[UCI]I804:24011-200000265439

2015년 2월
교육학석사(수학)학위논문

유계인 부분몫을 갖는 대수적 멱급수의 연분수전개

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

정 인 용

유계인 부분몫을 갖는 대수적 멱급수의 연분수전개

Continued fraction expansions of some algebraic power series over finite fields

2015년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

정 인 용

유계인 부분몫을 갖는 대수적 멱급수의 연분수전개

지도교수 이 관 규

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2015년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

정 인 용

정인용의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장	조선대학교 교수	안 영 준	인
심사위원	조선대학교 교수	오 동 렬	인
심사위원	조선대학교 교수	이 관 규	인

2015년 12월

조선대학교 교육대학원

목차

ABSTRACT

Continued fraction expansions of some algebraic power series over finite fields

Jeong In-yong
Advisor : Prof. Kwan-kyu Lee Ph.D.
Major in Math Education
Graduate School of Education
Chosun University

It is conjectured that no algebraic real number of degree higher than two has bounded partial quotients in the continued fraction expansion. On the other hand, it is known in many reserches that some algebraic power series of degree higher than two have bounded partial quotients in the continued fraction expansions over finite fields. In this thesis, we choose certain specific equation and calculate explicit continued fraction expansion of its solution so that we find all partial quotients. Moreover, for another specific equation, we show that its solution has partial quotients of unbounded degrees. For these results, we summarize the basics about the formal power series over finite fields and their continued fraction expansions

제 1 장

소개

Khinchin〔5〕은 차수가 3이상인 대수적 실수의 연분수전개에서 부분몫이 유계인 것은 존재하지않는다고 추측하였다. 마찬가지로 대수적 멱급수에서도 같은 사실이 성립할 것을 추측하였으나 Baum과 Sweet〔1〕은 $\mathbb{F}_2$ 위에서 부분몫의 차수가 유계인 삼차 멱급수를 찾아, 이러한 예상이 틀렸다는 것을 보였다. Mills와 Robins〔10〕는 표수 p인 유한체 $\mathbb{F}_p$위에서 다음과 같은 형태의

$$x = \frac{Ax^{p^r} + B}{Cx^{p^r} + D}, \qquad r \geq 0, \qquad A, B, C, D \in \mathbb{F}_p[X]$$

방정식을 만족하는 멱급수에 대해서, 이차 대수적 실수와 마찬가지로 연분수전개에서 규칙적인 패턴을 갖는 것을 설명하였다. 이러한 멱급수들을 초이차멱급수(hyperquadratic power series)라고 부른다. 초이차멱급수는 일차분수변환과 $\mathbb{F}_p$위의 Frobenius 자기동형사상에 대한 고정점이라고 할 수 있다.

Mathan과 Voloch는 〔2, 13〕에서 초이차멱급수의 연분수전개의 부분몫들이 유계가 아니라면, 차수가 급격히 증가하는 부분몫들을 갖는 것을 보였다. 이 부분몫이 유계일 경우에는 근사분수가 대수적멱급수에 천천히 진행이 되어가며, 부분몫이 유계가 아닐 경우에는 근사분수가 대수적멱급수에 빠르게 다가가는 것이 알려져 있다. Baum과 Sweet의 삼차멱급수는 연분수전개의 부분몫이 유계인 초이차멱급수이므로 근사분수가 대수적멱급수에 천천히 다가간다. 더욱이 Mills과 Robbins〔10〕는 모든 홀수인 소수 p에서 부분몫들의 차수가 유계인 $\mathbb{F}_p$위에 있는 초이차멱급수를 찾았다. 이러한 결과들을 통해 많은 연구자들이 초이차멱급수를 유리함수의 근사화에 대해 분류하였다. Lasjaunias와 그의 공동 집필자들은 〔3, 6 - 9〕을 통해 모든 부분 몫들

의 차수가 1인 경우를 찾았다. 표수가 2인 유한체에서, Thakur〔12〕는 유계인 부분몫을 갖는 초이차멱급수를 구성하였다. 그러나 초이차멱급수의 분류 문제는 완성되지 않았고, 더 많은 예들을 아직 탐구하지 못하였다.

$\mathbb{F}_2$위의 멱급수 α가 다음 방정식

$$x^3 + (X^l + B)x^2 + x + B = 0$$

을 만족하는 차수가 양인 멱급수라고 하자. 여기서 $l \geq 3$, $B \in \mathbb{F}_2((X^{-1}))$, $\deg(B) < l$, $B(0) = 0$, 그리고 $\frac{B}{X}(0) = 1$이다. 이 때 α는 연분수전개에서 유계인 부분몫을 갖는다는 것을 Lee〔4〕가 보였다. 이 논문에서는 이러한 형태의 방정식 중 특정한 것을 선택하여 연분수전개를 구체적으로 계산하여 나타나는 부분몫을 모두 밝혔다. 또한, $l = 2$, $B = X$인 경우

$$\alpha^3 + (X^2 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

을 만족하는 차수가 양인 멱급수에서, 연분수전개의 부분몫이 무한히 증가하는 것을 보였다.

이 결과를 얻기 위한 기초내용으로 유한체에서의 형식적 멱급수와 연분수전개, 비아르키메데스 절대값, 근사분수에 대해서 2장에서 다루었다. 3장에서는 대수적 멱급수 중 유계인 부분몫을 갖는 대수적 멱급수와 부분몫이 무한히 증가하는 대수적 멱급수에 대해서 살펴보았다. 4장에서는 이 논문의 주요 결과인 특정한 조건을 만족하는 방정식에서의 부분몫을 구체적으로 계산하는 과정을 보였다.

제 2 장

멱급수와 연분수전개

소수 p에 대해서 $\mathbb{F}$은 표수(characteristic)가 p인 유한체이다. $\mathbb{F}[X]$는 $\mathbb{F}$ 위의 다항식환이고 $\mathbb{F}(X)$는 유리식체이다. 다음과 같은 식

$$\alpha = \sum_{i \le n_0} a_i X^i, \quad \alpha_{n_0} \neq 0, \quad n_0 \in \mathbb{Z}$$

을 형식적 멱급수(formal power series)라고 한다.

계수가 $\mathbb{F}$에 속하는 형식적 멱급수의 체를

$$\mathbb{F}((X^{-1})) = \left\{ \sum_{i \le n_0} a_i X^i : n_0 \in \mathbb{Z} \quad and \quad \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$$

로 나타낸다.

멱급수 α에 대해서 다음과 같이

$$\deg(\alpha) = n_0, \quad |\alpha| = |X|^{n_0}, \quad \lfloor \alpha \rfloor = \sum_{i \le 0} a_i X^i \quad \lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{F}[X]$$

라고 정의 하자. 여기서 $|X|$는 $|X| > 1$을 만족하는 고정된 실수이다. 또 $\deg(\alpha)$는 α의 차수, $|\alpha|$는 α의 절대값, $\lfloor \alpha \rfloor = \sum_{i \le 0} a_i X^i$는 α의 다항식부분 (polynomial part) 이라고 부른다.

