ADB = \angle ADC$이고 점B, 점D, 점C는 한 직선 위에 있으므로 $\angle ADB = 90^\circ$ 이다.

정리 2.3

임의의 정다각형에 대하여 각 변의 중점을 연결한 도형은 기존의 정다각형과 닮음이다.

증명

이해를 돕기 위해 먼저 정삼각형에 관하여 증명한다.



$\triangle ABC$는 정삼각형이고, 점D, 점E, 점F는 각각 선분$\overline{AB}$, 선분$\overline{BC}$, 선분$\overline{CA}$

의 중점이다. 이때, $\triangle ADF$, $\triangle BED$, $\triangle CFE$는 모두 이등변삼각형이다. 또한, $\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$이고, $\angle DAF=\angle EBD=\angle FCE$이므로 $\triangle ADF \equiv \triangle BED \equiv \triangle CFE$이다. 즉, $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FD}$이다.
$\angle ADF=\angle AFD=\alpha$, $\angle DAF=\beta$라 하면, $2\alpha+\beta=180^\circ$ 이다. $\angle AFD=\angle BDE$이고, $\angle ADF+\angle BDE=2\alpha$가 되므로 $\angle EDF=\beta$가 된다. 같은 방법으로 $\angle DEF=\angle DFE=\beta$가 된다. 즉, $\angle DAF=\angle EDF=\beta$가 되고 여기서 $\beta=60^\circ$ 가 된다.
따라서 $\triangle DEF$는 각 변의 길이가 같고 모든 각의 크기가 같으므로 정삼각형이고, $\triangle ABC$의 한변의 길이보다 짧기 때문에 $\triangle DEF$는 $\triangle ABC$의 닮음이다.
이제 정n각형에 대해 증명하도록 하자.
임의의 정n각형이 존재한다고 하자. 이때, $\triangle A_1B_1B_n$, $\triangle A_2B_2B_1,\cdots$ $\triangle A_nB_nB_{n-1}$은 모두 이등변삼각형이다. 또한, $\triangle A_1B_1B_n$, $\triangle A_2B_2B_1$는 $\overline{A_1B_n}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_1}$, $\overline{A_2B_2}$는 정n각형 한 변의 길이의 절반으로 모두 같다. 또한, $\angle B_nA_1B_1$, $\angle B_1A_2B_2$ 역시 정n각형의 성질에 의해 같다. 즉, $\triangle A_1B_1B_n$, $\triangle A_2B_2B_1$는 SAS합동이 된다. 같은 방법으로 $\triangle A_1B_1B_n$, $\triangle A_2B_2B_1,\cdots\triangle A_nB_nB_{n-1}$은 모두 합동이다. 즉, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3},\cdots\overline{B_{n-1}B_n}$의 길이는 모두 같다.
$\angle B_nA_1B_1$의 각을 α라 하고, $\angle A_1B_nB_1$의 각을 β라 하자. 이러면 $\alpha+2\beta=180^\circ$ 이다. 이때, $\angle A_1B_nB_1$과 $\angle A_nB_nB_{n-1}$은 β로 같은 각이고, $\angle A_1B_nB_1+\angle A_nB_nB_{n-1}+\angle B_1B_nB_{n-1}=180^\circ$ 이다. 즉, $\angle B_1B_nB_{n-1}$의 각은 β이고, 같은 방법으로 다각형$B_1B_2\cdots B_n$의 모든 각은 β로 동일하다.
따라서 다각형$B_1B_2\cdots B_n$은 모든 변의 길이가 같고 모든 각의 크기가 같은 n각형이므로 정n각형이고 기존의 다각형$A_1A_2\cdots A_n$과 변의 길이는 다르므로 두 다각형은 닮음이다.

