[UCI]I804:24011-200000276313

2014년 8월
교육학석사(수학교육전공)학위논문

연속인 곡률을 갖는 삼차 베지에 곡선에 관한 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

임 세 묵

dCollection @ chosun

연속인 곡률을 갖는 삼차 베지에 곡선에 관한 연구

2014년 8월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

임 세 묵

Collection @ chosun

연속인 곡률을 갖는 삼차 베지에 곡선에 관한 연구

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2014년 4월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

임 세 묵

dCollection @ chosun

임세묵의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 이 관 규 인

심사위원 조선대학교 교수 오 동 렬 인

심사위원 조선대학교 교수 안 영 준 인

2014년 6월

조선대학교 교육대학원

dCollection @ chosun

목 차

ABSTRACT

제1장 소개 ---------- 1

제2장 예비 지식 (기초 지식) ---------- 3

제1절 n차 베지에 곡선 ---------- 3

제2절 기본적인 미분기하 개념 ---------- 4

제3장 연구 결과 ---------- 11

제1절 삼차 베지에 곡선에서의 곡률연속 ---------- 11

제4장 연구결과의 활용 ---------- 13

참고문헌 ---------- 26

dCollection @ chosun

ABSTRACT

Curvature continuity of cubic Bezier curve

Lim, Se Mook
Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

Bezier curves have been applied in many fields such as the field of CAD/CAM to help in designing desired objects with curve or curved surface in recent 30 years. Especially, the various fonts can be created by using the cubic Bezier curve. For example, alphabet "R" is constructed by connecting 28 Bezier curves in this paper. The research of this paper is the study to approximate 'R' which is composed of curves to become the curvature continuous. It showed the study that makes the tangent continuous approximated to become the curvature continuous in the connection points of Bezier curves.

Key Words : Bezier curve, curvature, geometric continuity, G^2 continuity.

dCollection @ chosun

연속인 곡률을 갖는 삼차 베지에 곡선에 관한 연구

제1장 소개

최근에 컴퓨터 그래픽스(Computer graphics)는 여러 과학 분야에 영향을 미치고 있다. 예를 들면, 과학과 공학 분야에서 실험 자료를 만족하는 곡선이나 곡면을 찾는다든지, CAD/CAM 분야에서 곡선이나 곡면을 이용하여 원하는 물체를 설계(design) 하는 등 여러 분야에서 응용되고 있다. 따라서 곡선 혹은 곡면을 좀 더 효과적으로 구성하는 방법을 살펴보는 것은 중요한 일이다. 주어진 제어점들을 지나는 곡선을 그리기 위해서, 베지에(Bezier) 곡선이나, B-spline 곡선 등 수학적 함수가 사용된다. 본 연구는 삼차 베지에 곡선을 이용하여 알파벳 “R”을 좌표로 설정하여 총 28개의 삼차 베지에 곡선을 붙여 만들었다. 28개의 삼차 베지에 곡선 중 시작점이 직선과 연결된 베지에 곡선에서는 시작점에서 곡률이 연속이 되게 조정하였다. 또한, 끝점에서 직선과 연결된 베지에 곡선에서는 끝점에서 곡률이 연속이 되게 조정하여 조정된 삼차 베지에 곡선과의 하우스도르프 거리를 계산하여 오차를 분석하였고 2개의 삼차 베지어 곡선을 붙여 만든 곡선에서 연속인 곡률을 갖는 삼차 베지에 곡선을 만들었고, 3개의 삼차 베지어 곡선을 붙여 만든 곡선에서도 연속인 곡률을 갖는 삼차 베지에 곡선을 만들었다.

이 논문은 2장에서는 기존에 연구된 내용을 바탕으로 베지에 곡선, 특히 n차 베지에 곡선과 기본적인 미분기하 개념이 제시될 것이다. 3장에서는 곡률연속을 만족하는 삼차 베지에 곡선의 정리가 제시될 것이다. 4장에서는 3장에서 증명했던 정리를 통해 연구에서 활용한 자료들을 제시할 것이다.

dCollection @ chosun

제2장 예비 지식 (기초 지식)

제1절 n차 베지에 곡선

베지에 곡선은 임의의 형태의 곡선을 매개변수 다항곡선으로 표현하기 위해 프랑스의 수학자 베지에(Bezier)가 처음으로 고안한 곡선이다. 베지에 곡선의 매우 다양하고 유용한 성질로 인해, CAD/CAM, 컴퓨터그래픽스(Computer Graphics), 기하모델링(Geometric Modeling) 등에 매우 많이 쓰이고 있다.
임의의 $n+1$개의 제어점(control points) $\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in \mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}^3$이 주어지면, n차 베지에 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$의 식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{b}_i, \qquad t \in [0,1]$$

여기서 $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$는 번스타인(Bernstein) 함수이며, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$이다.

베지에 곡선의 성질은 다음과 같다.
(1) 곡선 $\boldsymbol{b}(t), t \in [0,1]$은 항상 첫 번째 제어점 $\boldsymbol{b}_0$에서 출발하고 마지막 제어점 $\boldsymbol{b}_n$에서 끝난다.

$$\boldsymbol{b}(0) = \boldsymbol{b}_0, \ \boldsymbol{b}(1) = \boldsymbol{b}_n$$

(2) 시작점에서의 접선은 처음 두 제어점을 연결하는 직선 $\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1}$과 일치하고, 끝점에서의 접선은 마지막 두 끝점을 연결하는 직선 $\overline{\boldsymbol{b}_{n-1}\boldsymbol{b}_n}$과 일치한다.
(3) 모든 $t \in [0,1]$에 대하여 $\boldsymbol{b}(t)$는 제어점들의 볼록껍질(convex hull) 위에 존재한다. 참고로, 제어점들의 볼록껍질은 모든 제어점을 포함하는 가장 작은 볼록다각형을 뜻한다.
(4) 여러개의 베지에 곡선을 연결해 놓은 곡선을 스플라인곡선(spline curve)라 부른다.

dCollection @ chosun

제2절 기본적인 미분기하 개념

본 절에서는 기하적 연속조건을 구성하는데 필요한 기본적인 미분기하 개념들에 대해서 살펴본다.

2.2.1 벡터함수

하나의 물체가 공간에서 움직일 때, 그 물체의 좌표를 시간의 함수로 표현하는 방정식 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$는 물체의 운동과 경로에 대한 매개방정식이다. 벡터 표현을 사용하면 시간의 벡터함수로서 물체의 위치를 나타내는 하나의 방정식 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$로 간단하게 나타낼 수 있다. 물체가 xy평면에서 움직일 때는 성분함수 $h(t)$는 모든 시간 t에 대하여 0이다.

한 입자가 주어진 시간 구간 I 에서 공간을 움직일 때 I 에서 정의된 다음의 함수를 입자의 좌표로 생각한다.

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t), \quad t\in I$$

이때, 점들 $(x,\ y,\ z)=(f(t),\ g(t),\ h(t))$, $t\in I$ 은 그 입자의 경로라 부르는 공간의 곡선을 구성한다. 위 식에서의 방정식과 구간은 그 곡선을 매개변수화 한다. 공간의 곡선은 또한 벡터 형태로 표현될 수 있다. 원점으로부터 시간 t에서 입자의 위치 $P(f(t),\ g(t),\ h(t))$까지로 정의된 벡터

$$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$$

는 입자의 위치벡터이다. 함수 f, g, h는 위치벡터의 성분함수 또는 성분이다. 입자의 경로를 시간구간 I 에서 $\boldsymbol{r}$에 의해 주어진 곡선으로 생각한다.

벡터함수 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$의 성분함수 f, g, h가 t에서 미분계수를 가질 때 $\boldsymbol{r}(t)$는 t에서 미분계수를 가진다라고 한다. 미분계수는 벡터함수

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{df}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dg}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dh}{dt}\boldsymbol{k}$$

이다.

$\boldsymbol{r}$이 공간의 매끄러운 곡선을 따라서 움직이는 한 입자의 위치벡터라 할 때

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

를 그 곡선에 접하는 입자의 속도벡터라 한다. 임의의 시간 t에서, $\boldsymbol{v}$의 방향을 운

dCollection @ chosun

동방향, $\boldsymbol{v}$의 크기를 그 입자의 속력, 미분계수 $\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$(존재할 때)를 그 입자의 가속도벡터라 한다. 요약하면

1. 속도는 위치벡터의 미분계수 : $\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$
2. 속력은 속도의 크기 : 속력 $=\|\boldsymbol{v}\|$
3. 가속도는 속도의 미분계수 : $\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$
4. 단위벡터 $\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$는 시간 t에서 운동방향이다.

2.2.2 매끄러운 곡선

t가 $t=a$에서 $t=b$까지 증가할 때 정확히 1번 그려지는 매끄러운 곡선 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$, $a\le t\le b$ 의 길이(length)는

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

위 식의 제곱근은 속도벡터 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$의 길이 $\|\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{r}'(t)\|$이다. 이것으로부터 길이에 대한 공식을 다음과 같이 더 간단하게 쓸 수 있다.