예제 1. 멱급수 α가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\alpha = X^2 + X + 1 + X^{-1} + X^{-3} + \cdots$$

이 멱급수 α에 대해서

$$\deg(\alpha) = 2, \qquad |\alpha| = |X|^2 > 1, \qquad \lfloor \alpha \rfloor = X^2 + X + 1$$

이다

실수 x,y의 절대값에 대해서는 부등식 $|x+y| \leq |x|+|y|$이 성립한다. 반면에 형식적 멱급수의 절대값에 대해서는

$$\deg(\alpha) \neq \deg(\beta)\text{일때}, \qquad |\alpha+\beta| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$$

$$\deg(\alpha) = \deg(\beta)\text{일때}, \qquad |\alpha+\beta| \leq \max\{|\alpha|,|\beta|\}$$

이 성립한다. 즉, 임의의 형식적 멱급수 α,β에 대해서

$$|\alpha+\beta| \leq \max\{|\alpha|,|\beta|\}$$

이 성립한다. 이러한 절대값을 비아르키메데스 절대값(non-archimedean absolute value)이라고 한다.

예제 2. $\mathbb{F}_2$위에서 정의된 형식적 멱급수 α, β, γ가 있다고 하자.

$$\alpha = X^3 + X^2 + 1 + X^{-1} + X^{-3} + X^{-4} + \cdots$$
$$\beta = X^2 + X + 1 + X^{-2} + X^{-3} + X^{-5} + \cdots$$
$$\gamma = X^3 + X + X^{-2} + X^{-3} + \cdots$$

각각의 절대값은

$$|\alpha| = |X|^3, \quad |\beta| = |X|^2, \quad |\gamma| = |X|^3$$

와 같다. α의 절대값과 β의 절대값은 서로 다르므로,

$$|\alpha+\beta| = |X^3 + X + X^{-1} + X^{-2} + X^{-4} + X^{-5} + \cdots| = |X|^3$$
$$\max\{|\alpha|,|\beta|\} = |\alpha| = |X|^3$$

이다. 그러므로

$$|\alpha+\beta| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$$

이다.

한편 α의 절대값과 γ의 절대값은 같다. 이 경우에는

$$|\alpha+\gamma| = |X^2 + X + 1 + X^{-1} + X^{-2} + \cdots| = |X|^2$$
$$\max\{|\alpha|,|\gamma|\} = |\alpha| = |\gamma| = |X|^3$$

이다. 그러므로

$$|\alpha+\gamma| < \max\{|\alpha|,|\gamma|\}$$

이다.

이제 형식적 멱급수 $\alpha = \sum_{i \geq n_0} \alpha_i X^{-i}$을

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$$

위와 같이 나타낸 식을 α의 연분수전개(continued fraction expansion)라고 한다. 여기서 a_0, a_1, a_2, $\cdots \in \mathbb{F}[X]$이고, $i > 0$에 대해 $\deg(a_i) > 0$이다. 다항식 a_i를 α의 i번째 부분몫(partial quotient)이라고 한다. 또 $\alpha_i = \alpha_{i-1} - \lfloor \alpha_{i-1} \rfloor$로 정의한다. 그러면 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots, \alpha_i]$이다.

예제 3. 형식적 멱급수

$$\alpha = X^4 + X^3 + X^2 + X^{-1} + X^{-3} + X^{-4} + \cdots, \quad \alpha \in \mathbb{F}_2((X^{-1}))$$

의 연분수 전개는

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots, \alpha_i]$$

이다.

$$\begin{aligned}
a_0 = X^4 + X^3 + X^2, \alpha_1 &= \frac{1}{X^{-1} + X^{-3} + X^{-4} + \cdots} \\
&= X + \frac{X^{-2} + X^{-3} + \cdots}{X^{-1} + X^{-3} + X^{-4} + \cdots} \\
a_1 = X, \qquad \alpha_2 &= \frac{X^{-2} + X^{-3} + \cdots}{X^{-1} + X^{-3} + X^{-4} + \cdots} \\
&= X + 1 + \frac{X^{-4} + \cdots}{X^{-2} + X^{-3} + \cdots} \\
a_2 = X + 1, \quad \alpha_3 &= \frac{X^{-4} + \cdots}{X^{-2} + X^{-3} + \cdots} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

이므로

$$\alpha = X^4 + X^3 + X^2 + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{X + 1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$
$$= [X^4 + X^3 + X^2, X, X+1, \cdots]$$

이다.

예제 4. 멱급수 $\alpha = \dfrac{X^4 + X^3 + 1}{X^4}$에 대해서

$$\frac{X^4+X^3+1}{X^4} = 1 + \frac{X^3+1}{X^4} = 1 + \cfrac{1}{X + \cfrac{X}{X^3+1}} = 1 + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{X^2 + \cfrac{1}{X}}}$$

이다. 따라서 α는

$$\alpha = [1, X, X^2, X]$$

이다.

형식적 멱급수 $\alpha = \sum_{i \geq n_0} \alpha_i X^{-i}$, $\quad (\alpha_{n_0} \neq 0)$에서

$$c_n = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] \qquad (n \geq 0)$$

을 α의 n번째 근사분수(convergent)라고 한다.

예제 5. $\alpha = [X+1, X, 1, X+1, \cdots]$ 라고 하자.
여기서 α의 세번째 근사분수 c_3은

$$c_3 = [X+1, X, 1, X+1] = X + 1 + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{X+1}}}$$
$$= \frac{X^3+1}{X^2+X+1}$$

이다.

형식적 멱급수 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$에서

$$P_{-2} = Q_{-1} = 0, \quad Q_{-2} = P_{-1} = 1,$$

이라 하고 $n \geq 0$에 대하여 P_n, Q_n을 다음이라 하자.

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \quad Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

그러면

$$P_0 = a_0 P_{-1} + P_{-2} = a_0 \cdot 1 + 0 = a_0, \quad Q_0 = a_0 Q_{-1} + Q_{-2} = a_0 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$P_1 = a_1 P_0 + P_{-1} = a_1 a_0 + 1, \quad Q_1 = a_1 Q_0 + Q_{-1} = a_1 \cdot 1 + 0 = a_1$$

이 성립한다.

정리 1. 형식적 멱급수 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$에서

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \beta] = \frac{\beta P_{n-1} + P_{n-2}}{\beta Q_{n-1} + Q_{n-2}}, \qquad (n \geq 0),$$

이다.

