creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[UCI]I804:24011-200000266078

2017년 2월
교육학석사(수학)학위논문

아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 분류

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

심 서 영

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 분류

A classification of posets which have the ideal isomorphic properties

2017년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

심 서 영

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 분류

지도교수 오 동 렬

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2016년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

심 서 영

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

심서영의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장	조선대학교 교수	안 영 준 인
심사위원	조선대학교 교수	김 진 홍 인
심사위원	조선대학교 교수	오 동 렬 인

2016년 12월

조선대학교 교육대학원

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

CONTENTS

ABSTRACT
1. 소 개 ····· 1

2. 부분순서집합 ····· 2

3. 아이디얼 동형성질····· 7

4. 강한 아이디얼 동형성질 ·····16

참고문헌 ·····24

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

ABSTRACT

A classification of posets which have the ideal isomorphic properties

Shim, Seo Yeong
Advisor : Prof. Oh, Dong Yeol
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

Partially ordered sets have been of interest and have had important applications in many areas including combinatorics and coding theory. It is very difficult to classfy the posets which are not isomorphic. In the thesis, we introduce an ideal of poset, and define an ideal isomorphic properties in posets. We give a necessary condition for posets to admit an ideal isomorphic property. Finally we classify all the posets which admit a strong ideal isomorphic property.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제1장 소개

부분순서집합(partially ordered set)은 집합론, 조합이론, 부호이론(coding theory), 대수학 등 수학 전 분야에서 폭넓게 나타나고 있으며, 그 응용성도 다양하다. 특히 부호 이론에서 1995년에 Brualdi [1]등에 의하여 부분순서부호(poset codes)가 처음 소개된 이후 부분순서부호에 대한 활발한 연구가 이루어지고 있다 [2,3,4].

동형이 아닌 부분순서집합을 분류하는 것은 이 분야 연구자들에게 굉장히 중요한 연구주제이다. 그러나 동형이 아닌 부분순서집합을 모두 분류하는 것은 거의 불가능에 가까운 일이다. 따라서 특정한 성질을 갖는 부분순서집합을 분류하고자 한다.

이 논문에서는 부분순서집합에서 아이디얼 동형성질을 정의하고, 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합을 분류하고자 한다. 2장에서는 이 논문에 필요한 부분순서집합과 관련된 부분에 대한 정의들과 그 기본적인 성질들은 제시한다. 부분순서집합에서 순서동형의 의미와 아이디얼에 대한 정의가 소개된다. 3장에서는 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합이 되기 위한 필요조건으로 0단계 원소 직후자의 개수에 대한 특징을 찾았다. 4장에서는 적절한 조건하에서 아이디얼 동형성질(강한 아이디얼 동형성질)을 갖는 부분순서집합을 완전히 분류하였다. 구체적으로 강한 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서구조는 세 가지 구조 밖에 없음을 밝혔다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제2장 부분순서집합

이 장에서는 부분순서집합의 정의 및 성질에 대하여 소개하도록 하며 그 내용은 대부분 [5]를 참고하였다.

정의2-1: 집합 P상의 관계 '$\leq$'가 다음 세 가지 조건을 만족하면 **부분순서집합** (partially ordered set) 이라고 하고 $(P,\leq)$로 나타내기도 한다. 한편 부분순서를 **반순서** 라고도 한다.

(1) 반사율 (reflexive) : 모든 $x \in P$에 대하여 $x \leq x$

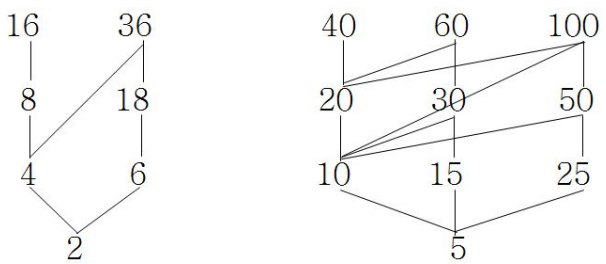
(2) 반대칭률 (anti-symmetric) : $x \leq y$이고 $y \leq x$이면

$x = y$

(3) 추이율 (transitive) : $x \leq y$이고 $y \leq z$ 이면 $x \leq z$

예제 2-1-1 . 자연수집합 N에서 "x는 y의 배수"라는 관계는 N에서 부분순서이다.

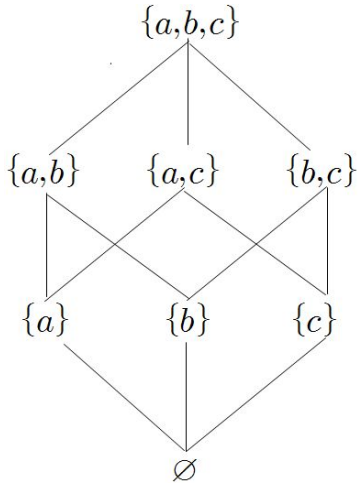
순서관계 '$\leq$'를 '—'으로 나타내서 표를 만들면 알기 쉽다(하세 다이아그램)



예제 2-2-2 . $X = \{a,b,c\}$ 일 때 X의 멱집합 $P(x)$는 포함관계 '$\subseteq$'에 의하여 부분순서집합이다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



정의2-2: P를 부분순서집합이라 하자. $a,b \in P$에 대하여 $a < b$ 이고 $a < c < b$가 되는 원소 c 가 P에 존재하지 않을 때 b를 a의 **직후자** ($Imm-\mathrm{succ}\ (a)$), a를 b의 **직전자** ($Imm-pred(b)$) 라고 한다.

예2-2-2에서 $\{a,b\}$는 $\{a\}$의 직후자이고, $Imm-\mathrm{succ}\ (\{a\})=\{a,b\}$이다. 또한 $\{a,b\}$는 $\{a,b,c\}$의 직전자이므로, $Imm-pred(\{a,b,c\})=\{a,b\}$이다.

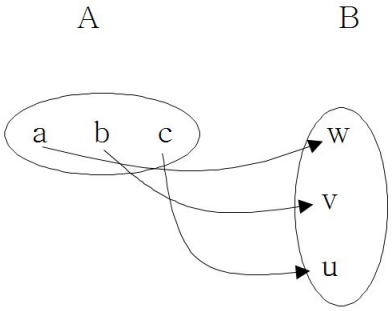
정의2-3: 부분순서집합 A,B 에 대하여 함수 $f:A \to B$ 가 조건$\forall x,y \in A \quad x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ 을 만족하면 f를 **순서보전함수** (order preserving function) 라고 한다.