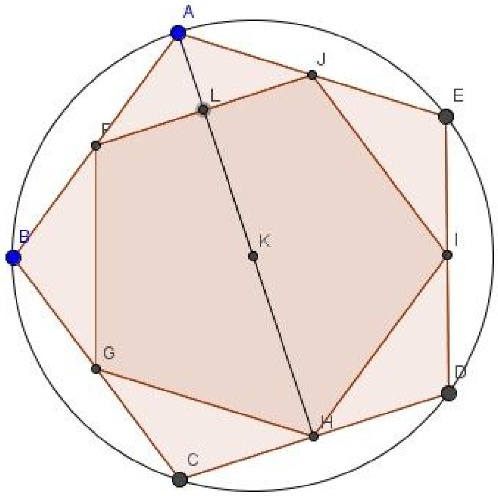
임의의 정n각형 도형을 R_1이라 하고, R_1의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정n각형을 R_2라 하며 R_2의 중점을 연결하여 만든 새로운 정n각형을 R_3, 이와 같은 방법으로 만들어진 정n각형들을 $R_4, R_5, \cdots, R_k, \cdots (1\le k,\ k\in N)$라 하자. 또, R_k의 꼭짓점에서 외심까지의 거리를 l_k라 하자.

정리 2.4

정n각형 R_1에 대하여 R_1의 외심과 R_2의 외심은 같다.

증명

본 증명에 들어가기 전에 이해를 돕기 위하여 정오각형에서 먼저 증명을 하



도록 하자.

$\overline{AK}$는 R_1의 외접원의 반지름이다. $\overline{AK}$를 반대쪽 원까지 연장시키면 R_1의 지름이 되고 이 지름은 원을 반으로 나누므로 $\overline{AK}$의 연장선에는 $\overline{CD}$의 중점 H도 지나게 된다. 이는 $\overline{BK}$의 연장선 위에 I, $\overline{CK}$의 연장선 위에 J, $\overline{DK}$의 연장선 위에 F, $\overline{EK}$의 연장선 위에 G가 있다는 것이 되는데 F, G, H, I, J 모두 R_2의점이다. 또, $\overline{AK}$의 연장선이 R_1의 지름이므로 $\overline{FJ}$의 중점 L은 $\overline{AK}$위에 있게 된다. 이는 R_2에서 보면 $\overline{HL}$위에 R_2의 외심이 있어야 하는데 이를 조금 확장시켜 $\overline{AH}$라 생각하면 $\overline{AH}, \overline{BI}, \overline{CJ}, \overline{DF}, \overline{EG}$에서 만나는 점이 R_2의 외심이 된다. 그런데 그 점은 K이므로 R_1과 R_2의 외심은 같다.

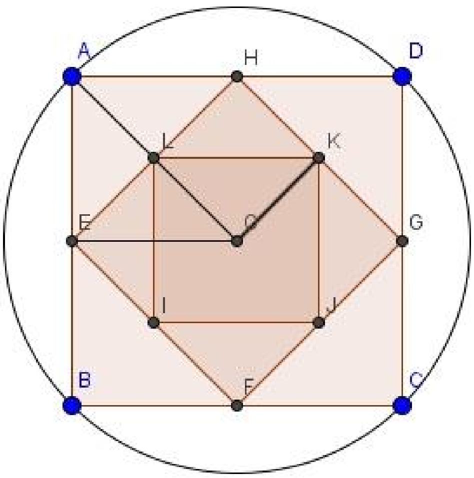
이제 정n각형으로 확장해보도록 하자.

임의의 정n각형 R_1에 대하여 한 점을 A_1, 외심을 O_1이라 하면, $\overline{A_1O_1}$은 R_1의 외접원의 반지름이 된다. $\overline{A_1O_1}$의 연장선을 그리면 R_1의 외접원의 지름이 되는데 n이 홀수일 경우 위의 정오각형처럼 R_2의 한 점B_1을 지나게 되어 $\overline{B_1O_1}$이 R_2의 외접원의 반지름이 된다.

n이 짝수일 경우 $\overline{A_1O_1}$의 연장선은 $A_{\frac{n}{2}+1}$을 지나게 되고, $\overline{A_2O_1}$의 연장선은 $A_{\frac{n}{2}+2}$를 지나게 된다. 즉, 정n각형을 반으로 나누는 선분은 항상 O_1을 지나게 된다. 이때, $\overline{A_1A_2}$의 중점 B_1과 $\overline{A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}}$의 중점 $B_{\frac{n}{2}+1}$을 연결한 $\overline{B_1B_{\frac{n}{2}+1}}$은 정$n$각형을 반으로 나누므로 O_1을 지나게 된다. 이때, B_1과 $B_{\frac{n}{2}+1}$은 R_2의점이므로 R_2의 외심도 O_1이 된다.
즉, R_1과 R_2의 외심은 같다.