호의 길이 공식

$$L=\int_a^b\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt$$

만일 t에 의하여 매개변수화된 매끄러운 곡선 C 위에 기준점 $P(t_0)$을 택하면, t의 각 값은 C 위의 점 $P(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$와 그 기준점으로부터 C를 따라서 잰 방향거리

$$s(t)=\int_{t_0}^t\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\,d\tau=\int_{t_0}^t\|\boldsymbol{v}(\tau)\|\,d\tau$$

를 결정한다. $t>t_0$일 때, $s(t)$는 $P(t_0)$에서 $P(t)$까지의 거리이다. $t<t_0$일 때, $s(t)$는 그 거리의 음수이다. s의 각 값은 C 위의 점을 결정하고 이것은 s에 관하여 C를 매개변수화한다. s를 이 곡선에 대한 호의 길이 매개변수라고 부른다. 이 매개변수의 값은 t가 증가하는 방향에서는 증가한다.

dCollection @ chosun

한 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$가 어떤 매개변수 t에 관하여 이미 주어져 있고 $s(t)$가 위의 식에 의하여 주어진 호의 길이 함수이면 t를 $s : t = t(s)$의 함수로서 풀 수 있다. 그러면 이 곡선은 $t : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(s))$에 대하여 치환함으로써 s에 관하여 재매개변수화될 수 있다. s는 t에 관하여 미분 가능한 함수이고 그 미분계수는 $\frac{ds}{dt} = \| \boldsymbol{r}'(t) \|$ 이다.

2.2.3 단위접선벡터 $\boldsymbol{T}$

속도벡터 $\boldsymbol{r}'(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$는 곡선에 접하므로 벡터

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|}$$

는 (매끄러운) 곡선에 접하는 단위벡터이다. s는 일대일함수이고 t를 s의 미분가능한 함수로 표현하는 역함수를 가진다. 그 역함수의 미분계수는

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|}$$

이다. 이것으로부터 $\boldsymbol{r}$은 s의 미분가능한 함수임을 알 수 있고 $\boldsymbol{r}$의 미분은 연쇄법칙에 의하여

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \boldsymbol{r}'(t)\frac{1}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|} = \boldsymbol{T}$$

가 된다. 그러므로 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$는 속도벡터 $\boldsymbol{r}'(t)$의 방향으로 단위접선벡터임을 말해준다.

2.2.4 평면곡선의 곡률

한 입자가 평면의 매끄러운 곡선을 따라서 움직일 때 곡선이 구부러질 때 $\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$는 회전한다. $\boldsymbol{T}$ 는 단위벡터이므로 입자가 곡선을 따라 움직일 때 $\boldsymbol{T}$ 의 길이는 상수이고 오직 방향만이 변화한다. $\boldsymbol{T}$ 가 곡선을 따라 단위 길이당 회전하는 변화율을 곡률 이라고 부른다. 곡률함수에 대한 전통적인 기호는 그리스 문자 κ(“카파”)이다.

$\boldsymbol{T}$ 가 매끄러운 곡선의 단위벡터일 때 이 곡선의 곡률함수는 다음과 같이 정의한다.

dCollection @ chosun

$$\kappa = \left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right\|$$

만약 $\left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right\|$가 크다면, 입자가 P를 지날 때 $\boldsymbol{T}$는 급격하게 회전하고 그러므로 P에서의 곡률은 크다. $\boldsymbol{T}$가 점점 완만하게 회전하면 P에서의 곡률은 점점 작아진다.

매끄러운 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$가 호의길이 s가 아닌 다른 매개변수 t로 이미 주어졌다면 곡률을

$$\kappa = \left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{1}{ds/dt} \right\| \left\| \frac{d\boldsymbol{T}}{dt} \right\| = \frac{\| \boldsymbol{T}'(t) \|}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|}$$

으로 계산할 수 있다.

곡률계산 공식

$\boldsymbol{r}(t)$가 매끄러운 곡선일 때 곡률은

$$\kappa = \frac{\| \boldsymbol{T}'(t) \|}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|}$$

이다. 단, $\boldsymbol{T}$는 단위접선벡터이다.

곡선 $\boldsymbol{r}(t)$이 벡터함수로 주어진 경우 곡률은

$$\kappa(t) = \frac{\| \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) \|}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|^3}$$

이다.

증명

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}' / \| \boldsymbol{r}' \|$ 이고 $\| \boldsymbol{r}' \| = ds/dt$ 이므로

$$\boldsymbol{r}' = \| \boldsymbol{r}' \| \boldsymbol{T} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{r}'' = \frac{d^2 s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}'$$

$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T} = 0$임을 이용하면

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}')$$

$\| \boldsymbol{T}(t) \| = 1$이고 $\boldsymbol{T}$와 $\boldsymbol{T}'$이 수직이므로

$$\| \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \| \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}' \| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \| \boldsymbol{T} \| \, \| \boldsymbol{T}' \| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \| \boldsymbol{T}' \|$$

dCollection @ chosun

$$\| \boldsymbol{T}' \| = \frac{\| \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \|}{(ds/dt)^2} = \frac{\| \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \|}{\| \boldsymbol{r}' \|}$$

$$\kappa = \frac{\| \boldsymbol{T}' \|}{\| \boldsymbol{r}' \|} = \frac{\| \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \|}{\| \boldsymbol{r}' \|^3}$$

이다.

평면에서 매개곡선이 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t))$로 정의되고 $\boldsymbol{r}(t)$의 접선벡터가 다음과 같이 주어진다면 $\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t),\ y'(t))(\boldsymbol{r}'(t) \neq (0,0))$이면 $\boldsymbol{r}(t)$의 곡률은 다음과 같다.

$$\kappa(t) = \frac{\det(\boldsymbol{r}'(t),\ \boldsymbol{r}''(t))}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|^3}$$

서로 다른 제어점 $\boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3$에 의해 삼차 베지에 곡선이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{b}_0(1-t)^3 + 3\boldsymbol{b}_1(1-t)^2 t + 3\boldsymbol{b}_2(1-t)t^2 + \boldsymbol{b}_3 t^3,\ 0 \le t \le 1$$

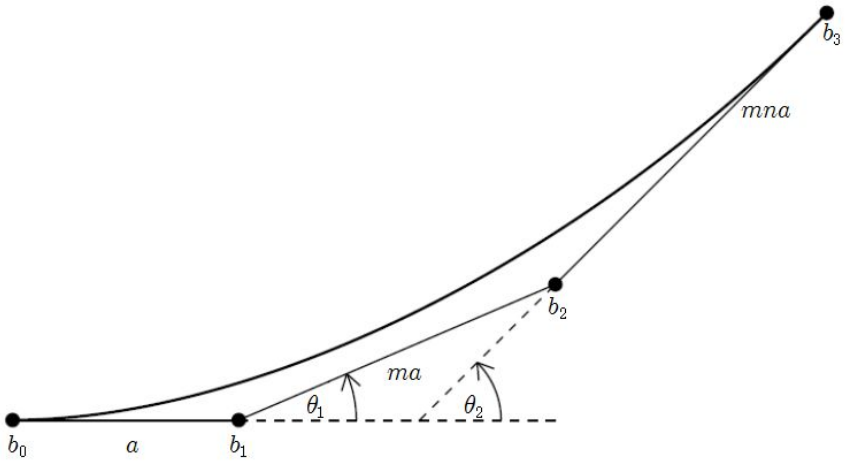


그림 2-1. 삼차 베지에 곡선

그림 2-1에서 처럼 주어진 조건들은 다음과 같다.

$$a = \| \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0 \|,\ ma = \| \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 \|,\ mna = \| \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_2 \|$$

θ_1 는 $\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1}$ 과 $\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2}$ 이 이루는 각

θ_2 는 $\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1}$ 과 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3}$ 이 이루는 각

그림 2-1에서 처럼 주어진 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$를 표현해 보면

$$x(t) = 3a(1-t)^2 t + 3a(1 + m\cos\theta_1)(1-t)t^2 + a(1 + m\cos\theta_1 + mn\cos\theta_2)t^3$$

$$y(t) = (3am\sin\theta_1)(1-t)t^2 + a(m\sin\theta_1 + mn\sin\theta_2)t^3$$

dCollection @ chosun

이다.

$\boldsymbol{r}(t)$의 곡률을 계산하기 위해 $x(t)$와 $y(t)$를 미분해보면

$$x'(t) = 3a[(1-t)^2 + 2(m\cos\theta_1)(1-t)t + (mn\cos\theta_2)t^2]$$

$$y'(t) = 3a[2(m\sin\theta_1)(1-t)t + (mn\sin\theta_2)t^2]$$

$$x''(t) = 6a[(m\cos\theta_1 - 1)(1-t) + m(n\cos\theta_2 - \cos\theta_1)t]$$

$$y''(t) = 6a[(m\sin\theta_1)(1-t) + m(n\sin\theta_2 - \sin\theta_1)t]$$

이다.