정의2-4: 부분순서집합 A,B에 대하여 함수 $f:A \to B$ 가 전단사함수이고 $\forall x,y \in A \quad , \ x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$ 이면 f를 **순서동형사상**(order isomorphic function) 이라고 하고, $A \simeq B$로 나타낸다.

예2-3-1 집합 $A=\{a,b,c\}, B=\{u,v,w\}$에 대하여 a,b,c는 순서관계가 없고, $u < v < w$의 순서관계가 있다고 하자. 그러면 A,B는 부분순서집합이다. 이때 집합 A에서 집합 B로 가는 다음 함수를 생각하자.

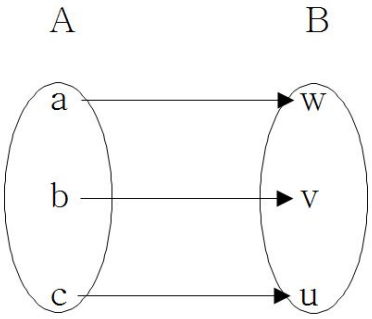
dCollection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



위의 함수는 순서보존함수이나 순서동형은 아니다.

예 2-4-1 집합$A=\{a,b,c\}, B=\{u,v,w\}$ 에 대하여 $a<b<c,\ u<v<w$의 순서관계가 있다고 하자. 그러면 A,B는 부분순서집합이다. 이때 집합 A에서 집합 B로 가는 다음 함수를 생각하자.



위의 함수는 순서동형사상이다.

다음 정리는 두 부분순서집합이 순서동형이 되기 위한 동치조건을 나타내는 것으로 그 증명은 [5]에 잘 나와 있으나 여기에서 다시 한번 증명하도록 한다.

정리2-5: 부분순서집합 A,B에 대하여 함수 $f:A\to B$ 가 전단사라고 하자. 그러면 함수 f 가 순서동형사상이기 위한 필요충분조건은 함수 f 와 역함수 f^{-1} 가 모두 순서보존 함수일 때이다.

증명:⇒) 함수 f 가 순서동형사상이므로 f는 순서보존함수이다. 그리고 함수 f 가 전단사이므로 임의의 $x\in A$ 에 대하여 $f^{-1}(f(x))=x$ 가 성립한다. 이때 $f(x)$와 $f(y)$를 집합 B의 임의의 원소라 하면 $f(x)\le f(y)\ \Leftrightarrow x\le y\Rightarrow f^{-1}(f(x))\le f^{-1}(f(y))$ 이다. 그러므로 역시 f^{-1} 는 순서보존함수이다.

Collection @ chosun

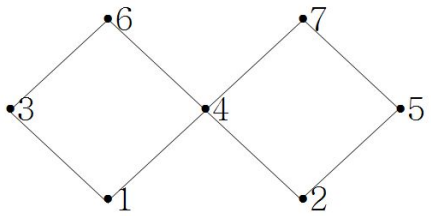
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$\Leftarrow$)역으로 f 와 f^{-1} 가 순서보존함수라 하자. 그러면 $f(x) \le f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) \le f^{-1}(f(y)) \Rightarrow x \le y$ 이고 f가 순서보존함수 이므로 $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$도 성립한다. 그러므로 함수 f 는 순서동형사상이다.

정의2-6: P를 부분순서 집합이라고 하자. $(\varnothing \ne)$ $I \subseteq P$ 인 I에 대하여 다음 조건을 만족하면 I를 P의 **아이디얼** 이라고 한다:

$\forall x \in P, y \in I$ 에 대하여, $x \le y \Rightarrow x \in I$

예제2-6-1 : • : 원소, —: 순서관계



I_1={1,3,4} : 아이디얼이 아니다.($\because$ $4 \in I_1, 2 \in P$, $2 < 4$인 관계가 있지만 $2 \notin I_1$이다.)

I_2={1,3} : 아이디얼이다.

I_3={1,2,3,4} : 아이디얼이다.

P를 부분순서집합이라고 하고 I를 P의 부분집합이라고 하면$P \setminus I = I^c$을 의미한다.

참고 : P가 부분순서집합이고 I가 아이디얼이면 $P \setminus I$ 도 부분순서집합이 된다.

증명 :

①반사율 : 모든 $x \in P \setminus I$에 대하여 $x \in P$이고 P는 부분순서 집합이므로 $x < x$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이다.

②반대칭률 : 모든 $x,y \in P \setminus I$ 에 대하여 $x,y \in P$이므로 $x < y$이고 $y < x$이면 $x = y$ 이다.

③추이율 : 모든 $x,y,z \in P \setminus I$ 에 대하여 $x,y,z \in P$ 이므로 $x < y$ 이고 $y < z$ 이면 $x < z$ 이다.

정의 2-7 : P가 부분순서집합일 때 P의 두 원소 x,y에 대하여 $x \leq y$ 이거나 $y \leq x$ 이면 두 원소 x,y 는 **비교가능** (comparable)이라고 한다. 부분순서집합 P의 임의의 두 원소가 비교가능하면 P를 **완전순서집합** (totally ordered set) 이라고 한다.

보조정리 2-8 : 부분순서집합의 모든 부분집합은 부분순서집합이다. 또한 완전순서집합의 모든 부분집합은 완전순서집합이다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

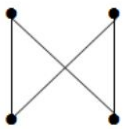
제3장 아이디얼 동형성질

2장에서 부분순서집합의 아이디얼에 대해 살펴보았다. 이 장에서는 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합을 정의하고 그 부분순서집합의 성질을 살펴보도록 하자. 구체적으로 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 필요조건을 찾도록 한다.

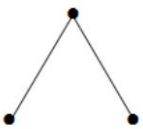
정의3-1: 부분순서집합 P가 다음 성질을 만족하면 P가 **아이디얼 동형성질** (ideal isomorphic property) 을 갖는다고 한다.

P의 임의의 두 아이디얼 I_1, I_2 에 대하여 $I_1 \cong I_2$**이면** $P \setminus I_1 \cong P \setminus I_2$이다.

