creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[UCI]I804:24011-200000265886

2017년 2월

교육학석사(수학)학위논문

Isotomic 공액의 접선에 관한 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

서 민 영

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Isotomic 공액의 접선에 관한 연구

Tangent line of isotomic conjugate

2017년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

서 민 영

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Isotomic 공액의 접선에 관한 연구

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로

제출함

2016년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

서 민 영

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

서민영의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 오 동 렬 인

심사위원 조선대학교 교수 장 인 홍 인

심사위원 조선대학교 교수 안 영 준 인

2016년 12월

조선대학교 교육대학원

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

CONTENTS

ABSTRACT (요약) ····· 2

제 1장. 소개 ····· 3

제 2장. 기존 연구 결과 ····· 4

제 2.1절. 파푸스의 정리, 스튜어트의 정리 ····· 4

제 2.2절. 톨레미의 정리 ····· 6

제 2.3절. 메넬라우스의 정리, 체바의 정리 ····· 7

제 2.4절. 베리센트릭 좌표비 ····· 9

제 2.5절. 등각 공액 ····· 11

제 2.6절. Isotomic 공액 ····· 13

제 2.7절. 이차유리 베지어 곡선 ····· 15

제 3장. 연구 결과 ····· 17

제 4장. 결론 ····· 24

참고문헌 ····· 25

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

ABSTRACT

Tangent line of isotomic conjugate

Min Young Seo
Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In this paper we present tangent line of isotomic conjugate. Tangent line of isotomic conjugate has a small point of difference than tangent line of isogonal conjugate in internal of triangle. We illustrate difference of isotomic conjugate and isogonal conjugate.

Key Words : homogeneous barycentric coordinate, isogonal conjugate, isotomic conjugate, Ceva theorem, tangent line, internal angle.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Isotomic 공액의 접선에 관한 연구
Tangent line of isotomic conjugate

제 1장. 소개

평면기하학이란 평면에 있어서 도형의 모양, 크기, 위치관계 등에 관한 성질을 연구하는 기하학의 한 분야로서, 현재 초등기하학이라고 하는 것이 이에 포함된다. 그리고 그 대상이 되는 도형을 평면도형이라 하며 예를 들면 평면상의 어떤 선분, 다각형, 원, 이차곡선 등이 이에 해당된다. 중학수학의 범위에서부터 대학의 기본적인 범주에 속하는 평면기하의 여러 가지 중요한 정리들을 살펴보다가 본 논문을 연구를 하게 되었다. 삼각형과 그 위의 여러 가지 점, 내심, 외심, 수심, 무게중심 등에 대해서는 중학교 수학에서 많은 학습이 이루어진다. 평면기하학에서는 이 점들에 대한 정리들이 다양하게 확장된다. 최근에 삼각형의 두 꼭지점에서 접하는 이차곡선과 이 이차곡선의 등각공액 곡선이 어떤 이차곡선인지에 대한 연구 결과가 발표되었고, 우리는 한 변에 평행한 직선의 등각공액과 isotomic 공액 곡선에 대하여 연구하게 되었다. 본 논문에서는 베리센트릭 좌표비(homogeneous barycentric coordinate)를 이용하여 삼각형 내부에 한 변과 평행한 선을 긋고 그것의 isotomic 공액(isotomic conjugate)과 등각 공액(isogonal conjugate)을 그렸을 때 그 변의 두 꼭지점에서의 접선이 어떻게 만나는지를 연구하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다.

2장에서는 파푸스의 정리, 스튜어트의 정리, 톨레미의 정리, 메넬라우스의 정리, 체바의 정리와 같이 수학자의 이름이 붙은 정리를 소개하고 isotomic 공액과 등각 공액에 대해 잘 알려진 사실을 정리하고 이들 공액을 베리센트릭 좌표로 표현하였다. 또한 베리센트릭 좌표비 와 이차 유리 베지어 곡선에 대하여 이미 알려진 사실을 소개하였다.

3장에서는 삼각형 내부에 한 변과 평행한 선을 긋고 그것의 isotomic 공액과 등각 공액을 그렸을 때 그 변의 두 꼭지점에서의 접선이 삼각형의 꼭지각을 지나는 고정선(fixed line)에서 만나는지에 대하여 증명하였다.

4장에서는 결론에 대해 정리하였다.

Collection @ chosun

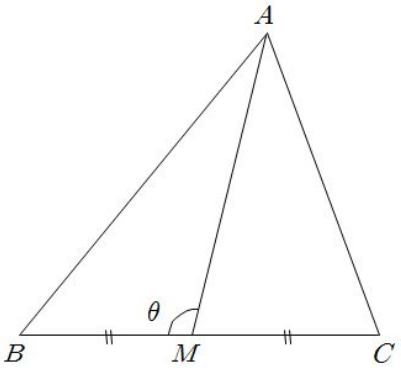
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2장. 기존 연구 결과

2장에서는 평면도형에서 잘 알려진 파푸스의 정리, 스튜어트의 정리, 톨레미의 정리, 메넬라우스의 정리, 체바의 정리와 베리센트릭 좌표비, 등각 공액, isotomic 공액, 이차유리 베지어 곡선을 소개하고자 한다.

제 2.1절. 파푸스의 정리, 스튜어트의 정리

파푸스의 정리는 삼각형의 중선과 세 변 사이의 관계를 서술한 정리이다. 이 정리를 파푸스의 중선정리(Pappus's median Theorem)라 부르며 보통 아폴로니오스의 정리라고도 부른다.



삼각형 ABC에서 BC의 중점을 M이라 하자.
$\angle AMB = \theta$라 두면, 코사인 제2법칙에 의해

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{AM} \cdot \overline{BM}\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 - 2\overline{AM} \cdot \overline{CM}\cos(\pi - \theta) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

이다. 한편,

$$\overline{BM} = \overline{CM}, \ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

이므로

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\overline{AM} \cdot \overline{BM}\cos\theta$$

이다. 식 (2.1)과 (2.2)에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

이 성립한다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

정리 2.1 파푸스의 정리(Pappus's median Theorem)

삼각형 ABC에서 변 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

이다. [5]

이제, 파푸스의 정리를 확장하여 변 $\overline{BC}$를 $m:n$으로 내분하는 점을 P라 하자. $\angle APB=\theta$라 두면

$$\overline{BP}=\frac{m}{m+n}\overline{BC},\quad \overline{CP}=\frac{n}{m+n}\overline{BC}$$

이다.