주어진 곡률식 $\kappa(t) = \dfrac{\det(\boldsymbol{r}'(t),\ \boldsymbol{r}''(t))}{\| \boldsymbol{r}'(t) \|^3}$에 의해서 $t=0$ 과 $t=1$ 에서 각각

$$\kappa(0) = \frac{2msin\theta_1}{3a} = \frac{4}{3}\frac{ma^2\frac{1}{2}\sin\theta_1}{a^3} = \frac{4}{3}\frac{Area(\triangle \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2)}{\| \Delta\boldsymbol{b}_0 \|^3}$$

$$\kappa(1) = \frac{2\sin(\theta_2-\theta_1)}{3n^2ma} = \frac{4}{3}\frac{nm^2a^2\frac{1}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)}{(mna)^3} = \frac{4}{3}\frac{Area(\triangle \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)}{\| \Delta\boldsymbol{b}_2 \|^3}$$

따라서, 삼차 베지에 곡선 $\boldsymbol{b}(t), t\in[0,1]$의 양 끝점에서의 곡률은 다음과 같다.

$$\kappa(0) = \frac{4}{3}\frac{Area(\triangle \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2)}{\| \Delta\boldsymbol{b}_0 \|^3},\quad \kappa(1) = \frac{4}{3}\frac{Area(\triangle \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)}{\| \Delta\boldsymbol{b}_2 \|^3}$$

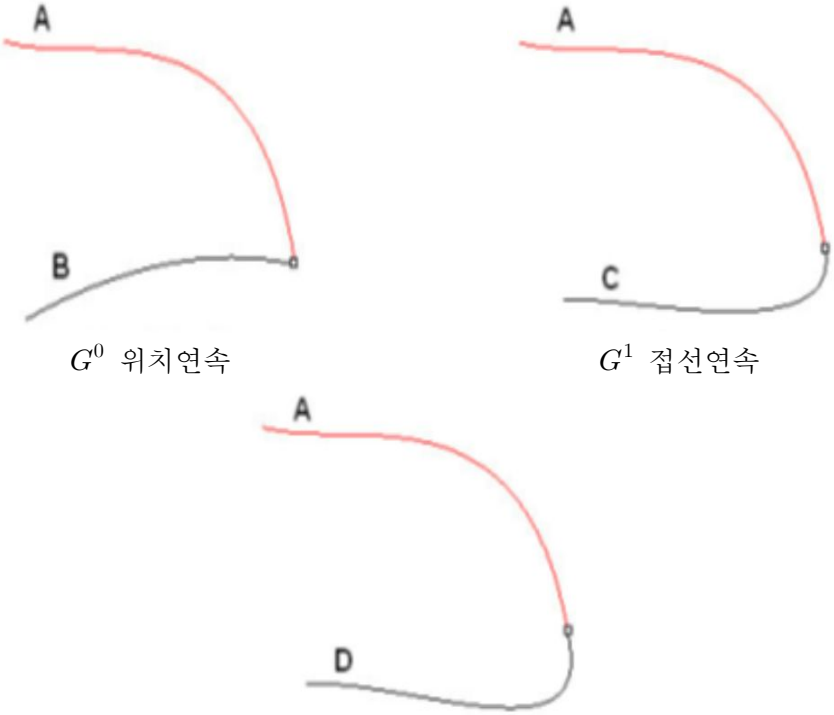
dCollection @ chosun

2.5 곡률연속

G^0 위치연속 (Position continuous) : 두 곡선이 연결

G^1 접선연속 (Tangent continuous) : 두 곡선이 연결되고 그 연결점에서 두 곡선의 접선(tangent)의 방향이 같다.

G^2 곡률연속(Curvature continuous): 두 곡선이 연결되고 그 연결점에서 두 곡선의 곡률과 접선의 방향이 같다.



G^0 위치연속 G^1 접선연속

G^2 곡률연속

그림 2-2. 곡률연속 3가지

dCollection @ chosun

제3장 연구 결과

제1절 삼차 베지에 곡선에서의 곡률연속

정리 3.1.1

제어다각선 $\boldsymbol{b}_0,\cdots,\boldsymbol{b}_6$이 convex 하고 $\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$가 일직선상에 있을 때, $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$를 제어점으로 갖는 삼차 베지에 곡선 $\boldsymbol{C}_1(t)$, $t\in[0,1]$와 $\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5, \boldsymbol{b}_6$를 제어점으로 갖는 삼차 베지에 곡선 $\boldsymbol{C}_2(t)$, $t\in[1,2]$가 만나는 점에서 곡률연속이 되도록 하는 조정된 제어점 $\boldsymbol{b}_3$가 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$ 상에 존재한다.

증명

제어점 $\boldsymbol{b}_3$의 왼쪽에서의 곡률을 $\kappa(1^-)$이라 하고 오른쪽에서의 곡률을 $\kappa(1^+)$라 하자.

각각의 곡률을 식으로 나타내면

$$\kappa(1^-)=\frac{4}{3}\frac{Area(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)}{\|\Delta\boldsymbol{b}_2\|^3},\quad \kappa(1^+)=\frac{4}{3}\frac{Area(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{b}_5)}{\|\Delta\boldsymbol{b}_3\|^3}$$

이다.

식을 정리해보면 다음과 같다.

$$\kappa(1^-)=\frac{4}{3}\frac{\frac{1}{2}\sin(\angle\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\|\Delta\boldsymbol{b}_1\|\ \|\Delta\boldsymbol{b}_2\|}{\|\Delta\boldsymbol{b}_2\|^3}=\frac{2}{3}\frac{\sin(\angle\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\|\Delta\boldsymbol{b}_1\|}{\|\Delta\boldsymbol{b}_2\|^2}$$

$$\kappa(1^+)=\frac{4}{3}\frac{\frac{1}{2}\sin(\angle\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{b}_5)\|\Delta\boldsymbol{b}_3\|\ \|\Delta\boldsymbol{b}_4\|}{\|\Delta\boldsymbol{b}_3\|^3}=\frac{2}{3}\frac{\sin(\angle\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{b}_5)\|\Delta\boldsymbol{b}_4\|}{\|\Delta\boldsymbol{b}_3\|^2}$$

제어점 $\boldsymbol{b}_3$가 $\boldsymbol{b}_2$에 가까이 가면 $\kappa(1^-)$의 값은 ∞ 이고 제어점 $\boldsymbol{b}_3$가 $\boldsymbol{b}_4$에 가까이가면 $\kappa(1^+)$의 값 또한 ∞ 이다.

$$\lim_{\|\Delta\boldsymbol{b}_2\|\to 0}\kappa(1^-)=\infty$$

$$\lim_{\|\Delta\boldsymbol{b}_3\|\to 0}\kappa(1^+)=\infty$$

곡률연속이 되려면 곡률이 같아야 하므로

$$\kappa(1^-)-\kappa(1^+)=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin(\angle\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\|\Delta\boldsymbol{b}_1\|}{\|\Delta\boldsymbol{b}_2\|^2}-\frac{\sin(\angle\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{b}_5)\|\Delta\boldsymbol{b}_4\|}{\|\Delta\boldsymbol{b}_3\|^2}\right)$$

dCollection @ chosun

$$\lim_{\|\Delta \boldsymbol{b}_2\| \to 0} \kappa(1^-) - \kappa(1^+) = \infty$$

$$\lim_{\|\Delta \boldsymbol{b}_3\| \to 0} \kappa(1^-) - \kappa(1^+) = -\infty$$

이므로 중간값 정리에 의해서 $\kappa(1^-) - \kappa(1^+) = 0$ 을 만족하게 되는 $\boldsymbol{b}_3$가 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$ 상에 존재하게 된다.

□

<u>정리 3.1.2</u>

제어다각선 $\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{3n}$이 convex 하고 $\boldsymbol{b}_{3l-1}, \boldsymbol{b}_{3l}, \boldsymbol{b}_{3l+1} (0 < l < n)$가 일직선상에 있을 때, $\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{3n}$를 제어점으로 갖는 삼차 스플라인 곡선 $\boldsymbol{C}(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_3, \cdots, \boldsymbol{b}_{3(n-1)}$를 $\kappa_{3l}(1^-) - \kappa_{3l}(1^+) = 0, (l = 1, \cdots, n-1)$를 만족하게 조정하면 곡률연속인 $\boldsymbol{C}(t)$를 얻는다.

증명

제어점 $\boldsymbol{b}_{3l}$의 왼쪽에서의 곡률을 $\kappa_{3l}(1^-)$이라 하고 오른쪽에서의 곡률을 $\kappa_{3l}(1^+)$라 하자.

각각의 곡률을 식으로 나타내면

$$\kappa_{3l}(1^-) = \frac{4}{3} \frac{Area(\boldsymbol{b}_{3l-2}\boldsymbol{b}_{3l-1}\boldsymbol{b}_{3l})}{\|\Delta \boldsymbol{b}_{3l-1}\|^3}, \quad \kappa_{3l}(1^+) = \frac{4}{3} \frac{Area(\boldsymbol{b}_{3l}\boldsymbol{b}_{3l+1}\boldsymbol{b}_{3l+2})}{\|\Delta \boldsymbol{b}_{3l}\|^3}$$

이다.