증명. $P_{-2} = Q_{-1} = 0, \quad Q_{-2} = P_{-1} = 1$이므로

$$[a_0, \alpha_1] = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1 a_0 + 1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1 P_0 + P_{-1}}{\alpha_1 Q_0 + Q_{-1}}$$

이 성립한다.
이제 $n = k \geq 1$ 에서

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, \alpha_k] = \frac{\alpha_k P_{k-1} + P_{k-2}}{\alpha_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

이라고 가정하면

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k, \alpha_{k+1}] &= [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}] \\
&= \frac{(a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}})P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}})Q_{k-1} + Q_{k-2}} \\
&= \frac{\alpha_{k+1}(a_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{\alpha_{k+1}(a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} \\
&= \frac{\alpha_{k+1} P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}
\end{aligned}$$

이므로 $n = k+1$일 때도 성립한다.
따라서 모든 $n \geq 0$에 대해서 성립함을 알 수 있다.

정리 2. 형식적 멱급수 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$에서

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{P_n}{Q_n} \qquad (n \geq 0)$$

이다.

증명. 위의 정리로부터

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \beta] = \frac{\beta P_{n-1} + P_{n-2}}{\beta Q_{n-1} + Q_{n-2}}, \qquad (n \geq 0),$$

이 성립하는 것은 확인 하였다. 따라서

$$[a_0] = a_0 = \frac{P_0}{Q_0}$$

이고,

$$[a_0, a_1] = \frac{a_1 P_0 + P_{-1}}{a_1 Q_0 + Q_{-1}} = \frac{P_1}{Q_1}$$

$$\vdots$$

이 되므로,

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{a_n P_{n-1} + P_{n-2}}{a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n}$$

이 성립되는 것을 알 수 있다.

정리 3. 멱급수 $\alpha = [a_0, a_1, a_2 \cdots, a_{n-1}, \beta]$라고 하고

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

라고 하면

$$\alpha = \frac{A\beta + B}{C\beta + D}$$

이다.

증명.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

이라고 하면 $a_0 = P_0$, $1 = P_{-1} = Q_0$, $0 = Q_{-1}$이므로

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

이고

$$[a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n] = \begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} \alpha = [a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n, \beta] &= \begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\beta P_{n-1} + P_{n-2}}{\beta Q_{n-1} + Q_{n-2}} \end{aligned}$$

이므로

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2 \cdots, \beta] = \frac{A\beta + B}{C\beta + D}$$

이다.

정리 4. 다항식의 수열 P_n, Q_n에 대해

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$$

이 성립한다.

증명. 주어진 식

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$$

에 대해서 $n = k = 0$일 때,

$$P_0 Q_{-1} + P_{-1} Q_0 = P_0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1 = (-1)^{0-1}$$

이다. $n = k + 1$, $k > 0$일때,

$$\begin{aligned} P_{k+1} Q_k + P_k Q_{k+1} &= (a_{k+1} P_k + P_{k-1}) Q_k - P_k (a_{k+1} Q_k + Q_{k-1}) \\ &= a_{k+1} P_k Q_k + P_{k-1} Q_k - P_k a_{k+1} Q_k - P_k Q_{k-1} \\ &= P_{k-1} Q_k - P_k Q_{k-1} \\ &= -(P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k) \\ &= -(-1)^{k-1} = (-1)^k \end{aligned}$$

이므로 $n = k+1$도 성립한다. 따라서

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$$

이다.

정리 5. P_n/Q_n과 α의 관계에 대해

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{|a_{n+1}||Q_n|^2}$$

이 성립함을 알 수 있다.
증명.

$$\begin{aligned}
\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| &= \left|\frac{\alpha_{n+1}P_n + P_{n-1}}{\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| \\
&= \left|\frac{(\alpha_{n+1}P_n + P_{n-1})Q_n - P_n(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1})}{(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1})Q_n}\right| \\
&= \left|\frac{P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}}{(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1})Q_n}\right| \\
&= \left|\frac{-(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n)}{(\alpha_{n+1}Q_n + Q_{n-1})Q_n}\right| \\
&= \left|\frac{-(-1)^{n-1}}{\alpha_{n+1}Q_n^2 + Q_{n-1}Q_n}\right| = \frac{1}{|a_{n+1}||Q_n|^2}
\end{aligned}$$

정리 6.

$$\alpha = \frac{A\beta + B}{C\beta + D}, \quad \beta = p + \frac{1}{\gamma}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{F}[X], \quad AD - BC \neq 0$$

일 때,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

이면,

$$\alpha = \frac{A'\gamma + B'}{C'\gamma + D'}$$

이다.

증명. 형식적 멱급수$\beta = p + \dfrac{1}{\gamma}$ 를 $\alpha = \dfrac{A\beta + B}{C\beta + D}$를 대입하여 식을 정리하면

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{A\beta + B}{C\beta + D} &= \frac{A\left(\dfrac{p\gamma + 1}{\gamma}\right) + B}{C\left(\dfrac{p\gamma + 1}{\gamma}\right) + D} \\ &= \frac{Ap\gamma + A + b\gamma}{Cp\gamma + C + D\gamma} \\ &= \frac{(Ap + B)\gamma + A}{(Cp + D)\gamma + D}\end{aligned}$$

이다. 그리고 A, B, C, D와 부분몫 p에 대해서 다음과 같이 나타낼 수 있으므로,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

$\dfrac{(Ap + B)\gamma + A}{(Cp + D)\gamma + D}$를 A', B', C', D'로 표현하여 보면

$$\alpha = \frac{A\beta + B}{C\beta + D} = \frac{A'\gamma + B'}{C'\gamma + D'}$$

라고 할 수 있다.

제 3 장

대수적 멱급수의 연분수 전개

Baum과 Sweet〔1〕는 다음 방정식

$$X\alpha^3 + \alpha + X = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{F}_2((X^{-1}))$$

을 만족하는 해의 연분수전개의 부분몫의 차수가 유계인 것을 보였다.

Mills와 Robbins〔10〕는 $p \geq 3$, $0 \leq 2j \leq k$일 때

$$f_k = \sum_{0 \leq 2j \leq k} \binom{k-j}{j} x^{k-2j}$$

를 정의하고

$$\beta = \frac{\alpha^p + f_{p-2}}{f_{p-1}} \qquad \alpha = [ax, bx; \beta], \quad \mathbb{F}_2((X^{-1}))$$

을 만족하는 멱급수 α의 연분수전개의 부분몫의 차수가 전부 1이라는 것을 보였다. Mills와 Robbins는 $p \geq 5$인 경우에도 부분몫의 차수가 전부 1이라는 것을 찾았다. Lee와 Ayadi〔4〕는 정리7, 정리8을 보였다.

정리 7. 멱급수$\alpha \in \mathbb{F}_2((X^{-1}))$가 다음방정식

$$Cx^3 + Ax^2 + 1 = 0$$

$$C = X^l, A = X^{2l} + \sum_{i=2}^{2l-1} eiX^i + X + 1 (ei \in \mathbb{F}_2), \quad l \geq 2$$

을 만족하는 만족하는 차수가 양인 멱급수라고 하면 α는 유계인 부분몫을 갖는다.