따라서 제2 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2-2\overline{AP}\cdot\overline{BP}\cos\theta\\&=\overline{AP}^2+\left\{\frac{m}{m+n}\overline{BC}\right\}^2-2\overline{AP}\cdot\frac{m}{m+n}\overline{BC}\cos\theta,\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{AP}^2+\overline{CP}^2-2\overline{AP}\cdot\overline{CP}\cos(\pi-\theta)\\&=\overline{AP}^2+\left\{\frac{n}{m+n}\overline{BC}\right\}^2+2\overline{AP}\cdot\frac{n}{m+n}\overline{BC}\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)\end{aligned}$$

이다. 식 (2.3)과 (2.4)에 각각 n과 m을 곱하여 더하면

$$n\overline{AB}^2+m\overline{AC}^2=(m+n)\overline{AP}^2+\frac{mn}{m+n}\overline{BC}^2$$

을 얻을 수 있다.

정리 2.2 스튜어트의 정리(Stewart's Theorem)

삼각형 ABC의 변 $\overline{BC}$를 $m:n$으로 내분하는 점을 P라 하면

$$n\overline{AB}^2+m\overline{AC}^2=(m+n)\overline{AP}^2+\frac{mn}{m+n}\overline{BC}^2$$

이 성립한다. 만약 $\overline{BP}=m$, $\overline{PC}=n$이면,

$$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PC}=m+n$$

이므로

$$n\overline{AB}^2+m\overline{AC}^2=\overline{BC}(\overline{AP}^2+mn)$$

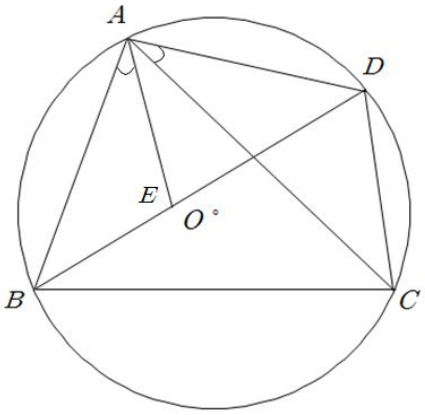
으로 나타낼 수 있다. [5]

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2.2절. 톨레미의 정리

톨레미(Ptolemios, Klaudios)는 기원전 150년경 이집트 출신의 그리스 천문학자 이다. 톨레미의 정리는 프톨레마이오스의 정리라고도 부른다.



사각형$ABCD$가 원에 내접한다고 하자. 그리고 대각선 $\overline{BD}$ 위에 $\angle BAE = \angle CAD$이 되게 점 E를 잡는다. 이때, $\triangle ABE = \triangle ACD$ (원주각)이므로 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ (AA닮음)이다. 따라서

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}, \quad \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BE}$$

이다.

한편, $\angle EAD = \angle BAC$ ($\because \angle BAE = \angle CAD$), $\angle ADE = \angle ACB$(원주각) 이므로 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ (AA닮음)이다. 따라서

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \quad \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{ED}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} &= \overline{AC} \cdot \overline{ED} + \overline{AC} \cdot \overline{BE} \\ &= \overline{AC}(\overline{BE} + \overline{ED}) \\ &= \overline{AC} \cdot \overline{BD} \end{aligned}$$

이다.

정리 2.3 톨레미의 정리(Ptolemy's Theorem)

원에 내접하는 사각형$ABCD$에서

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

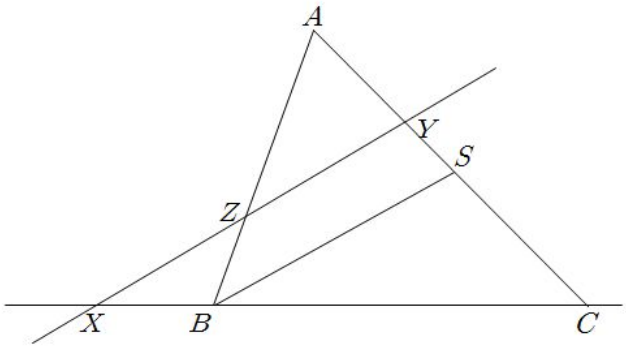
가 성립한다. [5]

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2.3절. 메넬라우스의 정리, 체바의 정리

메넬라우스는 그리스의 수학자 • 천문학자이고, 체바(1647~1736)는 이탈리아 기하학자 이다. 메넬라우스의 정리와 체바의 정리는 쌍둥이 정리로 알려져 있다. 이 두 정리는 사영기하학에 있어서 기본적인 정리이다. 메넬라우스의 정리를 이용하여 체바의 정리를 증명할 수 있고 삼각형에서 중심, 수심, 내심의 존재성은 체바의 정리를 이용하면 쉽게 보일 수 있다.



삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선이, 어느 꼭지점도 지나지 않는 한 직선과 만나는 점을 각각 X, Y, Z라 하자. 또한 삼각형 ABC에서 꼭지점 B를 지나고 직선XY에 평행한 선분이 변 AC와 만나는 점을 S라 하자. 그러면

$$\frac{CX}{XB}=\frac{CY}{YS},\ \frac{BZ}{ZA}=\frac{SY}{YA}$$

을 만족한다. 따라서

$$\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA}=\frac{CY}{YS}\cdot\frac{SY}{YA}=\frac{CY}{YA}$$

이므로

$$\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{AY}{YC}=1$$

이다. 즉, 점 X, Y, Z가 $\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{AY}{YC}=1$을 만족 한다면 점 X, Y, Z는 동일선상에 있다.