정리2.5
정n각형의 각 변의 중점을 연결하여 새로운 다각형을 만드는 과정을 무한반복하면 정n각형의 외심으로 수렴한다.

증명
먼저 정사각형에 대하여 알아보자.



$\overline{AO}$는 l_1, $\overline{EO}$는 l_2, $\overline{KO}$는 l_3이다. $\overline{AB}=a$라 하면 $l_1=\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}$가 되고, R_1과 R_2는 닮음이므로 $\overline{EF}=\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}$이고, $l_2=\dfrac{a}{2}$가 된다. 같은 방법으로

$l_3 = \frac{\sqrt{2}a}{4}$가 되므로 $l_k(k=1,2,\cdots)$는 등비수열이 된다. 즉, $\lim_{k\to\infty} l_k = 0$이므로 R_k가 k에 대하여 한없이 진행되면 외심O로 가게 된다.
이제 일반적인 경우에서 $\lim_{k\to\infty} l_k = 0$임을 보이자.

R_k의 한 변의 길이를 r_k라 하고, 정n각형 한 각의 크기를 α_n이라 하자. 이 때, R_k의 인접한 두 꼭짓점과 외심으로 이루어진 삼각형은 이등변 삼각형이다. 이 이등변삼각형에서 외심에서 한 변의 중점을 연결하면 이등변삼각형을 이등분하는 직각삼각형 두 개가 나오고 밑변의 길이는 $\frac{r_k}{2}$이다. 밑변과 빗변의 사잇각은 $\frac{\alpha_n}{2}$가 되므로 $\cos\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\frac{r_k}{2}}{l_k}$이므로 $r_k = 2l_k\cos\frac{\alpha_n}{2}$가 된다. 즉, r_k는 l_k와 비례한다.

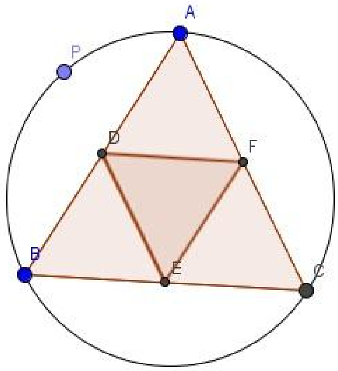
이제 r_1과 r_2의 관계를 보자. 정리 2.3의 증명으로부터 $\sin\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\frac{r_1}{2}}{\frac{r_2}{2}} = \frac{r_1}{r_2}$가 성립한다. 이는 모든 r_k에서 성립하므로 $r_k = r_{k-1}\sin\frac{\alpha_n}{2}$이고, α_n은 정n각형 한 각의 크기이므로 $\alpha_n < 180^\circ$, $\frac{\alpha_n}{2} < 90^\circ$이다. 즉, $0 < \sin\frac{\alpha_n}{2} < 1$이므로 $\{r_k\}$는 공비가 0과 1 사이인 등비수열이 된다. 이는 $\{r_k\}$가 유계이고 감소수열이므로 0에 수렴하여 $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$를 뜻하고, r_k와 l_k는 비례한다고 하였으므로$\{l_k\}$도 우계이고 감소수열이고 0에 수렴하므로 $\lim_{k\to\infty} l_k = 0$이 증명되었다 [1].
l_k가 0으로 수렴한다는 뜻은 R_k의 한 꼭짓점에서 외심까지의 거리가 0으로 수렴한다는 뜻이고 이는 R_k가 반복될수록 각 꼭짓점들이 외심으로 수렴한다는 뜻이다.

3장 정다각형과 외접원의 성질

이 장에서는 정n각형의 외접원 위의 임의의 점으로부터 정n각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정한지에 대한 증명을 한다.
이해를 돕기 위해 먼저 정삼각형과 정사각형에 대하여 알아보도록 하자.

정리 3.1
정삼각형의 외접원 위의 임의의 점에서부터 정삼각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

증명



$\triangle ABC$를 정삼각형이라고 하자. 이때 $\triangle ABC$의 외접원 위의 임의의 점을 P라 하면 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 일정하다는 것을 보이면 된다.
$\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$에 관한 파푸스의 중선정리를 이용하자
i) $\triangle PAB$
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PD}^2+\overline{BD}^2)$ ·········①
ii) $\triangle PBC$
$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PE}^2+\overline{CE}^2)$ ·········②
iii) $\triangle PCA$

$\overline{PC}^2+\overline{PA}^2=2(\overline{PF}^2+\overline{AF}^2)\cdots\cdots\cdots③$

①+②+③를 하면

$2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2)=2(\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{BD}^2+\overline{CE}^2+\overline{AF}^2)$

이 되는데 $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{AF}$는 모두 정삼각형의 한 변의 길이의 절반이므로 일정하다.