예제 3-1-1 아이디얼 동형성질이 있는 부분순서집합

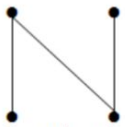


[그림 1]



[그림 2]

예제 3-1-2 아이디얼 동형성질이 없는 부분순서집합



[그림 1]

[그림 2]

부분순서집합 P에 대하여 P의 단계집합 $\lambda_i(P)$ 를 다음과 같이 귀납적으로 정의한다.

$$P_1 := P \setminus Min(P), \qquad \lambda_0(P) = Min(P)$$

$$P_2 := P \setminus Min(P_1), \qquad \lambda_1(P) = Min(P_1)$$

Collection @ chosun

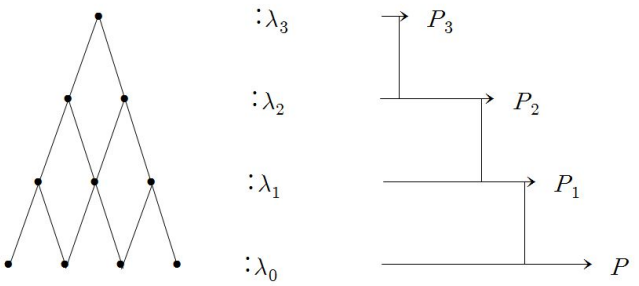
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$P_3 := P \setminus Min(P_2), \qquad \lambda_2(P) = Min(P_2) \qquad \ldots\ldots$$

부분순서집합 P가 길이 $k+1$의 집합이면 $P = \bigcup_{i=0}^{k} \lambda_i(P)$ 라고 표기하자.

다음은 길이가 4인 부분순서집합의 예제이다.

예제 : $P = \bigcup_{i=0}^{3} \lambda_i(\mathrm{P})$



P는 위의 부분순서집합 전체를 나타내는 것이고, λ_0는 부분순서집합의 0레벨, 즉 가장 아래에 위치한 집합을 나타낸 것이고, P_1은 P집합에서 λ_0를 뺀 나머지 집합을 의미한다.

이제 아이디얼 동형성질을 갖는 길이가 2인 부분순서집합의 형태를 생각해보자.

① $|\lambda_1(P)| = 1$인 경우 ;

[그림 1]

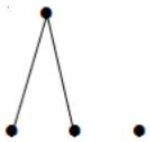
Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[그림 2]

[그림 3]

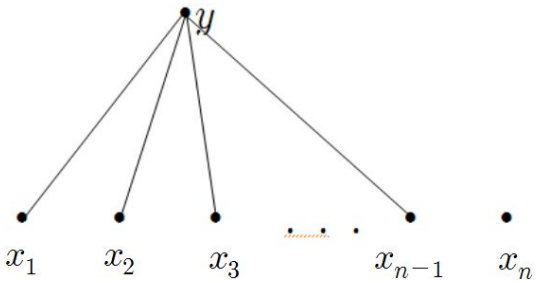
[그림 4]



[그림 5]

[그림 6]

위 부분순서집합의 구조를 보면 [그림 1], [그림 2], [그림 4]는 아이디얼 동형성질을 갖지만 [그림 3], [그림 5], [그림 6]은 아이디얼 동형성질을 갖지 않는다.



만약 $\lambda_0(P)=\{x_1,x_2, \ldots ,x_n\}$이고 $\lambda_1(P)=\{y\}$일 때, $x_i<y$ (i = 1, 2, ... , $n-1$) 이고 x_n은 y와 순서관계가 없는 경우를 생각해보자.

$\lambda_0(P)$의 부분집합 중에서 $A=\{x_n\}$, $B=\{x_1\}$라고 하면 A와 B는 동형이다. 아이디얼 동형성질은 갖는지 확인하기 위하여 $P\setminus A$, $P\setminus B$ 를 생각해보자. $P\setminus A$는 x_n을 포함하지 않는 집합이고 $P\setminus B$ 는 x_n을 포함하는 집합이므로 $P\setminus A$상에서 $|\{x_i\in\lambda_0(P) \mid x_i < y\}|=n-1$이다. 그러나 $P\setminus B$상에서는 $|\{x_i\in\lambda_0(P) \mid x_i < y\}|=n-2$ 이 된다.

그러므로 $P\setminus A \ncong P\setminus B$ 이다.

따라서 $\lambda_0(P)$의 모든 원소가 $\lambda_1(P)$의 한 개의 원소와 순서관계가 있어야 한다.

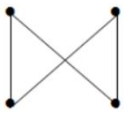
Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

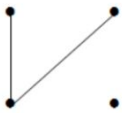
② $|\lambda_1(P)|$=2인 경우 ;

[그림 1]

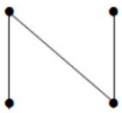
[그림 2]



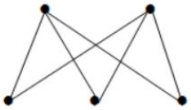
[그림 3]



[그림 4]



[그림 5]



[그림 6]

[그림 7]

[그림 8]

[그림 9]

$|\lambda_1(P)|$=2인 위의 구조에서 [그림 1], [그림 2], [그림 3], [그림 6]만 아이디얼 동형성질을 갖는다. 한 원소가 추가될 때 많은 구조가 형성된다. 위의 집합 구조에서 보면 아이디얼 동형성질을 갖는 구조의 특징은 모든 $x_i \in \lambda_0(P)$에 대하여 $|Imm-\mathrm{succ}\ (x_i)|$가 일정함을 알 수 있다.

이제 길이가 3인 부분순서집합의 구조를 간단히 살펴보자.

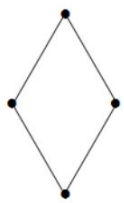
[그림 1]

Collection @ chosun

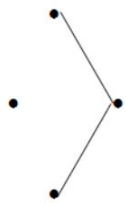
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[그림 2]

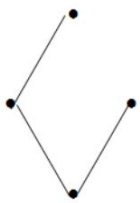
[그림 3]



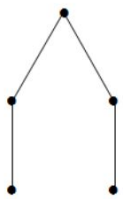
[그림 4]



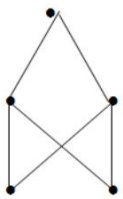
[그림 5]



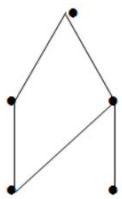
[그림 6]



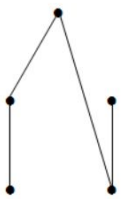
[그림 7]



[그림 8]



[그림 9]



[그림 10]

위의 부분순서집합에서 아이디얼 동형성질을 갖는 구조는 [그림 1], [그림 2], [그림 4], [그림 7], [그림 8]이다. 이 부분순서집합은 모든 $x_i \in \lambda_0(P)$에 대하여 $Imm-\mathrm{succ}\ (x_i)$와 각 단계집합의 교집합의 개수가 일정한 상수임을 보이고 있다. 위 구조들이 공통적으로 갖는 특징들을 정리해보자.