Collection @ chosun

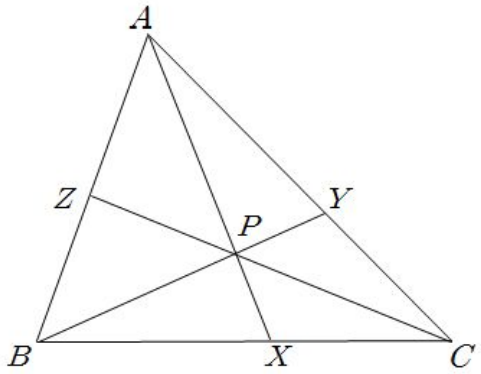
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

정리 2.4 메넬라우스의 정리(Menelaus's Theorem)

삼각형 ABC의 세 변 BC, CA, AB 또는 그 연장선이, 어느 꼭지점도 지나지 않는 한 직선과 만나는 점을 각각 X, Y, Z라 하면,

$$\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

의 관계가 성립한다. [3,5]



삼각형 ABC의 세 꼭지점 A, B, C와 이 삼각형의 세 변 또는 그 연장선 위에 있지 않는 한 점 P를 연결한 직선이 세 변BC, CA, AB 또는 그 연장선과 만나는 점을 각각 X, Y, Z라 하자. 또한 삼각형 ABC 내부에 임의의 점 P가 있고, AP의 연장선과 변 BC의 교점을 X라 하자. 그러면 $\triangle ABP$와 $\triangle ACP$는 동일한 밑변 AP를 갖고 있으므로, 그 면적의 비는 각각의 꼭지점 B, C에서 밑변 AP에 내린 수선의 길이의 비 이다. 따라서,

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\triangle ABP}{\triangle ACP}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{\triangle BCP}{\triangle BAP}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{\triangle ACP}{\triangle CBP}$$

이므로 선분 AX, BY, CZ가 다음을 만족한다면 한 점에서 만난다.

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{\triangle ABP}{\triangle ACP} \cdot \frac{\triangle BCP}{\triangle BAP} \cdot \frac{\triangle ACP}{\triangle CBP} = 1$$

정리 2.5 체바의 정리(Ceva's Theorem)

삼각형 ABC의 세 꼭지점 A, B, C와 이 삼각형의 세 변 또는 그 연장선 위에 있지 않는 한 점 P를 연결한 직선이 세 변BC, CA, AB 또는 그 연장선과 만나는 점을 각각 X, Y, Z라 하면,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

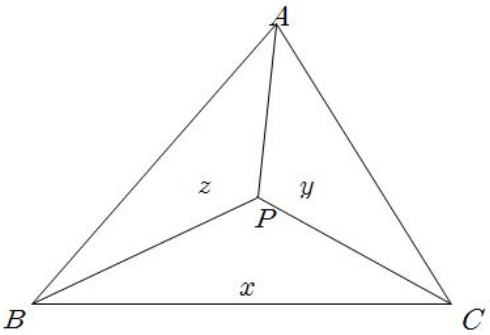
의 관계가 성립한다. [3,5]

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2.4절. 베리센트릭 좌표비
(Homogeneous Barycentric Coordinates)

$\triangle ABC$에서 임의의 점 P는 좌표비 $(u:v:w)$로 표현할 수 있다. 만약, $x:y:z=\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB$인 경우 $\triangle ABC$에 관한 점 P의 베리센트릭 좌표비는 $(x:y:z)$이다. 이러한 수들은 $\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$ 넓이의 비율을 결정한다. 또한, 점 P가 삼각형 밖에 있다면 부호($+$ 또는 $-$)가 있는 삼각형 넓이의 비로 표현된다.

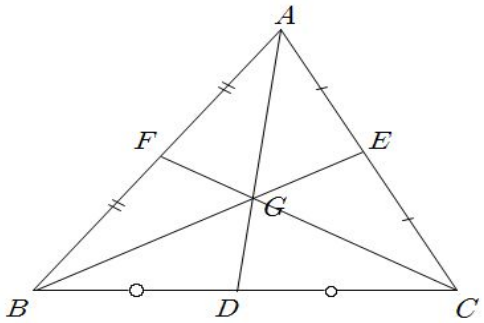


$P=(x:y:z)$

점 P의 베리센트릭 좌표비가 $(x:y:z)$일 때, $\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$를 베리센트릭 좌표라 한다. 알려진 사실로[2], 점 P의 베리센트릭 좌표비가 $(x:y:z)$일 필요충분 조건은 $P=\frac{xA+yB+zC}{x+y+z}$ 이다.

이제 베리센트릭 좌표비에 대해 몇 가지 예를 살펴보자.

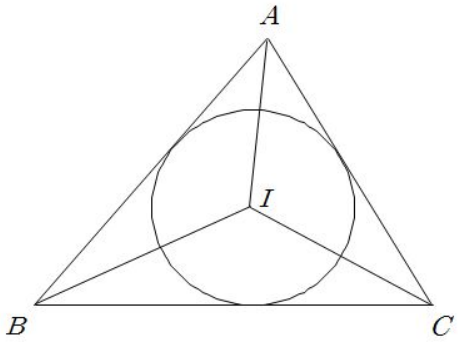
1) 무게중심 G는 베리센트릭 좌표비 $G=(1:1:1)$을 갖는다. 삼각형 GBC, GCA, GAB 넓이의 비는 동일하다.



Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

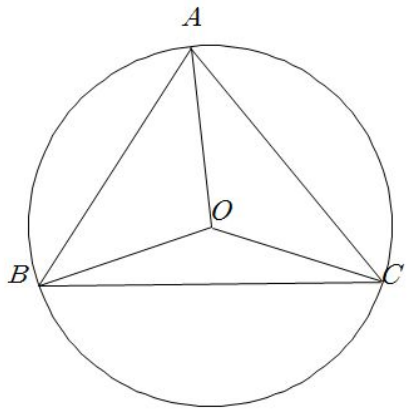
2) 내심 I는 베리센트릭 좌표비 $I=(a:b:c)$를 갖는다. $\triangle ABC$의 내심을 I, 내접원의 반지름을 r 이라 하면, $\triangle IBC=\frac{1}{2}ar$, $\triangle ICA=\frac{1}{2}br$, $\triangle IAB=\frac{1}{2}cr$이므로 내심의 베리센트릭 좌표비는 $I=(\frac{1}{2}ar:\frac{1}{2}br:\frac{1}{2}cr)=(a:b:c)$이다.



3) 외접원의 반지름을 R 이라 하면, 외심 O의 베리센트릭 좌표비는

$$\begin{aligned}
&\triangle OBC : \triangle OCA : \triangle OAB \\
&= \frac{1}{2}R^2\sin 2A : \frac{1}{2}R^2\sin 2B : \frac{1}{2}R^2\sin 2C \\
&= \sin A\cos A : \sin B\cos B : \sin C\cos C \\
&= a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} : b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} : c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\
&= a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)
\end{aligned}$$

이다.