정리3.1.1 과같은 방법으로 $\kappa_{3l}(1^-) - \kappa_{3l}(1^+) = 0, (l = 1, \cdots, n-1)$을 만족하는 각 제어점 $\boldsymbol{b}_{3l}$, 을 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_{3l-1}\boldsymbol{b}_{3l+1}}$ 위에서 찾을 수 있다.

□

dCollection @ chosun

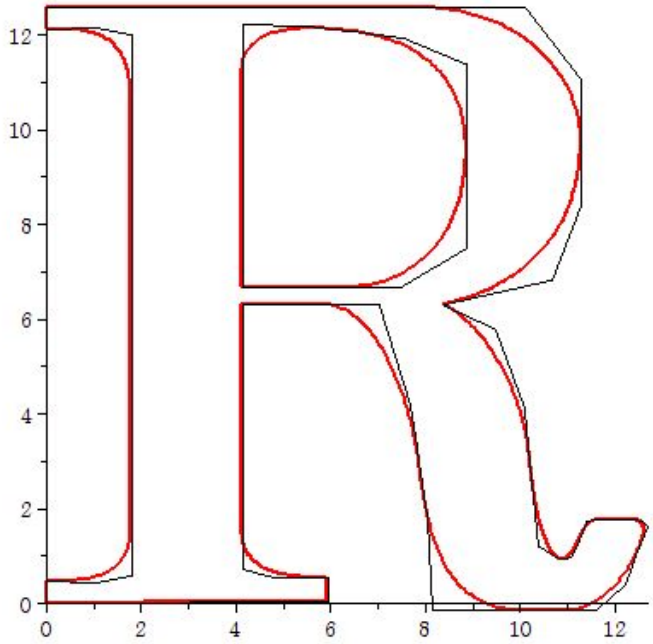


그림 4-1. 좌표설정을 통한 알파벳 "R"

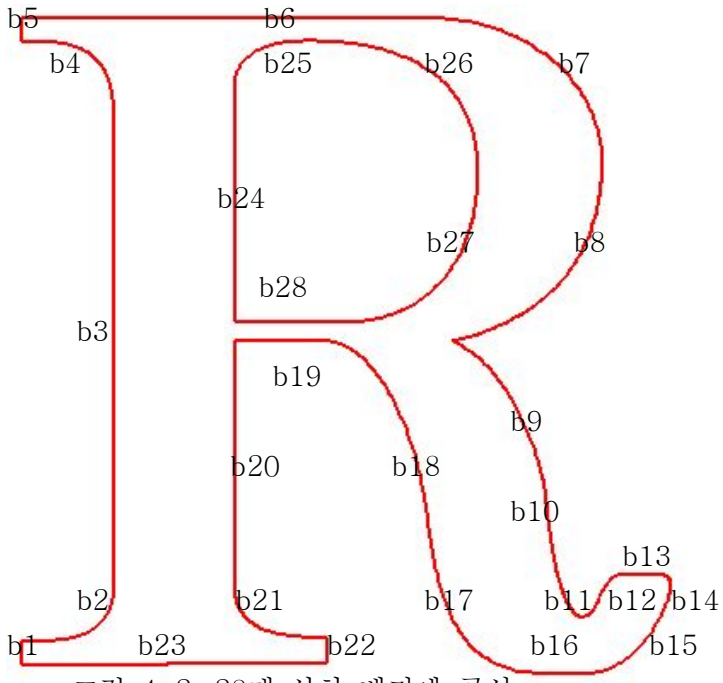


그림 4-2. 28개 삼차 베지에 곡선

Collection @ chosun

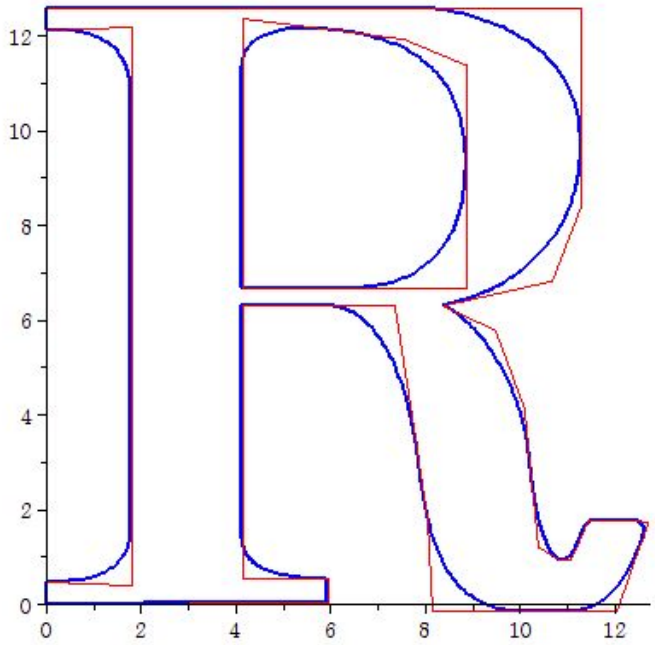


그림 4-3. 제어점 조정된 알파벳 "R"

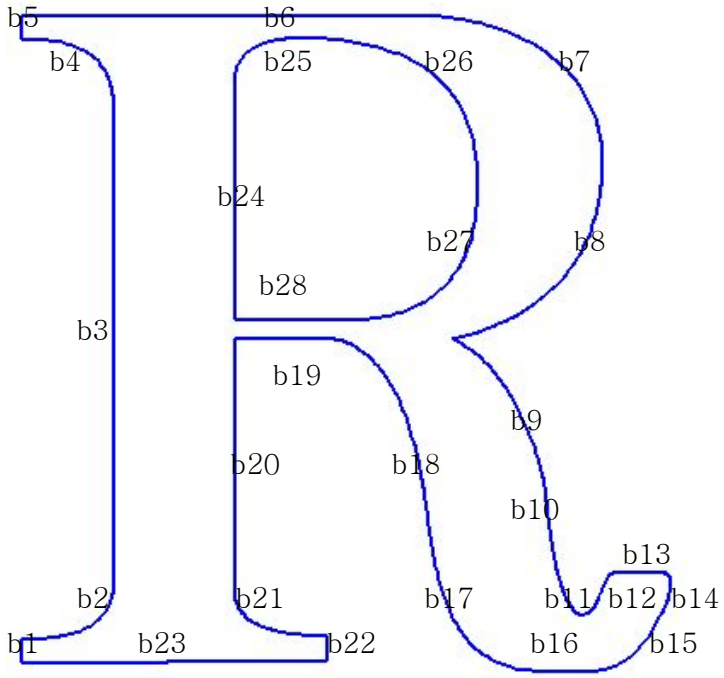
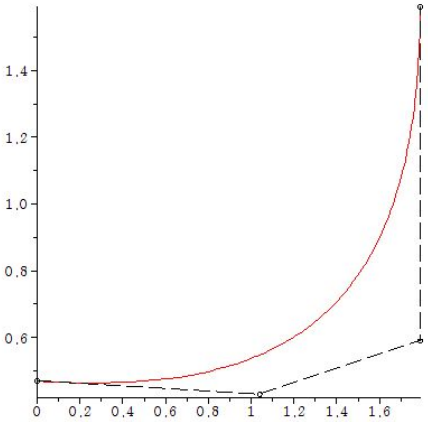


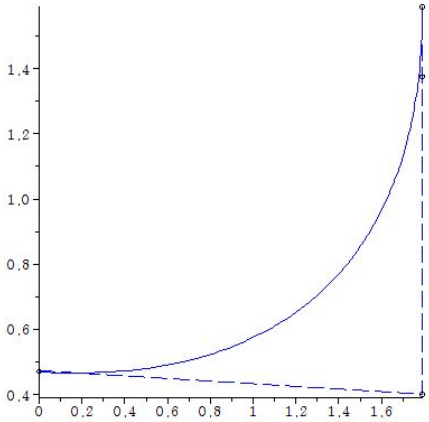
그림 4-4. 제어점 조정된 28개 삼차 베지에 곡선

dCollection @ chosun

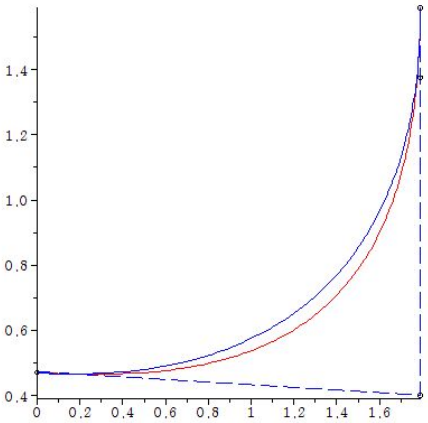
(a) $\kappa(1^-)=0$이 되어야 하는 경우 : $b2(t), b9(t), b11(t), b18(t)$
(베지에 곡선의 끝점$(t=1)$이 직선과 연결되는 경우임)
빨간색 곡선 : 변경 전 베지어 곡선, 파란색 곡선 : 변경 후 베지어 곡선