정리3-2 : 만약 부분순서집합 $P=\bigcup_{i=0}^{k}\lambda_i(P)$가 아이디얼 동형성질(Ideal isomorphic property) 을 갖는다면 각각의 $x \in \lambda_0(P)$에 대하여 $Imm-\mathrm{succ}\ (x)$의 원소의 개수는 일정한 상수이다. 더욱이 $|\ Imm-\mathrm{succ}\ (x) \cap \lambda_i(P)\ |$는 각각의 i에 대하여 일정한 상수이다. 즉, $|\ Imm-\mathrm{succ}\ (x) \cap \lambda_i(P)\ |$는 $x \in \lambda_0(P)$의 선택에 달려 있는 것이 아니라 i의 선택에 달려있다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

증명: $P=\bigcup_{i=0}^{k}\lambda_i(P)$이고 $\lambda_i(P)\neq\varnothing$라고 가정하자.

$x_i\in\lambda_i(P)$에 대하여 $x_0<x_1<x_2<\ \dots\ <x_k$ 를 만족하는 길이가 $k+1$인 사슬을 선택하자.

임의의 $x\in\lambda_0(P)$, $x_0\in\lambda_0(P)$ 와 $1\leqq i\leqq k$ 에 대하여

$|\ \lambda_i(P)\ \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x)\ |=\ |\ \lambda_i(P)\ \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)\ |$ 임을 보이자.

A= Min(P)\$\{x_0\}$, B= Min(P)\$\{x\}$ 이면 A≅B 이고 P는 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합이기 때문에 P\A ≅ P\B 이므로 π: P\A → P\B 인 함수가 있다. $x_0<x_1<x_2<\ \dots\ <x_k$ 는 P\A 상에서 길이가 $k+1$인 사슬이므로 , P\B 상에서도 길이가 $k+1$인 사슬을 갖는다.

Min(P\B) ⊆ $\{x\}\cup\lambda_1(P)$ 이므로 P\B상에서 길이가 $k+1$인 사슬은 x로부터 출발해야 한다. 따라서 $\pi(x_0)=x$이다. $y\in\lambda_i(P)\ \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)$ 이면 $x_0<z<y$ 를 만족하는 $z\in P$인 원소는 존재하지 않는다.

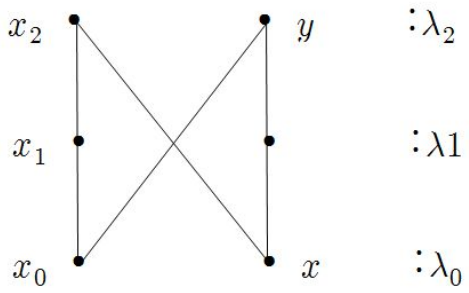
더욱이 $x_j^{'}\in\lambda_j(P)$ (j = 1,2,3, ... , i-1)에 대하여 π: P\A → P\B , $x=\pi(x_0)<\pi(y)$ 이고 $\pi(x_1^{'})<\pi(x_2^{'})<\ \dots\ <\pi(x_{i-1}^{'})<\pi(y)$ 이므로 $x_1{}'<x_2^{'}<\ \dots\ <x_{i-1}^{'}$ 를 만족하는 길이 i-1 의 사슬이 있다. 그러므로 $\pi(y)\ \in\ \lambda_i(P)\ \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x)$ 이고 임의의 $x\in\lambda_0(p)$ 에 대하여 $|\ \lambda_i(P)\ \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x)\ |=\ |\ \lambda_i(P)\ \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)\ |$ 이다.

다음은 정리 3-2의 간략한 예시들이다.

예제 3-2-1

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

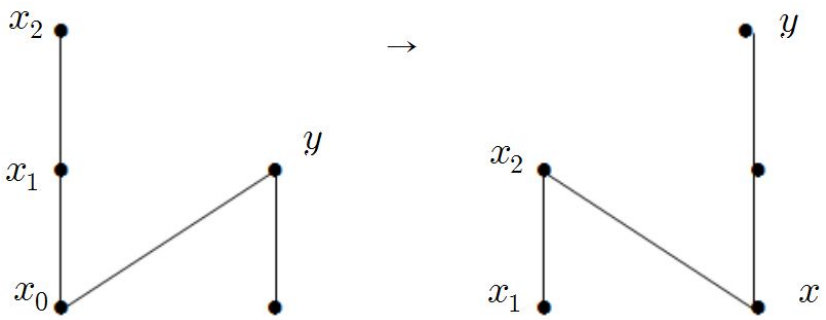


$A = Min(P) \setminus x_0,\ B = Min(P) \setminus x \ \Rightarrow\ A \cong B$

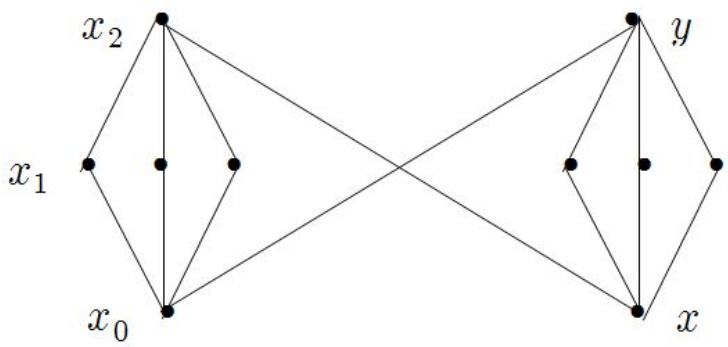
$\pi : P \setminus A \to P \setminus B$ 이면 $\pi(x_0) = x,$

$y \in \lambda_2(P) \cap Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)\ ,\ \pi(y) \in \lambda_2(P) \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x)$

$\pi : P \setminus A \to P \setminus B$



예제 3-2-2.



Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

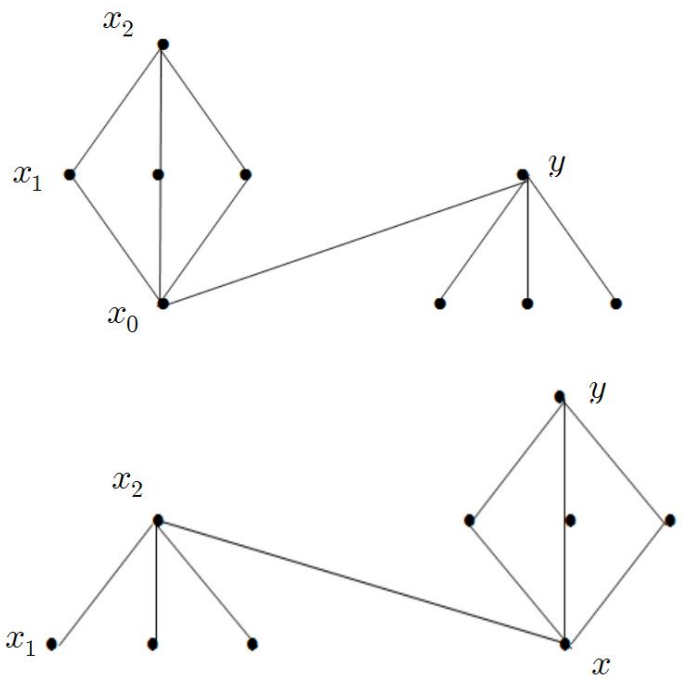
$A = Min(P) \setminus x_0,\ B = Min(P) \setminus x \quad \Rightarrow A \cong B$

$\pi : P \setminus A \to P \setminus B$ 이면 $\quad \pi(x_0) = x,$

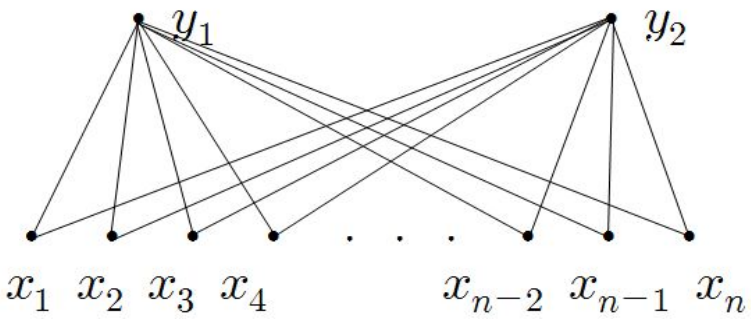
$P \setminus A,\ P \setminus B$ 집합에서 $\lambda_0(P)$의 원소의 개수는 4개이다.

$y \in \lambda_2(P) \cap Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)\ ,\ \pi(y) \in \lambda_2(P) \cap\ Imm-\mathrm{succ}\ (x)$

$\pi : P \setminus A \to P \setminus B$;



아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합은 정리3-2를 만족한다. 그 역이 성립하는지 살펴보도록 하자. 다음 2단계의 부분 순서집합들을 고려해보자.

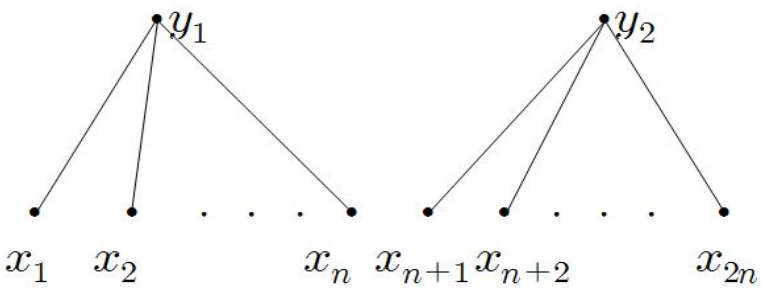


Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

위의 부분순서집합은 분명히 아이디얼 동형성질을 갖고 정리3-2의 역도 성립한다. 즉 각각의 $x \in \lambda_0(P)$에 대하여 $Imm-\mathrm{succ}\ (x)$의 원소의 개수는 2인 상수이고 $|Imm-\mathrm{succ}\ (x) \cap \lambda_i(P)|$는 각각의 i 에 대하여 역시 2인 상수가 되는 부분순서집합으로서 아이디얼 동형성질을 갖는다.

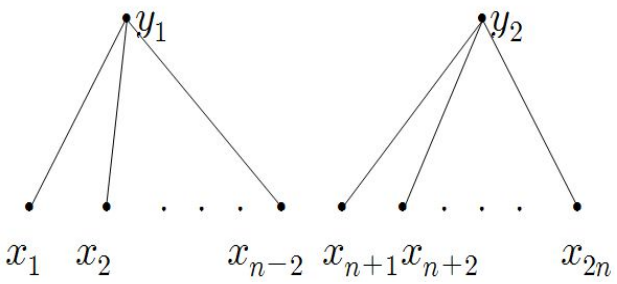
그러나 다음 부분순서집합을 생각해보자.



위 부분순서집합에서 동형인 두 개의 부분집합을 A, B 라고 하자. $A = \{x_{n-1}, x_n\}$, $B = \{x_n, x_{n+1}\}$ 이면 $A \simeq B$ 이다.

아이디얼 동형성질을 갖기 위해서는 $P \setminus A \simeq P \setminus B$ 임을 보이면 된다.

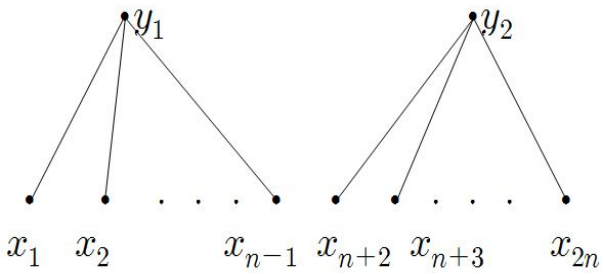
$P \setminus A$:



$P \setminus B$:

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



$P \setminus A$ 집합에서는 $|\{x_i | x_i < y_1\}| = n-2$, $|\{x_j | x_j < y_2\}| = n$ 이다. $P \setminus B$ 집합에서는 $|\{x_i | x_i < y_1\}| = n-1$, $|\{x_j | x_j < y_2\}| = n-1$ 이다(단, $x_i, x_j \in \lambda_0(P)$). 그러므로 $P \setminus A \not\cong P \setminus B$ 이다. 위 부분순서집합은 $|Imm-\mathrm{succ}\ (x_i)| = 1$로 일정하고 $|Imm-\mathrm{succ}\ (x_i) \cap \lambda_1(P)| = 1$로 일정한 상수이지만 아이디얼 동형성질을 갖지 않는 부분순서구조이다. 따라서 정리3-2의 역은 성립하지 않는다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제4장 강한 아이디얼 동형성질

이 절에서는 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 구조를 분류하도록 한다. 정리 3-2로는 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 구조를 분류하는 것은 매우 어렵다. 따라서 제한된 조건을 첨가한 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 구조를 분류하도록 한다.