즉, $\triangle DEF$에 관하여 점P에 대한 $\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$의 길이의 일정성만 보여주면 된다.

이러한 과정은 정리 2.5에 의하여 외심으로 가게 되고 이 외심을 점O라고 하면 결국 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$, $\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$, …은 모두 $\overline{PO}^2$에 관한 식으로 정리되며 이는 정삼각형의 한 꼭짓점에서 무게중심까지의 거리와 같으므로 일정하다($\because$ 정삼각형은 외심과 무게중심이 같다)

즉 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$는 일정하다.

따름정리 3.2

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 외접원 위의 점P로부터 정삼각형 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 $2a^2$이다.

증명

정리 3.1의 증명에 의하여

$2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2)=2(\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{BD}^2+\overline{CE}^2+\overline{AF}^2)\cdots\cdots①$

이다.

이때, $\overline{BD},\overline{CE},\overline{AF}$는 모두 한 변의 길이의 절반이므로 각각 $\frac{a}{2}$이다.

점P에서 R_1의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합 즉,$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$을 α_1이라 하자. 그리고 ①에서 주어진 값$\overline{BD},\overline{CE},\overline{AF}$는 R_1의 한 변의 길이의 절반들의 제곱의 합 이므로 이를 β_1이라 하자.

이 경우①은 $2\alpha_1=2(\alpha_2+\beta_1)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2+\beta_1$이다. 같은 방법으로 $\alpha_2=\alpha_3+\beta_2$이다.

즉, $\alpha_n=\alpha_{n+1}+\beta_n$이 된다.

이때, $\alpha_{n-1}=\alpha_n+\beta_{n-1}$이므로 $\alpha_{n-1}=\alpha_{n+1}+\beta_{n-1}+\beta_n$이고 이 과정을 반복

하면 $\alpha_1 = \alpha_{n+1} + \beta_1 + \cdots + \beta_n = \alpha_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k$가 된다.

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n$은 정리 2.5에 의하여 $3l_1^2$($\because \lim_{n\to\infty} a_n$은 점$P$에서 $R_i(i\in N)$들의 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이므로 결국 $\overline{PO}^2$이 세 개 있는 것이다.)이고, l_1은 외접원의 반지름의 길이이므로 $\frac{\sqrt{3}a}{3}$이다. 즉, $3l_1^2 = a^2$이다.

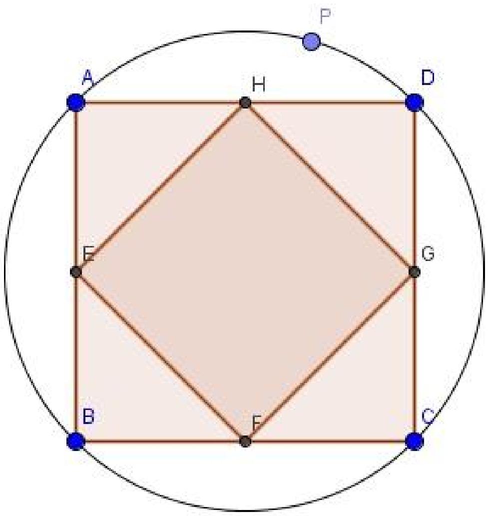
각 $\beta_n(n\in N)$은 R_n의 한 변의 길이의 절반의 제곱을 3배해준 값이므로 R_n의 한 변의 길이를 구하면 되는데 R_1의 한 변의 길이는 a, R_2의 한 변의 길이는 R_1의 한 변의 길이의 절반이므로 $\frac{a}{2}$이다. 같은 방법으로 R_i의 한 변의 길이는 R_{i-1}의 한 변의 길이의 절반으로 계산하게 되면 $\beta_1 = \frac{3}{4}a^2, \beta_2 = \frac{3}{16}a^2, \cdots, \beta_i = \frac{3}{4^i}a^2, \cdots$가 된다. 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = a^2$이다.

따라서 $\alpha_1 = 2a^2$이다.