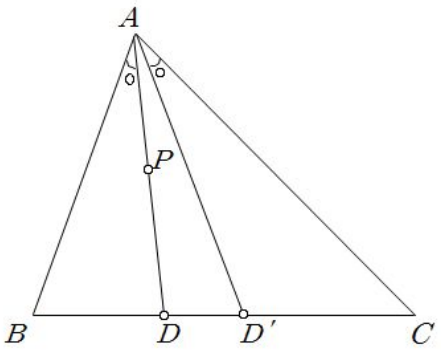
선분 BC위의 점들은 $(0:y:z)$의 좌표를 갖는다. 마찬가지로, 선분 CA 와 선분 AB 위의 점들은 각각 $(x:0:z)$ 과 $(x:y:0)$의 좌표를 갖는다.[2,3,6]

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2.5절. 등각 공액

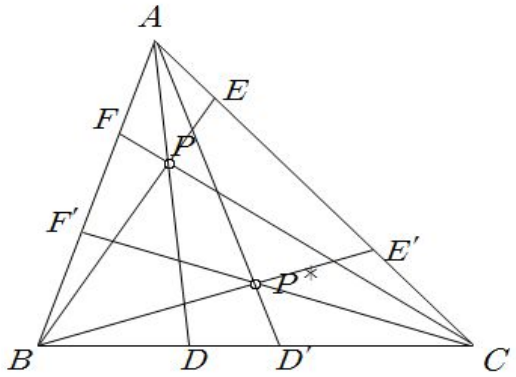
등각 공액(isogonal conjugate)는 1828년 Jacob Steiner에 의해 연구되었다. [3] 공액은 켤레라고도 하며 두 개의 점, 선, 수가 서로 특수한 관계에 있어 서로 전환해도 그 성질의 변화가 없을 경우의 그 둘의 관계를 말한다. 등각(isogonal)은 $\triangle ABC$에서 변BC위의 점 D를 $\angle A$의 이등분선에 대하여 대칭이 되도록 BC 위에 있는 점 D'을 잡는다. $\angle BAD = \angle CAD'$인 관계가 성립하면 이 때 선분 AD, AD'을 등각이라고 한다.



이와 마찬가지로 $\triangle ABC$의 등각선분을 각각 AD와 AD', BE와 BE', CF와 CF'이라 할 때, AD, BE, CF가 한 점에서 만나면 AD', BE', CF'도 또한 한 점에서 만난다. 이때 AD', BE', CF'의 교점P^*를 AD, BE, CF에서 만나는 한 점 P에 대한 등각 공액이라고 한다. 점 P를 베리센트릭 좌표비 $(x:y:z)$라 하자. 그러면 P^*의 베리센트릭 좌표비는 $P^* = (\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z})$로 표현된다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



이제,

$$\angle BAP = \angle CAP^* = \theta_1,\ \angle ABY = \angle CBY^* = \theta_2,\ \angle ACP = \angle BCP^* = \theta_3$$

라고 놓으면

$$\frac{\triangle ACP^*}{\triangle ABP^*} = \frac{b}{c} \times \frac{\sin\theta_1}{\sin(A-\theta_1)},\quad \frac{\triangle PAC}{\triangle PAB} = \frac{b}{c} \times \frac{\sin(A-\theta_1)}{\sin\theta_1}$$

으로 넓이의 비를 나타낼 수 있다.

이 때,

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin(A-\theta_1)} = \frac{b}{c} \times \frac{\triangle PAB}{\triangle PAC},$$

$$\frac{\triangle ACP^*}{\triangle ABP^*} = \frac{b^2 \triangle PAB}{c^2 \triangle PAC} = \frac{b^2 z}{c^2 y} = \frac{\frac{b^2}{y}}{\frac{c^2}{z}}$$

이다. 이와 같은 방법으로 $\frac{\triangle ACP^*}{\triangle BCP^*} = \frac{\frac{b^2}{y}}{\frac{a^2}{x}}$ 가 성립하므로 $P^* = (\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z})$

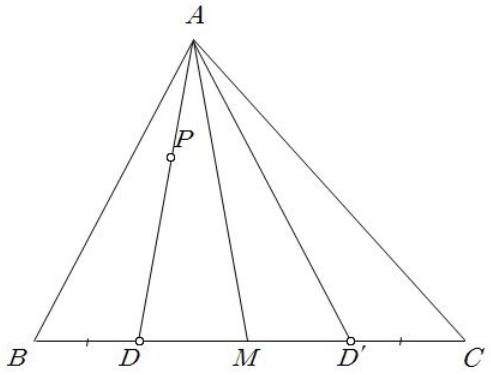
로 등각 공액의 베리센트릭 좌표비를 표현할 수 있다. [1,3,6]

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2.6절. Isotomic 공액

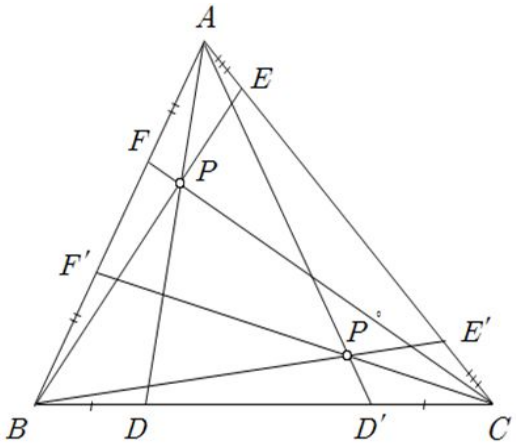
Isotomic 공액(isotomic conjugate)은 1889년 John Casey에 의해 소개되었다. [3] 점 P가 $\triangle ABC$ 내부에 있다고 하자. M은 변 $\overline{BC}$의 중점이고, 직선 $\overline{AP}$의 연장선과 변 $\overline{BC}$의 교점을 D라고 하자. 변 $\overline{BC}$ 위에 $\overline{BD}=\overline{D'C}$가 되도록 점 D'을 잡자. 그림과 같이 직선 $\overline{BP}$, $\overline{CP}$와 변 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$의 교점을 각각 E, F라 하자. 같은 방법으로 직선 $\overline{AF}=\overline{F'B}$, $\overline{AE}=\overline{E'C}$가 되도록 F'와 E'을 각각 잡자. 점 D',E',F' 을 각각 점 D,E,F에 대한 isotomic 점(isotomic point)이라 부른다. 또한, 세 직선 $\overline{AD'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{CF'}$이 한 점에서 만난다는 사실이 알려져 있는데 이 점은 P에 대한 isotomic 공액이라 하고, P°로 표기 한다.