정리 8. 멱급수$\alpha \in \mathbb{F}_2((X^{-1}))$가 다음 방정식

$$x^3 + (X^l + B)x^2 + x + B = 0$$

$$l \geq 3, \quad B \in \mathbb{F}_2[X] \quad \deg(B) < l, B(0) = 0, \frac{B}{X}(0) = 1$$

을 만족하는 차수가 양인 멱급수라고 하면 α는 유계인 부분몫을 갖는다.

정리8에 주어진 방정식에서 $l = 3$, $B = X$라고 하면

$$\alpha^3 + (X^3 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

와 같은 방정식이 되고 이 방정식에 나타나는 해의 연분수전개의 부분몫의 차수가 유계가 된다. 제4장에서는 이 방정식의 해의 연분수전개를 통해 나타나는 유계인 부분몫을 보이는 구체적인 계산과정을 보였다.

반면에 $l = 2, B = X$라 하면, 다음과 같은

$$\alpha^3 + (X^2 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

방정식이 되고 이 방정식의 해의 연분수전개에서 부분몫의 차수는 무한히 증가한다. 아래 정리10에서는 이 방정식의 해의 연분수전개의 부분몫의 차수가 무한히 증가하는 것을 구체적인 계산을 통하여 보였다.

부분몫을 구하는데 있어서는 Mkaouar〔11〕의 결과를 이용하였다.

정리 9 (Mkaouar). $A_i \in \mathbb{F}[X]$이고 $n \geq 1$인 $P(x) = \sum_{0 \leq i \leq n} A_i x^i$라고 하자. $0 \leq i \leq n$이고 $i \neq n-1$일 때 $\deg A_i < \deg A_{n-1}$임을 가정하자. 이때 $P(\alpha) = 0$을 만족하는 차수가 양수인 유일한 멱급수 α가 존재하고, $\lfloor \alpha \rfloor = -\lfloor A_{n-1}/A_n \rfloor$이다.

정리 10. $\mathbb{F}_2$위의 멱급수 α가 다음 방정식

$$\alpha^3 + (X^2 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

을 만족한다고 하자. 양의 차수를 갖는 α의 연분수전개에 나타나는 부분몫은

$$a_0 = X^2 + X, \quad a_1 = X^2 + 1, \quad a_{2k} = X^{2^{k+1}-2}, \quad a_{2k+1} = X^2, \qquad k \geq 1$$

이다.

증명. 주어진 방정식

$$\alpha^3 + (X^2 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

에 정리9를 이용하면

$$\lfloor \alpha \rfloor = -\left\lfloor \frac{X^2 + X}{1} \right\rfloor = X^2 + X$$

이므로, $a_0 = X^2 + X$이다. 또

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

이므로, α_1에 관한 식을 얻기위해 방정식

$$\alpha^3 + (X^2 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

에 대입하면,

$$X^2\alpha_1^3 + (X^4 + X^2 + 1)\alpha_1^2 + 1 = 0$$

이고 정리9를 이용하면

$$\lfloor \alpha \rfloor = -\left\lfloor \frac{X^4 + X^2 + 1}{X^2} \right\rfloor = X^2 + 1$$

이므로 $a_1 = X^2 + 1$이다.

주어진 방정식을 α^2에 관하여 식을 정리하면

$$\alpha^2 = \frac{\alpha + X}{\alpha + X^2 + X} \tag{3.1}$$

이다. 여기에 a_0와a_1로부터

$$\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^2 + X & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^2 + 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 & 1 \\ X^2 + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [a_0, a_1, \alpha_2]$$

이고 정리 3에 의해서

$$\alpha = \frac{(X^4+X^3+X^2+X+1)\alpha_2+X^2+X}{(X^2+1)\alpha_2+1}$$

이다. 이것을 (3.1)에 대입하면

$$\alpha^2 = \frac{(X^4+X^2+1)\alpha_2+X^2}{\alpha_2}$$

이고

$$\alpha^2 = a_0^2+\frac{1}{\alpha_1^2} = \frac{(X^4+X^2+1)\alpha_2+X^2}{\alpha_2}$$

이므로,

$$(X^2+X)^2+\frac{1}{\alpha_1^2} = \frac{(X^4+X^2+1)\alpha_2+X^2}{\alpha_2}$$

이다. α_2에 대해서 식을 정리하면

$$(X^4+X^2)\alpha_2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} = (X^4+X^2+1)\alpha_2+X^2$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} = \alpha_2+X^2$$

$$\alpha_2 = \frac{X^2\alpha_1^2}{\alpha_1^2+1} = X^2+\frac{X^2}{\alpha_1^2+1} = X^2+\frac{1}{\frac{\alpha_1^2+1}{X^2}}$$

이다. 그런데 $\left|\frac{\alpha_1^2+1}{X^2}\right| \geq \left|\frac{a_1^2}{X^2}\right| = \left|\frac{X^4}{X^2}\right| > 1$이므로

$$a_2 = X^2, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1^2+1}{X^2}$$

이다.

α_3은

$$\begin{aligned}\alpha_3 = \frac{\alpha_1^2+1}{X^2} &= \frac{a_1^2+1}{X^2}+\frac{1}{X^2\alpha_2^2}\\ &= \frac{(X^2+1)^2+1}{X^2}+\frac{1}{X^2\alpha_2^2}\\ &= X^2+\frac{1}{X^2\alpha_2^2}\end{aligned}$$

이고 $|X^2\alpha_2^2| > 1$이므로

$$a_3 = X^2, \quad \alpha_4 = \frac{1}{X^2\alpha_2^2}$$

이다.

이러한 방식으로 계속 계산을 하여 보면은

$$\alpha_4 = X^2\alpha_2^2 = X^2a_2^2 + \frac{X^2}{\alpha_3^2} = X^6 + \frac{1}{\frac{\alpha_3^2}{X^2}}$$

이고 $\left|\frac{\alpha_3^2}{X^2}\right| > 1$이므로

$$a_4 = X^6, \quad \alpha_5 = \frac{\alpha_3^2}{X^2}$$

이다.

α_5는

$$\alpha_5 = \frac{\alpha_3^2}{X^2} = \frac{a_3^2}{X^2} + \frac{1}{X^2\alpha_4^2} = X^2 + \frac{1}{X^2\alpha_4^2}$$

이고 $|X^2\alpha_4^2| > 1$이므로

$$a_5 = X^2, \quad \alpha^6 = X^2\alpha_4^2$$

이다.