정리 3.3

정사각형의 외접원 위의 임의의 점에서부터 정사각형 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

증명



$\square ABCD$가 정사각형이라고 하자. 이때, $\square ABCD$의 외접원 위의 임의의 점

을 P라고 하면 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$의 값이 일정하다는 것을 보이면 된다.

$\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$에 관한 파푸스의 중선정리를 이용하자

ⅰ) $\triangle PAB$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PE}^2+\overline{BE}^2)$ ·········①

ⅱ) $\triangle PBC$

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PF}^2+\overline{CF}^2)$ ·········②

ⅲ) $\triangle PCD$

$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2(\overline{PG}^2+\overline{DG}^2)$ ·········③

ⅳ) $\triangle PDA$

$\overline{PD}^2+\overline{PA}^2=2(\overline{PH}^2+\overline{AH}^2)$ ·········④

①+②+③+④를 하면

$2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)$

$=2(\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PGF}^2+\overline{PH}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2+\overline{DG}^2+\overline{AH}^2)$

이 되는데 $\overline{PE}$, $\overline{PF}$, $\overline{PG}$, $\overline{PH}$의 길이는 □$ABCD$의 한변의 길이의 절반이므로 일정하다.

즉, □$EFGH$에 관하여 점P에 대한 $\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2$의 길이의 일정성만 보여주면 된다.

이러한 과정은 정리 2.5에 의하여 외심으로 가게 되고 이 외심을 점O라고 하면 결국 , $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$, $\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2$…은 모두 $\overline{PO}^2$에 관한 식으로 정리되며 이는 정사각형의 한 꼭짓점에서 무게중심까지의 거리와 같으므로 일정하다.

즉 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$는 일정하다.

다른 증명

□$ABCD$가 정사각형이므로 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$는 외접원의 무게중심을 지나게 된다.
즉, $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$는 외접원의 지름이므로 $\triangle PAC$와 $\triangle PBD$는 직각삼각형이다.
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{AC}^2$이고, $\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{BD}^2$이다.

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$이므로 정사각형의 외접원 위의 임의의

점에서부터 정사각형 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

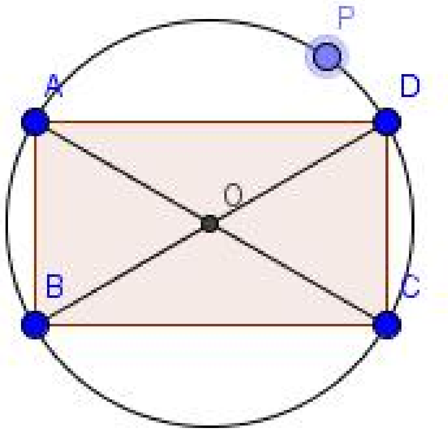
따름정리 3.4
한 변의 길이가 a인 정사각형의 외접원 위의 점P로부터 정사각형 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 $4a^2$이다.

증명
정리 3.3의 다른 증명에 의해 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$이므로 두 대각선의 길이의 합을 구하면 된다.
정사각형이므로 한 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$가 되므로 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=4a^2$이다.

정리 3.5
정다각형의 외접원 위의 임의의 점에서부터 정다각형 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

증명
정리 3.1과 정리 3.3에 의하여 n이 3,4일 때 성립함을 알 수 있다. 이때, 정리 3.1과 정리 3.3은 증명방법이 같으므로 임의의 정 n각형에 대해서도 같은 증명방법을 사용하면 된다.
즉, 임의의 정n각형 $A_1A_2\cdots A_n$의 외접원 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_2}^2+\cdots+\overline{PA_n}^2$의 값이 일정하다는 것을 보여주면 된다. 이 역시 증명하면 정리 2.5의 그림과 같이 정n각형 $B_1B_2\cdots B_n$이 나올 것이고 정리 3.1과 같은 방법으로 증명하면 모든 꼭짓점이 $\overline{PO}$로 수렴함을 알 수 있다.

이제부터 정리 3.3의 역이 성립하는지 보자. 즉, 외접원을 갖는 다각형에 대하여 외접원 위의 임의의 한 점으로부터 다각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하면 이 도형은 정다각형인지 알아보도록 하자.
다음 직사각형을 살펴보면 위의 역은 성립하지 않음을 알 수 있다.