부분순서집합 P와 $x \in P$에 대하여 $N(x) = Imm-\mathrm{succ}\ (\mathrm{x}) \cup Imm-pred(x)$로 정하자.

보조정리4-1 : $P = \bigcup_{i=0}^{k} \lambda_i(P)$가 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합이라고 하자. 만약 각각의 i와 $y \in \lambda_i(P)$ 에 대하여 $|\lambda_i(P)| = m$이고 $N(y) \subseteq \lambda_{i-1}(P) \cup \lambda_{i+1}(P)$ 이면 임의의 $x \in \lambda_1(P)$ 에 대하여 $|Imm-\mathrm{P}red(x)|$는 일정한 수(상수)를 갖는다.

증명: P가 가정을 만족하는 부분순서집합이라고 하자. 정리 3-2 에 의하여 임의의 $x_0 \in \lambda_0(P)$ 에 대해 $|Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)|$는 일정한 수 l을 갖는다. 역시 임의의 부분집합 $A \subseteq \lambda_0(P)$ 에 대하여 $Min(P \setminus A) \subseteq \lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$ 이다.

임의의 $x \in \lambda_1(P)$ 에 대해 $|Imm-pred(x)|$이 상수가 아니라고 가정해 보자. 각각의 x에 대해 $|Imm-pred(x)|$값 중 최솟값을 l_1 이라고 나타내자. $|\lambda_0(P)| = |\lambda_1(P)| = m$ 이므로 $1 \le l_1 < l \le m$ 는 당연하다. $\mathrm{S} := \{\mathrm{y} \in \lambda_1(P) \mid Imm-\mathrm{P}red(y) = l_1\}$ 인 집합 S에 대해 명백히 $1 \le |\mathrm{S}| < m$ 이다. 그러므로

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$\{Imm-\mathrm{Pred}(y) \mid y \in S\} \subsetneq \binom{[m]}{l_1}$ .....(1) ,

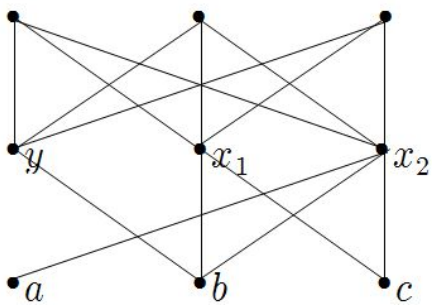
$\binom{[m]}{l_1}$는 원소의 개수가 m개인 집합에서 l_1개의 원소를 갖는 부분집합의 모음이다.

$|\lambda_0(P)|=m$ 이기 때문에 $|B| = l_1$ 인 경우에 한해서 위의 방정식 (1) 번의 좌변 집합에 포함되지 않는 $\lambda_0(P)$ 의 부분집합 B를 선택할 수 있다. 만약 $\lambda_1(P)$ 에 속해 있는 x에 대하여 B의 원소인 모든 z와의 관계가 $x > z$ 이라면, x는 S의 원소가 아니다. 그렇기 때문에 $|Imm-pred(x)| > l_1$ 이다. 그러므로 $|Min(P \setminus B)| = |Min(P)| - |B|$ 이다.

y가 S의 원소인 경우에 B와 $Imm-\mathrm{Pred}(y)$가 같은 개수를 가지는 $\lambda_0(P)$의 부분집합이므로 $B \cong Imm-\mathrm{Pred}(y)$ 이다. 따라서 $P \setminus B \cong P \setminus Imm-\mathrm{Pred}(y)$ 이다.

그러나 y는 $P \setminus Imm-\mathrm{Pred}(y)$ 에서 최소인 원소이므로 $|Min(P \setminus Imm-\mathrm{Pred}(y))| \geq |Min(P)|-|Imm-\mathrm{Pred}(y)|+1$ 이고, 이것은 $P \setminus B \cong P \setminus Imm-\mathrm{Pred}(y)$ 에 모순된다. 따라서 $|Imm-pred(x)|$ 는 상수이다.

보조정리4-1을 만족하지 않는 부분순서집합 P를 생각해보자

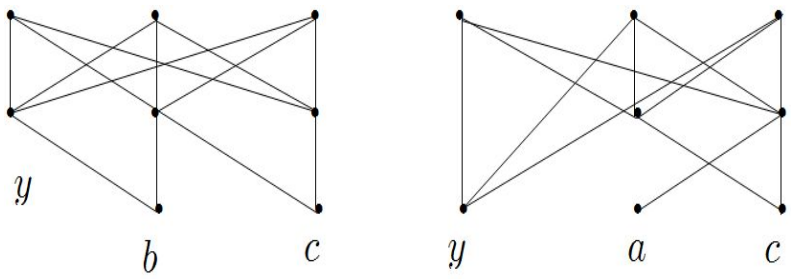


$|\lambda_i(P)|=3$, $Imm-\mathrm{Pred}(y)=b$ 이므로 $|Imm-\mathrm{Pred}(y)|=1= l_1$ 이고 $S := \{y \in \lambda_1(P) \mid Imm-\mathrm{Pred}(y)= l_1\}$이므로 $S=\{y\}$이다. 위 증명에서 의미하는 $\binom{[m]}{l_1}=\{a\}, \{b\}, \{c\}$ 이므로 $B=\{a\}, \{c\}$ 가 된다. $B=\{a\}$라고 놓는다면 $|Min(P \setminus B)| = |Min(P)| - |B| =3-1=2$가된다. 위 설명에 의해 $|Min(P \setminus Imm-\mathrm{Pred}(y))| \geq |Min(P)|-|Imm-\mathrm{Pred}(y)|+1$ 은 3이 되므로 모순을 유도할 수 있다. 아래 제시

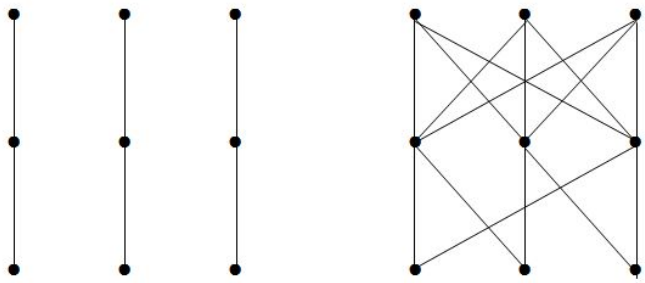
Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

된 $P \setminus B$와 $P \setminus Imm-\mathrm{Pred}(y)$를 비교해 보면 쉽게 알 수 있다.