α_6은

$$\alpha_6 = X^2\alpha_4^2 = X^2a_4^2 + \frac{X^2}{\alpha_5^2} = X^{14} + \frac{1}{\frac{\alpha_5^2}{X^2}}$$

이고 $\left|\frac{\alpha_5^2}{X^2}\right| > 1$이므로

$$a_6 = X^{14}, \alpha_7 = \frac{\alpha_5^2}{X^2}$$

이다.

α_7은

$$\alpha_7 = \frac{\alpha_5^2}{X^2} = \frac{a_5^2}{X^2} + \frac{1}{X^2\alpha_6^2} = X^2 + \frac{1}{X^2\alpha_6^2}$$

이고 $|X^2\alpha_6^2| > 1$이므로

$$a_7 = X^2, \quad \alpha_8 = X^2\alpha_6^2$$

이다.

α_8은

$$\alpha_8 = X^2\alpha_6^2 = X^2a_6^2 + \frac{X^2}{\alpha_7^2} = X^{30} + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_7^2}{X^2}}$$

이고 $\left|\dfrac{\alpha_7^2}{X^2}\right| > 1$이므로

$$a_8 = X^{30}, \quad \alpha_9 = \frac{\alpha_7^2}{X^2}$$

이다.

위의 계산결과로 부터 $k \geq 2$일 때,

$$\alpha_{2k} = X^2\alpha_{2k-2}^2 = X^2a_{2k-2}^2 + \frac{X^2}{\alpha_{2k-1}^2}$$

$$\alpha_{2k+1} = \frac{\alpha_{2k-1}^2}{X^2} = \frac{a_{2k-1}^2}{X^2} + \frac{1}{X^2\alpha_{2k}^2}$$

$$a_{2k} = X^{2^{k+1}-2}, \qquad a_{2k+1} = X^2$$

을 추측할 수 있다. 이것을 수학적 귀납법으로 증명하겠다.

$k = 2$일 때는

$$\alpha_4 = X^2\alpha_2^2 = X^2a_2^2 + \frac{X^2}{\alpha_3^2}$$

$$\alpha_5 = \frac{\alpha_3^2}{X^2} = \frac{a_3^2}{X^2} + \frac{1}{X^2\alpha_4^2}$$

이다. $k = l \geq 2$일 때를 성립한다고 가정하면, $k = l + 1$일 때,

$$\begin{aligned}
\alpha_{2l+2} &= X^2\alpha_{2l}^2 \\
&= X^2\left(a_{2l}^2 + \frac{1}{\alpha_{2l+1}^2}\right) \\
&= X^2\left((X^{2^{l+1}-2})^2 + \frac{1}{\alpha_{2l+1}^2}\right) \\
&= X^2\left(X^{2^{l+2}-4} + \frac{1}{\alpha_{2l+1}^2}\right) \\
&= X^{2^{l+2}-2} + \frac{X^2}{\alpha_{2l+1}^2} \\
&= a_{2l+2} + \frac{1}{\alpha_{2l+3}}
\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
\alpha_{2l+3} &= \frac{\alpha_{2l+1}^2}{X^2} \\
&= \frac{1}{X^2}\left(a_{2l+1}^2 + \frac{1}{\alpha_{2l+2}^2}\right) \\
&= \frac{1}{X^2}\left(X^4 + \frac{1}{\alpha_{2l+2}^2}\right) \\
&= X^2 + \frac{1}{X^2\alpha_{2l+2}^2} \\
&= a_{2l+3} + \frac{1}{\alpha_{2l+4}}
\end{aligned}$$

이다. 따라서, $k = l + 1$성립하므로,

$$\alpha_{2k} = X^2\alpha_{2k-2}^2 = X^2a_{2k-2}^2 + \frac{X^2}{\alpha_{2k-1}^2}$$

$$\alpha_{2k+1} = \frac{\alpha_{2k-1}^2}{X^2} = \frac{a_{2k-1}^2}{X^2} + \frac{1}{X^2\alpha_{2k}^2}$$

$$a_{2k} = X^{2^{k+1}-2}, \qquad a_{2k+1} = X^2$$

이다.

제 4 장

유계인 부분몫을 갖는 대수적 멱급수

정리8에서 멱급수$\alpha \in \mathbb{F}_2((X^{-1}))$가 다음 방정식

$$x^3 + (X^l + B)x^2 + x + B = 0$$

$$l \geq 3, \quad B \in \mathbb{F}_2[X] \quad \deg(B) < l, B(0) = 0, \frac{B}{X}(0) = 1$$

을 만족하는 차수가 양인 멱급수라고 하면 α는 유계인 부분몫을 갖는다고 하였다. 이 장에서는 정리8에 주어진 방정식에서 $l = 3$, $B = X$일 때의 방정식

$$\alpha^3 + (X^3 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

을 가지고 구체적인계산을 통해 이 방정식에 나타나는 해의 연분수전개의 부분몫을 모두 찾고 부분몫의 차수가 유계인 것 보였다.

정리 11. 멱급수$\alpha \in \mathbb{F}_2((X^{-1}))$가 다음

$$\alpha^3 + (X^3 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0 \tag{4.1}$$

방정식을 만족하는 차수가 양수인 멱급수라고 하면 α의 연분수전개에 나타나는 부분몫은

$$X^3 + X, \qquad X^3, \qquad X$$

이다.

증명.
주어진 방정식

$$\alpha^3 + (X^3 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

에 정리9을 이용하면

$$\lfloor \alpha \rfloor = \left\lfloor \frac{X^3 + X}{1} \right\rfloor = X^3 + X$$

이므로 $a_0 = X^3 + X$이다. 또

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

이므로 α_1에 관한 식을 얻기 위해 방정식

$$\alpha^3 + (X^3 + X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

에 대입하면

$$X^3\alpha_1^3 + (X^6 + X^2 + 1)\alpha_1^2 + 1 = 0$$

이고 정리9를 이용하면

$$\lfloor \alpha_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{X^6 + X^2 + 1}{X^3} \right\rfloor = X^3$$

이므로 $a_1 = X^3$이다. 주어진 방정식 (4.1)을 α^2에 관하여 정리하면

$$\alpha^2 = \frac{\alpha + X}{\alpha + X^3 + X} \tag{4.2}$$

이다. 여기에 a_0, a_1를 가지고 정리3을 적용하면

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X^3 + X & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X^6 + X^4 + 1 & X^3 + X \\ X^3 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{(X^6 + X^4 + 1)\alpha_2 + X^3 + X}{X^3\alpha_2 + 1}$$