점 P의 베리센트릭 좌표비가 $(x:y:z)$라 하자. 그러면 점 P의 isotomic 공액 P°의 베리센트릭 좌표비는 $P^\circ=(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z})$ 로 표현된다. 이것은

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



$$\frac{\triangle ACP^{\circ}}{\triangle ABP^{\circ}}=\frac{\triangle ACD^{\circ}}{\triangle ABD^{\circ}}=\frac{\triangle ADB}{\triangle ADC}=\frac{\triangle PAB}{\triangle PAC}=\frac{z}{y}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}}$$

이고, 같은 방법으로

$$\frac{\triangle ACP^{\circ}}{\triangle BCP^{\circ}}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}}$$

이 성립하기 때문이다. 즉, 점P°의 베리센트릭 좌표비는 $P^{\circ}=(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z})$ 이다. [1,3,4,6]

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 2.7절. 이차유리 베지어 곡선(quadratic rational Bezier curve)

베지어 곡선은 프랑스의 수학자 베지어(Bezier P.)가 만들었다. 다항식 곡선의 하나로 글자 데이터와 매개변수 곡선 및 곡면을 그릴 때 베지어 곡선•곡면이 많이 사용되고 있다.

이차 유리 베지어 곡선 $r(t)$는 다음과 같이 정의 된다.

$$r(t)=\frac{w_0b_0B_0^2(t)+w_1b_1B_1^2(t)+w_2b_2B_2^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)} \quad , \quad t\in[0,1]$$

이 때, $b_0,b_1,b_2\in\mathbb{R}^n$은 제어점(control point)이고 양수인 $w_0,w_1,w_2\ \in\mathbb{R}$는 가중치이다. 여기에서 $B_i^n(t)$는 번스타인 다항함수(Bernstein basis function)

$$B_i^n(t)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i} \quad , \quad \binom{n}{i}=\begin{cases}\dfrac{n!}{i!(n-i)!} & 0\le i\le n\\ 0 & else\end{cases}$$

이고, $B_i^2(t)=\binom{2}{i}t^i(1-t)^{2-i}$ 는 이차 번스타인 다항식이다. 즉,

$$B_0^2(t)=(1-t)^2,\ B_1^2(t)=2(1-t)t,\ B_2^2(t)=t^2$$

이다.

또한, 이차 유리 베지어 곡선의 표준형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r(t)=\frac{b_0B_0^2(t)+wb_1B_1^2(t)+b_2B_2^2(t)}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)} \qquad (\text{여기서, } w=\sqrt{\frac{w_1^2}{w_0w_2}})$$

$r(t)$가 이차 유리 베지어 곡선의 표준형인 경우 $s=r(\frac{1}{2})$를 어깨점(shoulder point)이라 하고, 다음과 같은 성질을 만족한다. [6,7]

(1) 어깨점에서 접선은 $\overline{b_0b_2}$ 과 평행이다.

(2) 만약, $m=\dfrac{b_0+b_2}{2}$라 두면 m,s,b_1에 대하여

$ratio(m,s,b_1)=w_1$이다.

(3) 어깨점은 $\overline{b_0b_2}$로부터 가장 멀리 떨어진 점이다.

Collection @ chosun

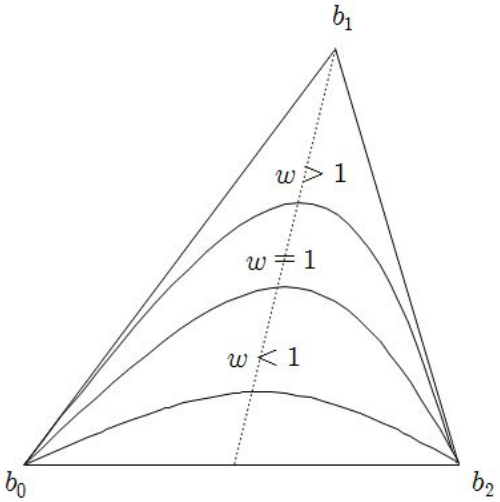
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

(4) w의 크기에 따라 $r(t)$의 형태가 다음과 같이 결정된다.

① $w<1$일 경우 $r(t)$는 타원

② $w=1$일 경우 $r(t)$는 포물선

③ $w>1$일 경우 $r(t)$는 쌍곡선



Collection @ chosun

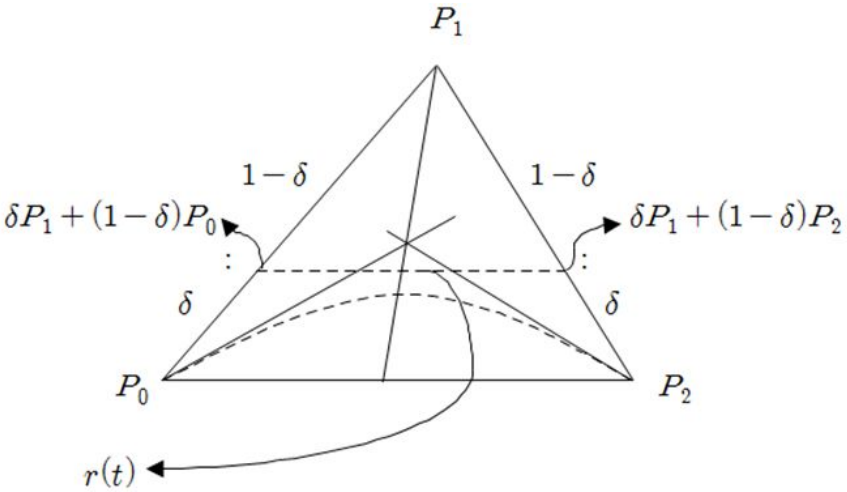
조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 3장. 연구 결과

베리센트릭 좌표비(homogeneous barycentric coordinate)를 이용하여 삼각형 내부에 한 변과 평행한 선을 긋고 그것의 isotomic 공액(isotomic conjugate) 곡선을 그렸을 때 그 변의 두 꼭지점에서의 접선이 어떻게 만나는지를 연구하였다. 꼭지점과 대변의 중점을 연결한 선분을 중선이라고 하는데 isotomic 공액은 이 중선을 다시 중선으로 보낸다. 즉, 이 선분은 isotomic 공액에 대하여 고정되어 있다. 우리는 이런 선분을 isotomic에 대한 고정선(fixed line)이라고 정의 한다.