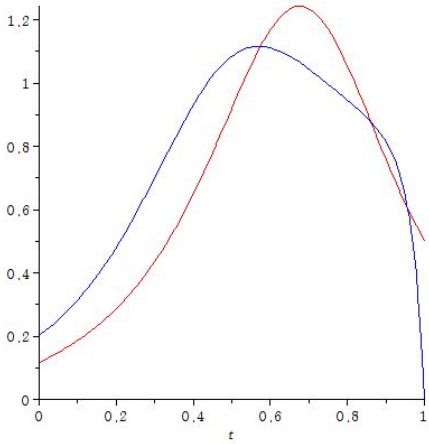
$b2(t)$ 삼차 베지에 곡선



$b2(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 5.32×10^{-2}

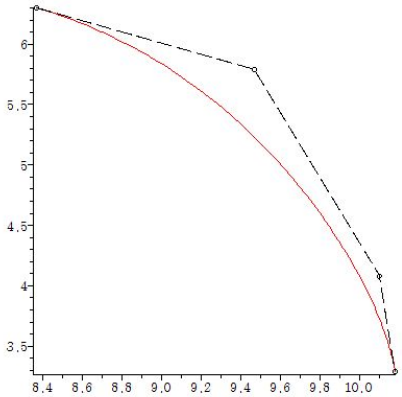


곡률 곡선

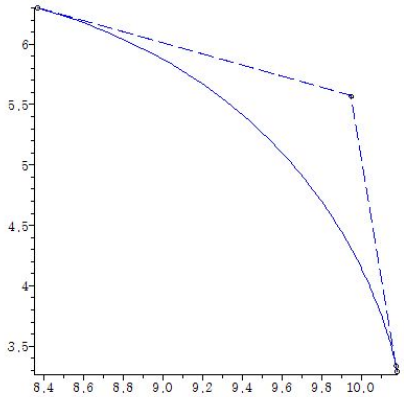
그림 4-5. $b2(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

$b2(t), t\in[0,1]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$라 하자. $b2(t)$에서 $\kappa(1^-)=0$ 을 만족하기 위해서 먼저 제어점 $\boldsymbol{b}_1$을 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1}$과 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3}$ 의 교점으로 옮긴다. $\boldsymbol{b}_1$과 $\boldsymbol{b}_3$사이에 $\boldsymbol{b}_2$를 미지수로 잡는다. $\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_3}$을 10등분 하여 처음곡선과의 하우스도르프거리를 계산한다. 구해진 값을 토대로 다시 100등분하여 하우스도르프거리를 계산하면 제어점 $\boldsymbol{b}_2$가 결정되고 $\kappa(1^-)=0$을 만족하게 된다. 그림 4-5 곡률곡선 그래프에서 $\kappa(1^-)=0$ 임을 확인할 수 있다.

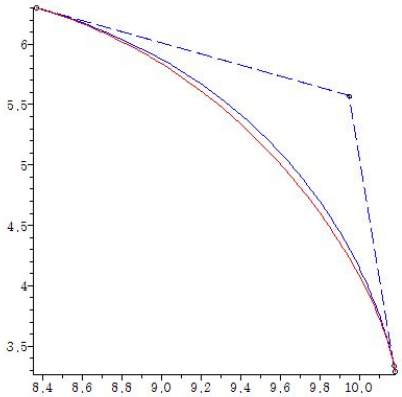
dCollection @ chosun



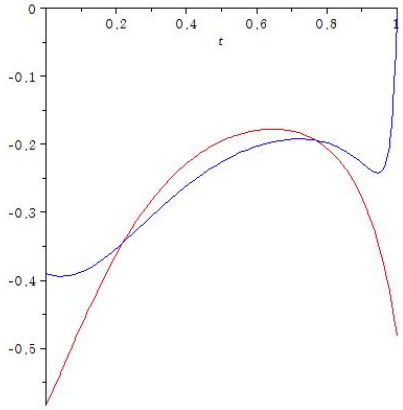
$b9(t)$ 삼차 베지에 곡선



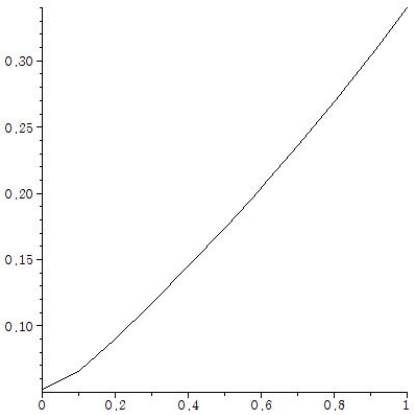
$b9(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



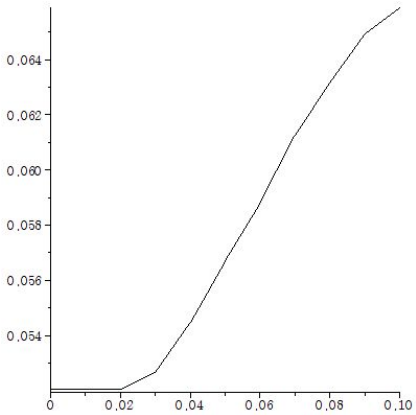
제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 5.2×10^{-2}



곡률 곡선



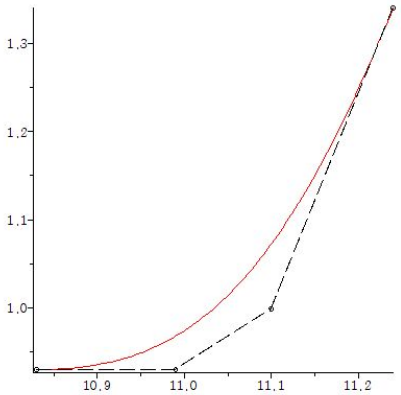
$\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_3}$을 10등분



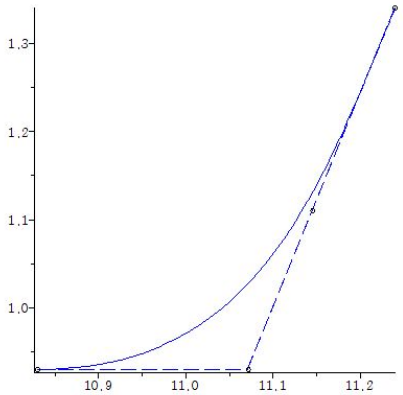
$\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_3}$을 100등분

그림 4-6. $b9(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

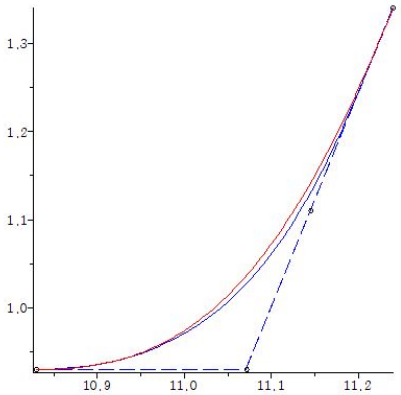
Collection @ chosun



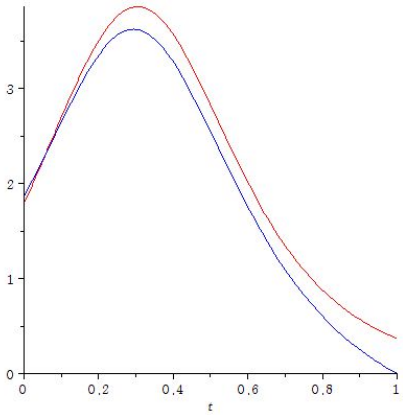
$b11(t)$ 삼차 베지에 곡선



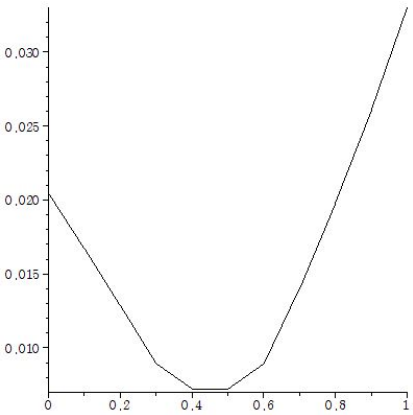
$b11(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



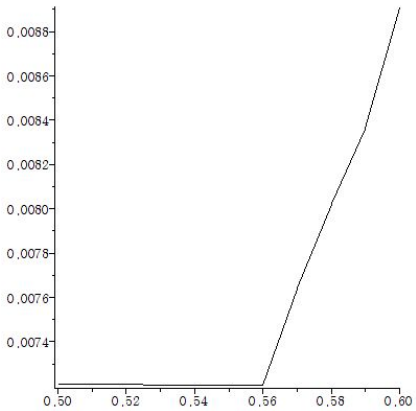
제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 7.2×10^{-3}



곡률 곡선



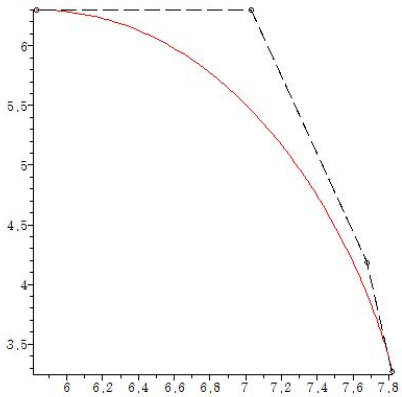
$\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_3}$을 10등분