이다. 이것을 (4.2)에 대입하면

$$\alpha^2=\frac{(X^6+1)\alpha_2+X^3}{\alpha_2}$$

이고

$$\alpha^2=a_0^2+\frac{1}{\alpha_1^2}=\frac{(X^6+1)\alpha_2+X^3}{\alpha_2}$$

이므로

$$(X^3+X)^2+\frac{1}{\alpha_1^2}=\frac{(X^6+1)\alpha_2+X^3}{\alpha_2}$$

이다. 이것을 α_2에 대해서 정리하면

$$(X^6+X^2)\alpha_2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}=(X^6+1)\alpha_2+X^3$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}=(X^2+1)\alpha_2+X^3$$

$$\alpha_2=\frac{X^3\alpha_1^2}{(X^2+1)\alpha_1^2+1}=X+\cfrac{1}{\cfrac{(X^2+1)\alpha_1^2+1}{X\alpha_1^2+X}}$$

이다. 그런데, $\left|\frac{(X^2+1)\alpha_1^2+1}{X\alpha_1^2+X}\right|>1$이므로

$$a_2=X,\quad \alpha_3=\frac{(X^2+1)\alpha_1^2+1}{X\alpha_1^2+X}$$

이다. α_3는

$$\alpha_3=X+\cfrac{1}{\cfrac{X\alpha_1^2+X}{\alpha_1^2+X^2+1}}$$

이고 $\left|\frac{X\alpha_1^2+X}{\alpha_1^2+X^2+1}\right|>1$이므로

$$a_3=X,\quad \alpha_4=\frac{X\alpha_1^2+X}{\alpha_1^2+X^2+1}$$

이다. 이 같은 원리로 계산하여 나갈 수 있는데, 조금더 간략한 방법으로 계산을 하기위해 정리6을 이용하여 보면

$$\alpha = \frac{(X^3+X)\alpha^2+X}{\alpha^2+1}, \quad \alpha^2 = a_0^2 + \frac{1}{\alpha_1^2}$$

이고

$$\alpha = \frac{(X^3+X)\alpha_0^2+X}{\alpha_0^2+1}$$

이다. 그런데

$$\begin{bmatrix} (X^3+X) & X \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X^3+X)^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X^9+X^7+X^5+X^3+X) & X^3+X \\ X^6+X^2+1 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\alpha = \frac{(X^9+X^7+X^5+X^3+X)\alpha_1^2+X^3+X}{(X^6+X^2+1)\alpha_1^2+1}$$

이다. α의 부분몫들을 구해보면

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(X^9+X^7+X^5+X^3+X)\alpha_1^2+X^3+X}{(X^6+X^2+1)\alpha_1^2+1} \\ &= X^3+X+\cfrac{1}{X^3+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{\cfrac{X\alpha_1^2+X}{\alpha_1^2+X^2+1}}}}} \end{aligned}$$

이므로

$$\alpha = [X^3+X, X^3, X, X, \alpha_4], \quad \alpha_4 = \frac{X\alpha_1^2+X}{\alpha_1^2+X^2+1}, \quad \alpha_1 = X^3 + \frac{1}{\alpha_2}$$

이다.

여기서

$$\alpha_4 = \frac{X\alpha_1^2+X}{\alpha_1^2+X^2+1} = X + \frac{X^3}{\alpha_1^2+X^2+1}$$

이지만

$$\left|\frac{\alpha_1^2 + X^2 + 1}{X^3}\right| < 1$$

이므로 더이상 부분몫을 구할 수가 없다. 따라서

$$\alpha = [X^3 + X, X^3, X, X, \alpha_4]$$

이므로

$$a_0 = X^3 + X, a_1 = X^3, a_2 = X, a_3 = X$$

이 된다.
이와 같은 방법으로 α_4를 구하여 보면

$$\alpha_1^2 = a_1^2 + \frac{1}{\alpha_2^2} = X^6 + \frac{1}{\alpha_2^2}$$

이고,

$$\begin{bmatrix} X & X \\ 1 & X^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^7 + X & X \\ X^6 + X^2 + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\alpha_4 = \frac{(X^7 + X)\alpha_2^2 + X}{(X^6 + X^2 + 1)\alpha_2^2 + 1}$$

이다.

앞서 계산 한 것과 동일한 방법으로 α_4의 부분몫을 계산하여 보면은

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= \frac{(X^7+X)\alpha_2^2+X}{(X^6+X^2+1)\alpha_2^2+1} \\ &= X+\cfrac{1}{\cfrac{(X^6+X^2+1)\alpha_2^2+1}{X^3\alpha_2^2}} \\ &= X+\cfrac{1}{X^3+\cfrac{1}{\cfrac{X^3\alpha_2^2}{(X^2+1)\alpha_2^2+1}}} \\ &= X+\cfrac{1}{X^3+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{\cfrac{(X^2+1)\alpha_2^2+X}{X\alpha_2^2+X}}}} \\ &= X+\cfrac{1}{X^3+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{\cfrac{X\alpha_2^2+X}{\alpha_2^2+X^2+1}}}}}\end{aligned}$$

이므로

$$\alpha_4=[X,X^3,X,X,\alpha_8],\quad \alpha_8=\frac{X\alpha_2^2+X}{\alpha_2^2+X^2+1},\quad \alpha_2=X+\frac{1}{\alpha_3}$$

이다.

여기서도 마찬가지로

$$\alpha_8=\frac{X\alpha_2^2+X}{\alpha_2^2+X^2+1}=X+\frac{X^3}{\alpha_2^2+X^2+1}$$

이지만,

$$\left|\frac{\alpha_1^2+X^2+1}{X^3}\right|<1$$

이므로 앞선 경우와 마찬가지로 더 이상 부분몫을 구할 수가 없다. 따라서

$$a_4 = X, a_5 = X^3, a_6 = X, a_7 = X$$

이 된다.

$$\alpha_8 = \frac{X\alpha_2^2 + X}{\alpha_2^2 + X^2 + 1} = \frac{(X^3+X)\alpha_3^2 + X}{\alpha_3^2 + 1}$$

이다.

$$\frac{(X^3+X)\alpha_3^2 + X}{\alpha_3^2 + 1} = X^3 + X + \frac{X^3}{\alpha_3^2 + 1}$$

이지만,

$$\left| \frac{\alpha_3^2 + 1}{X^3} \right| < 1$$

이므로 더이상 새로운 부분몫을 구할 수 없다. 따라서 다음시행으로 넘어가면

$$\alpha_3^2 = a_3^2 + \frac{1}{\alpha_4^2}$$

이고

$$\begin{bmatrix} X^3+X & X \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^5+X^3+X & X^+X \\ X^2+1 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\alpha_8 = \frac{(X^5+X^3+X)\alpha_4^2 + X^3 + X}{(X^2+1)\alpha_4^2 + 1}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= \frac{(X^5+X^3+X)\alpha_4^2 + X^3 + X}{(X^2+1)\alpha_4^2 + 1} \\ &= X^3 + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{\cfrac{X\alpha_4^2 + X}{\alpha_4^2 + X^2 + 1}}} \end{aligned}$$

이고

$$\alpha_8 = [X^3, X, \alpha_{10}], \quad \alpha_{10} = \frac{X\alpha_4^2 + X}{\alpha_4^2 + X^2 + 1}, \quad \alpha_4 = X + \frac{1}{\alpha_5}$$