정리 3.1

$\triangle P_0P_1P_2$의 내부에 한 변 $\overline{P_0P_2}$와 평행한 직선의 isotomic 공액 곡선이 있다. 두 점 P_0와 P_2에서 이 공액 곡선의 접선의 교점은 꼭지점 P_1을 지나는 isotomic에 대한 고정선 위에 있다.



[증명]

$\triangle P_0P_1P_2$의 내부에 한 변 $\overline{P_0P_2}$와 평행한 선을 $r(t)$라 하자. 또한, $r(t)$와 선분 $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_2P_1}$과 만나는 점을 각각 $\delta P_1+(1-\delta)P_0$, $\delta P_1+(1-\delta)P_2$ 라 하자. 여기서 $0<\delta<1$ 이다. 모든 $t\in[0,1]$에 대하여

$$r(t)=\delta P_1+(1-\delta)P_0+t((1-\delta)(P_2-P_0))$$

이므로

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

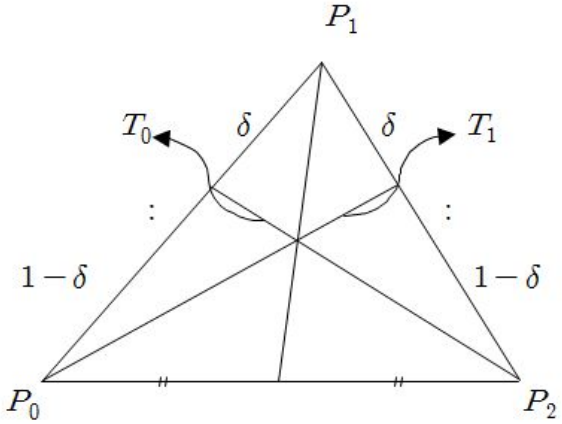
$$r(t) = (1-\delta-t(1-\delta))P_0+\delta P_1+t(1-\delta)P_2$$

이다. 이때, $1-\delta-t(1-\delta)+\delta+t(1-\delta)\equiv 1$이다.

따라서 $r(t)$의 베리센트릭 좌표비는 $((1-t)(1-\delta) : \delta : t(1-\delta))$ 이고, $r(t)$의 isotomic 공액의 베리센트릭 좌표비 $r^\circ(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r^\circ(t) = \left(\frac{1}{(1-t)(1-\delta)} : \frac{1}{\delta} : \frac{1}{t(1-\delta)}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{(1-t)(1-\delta)}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{t(1-\delta)}}\left(\frac{1}{(1-t)(1-\delta)}P_0+\frac{1}{\delta}P_1+\frac{1}{t(1-\delta)}P_2\right)$$



이제 $r^\circ(t)$의 P_0와 P_2에서의 접선의 기울기를 구해 보면

$$(r^\circ)'(t) = \frac{P_0\delta+P_1-P_1\delta-2P_1t+2P_1t\delta-P_2\delta}{-\delta t+t-t^2+\delta t^2+\delta}$$

$$-\frac{((P_0\delta t+P_1t-P_1t\delta-P_1t^2+P_1t^2\delta+P_2\delta-P_2\delta t)(-\delta+1-2t+2\delta t))}{(-\delta t+t-t^2+\delta t^2+\delta)^2}$$

$$(r^\circ)'(0) = \frac{P_0\delta+P_1-P_1\delta-P_2}{\delta},$$

$$(r^\circ)'(1) = \frac{-P_1+P_1\delta-P_2\delta+P_0}{\delta}$$

이다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

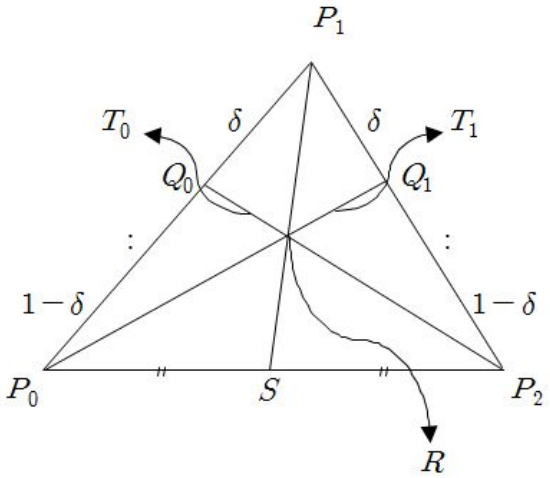
$P_0 = r^\circ(1)$에서의 접선을 T_1이라하고, $P_2 = r^\circ(0)$에서의 접선을 T_0라 하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_1 = P_0 + \frac{t(-P_1 + P_1\delta - P_2\delta + P_0)}{\delta},$$

$$T_1(t) = \frac{P_0\delta - P_1 t + P_1 t\delta - P_2\delta t + tP_0}{\delta}$$

$$T_0 = P_2 + \frac{t(P_0\delta + P_1 - P_1\delta - P_2)}{\delta},$$

$$T_0(s) = \frac{P_2\delta + s\,P_0\delta + s\,P_1 - s\,P_1\delta - s\,P_2}{\delta}.$$



선분 $\overline{P_1P_2}$와 접선 T_1이 만나는 점을 Q_1이라 하면 $Q_1 = P_1(1-\delta) + P_2\delta$ 이다. 그리고 선분 $\overline{P_0P_1}$과 접선 T_0가 만나는 점을 Q_0라 하면 $Q_0 = P_0\delta + P_1(1-\delta)$ 이다. S를 isotomic에 대한 고정선과 $\overline{P_0P_2}$가 만나는 점이라 하자.