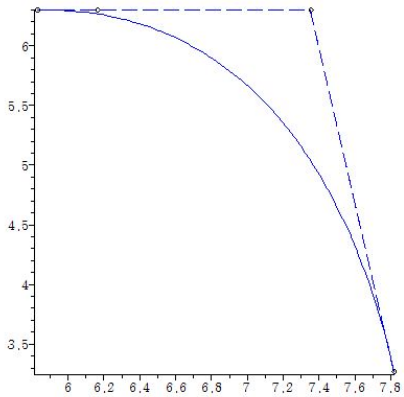
$\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_3}$을 100등분

그림 4-7. $b11(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

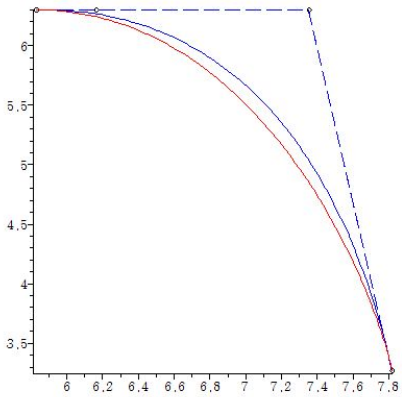
Collection @ chosun



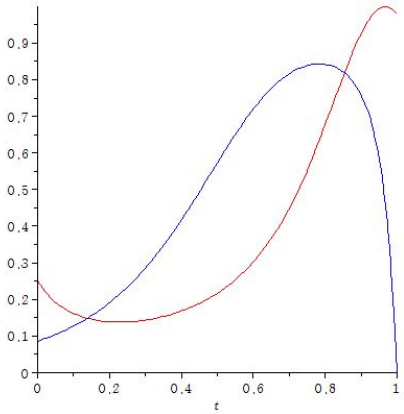
$b18(t)$ 삼차 베지에 곡선



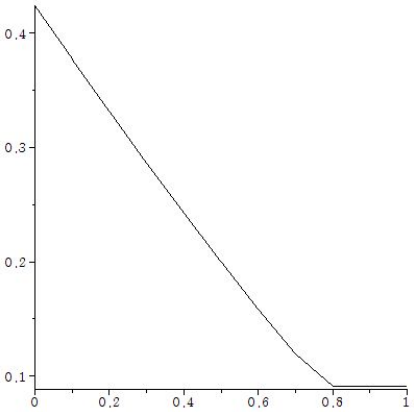
$b18(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



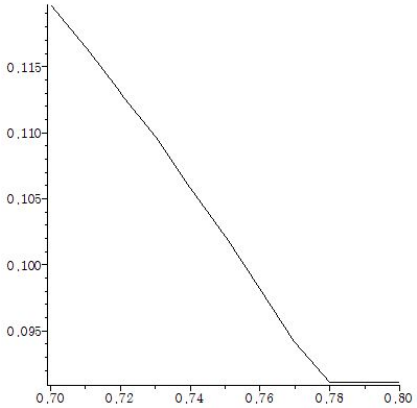
제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 4.62×10^{-2}



곡률 곡선



$\overline{b_1b_3}$을 10등분

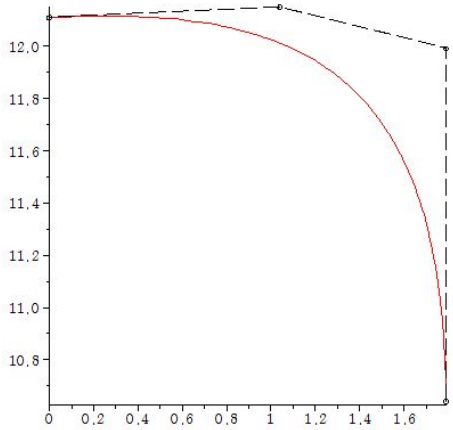


$\overline{b_1b_3}$을 100등분

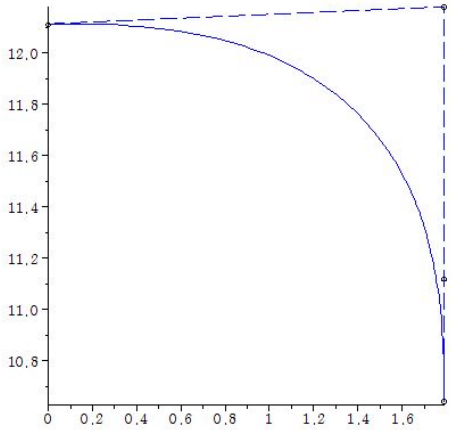
그림 4-8. $b18(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

dCollection @ chosun

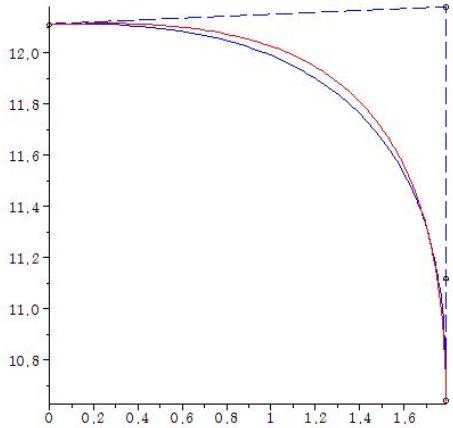
(b) $\kappa(0^+)=0$이 되어야 하는 경우 : $b4(t), b21(t)$
(베지에 곡선의 시작점$(t=0)$이 직선과 연결되는 경우임)
빨간색 곡선 : 변경 전 베지어 곡선, 파란색 곡선 : 변경 후 베지어 곡선



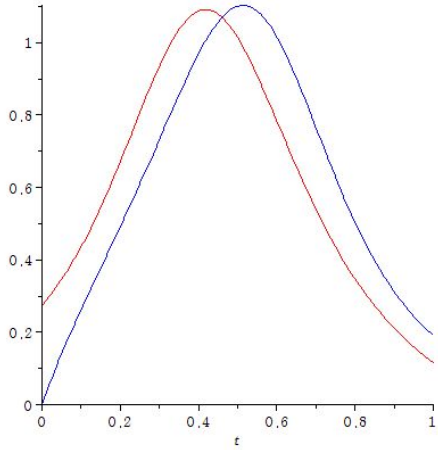
$b4(t)$ 삼차 베지에 곡선



$b4(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 4.19×10^{-2}

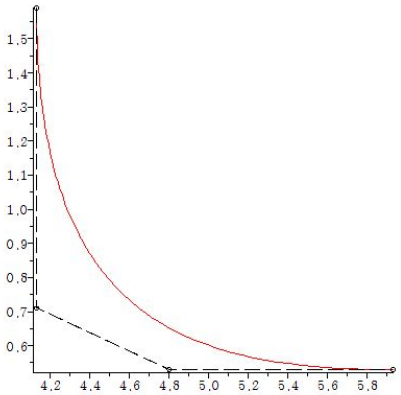


곡률 곡선

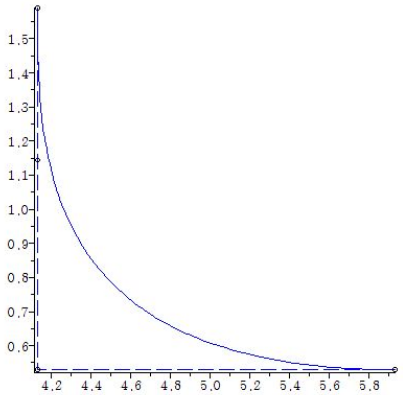
그림 4-9. $b4(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

$b4(t), t\in[0,1]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$라 하자. $b4(t)$에서 $\kappa(0^+)=0$ 을 만족하기 위해서 먼저 제어점 $\boldsymbol{b}_2$을 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1}$과 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3}$ 의 교점으로 옮긴다. $\boldsymbol{b}_0$과 $\boldsymbol{b}_2$사이에 $\boldsymbol{b}_1$를 미지수로 잡는다. $\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2}$을 10등분 하여 처음곡선과의 하우스도르프거리를 계산한다. 구해진 값을 토대로 다시 100등분하여 하우스도르프거리를 계산하면 제어점 $\boldsymbol{b}_1$가 결정되고 $\kappa(0^+)=0$을 만족하게 된다. 그림 4-9 곡률곡선 그래프에서 $\kappa(0^+)=0$ 임을 확인할 수 있다.