이다. 따라서

$$a_8 = X^3, \qquad a_9 = X$$

이다. α_{10}은

$$\alpha_{10} = \frac{X\alpha_4^2 + X}{\alpha_4^2 + X^2 + 1} = \frac{(X^3+X)\alpha_5^2 + X}{\alpha_5^2 + 1} = X^3 + X + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_5^2+1}{X^3}}$$

이다. 그런데

$$\left|\frac{\alpha_5^2+1}{X^3}\right| < 1$$

이므로 부분몫을 구할 수 없다. 따라서 다음 시행으로 넘어가면

$$\alpha_5 = X^3 + \frac{1}{\alpha_6}$$

이므로

$$\begin{aligned}\alpha_{10} = \frac{(X^3+X)\alpha_5^2 + X}{\alpha_5^2+1} &= \frac{(X^9+X^7+X)\alpha_6^2 + X^3 + X}{(X^6+1)\alpha_6^2+1} \\ &= X^3 + X + \cfrac{1}{X^3 + \cfrac{1}{\cfrac{X^3\alpha_6^2}{\alpha_6^2+1}}}\end{aligned}$$

이다.

$$\alpha_{10} = [X^3+X, X^3, \alpha_{12}]$$

이고,

$$a_{10} = X^3 + X, \qquad a_{11} = X^3, \qquad \alpha_{12} = \frac{X^3\alpha_6^2}{\alpha_6^2+1}, \quad \alpha_6 = X + \frac{1}{\alpha_7}$$

이다. α_{12}는

$$\begin{bmatrix} X^3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^5 & X^3 \\ X^2+1 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\frac{X^5\alpha_7^2 + X^3}{(X^2+1)\alpha_7^2 + 1}$$

이다. 따라서

$$\alpha_{12} = \frac{X^5\alpha_7^2 + X^3}{(X^2+1)\alpha_7^2+1} = X^3 + X + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{\cfrac{X\alpha_7^2 + X}{\alpha_7^2 + X^2 + X}}}$$

이므로

$$\alpha_{12} = [X^3+X, X, \alpha_{14}], \quad \alpha_{14} = \frac{X\alpha_7^2 + X}{\alpha_7^2 + X^2 + X}, \quad \alpha_7 = X + \frac{1}{\alpha_8}$$

이고,

$$a_{12} = X^3 + X, \qquad a_{13} = X$$

이다. α_{14}는

$$\alpha_{14} = \frac{X\alpha_7^2 + X}{\alpha_7^2 + X^2 + 1} = \frac{(X^3+X)\alpha_8^2 + X}{\alpha_8^2 + 1} = X^3 + X + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha_8^2+1}{X^3}}$$

이다. 그런데

$$\left|\frac{\alpha_8^2+1}{X^3}\right| < 1$$

이므로 새로운 부분몫을 구할 수 없다. 따라서 다음 시행으로 넘어가면

$$\alpha_8 = X^3 + \frac{1}{\alpha_9}$$

이므로

$$\alpha_{14} = \frac{(X^3+X)\alpha_8^2 + X}{\alpha_8^2+1} = \frac{(X^9+X^7+X)\alpha_9^2 + X^3 + X}{(X^6+1)\alpha_9^2+1} = X^3 + X + \cfrac{1}{X^3 + \cfrac{1}{\cfrac{X^3\alpha_9^2}{\alpha_9^2+1}}}$$

이다.

$$\alpha_{14} = [X^3 + X, X^3, \alpha_{16}], \qquad \alpha_{16} = \frac{X^3\alpha_9^2}{\alpha_9^2 + 1}, \quad \alpha_9 = X + \frac{1}{\alpha_{10}}$$

이고,

$$a_{14} = X^3 + X, \qquad a_{15} = X^3$$

이다. α_{16}은

$$\alpha_{16} = \frac{X^3\alpha_9^2}{\alpha_9^2 + 1} = \frac{X^5\alpha_{10}^2 + X^3}{(X^2+1)\alpha_{10}^2 + 1}$$
$$= X^3 + X + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{\cfrac{X^3\alpha_{10}^2}{\alpha_{10}^2 + 1}}}$$

이므로

$$\alpha_{16} = [X^3 + X, X, \alpha_{18}], \qquad \alpha_{18} = \frac{X^3\alpha_{10}^2}{\alpha_{10}^2 + 1}, \quad \alpha_{10} = X^3 + X + \frac{1}{\alpha_{11}}$$

이고

$$a_{16} = X^3 + X, \qquad a_{17} = X$$

이다. α_{18}은

$$\alpha_{18} = \frac{X^3\alpha_{10}^2}{\alpha_{10}^2 + 1} = \frac{(X^7 + X^3 + X)\alpha_{11}^2 + X}{(X^6+1)\alpha_{11}^2 + 1}$$
$$= X + \cfrac{1}{X^3 + \cfrac{1}{\cfrac{X^3\alpha_{11}^2}{\alpha_{11}^2 + 1}}}$$

이므로

$$\alpha_{18} = [X, X^3, \alpha_{20}], \quad \alpha_{20} = \frac{X^3\alpha_{11}^2}{\alpha_{11}^2 + 1}, \quad \alpha_{11} = X^3 + \frac{1}{\alpha_{12}}$$

이고

$$a_{18} = X, \qquad a_{19} = X^3$$

이다. α_{20}은

$$\alpha_{20}=\frac{X^3\alpha_{11}^2}{\alpha_{11}^2+1}=\frac{X^9\alpha_{12}^2+X^3}{(X^6+1)\alpha_{12}^2+1}$$
$$=X^3+\cfrac{1}{X^3+\cfrac{1}{\cfrac{X^3\alpha_{12}^2}{\alpha_{12}^2+1}}}$$

이므로

$$\alpha_{20}=[X^3,X^3,\alpha_{22}],\quad \alpha_{22}=\frac{X^3\alpha_{12}^2}{\alpha_{12}^2+1},\quad \alpha_{12}=X^3+X+\frac{1}{\alpha_{13}}$$

이고

$$a_{20}=X^3,a_{21}=X^3$$

이다. α_{22}는

$$\alpha_{22}=\frac{X^3\alpha_{12}^2}{\alpha_{12}^2+1}=\frac{(X^9+X^5)\alpha_{13}^2+X^3}{(X^6+X^2+1)\alpha_{13}^2+1}$$
$$=X^3+\cfrac{1}{X^3+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{X+\cfrac{1}{\cfrac{X\alpha_{13}^2+X}{\alpha_{13}^2+X^2+1}}}}}$$

이므로

$$\alpha_{22}=[X^3,X^3,X,X,\alpha_{26}],\quad \alpha_{26}=\frac{X\alpha_{13}^2+X}{\alpha_{13}^2+X^2+1},\quad \alpha_{13}=X+\frac{1}{\alpha_{14}}$$