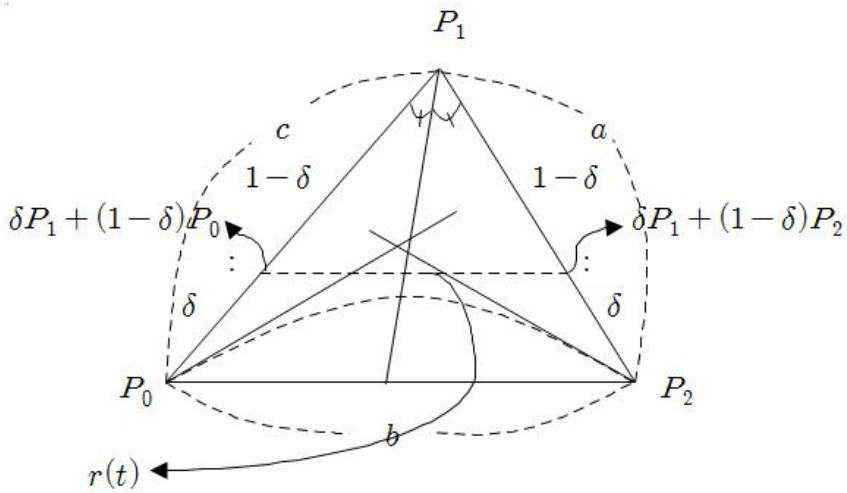
체바의 정리에 의하여 $\dfrac{\overline{P_0S}}{\overline{SP_2}} \cdot \dfrac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_1}} \cdot \dfrac{\overline{P_1Q_0}}{\overline{Q_0P_0}} = 1$ 이므로 $\overline{P_0S} = \overline{SP_2}$ 이고, 점 R은 고정선 위에 있다. ■

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

우리는 삼각형 내부에 한 변 $\overline{P_0P_2}$와 평행한 선을 긋고 그것의 isotomic 공액 곡선을 그렸을 때 P_0와 P_2에서의 접선은 꼭지점 P_1을 지나는 isotomic에 대한 고정선에서 만나는 것을 증명하였다.
이제 삼각형 내부에 한 변 $\overline{P_0P_2}$와 평행한 선을 긋고 그것의 등각 공액 곡선을 그렸을 때에도 P_0와 P_2에서의 접선은 꼭지점 P_1을 지나는 등각에 대한 고정선에서 만나는지 증명할 것이다.

정리 3.2
$\triangle P_0P_1P_2$의 내부에 한 변 $\overline{P_0P_2}$와 평행한 직선의 등각 공액 곡선이 있다. 두 점 P_0와 P_2에서 이 공액 곡선의 접선의 교점은 일반적으로 꼭지점 P_1을 지나는 등각에 대한 고정선 위에 있지 않다.



[증명]
$\triangle P_0P_1P_2$의 내부에 한 변 $\overline{P_0P_2}$와 평행한 선을 $r(t)$라 하자. 또한, $r(t)$와 선분 $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_2P_1}$과 만나는 점을 각각 $\delta P_1+(1-\delta)P_0$, $\delta P_1+(1-\delta)P_2$ 라 하자.
여기서 $0<\delta<1$ 이다. 모든 $t\in[0,1]$에 대하여

$$r(t)=\delta P_1+(1-\delta)P_0+t((1-\delta)(P_2-P_0))$$

이므로

$$r(t)=(1-\delta-t(1-\delta))P_0+\delta P_1+t(1-\delta)P_2$$

이다. 이때, $(1-t)(1-\delta)+\delta+t(1-\delta)\equiv 1$이다.

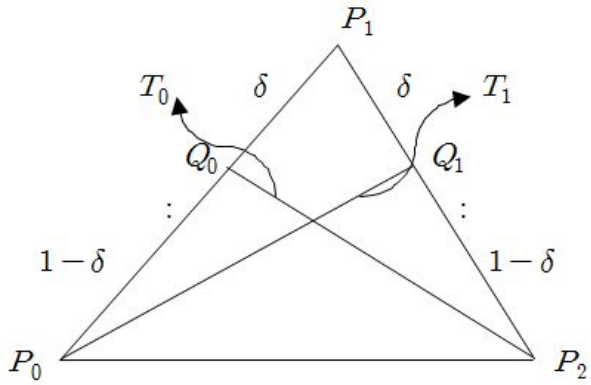
Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

따라서 $r(t)$의 베리센트릭 좌표비는 $((1-t)(1-\delta) : \delta : t(1-\delta))$이고,
$r(t)$의 등각 공액의 베리센트릭 좌표비 $r^*(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r^*(t) = \left(\frac{a^2}{(1-t)(1-\delta)} : \frac{b^2}{\delta} : \frac{c^2}{t(1-\delta)}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{a^2}{(1-t)(1-\delta)} + \frac{b^2}{\delta} + \frac{c^2}{t(1-\delta)}}\left(\frac{a^2}{(1-t)(1-\delta)}P_0 + \frac{b^2}{\delta}P_1 + \frac{c^2}{t(1-\delta)}P_2\right)$$



이제 $r^*(t)$의 P_0와 P_2에서의 접선의 기울기를 구해 보면

$$(r^*)'(t) = \frac{a^2P_0\delta + b^2P_1 - b^2P_1\delta - 2b^2P_1t + 2b^2P_1t\delta - c^2P_2\delta}{a^2\delta t + b^2t - b^2t\delta - b^2t^2 + b^2t^2\delta + c^2\delta - c^2\delta t}$$
$$- \frac{(a^2P_0\delta t + b^2P_1t - b^2P_1t\delta - b^2P_1t^2 + b^2P_1t^2\delta + c^2P_2\delta - c^2P_2\delta t)(a^2\delta + b^2 - b^2\delta - 2b^2t + 2b^2t\delta - c^2\delta)}{(a^2\delta t + b^2t - b^2t\delta - b^2t^2 + b^2t^2\delta + c^2\delta - c^2\delta t)^2}$$

$$(r^*)'(0) = \frac{a^2P_0\delta + b^2P_1 - b^2P_1\delta - P_2a^2\delta + P_2b^2\delta - P_2b^2}{c^2\delta},$$

$$(r^*)'(1) = -\frac{b^2P_1 - b^2P_1\delta + c^2P_2\delta - P_0b^2 + P_0b^2\delta - P_0c^2\delta}{a^2\delta}$$