보조정리4-1은 임의의 $x \in \lambda_0(P)$ 에 대하여 $Imm-\mathrm{succ}\ (\mathrm{x}) \in \lambda_1(P)$ 이고 $|\lambda_0(P)| = |\lambda_1(P)|$ 를 만족하는 부분순서집합 $P=\bigcup_{i=0}^{k}\lambda_i(P)$ 는 아이디얼 동형성질을 갖는다는 것이다. 다음과 같은 간략한 예시를 보일 수 있다.



$|\lambda_i(P)| = 3,\quad N(y)=\lambda_{i-1}(P) \cup \lambda_{i+1}(P)\ ,\ y \in \lambda_i(P)$

이제 정리3-2와 보조정리4-1의 결합된 성질에 의해 강한 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합을 정의할 수 있다.

정의 4-2 : $P=\bigcup_{i=0}^{k}\lambda_i(P)$가 [n]상에서 부분순서집합이라고 하자. 아이디얼 동형성질을 갖는 P가 다음 조건을 만족하면 강한 아이디얼 동형성질은 갖는다고 말할 수 있다.

① 같은 레벨집합들($\lambda_i(P)$)은 같은 원소의 개수를 갖는다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

② 임의의 $x \in \lambda_i(P)$ 에 대하여 N(x) ⊆ $\lambda_{i-1}(x)$ ∪ $\lambda_{i+1}(x)$이다.

이제 강한 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 구조를 명확하게 해보자.

보조정리 4-3 : $P=\bigcup_{i=0}^{k}\lambda_i(P)$가 강한 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합이라고 하자. 그러면 $\lambda_0(P)$ ∪ $\lambda_1(P)$ 는 다음 중 하나이다.

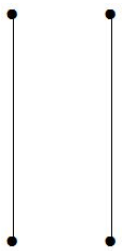
① **길이가 2인 사슬의 결합형태**

② **상하완전연결체의 부분순서집합**

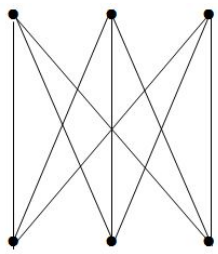
③ **상하연결체의 부분순서집합**

예시 :

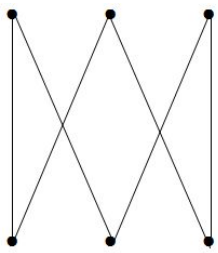
①



②



③



증명: $P=\bigcup_{i=0}^{k}\lambda_i(P)$가 각각의 i에 대하여 $|\lambda_i(P)|$=m인 강한 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합이라고 하자. $x_0 \in \lambda_0(P)$, $x_1 \in \lambda_1(P)$ 이면 $|\lambda_0(P)| = |\lambda_1(P)| = m$ 이므로 $Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)$ 와 $Imm-pred(x_1)$ 는 정리3-2, 보조정리4-1 에 의해 같은 상수를 갖는다. $|Imm-\mathrm{succ}\ (x_0)| = |Imm-pred(x_1)| = l$ 이라고 놓자.

다음 순서쌍의 집합을 생각해 보자.

S = { (A,y) | $|A|=l$, $y \in \lambda_1(P)$, 모든 $x \in A$에 대하여 $x < y$ }

$A \subseteq \lambda_0(P)$, $|A|=l$ 인 A에 대하여 S_A={ $y \in \lambda_1(P)$ | 모든 $x \in A$에 대하여

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$x < y\}$ 라고 하자. 우선 $|S_A|$ 는 집합A와 관계없는 상수임을 보이도록 하자.

$|A| = |B| = l$인 $A, B \subseteq \lambda_0(P)$에 대하여 $|S_A| \neq |S_B|$ 이라고 가정하자. $|A| = |B| = l$ 이므로 $A \cong B$ 이고 P는 아이디얼 동형성질이 있으므로 $P \setminus A \cong P \setminus B$ 이다. 각각의 $y \in \lambda_1(P)$에 대하여 $|Imm-pred(y)| = l$ 이므로 $|Min(P \setminus A)| = |\lambda_0(P)| - |A| + |S_A|$ 이고 $|Min(P \setminus B)| = |\lambda_0(P)| - |B| + |S_B|$ 이다. 그러나 가정에서 $|S_A| \neq |S_B|$ 이므로 $|Min(P \setminus A)| \neq |Min(P \setminus B)|$ 가 되어서 모순이 생긴다. 그러므로 $|S_A|$ 는 상수(일정한 수)이다.

이제 S의 원소의 개수를 알아보자.

각각의 $y \in \lambda_1(P)$에 대하여 $|Imm-pred(y)| = l$이므로 $(A, y) \in S$를 만족하는 $\lambda_0(P)$의 부분집합A는 유일하게 하나 존재한다. 따라서 $|S| = |\lambda_1(P)| = m$이다.

$|A| = l$인 $A \subseteq \lambda_0(P)$에 대하여 A의 모든 원소보다 더 큰 $\lambda_1(P)$의 원소 y는 모두 S_A의 원소이다. 따라서 $|S| = \binom{|\lambda_0(P)|}{l}|S_A| = \binom{m}{l}k$,$k = |S_A| \geq 1$이다.

이제 S의 원소의 개수에 대한 다음 방정식을 세울 수 있다.

$|S| = m = \binom{m}{l}k,\ l \geq 1$이고 $k = |S_A| \geq 1$

k는 양의 정수이므로 $\binom{m}{l} \leq m$일 수 밖에 없다. $l \neq 0,\ 1,\ m-1,\ m$ 인 경우, $\binom{m}{l} > m$ 이고(참고문헌[1]) $l \geq 1$ 이므로 $l = 1,\ m-1,\ m$ 일 때만 성립한다. 따라서 위 식을 만족하는 경우는 다음 세 가지 경우밖에 없다.

경우 1 : l=1인 경우, $|A| = 1$인 $A \subseteq \lambda_0(P)$에 대하여 $k = |S_A|$=1이므로 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$는 길이가 2인 m개 사슬의 결합이다.

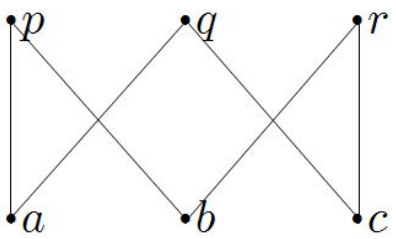
경우 2 : l=m-1인 경우, $|A|$=m-1인 $A \subseteq \lambda_0(P)$에 대하여 $k = |S_A|$=1이므로 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$는 상하연결체인 부분순서집합이다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

경우 3 : $l=m$인 경우, $|A|=m$인 $A \subseteq \lambda_0(P)$에 대하여 $k=|S_A|=m$이므로 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$는 상하완전연결체인 부분순서집합이다.