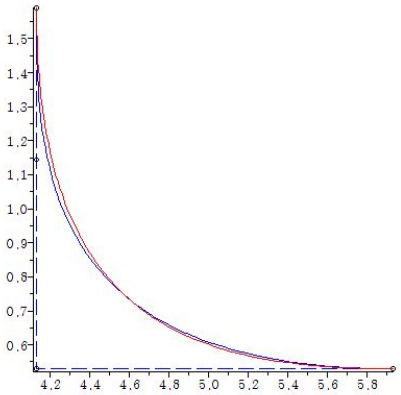
dCollection @ chosun



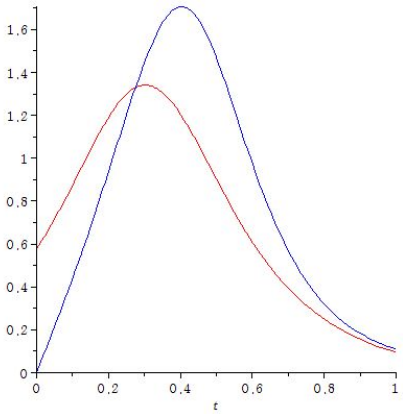
$b21(t)$ 삼차 베지에 곡선



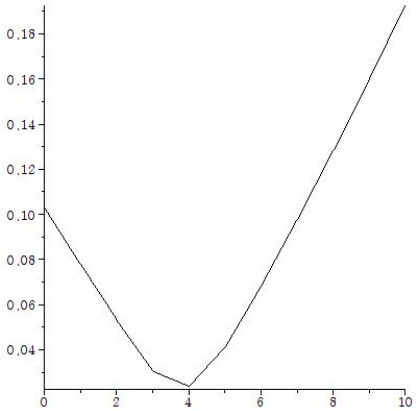
$b21(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



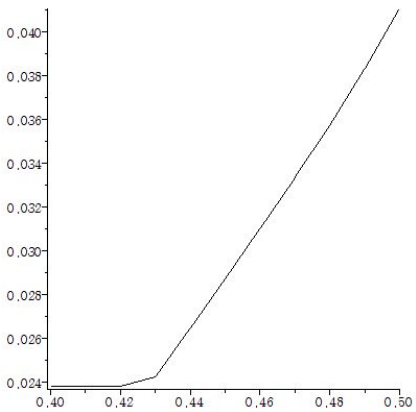
제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 2.38×10^{-2}



곡률 곡선



$\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2}$을 10등분

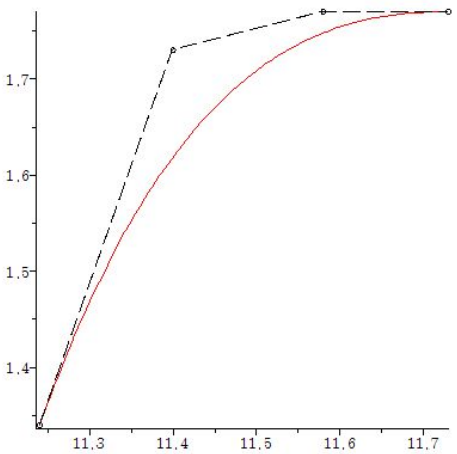


$\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2}$을 100등분

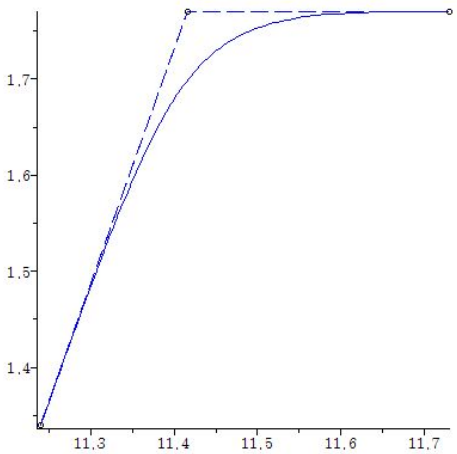
그림 4-10. $b21(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

dCollection @ chosun

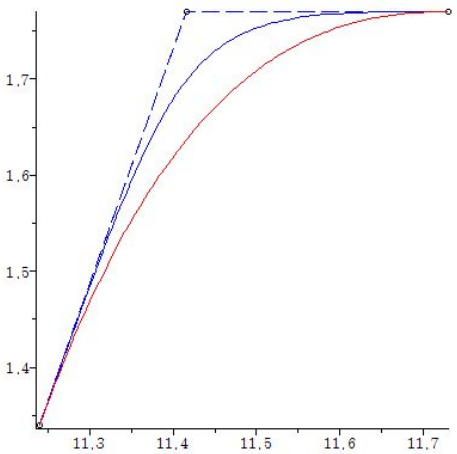
(c) $\kappa(0^+)=0$, $\kappa(1^-)=0$이 되어야 하는 경우 : $b12(t), b17(t)$
(베지에 곡선의 시작점($t=0$)과 끝점($t=1$)이 직선과 연결되는 경우임)
빨간색 곡선 : 변경 전 베지어 곡선, 파란색 곡선 : 변경 후 베지어 곡선



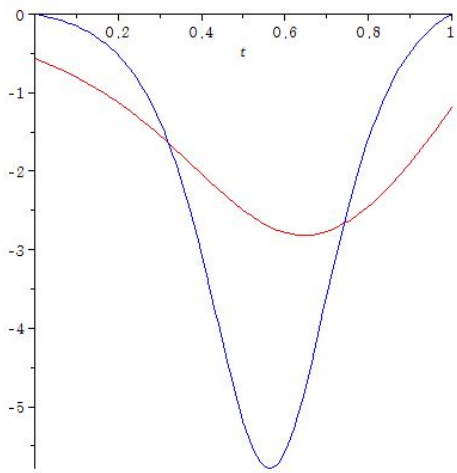
$b12(t)$ 삼차 베지에 곡선



$b12(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 4.56×10^{-2}

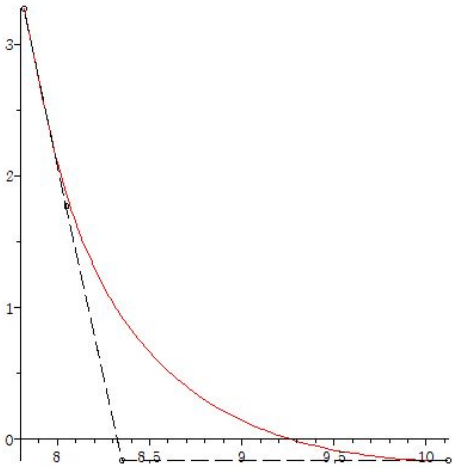


곡률 곡선

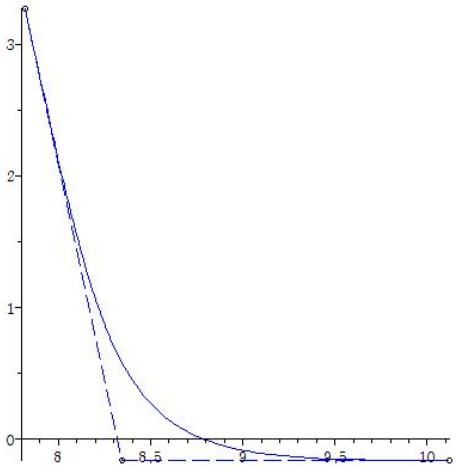
그림 4-11. $b12(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

$b12(t), t\in[0,1]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$라 하자. $b12(t)$에서 $\kappa(0^+)=0$, $\kappa(1^-)=0$을 만족하기 위해 제어점 $\boldsymbol{b}_1$과 $\boldsymbol{b}_2$을 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1}$과 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3}$의 교점으로 옮기면 $\kappa(0^+)=0$, $\kappa(1^-)=0$을 만족하게 된다. 그림 4-11 곡률곡선 그래프에서 $\kappa(0^+)=0$, $\kappa(1^-)=0$임을 확인 할 수 있다.