이다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

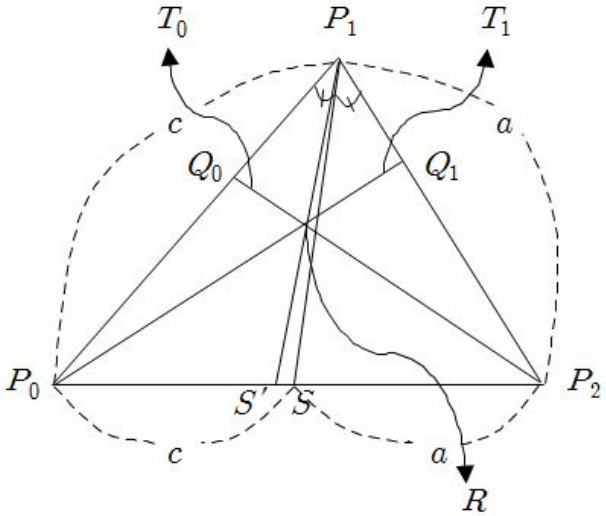
$P_0 = r^*(1)$에서의 접선을 T_1이라하고, $P_2 = r^*(0)$에서의 접선을 T_0라 하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_1 = P_0 - \frac{t(b^2P_1 - b^2P_1\delta + c^2P_2\delta - P_0b^2 + P_0b^2\delta - P_0c^2\delta)}{a^2\delta},$$

$$T_1(t) = \frac{a^2P_0\delta - tb^2P_1 + tb^2P_1\delta - tc^2P_2\delta + tP_0b^2 - tP_0b^2\delta + tP_0c^2\delta}{a^2\delta}.$$

$$T_0 = P_2 + \frac{t(a^2P_0\delta + b^2P_1 - b^2P_1\delta - P_2a^2\delta + P_2b^2\delta - P_2b^2)}{c^2\delta},$$

$$T_0(s) = \frac{c^2P_2\delta + sa^2P_0\delta + sb^2P_1 - sb^2P_1\delta - sP_2a^2\delta - sP_2b^2\delta - sP_2b^2}{c^2\delta}.$$



선분 $\overline{P_1P_2}$와 접선 T_1이 만나는 점을 Q_1이라 하면

$$Q_1 = \left(0 : \frac{-tb^2 + tb^2\delta}{a^2\delta} : \frac{-tc^2\delta}{a^2\delta}\right) = (0 : b^2(1-\delta) : c^2\delta)$$

이고, 선분 $\overline{P_0P_1}$과 접선 T_0가 만나는 점을 Q_0라 하면

$$Q_0 = \left(\frac{sa^2\delta}{c^2\delta} : \frac{sb^2 - sb^2\delta}{c^2\delta} : 0\right) = (a^2\delta : b^2(1-\delta) : 0)$$

이다. 두 접선 T_0와 T_1의 교점을 R이라 하고 꼭지점 P_1에서 점 R을 지나 $\overline{P_0P_2}$과 만나는 점을 S'라 하자. 또한 S를 등각에 대한 고정선과 $\overline{P_0P_2}$가 만나는 점이라 하자.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이때,

$$\overline{P_1Q_0} : \overline{Q_0P_0} = a^2\delta : b^2(1-\delta),$$
$$\overline{Q_1P_1} : \overline{P_2Q_1} = c^2\delta : b^2(1-\delta)$$

이다. 체바의 정리에 의하여

$$\frac{\overline{P_0S'}}{\overline{S'P_2}} \cdot \frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_1}} \cdot \frac{\overline{P_1Q_0}}{\overline{Q_0P_0}} = \frac{\overline{P_0S'}}{\overline{S'P_2}} \cdot \frac{b^2(1-\delta)}{c^2\delta} \cdot \frac{a^2\delta}{b^2(1-\delta)} = 1$$

이므로 $\overline{P_0S'} : \overline{S'P_2} = c^2 : a^2$이어야 한다.

하지만, 꼭지점 P_1을 지나는 등각에 대한 고정선은 $\overline{P_0P_2}$와 삼각형의 내각의 이등분선의 정리에 의하여 $\overline{P_1P_0} : \overline{P_1P_2} = \overline{P_0S} : \overline{SP_2} = c : a$이므로 일반적으로 점 R은 고정선 위에 있지 않다. ■

우리는 삼각형 내부에 한 변$\overline{P_0P_2}$와 평행한 선을 긋고 그것의 isotomic 공액 곡선을 그렸을 때 두 점 P_0와 P_2에서 접선의 교점은 꼭지점 P_1을 지나는 isotomic에 대한 고정선 위에 있고, 등각 공액 곡선을 그렸을 때에는 일반적으로 등각에 대한 고정선 위에 있지 않음을 증명하였다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

제 4장. 결론

본 논문에서는 베리센트릭 좌표를 이용하여 isotomic 공액과 등각 공액을 소개하였다. 이러한 표현을 이용하여 삼각형 내부에 한 변과 평행한 선을 긋고 그것의 isotomic 공액 곡선을 그렸을 때 그 변의 두 꼭지점에서의 접선이 삼각형의 꼭지각을 지나는 isotomic에 대한 고정선 위에 있는 것을 증명하였다. 또한, 등각 공액 곡선을 그렸을 때 그 변의 두 꼭지점에서의 접선이 삼각형의 꼭지각을 지나는 등각에 대한 고정선 위에 있지 않는 것을 증명하였다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

참고문헌

[1] Akopyan, Arseniy V. "*Conjugation of lines with respect to a triangle*." Journal of Classical Geometry 1 (2012): 23-31.

[2] P.Yiu, *"The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry"* Int.J.Math.Educ.Sci.Technol.,31(2000)569-578.

[3] P.Yiu, "*Introduction to the Geometry of the Triangle*." (2001): 1534-1178.

[4] K.R.S Sastry,"*Triangles with Special Isotomic Conjugate Pairs"*, Forum Geometricorum (2004) 73-80.

[5] 박진석·신양재. 『평면기하와 GSP』,경남대학교출판부, 1999, p.320.

[6] 윤찬란, *"이차 유리 베지에 곡선의 등각 공액과 isotomic 공액."* 조선대학교 교육대학원(2014).

[7] 임인지, "*이차유리베지에 곡선의 분할*." 조선대학교 교육대학원(2014).

Collection @ chosun