예제 4-3-1



$|\lambda_i(P)| = 3 = m$,

보조정리4-3을 만족하는 부분집합의 원소의 개수가 2개인 순서쌍집합 S을 생각해 보면

$S = \{ (\{a,b\},p), (\{a,c\},q), (\{b,c\},r) \}$ 이다.

$y \in \lambda_1(P)$에 대하여 $|Imm-pred(y)| = 2$이므로 $x < y$인 원소의 개수가 2인 $\lambda_0(P)$의 부분집합A는 하나 존재한다.

$\therefore |S| = m = 3$

만약 $A=\{a,b\}$ 라면 A의 모든 원소보다 더 큰 $\lambda_1(P)$의 원소가 S_A이므로 $S_A=\{p\}$, 즉 $|S_A| = 1$ 이고 $B=\{b,c\}$라면 $S_B=\{r\}$이므로 $|S_B| = 1$이다. 즉 $|S_A|$는 언제나 상수이다. $\therefore |S| = \binom{|\lambda_0(P)|}{l}|S_A| = \binom{3}{2} \times 1 = 3$

그러므로 $|Imm-\mathrm{succ}\ (a)| = |Imm-pred(p)| = 2 = l$인 상하 연결체의 구조가 된다.

정리 4-4 : $P=\bigcup_{i=0}^{k}\lambda_i(P)$ 는 강한 아이디얼 동형성질을 갖는 $|\lambda_i(P)|=m$인 부분순서집합이라고 하자.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

그러면 $1 \le i \le k$ 인 각각의 i에 대하여 $\lambda_{i-1}(P) \cup \lambda_i(P)$은 다음 부분순서집합 중 하나이다.

(1)길이가 2인 m개 사슬의 결합

(2)상하완전연결체인 부분순서집합

(3)상하연결체인 부분순서집합이다.

증명: 귀납적으로 증명해보자. 보조정리4-1에 의하여 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$는 길이가 2인 사슬의 결합이거나 상하완전연결체 이거나 상하연결체인 부분순서집합이다. $P_1 = P \setminus Min(P)$ 라고 놓자. 이제 부분순서집합 P_1 역시 강한 아이디얼 동형성질이 있음을 증명하면 된다. P_1이 아이디얼 동형성질을 갖는 것을 보이는 것은 어렵지 않다. I_1과 J_1을 P_1의 순서동형인 아이디얼이라고 하자. $|Min(I_1)|=|Min(J_1)|$은 당연하다. I_1와 J_1에 의해 생성된 부분순서집합 P에서의 아이디얼 $< I_1 >$과 $< J_1 >$을 생각해보자. 이제 $I=< I_1 >$, $J=< J_1 >$라고 놓자.

첫 번째 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$ 의 형태가 상하완전연결체인 부분순서집합이라고 가정해보면 명백하게 I와 J는 P에서 아이디얼 동형이 된다. 더욱이 $P \setminus I = P_1 \setminus I_1$이고 $P \setminus J = P_1 \setminus J_1$이므로 $P_1 \setminus I_1$와$P_1 \setminus J_1$는 순서동형이다.

첫 번째 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$ 의 형태가 상하연결체인 부분순서집합이라고 가정해보자. 만약 $|Min(I_1)|=|Min(J_1)|>1$이면 $P_1 \setminus I_1$와 $P_1 \setminus J_1$는 위의 상하완전연결체 부분순서집합의 경우에서와 같은 이유로 순서동형이다. 만약 $|Min(I_1)|=|Min(J_1)|=1$이면 I에서 J위로의 순서동형사상이 있다. 따라서 역시 $P \setminus I$에서 $P \setminus J$위로의 순서동형사상이 있다. $P \setminus I$와 $P \setminus J$는 단 하나의 최소원소를 갖기 때문에 그 최소원소는 순서동형사상에 의해 최소원소로 보내진다. 따라서 $P_1 \setminus I_1$와 $P_1 \setminus J_1$는 순서동형이다.

첫 번째 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$ 의 형태가 길이 2인 m개 사슬의 결합이라고 하자. 그러면 $|Min(I)|=|Min(I_1)|$이고 $|Min(J)|=|Min(J_1)|$이다. I_1과 J_1은 P_1에서 순서동형인 아이디얼이므로 I와 J는 P에서 순서동형인 아이디얼이다. (왜냐하면 $\lambda_0(P) \cup \lambda_1(P)$ 의 형태가 길이 2인 m개 사슬의 결합이다.) 따라서 $P \setminus I$에서 $P \setminus J$위로의 순서동형사상이 있다. $\phi : P \setminus I \to P \setminus J$ 를 $P \setminus I$에서 $P \setminus J$위로의 순서동형사상이라고 하자. $Min(P \setminus I)$와 $Min(P \setminus J)$는 $\lambda_0(P)$에 있고 $P_1 \setminus I_1 \subseteq P \setminus I, P_1 \setminus J_1 \subseteq P \setminus J$ 이므로

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

ϕ를 $P_1 \setminus I_1$으로 제한(restriction)하면 $P_1 \setminus I_1$에서 $P_1 \setminus J_1$위로의 순서동형사상이 된다.

위의 정리들로 강한 아이디얼 동형성질을 갖는 부분순서집합의 세 가지 구조들을 살펴보았다. 각각의 단계들이 첫째, 사슬구조인 경우와 둘째, 상하완전연결체인 경우와 셋째, 상하연결체인 경우이다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

참고문헌

1. R.A. Brualdi, J. Graves and K.M. Lawrence, Codes with a poset metric, Discrete Math. 147 (1995), 56-72.

2. David M. Burton, Elementary Number Theory (7th), McGraw-Hill (2010) 이준복, 이중섭 공역, 기초정수론 6판, 경문사 (2014).

3. S.T. Dougherty and M.M. Skriganov, MacWilliams duality and the Rosrnbloom-Tsfasman metric, Moscow Math. J. 2 (2002), 81-97.

4. H.K. Kim and D.Y. Oh, A classification of posets admitting MacWilliams identity, IEEE Trans. Inform. Theory 51 (2005), 1484-1431.

5. 노영순, 알기 쉬운 집합론 초판, 교우사 (2010).

Collection @ chosun