위의 직사각형 $ABCD$의 외접원 위에 임의의 점 P에 대해서 $\triangle PAC$와 $\triangle PBD$는 직각삼각형이다.($\because$ $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$가 외접원의 지름)
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$가 성립한다.
따라서 정리 3.3의 역은 성립하지 않음을 알 수 있다.

다음 정리는 정리 3.5의 역이 성립하지 않음을 직사각형이 아닌 n이 짝수일 때, 임의의 n각형에 대해서도 성립하지 않음을 보여주는 정리이다.

정리 3.6
외접원을 갖는 임의의 n각형에 대하여 n이 짝수일 때, 외접원 위의 임의의 점으로부터 n각형의 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하여도 이 n각형이 정n각형은 아니다.

증명
외심을 갖는 n이 짝수인 n각형은 외접원 위의 임의의 점P와 n각형의 꼭짓점 두 개를 연결하여 외심을 지나는 직선을 연결하면 항상 직각삼각형이 나오게 된다. n각형의 꼭짓점 두 개를 연결하여 외심을 지나는 직선은 $\frac{n}{2}$개 이므로 이들은 외접원의 지름의 길이를 l이라 하면 n각형의 외접원 위의 임의의 점으로부터 n각형 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 항상 $\frac{nl^2}{2}$가 된

다.
따라서 외접원을 갖는 임의의 n각형에 대하여 n이 짝수일 때, 외접원 위의 임의의 점으로부터 n각형의 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하지만 이 n각형이 정n각형일 필요는 없다.

정리 3.5의 증명방법을 이용하면 다음을 쉽게 알 수 있다.

정리 3.7
정다각형의 외심을 중심으로 갖는 임의의 원에 대하여 원 위의 임의의 점으로부터 정다각형 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

정리3.6은 정리3.3의 다른 증명방법을 보면 쉽게 생각할 수 있다. 결국 n이 짝수인 임의의 n각형은 $\frac{n}{2}$개의 외접원의 지름이 되는 선분들의 양 끝점들을 이은 다각형이다. 하지만 n이 홀수인 경우 및 정리3.6의 증명에서 나온 특수한 n이 짝수인 다각형을 제외한 다른 다각형들에 관해서는 다음 연구자에게 맡기도록 한다.

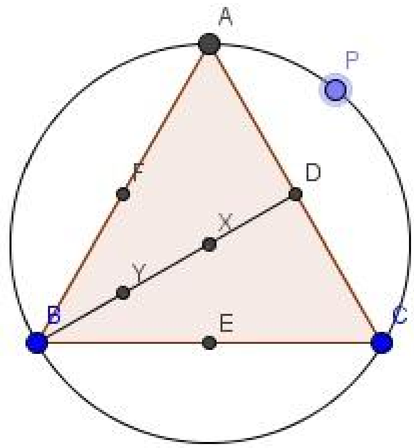
4장 정사면체와 외접구의 성질

3장에서는 정n각형의 외접원 위의 임의의 점으로부터 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 일정하다는 것을 증명하였다. 이 장에서는 차원확장을 시킨 정사면체에 대하여 알아보도록 하자.

정사면체에서의 증명을 하기 위해서는 새로운 증명법이 필요한데 정리3.1과 같은 증명을 조금 다른 방법으로 증명해보자.

정리 4.1
정삼각형의 외접원 위의 임의의 점에서부터 정삼각형의 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

증명



ⅰ)점P가 점A, 점B, 점C인 경우

점P가 점A인 경우를 보면 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$는 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$이다. 즉, 정삼각형의 한변의 길이는 일정하므로 점P가 점A인 경우는 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 일정하다.

같은 방법으로 점P가 점B일 경우와, 점C인 경우도 동일하게 증명이 된다.

ⅱ)점P가 점A, 점B, 점C 모두 아닌 경우

점P가 원X위의 임의의 점이라고 하였으므로 $\triangle PAC$를 만들 수 있다.