이고

$$a_{22}=X^3,a_{23}=X^3,a_{24}=X,a_{25}=X$$

이다. α_{26}은

$$\alpha_{26} = \frac{X\alpha_{13}^2 + X}{\alpha_{13}^2 + X^2 + 1} = \frac{(X^3+X)\alpha_{14}^2 + X}{\alpha_{14}^2 + 1}$$
$$= \frac{(X^9+X^7+X^5+X)\alpha_{15}^2 + X^3 + X}{(X^6+X^2+1)\alpha_{15}^2 + 1}$$
$$= X^3 + X + \cfrac{1}{X^3 + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{X + \cfrac{1}{\cfrac{X\alpha_{15}^2 + X}{\alpha_{15}^2 + X^2 + 1}}}}}$$

이므로

$$\alpha_{26} = [X^3+X, X^3, X, X, \alpha_{30}], \quad \alpha_{30} = \frac{X\alpha_{15}^2 + X}{\alpha_{15}^2 + X^2 + 1}, \quad \alpha_{15} = X^3 + \frac{1}{\alpha_{16}}$$

이고

$$a_{26} = X^3 + X, a_{27} = X^3, a_{28} = X, a_{29} = X$$

이다. 여기서 유계인 부분몫이 $[X^3+X, X^3, X]$임을 확인 할 수 있는데, 이유는 위와같은 계산을 해나가다 멈추게 되는 부분이

$$\begin{bmatrix} X^3+X & X \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X & X \\ 1 & X^2+1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X^3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

이 행렬들로부터 부분몫들이 한번 이상씩 시행되게 되면서 더이상 새로운 것이 나오지 않고 X^3+X, X^3, X으로 모든 연분수전개가 표현되게 된다.

따라서

$$\alpha^3 + (X^3+X)\alpha^2 + \alpha + X = 0$$

방정식의 유계인 부분몫은

$$[X^3+X, X^3, X]$$

이다.

이것을 그림으로 나타내어 보면 다음과 같다.

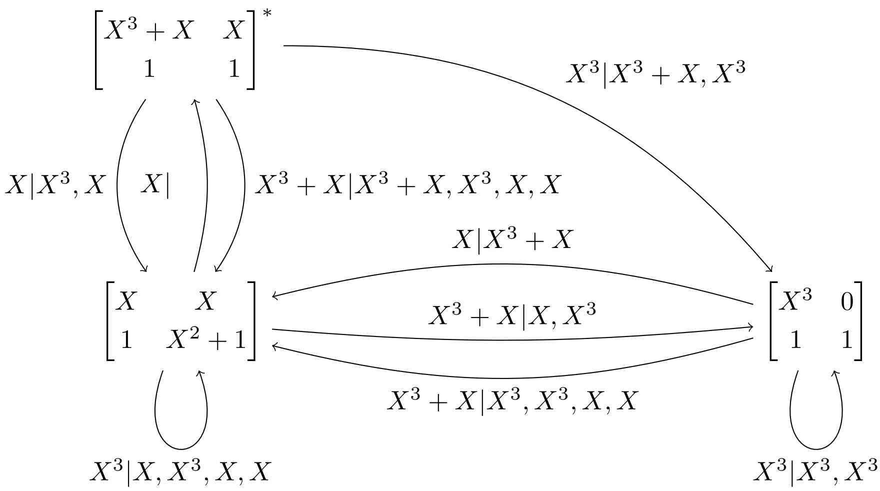

그림 4.1: 부분몫을 생성하는 유한 생태 기계

이 그림은 방정식을 계산한 과정과 함께 보면서 해석할 수 있다. 처음 시작은 $\begin{bmatrix} X^3+X & X \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 에서 시작한다. $a_0 = X^3+X$이므로, $\begin{bmatrix} X & X \\ 1 & X^2+1 \end{bmatrix}$ 으로 향한다. 이 때 나오는 부분몫들이 X^3+X, X^3, X, X이다. 그 다음 다시 $\begin{bmatrix} X & X \\ 1 & X^2+1 \end{bmatrix}$ 에서 $a_1 = X^3$이므로 $\begin{bmatrix} X & X \\ 1 & X^2+1 \end{bmatrix}$ 다시 자기자신으로 돌아오게 된다. 이때 나오는 부분몫들이 X, X^3, X, X이다. 세번째 시행은 $\begin{bmatrix} X & X \\ 1 & X^2+1 \end{bmatrix}$에서 $a_2 = X$이므로 $\begin{bmatrix} X^3+X & X \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 으로 향한다. 이렇게 따라가다보면은 더이상 새로운 맵이 그려지지 않게 되고 유계인 부분몫이 드러나게 된다.

참고문헌

[1] K. Ayadi, S. Beldi, and K. Lee. Continued fractions for linear fractional transformations of power series. Finite Field and Their Applications, 11(1):45–55, 2005.

[2] L. E. Baum and M. M. Sweet. Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2. Annals of Mathematics, 103:593–610, 1976.

[3] B. de Mathan. Approximation exponents for algebraic functions in positive characteristic. Acta Arith, 60(4):339–370, 1992.

[4] D. Gomez-Perez and A. Lasjaunias. Hyperquadratic power series in $\mathbb{F}_3((t^{-1}))$ with partial quotients of degree 1. The Ramanujan Journal, 33(2):219–226, 2014.

[5] A. I. Khinchin. Continued fractions. University of Chicago Press, 1964.

[6] A. Lasjaunias. Quartic power series in $\mathbb{F}_3((t^{-1}))$ with bounded partial quotients. Acta Arith, 95(1):49–59, 2000.

[7] A. Lasjaunias and J.-J. Ruch. Algebraic and badly approximalbe power series over a finite field. Finite Fields and Their Applications, 103:91–107, 2002.

[8] A. Lasjaunias and J.-J. Ruch. Flat power series over a finite field. J. Number Theory, 95:268–288, 2002.

〔9〕 A. Lasjaunias and J.-Y. Yao. Hyperquadratic continued fractions in odd characteristic with partial quotients of degree one. J. Number Theory, 149:259–284, 2015.

〔10〕 W. H. Mills and D. P. Robbins. Continued fractions for certain algebraic power series. J. Number Theory, 23:388–404, 1986.

〔11〕 M. Mkaouar. Sur les fractions continues des series formelles quadratiques sur $f_q(x)$. Acta Arith, 97(3):241–251, 2000.

〔12〕 D. S. Thakur. Diophantine approximation exponents and continued frac-tions for algebraic power series. J. Number Theory, 79(2):284–291, 1999.

〔13〕 J. F. Voloch. Diophantine approximation in positive characteristic. Periodica Mathematica Hungarica, 19(3):217–225, 1988.