$\triangle PAC$에 대하여 정리 2.1을 이용하면
$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PD}^2+\overline{AD}^2)\cdots\cdots\cdots①$
같은 방법으로 $\triangle PBX$에 대하여 정리 2.1을 이용하면
$\overline{PB}^2+\overline{PX}^2=2(\overline{PY}^2+\overline{XY}^2)\cdots\cdots\cdots②$
또, $\triangle PYD$에 대하여 정리 2.1을 이용하면
$\overline{PD}^2+\overline{PY}^2=2(\overline{PX}^2+\overline{XY}^2)\cdots\cdots\cdots③$
①+②+③을 하면
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PX}^2+\overline{PY}^2+\overline{PD}^2=2\overline{PD}^2+2\overline{PX}^2+2\overline{PY}^2+2\overline{AD}^2+4\overline{XY}^2$
$\Rightarrow \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{PX}^2+\overline{PY}^2+\overline{PD}^2+2\overline{AD}^2+4\overline{XY}^2$
③을 오른쪽 식에 대입해보면
$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=\overline{PX}^2+(2\overline{PX}^2+2\overline{XY}^2)+2\overline{AD}^2+4\overline{XY}^2\\&=2\overline{AD}^2+3\overline{PX}^2+6\overline{XY}^2\end{aligned}$$
이때, $\overline{AD}$는 정삼각형의 한 변의 길이의 절반, $\overline{PX}$는 원의 반지름의 길이, $\overline{XY}$는 정삼각형의 높이($\overline{BD}$)의 $\frac{1}{3}$이므로 $\overline{AD}$, $\overline{PX}$, $\overline{XY}$ 모두 길이가 일정하므로 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값은 일정하다.

정리 4.1은 정삼각형의 무게중심의 특수성을 이용한 증명방법이다. 본 증명으로 들어가기 전에 몇 가지 정리를 보고가자.

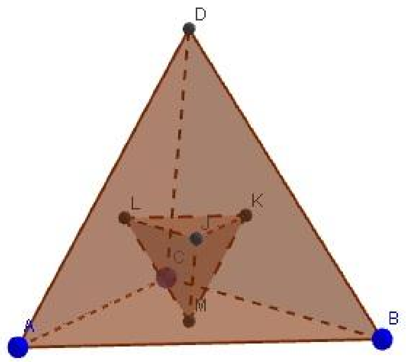
정리 4.2
정사면체의 외심과 무게중심은 같다.

증명
정사면체의 무게중심은 정사면체의 각 꼭짓점에서 마주보는 정삼각형의 무게중심으로 이은 선분(중선)들의 교점과 같다[3]. 이때, 정사면체이므로 각 중선들의 길이가 모두 같으므로 정사면체의 무게중심으로부터 각 꼭짓점까지의 거리도 같다. 즉, 무게중심으로부터 각 꼭짓점까지의 거리가 일정하므로 무게중심은 외심이다.

정리 4.3
정사면체의 각 면의 무게중심을 연결하여 만든 다면체는 정사면체이며 이 과

정을 무한히 반복하면 정사면체의 외심으로 가게 된다.

증명



정사면체의 쌍대다면체는 정사면체이므로 정다면체의 각 면의 무게중심을 연결하여 만든 다면체는 정다면체이다.

$A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $C=(c_1,c_2,c_3)$, $D=(d_1,d_2,d_3)$, $\triangle ABC$의 무게중심을 점M, $\triangle ACD$의 무게중심을 점L, $\triangle ABD$의 무게정심을 점J, $\triangle BCD$의 무게중심을 점K라 하자.

이때, 정사면체 $A-BCD$의 무게중심의 좌표는 $(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}, \frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}, \frac{a_3+b_3+c_3+d_3}{4})$인데 이는

$M=(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3})$,

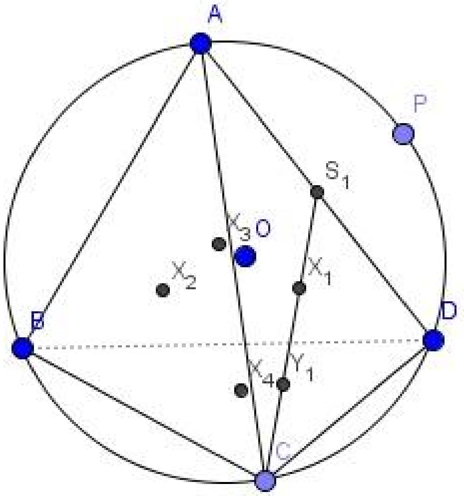
$J=(\frac{a_1+b_1+d_1}{3}, \frac{a_2+b_2+d_2}{3}, \frac{a_3+b_3+d_3}{3})$,

$K=(\frac{b_1+c_1+d_1}{3}, \frac{b_2+c_2+d_2}{3}, \frac{b_3+c_3+d_3}{3})$,

$L=(\frac{a_1+c_1+d_1}{3}, \frac{a_2+c_2+d_2}{3}, \frac{a_3+c_3+d_3}{3})$ 이고, 정사면체 $M-JKL$의 무게중심은$(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}, \frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}, \frac{a_3+b_3+c_3+d_3}{4})$ 이므로 정사면체의 각 면의 무게중심을 연결하여 만든 정사면체는 기존의 정사면체의 무게중심과 같다. 이 과정을 무한히 반복하게 되면 무게중심 한 점으로 수렴하게 되는데 정리 4.2에 의하여 무게중심과 외심은 같으므로 정사면체의 외심으로 수렴하게 된다.

정리 4.4
정사면체의 외접구 위의 임의의 점으로부터 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

증명



i)점P가 점A, 점B, 점C, 점D인 경우

점P가 점A인 경우를 보면 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$는 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2$이다. 즉, 정사면체의 한변의 길이는 일정하므로 점P가 점A인 경우는 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$의 값이 일정하다.

같은 방법으로 점P가 점B일 경우와, 점C, 점D인 경우도 동일하게 증명이 된다.

ii)점P가 점A, 점B, 점C, 점D 모두 아닌 경우

점P가 구O위의 임의의 점이라 하였으므로 정사면체 $A-BCD$의 한 면인 $\triangle ACD$와 점P에 대한 파푸스의 중선정리를 이용하면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2\overline{AS_1}^2+3\overline{PX_1}^2+6\overline{X_1Y_1}^2$이 되는데 $\overline{AS_1}$은 정사면체 $A-BCD$의 한 변의 길이($\overline{AD}$)의 $\frac{1}{2}$이므로 일정하고, $\overline{X_1Y_1}$은 $\triangle ACD$의 높이 $\overline{CS_1}$의 $\frac{1}{3}$이므로 일정하다. 하지만 $\overline{PX_1}$은 구O위의 임의의 한 점에서

$\triangle ACD$의 무게중심X_1에 연결한 선분이므로 이 길이는 알 수 없다.
같은 방법으로 $\triangle ABC$의 무게중심 X_2까지의 길이 $\overline{PX_2}$ 역시 모르고 $\triangle ABD$의 무게중심 X_3까지의 길이 $\overline{PX_3}$와 $\triangle BCD$의 무게중심 X_4까지의 길이 $\overline{PX_4}$의 길이도 모르게 된다.
즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$는
$\triangle ACD$에 대한 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$
$\triangle ABC$에 대한 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
$\triangle ABD$에 대한 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$
$\triangle BCD$에 대한 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$
을 모두 더하면 $3(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2)$가 된다.
여기서 $3\overline{PX_1}^2+3\overline{PX_2}^2+3\overline{PX_3}^2+3\overline{PX_4}^2$의 길이만 알면 되는데 X_1, X_2, X_3, X_4는 $\triangle ACD$, $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$의 무게중심이므로 새로운 정사면체 $X_1-X_2X_3X_4$를 만들 수 있다. 이 정 사면체로 위와 같은 방법을 사용한다면 각 면에 대한 무게중심을 연결한 새로운 정사면체가 나타나게 될 것이고 이 과정을 무한 번 반복하게 된다면 정리4.3에 의해 정사면체 $A-BCD$의중심(또는 구O의중심)으로 가게 된다. 즉, $\overline{PO}$에 관한 길이가 되므로 $\overline{PO}$는 구의 반지름이므로 일정하다.
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$의 값은 일정하다.

정리 4.4의 증명방법을 이용하면 다음을 쉽게 알 수 있다.

정리 4.5
정사면체의 외심을 중심으로 갖는 임의의 구에 대하여 구의 한 점에서부터 각 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합은 일정하다.

참고문헌

[1] 강성권 외 5명, 『미분적분학』, 경문사, 2009.

[2] 류한영 외 3명, 『KMO BIBLE 한국수학올림피아드 바이블 프리미엄 제3권 기하』, 씨실과 날실, 2015.

[3] 이주연, "공간 체바 정리를 이용한 사면체의 연구", 수학교육석사학위논문, 연세대학교, 2009, 33-35.