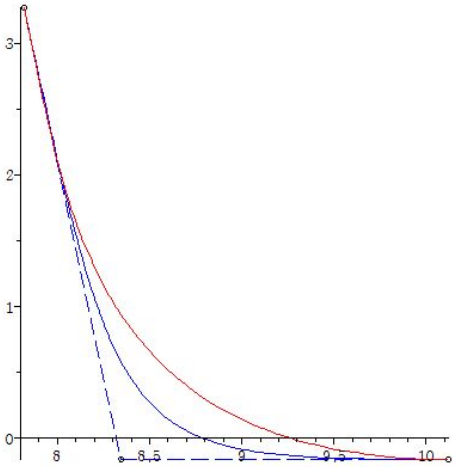
Collection @ chosun



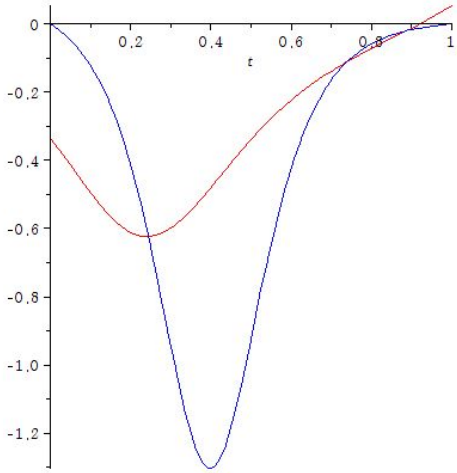
$b17(t)$ 삼차 베지에 곡선



$b17(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 2.5×10^{-1}

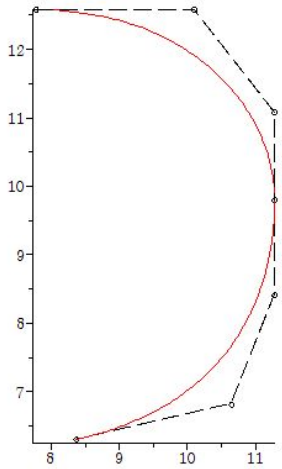


곡률 곡선

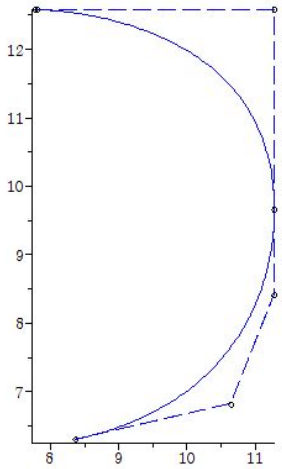
그림 4-12. $b17(t)$ 제어점 조정과 오차분석 과정

Collection @ chosun

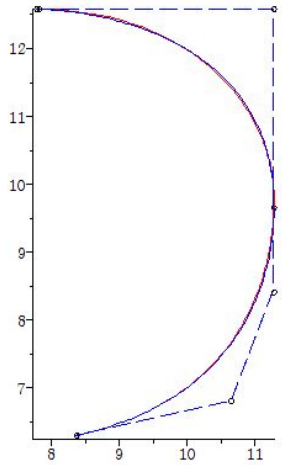
(d) 곡률연속이 되는 경우 : $b7(t)-b8(t)$, $b14(t)-b15(t)$, $b25(t)-b27(t)$
빨간색 곡선 : 변경 전 베지어 곡선, 파란색 곡선 : 변경 후 베지어 곡선



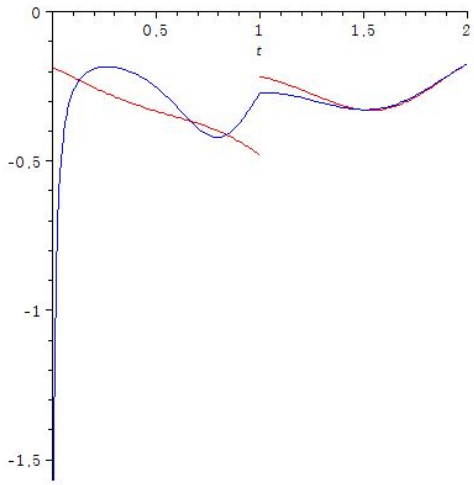
$b7(t)-b8(t)$ 삼차 베지에 곡선



$b7(t)-b8(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 4.05×10^{-2}

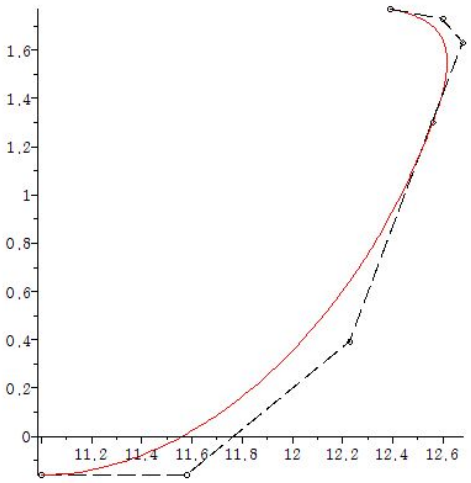


곡률 곡선

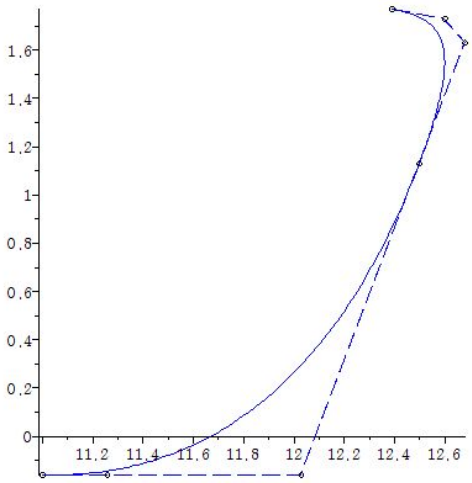
그림 4-13. 정리3.1.1 예제 $b7(t)-b8(t)$

정리3.1.1 의 예제로 $b7(t)$, $t\in[0,1]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_0,\cdots,\boldsymbol{b}_3$, $b8(t)$, $t\in[1,2]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_6$라 하자. 먼저 $b7(t)$에서 $k(0^+)=0$을 만족하도록 제어점을 조정한다. $b7(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_3$과 $b8(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_3$을 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$ 위의 미지수로 잡는다. 정리 3.1.1에 의해 연결점에서 곡률연속을 만족하는 $\boldsymbol{b}_3$을 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$ 위에서 찾을 수 있다. 그림 4-13 곡률곡선 그래프에서 $t=1$에서 곡률이 연속임을 확인할 수 있다.

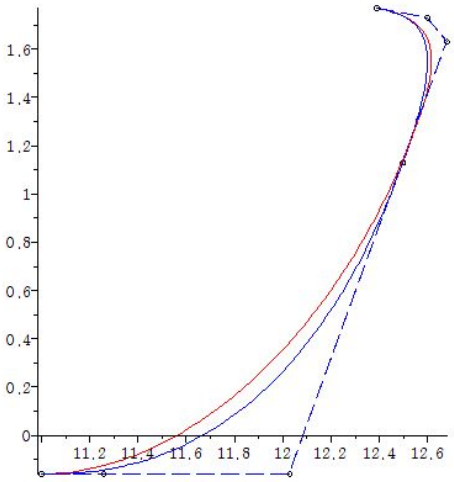
dCollection @ chosun



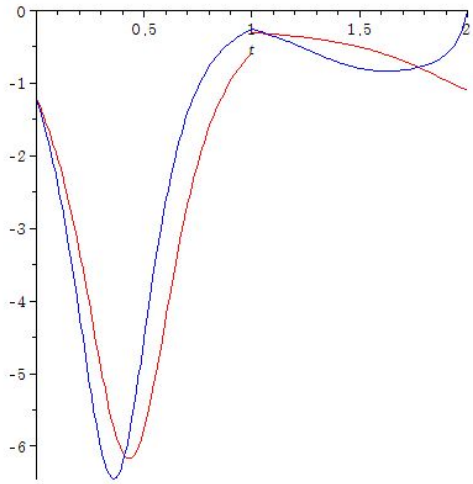
$b14(t)-b15(t)$ 삼차 베지에 곡선



$b14(t)-b15(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 6.43×10^{-2}

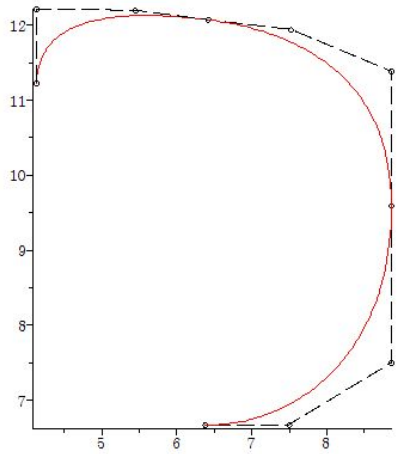


곡률 곡선

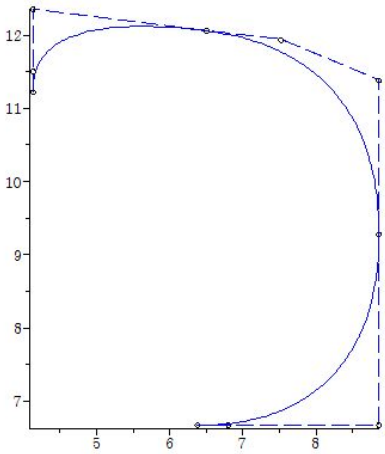
그림 4-14. 정리3.1.1 예제 $b14(t)-b15(t)$

정리3.1.1 의 예제로 $b14(t)$, $t\in[0,1]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_0,\cdots,\boldsymbol{b}_3$, $b15(t)$, $t\in[1,2]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_6$라 하자. 먼저 $b15(t)$에서 $k(1^-)=0$을 만족하도록 제어점을 조정한다. $b14(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_3$과 $b15(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_3$을 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$ 위의 미지수로 잡는다. 정리 3.1.1에 의해 연결점에서 곡률연속을 만족하는 $\boldsymbol{b}_3$을 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$ 위에서 찾을 수 있다. 그림 4-14 곡률곡선 그래프에서 $t=1$에서 곡률이 연속임을 확인할 수 있다.

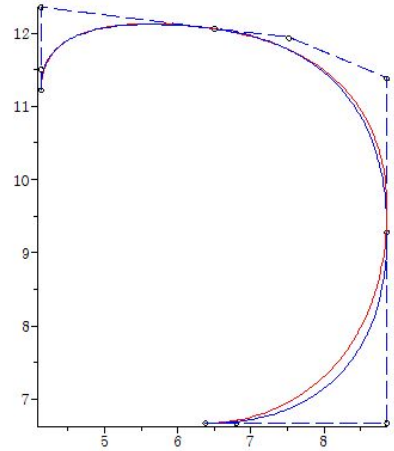
Collection @ chosun



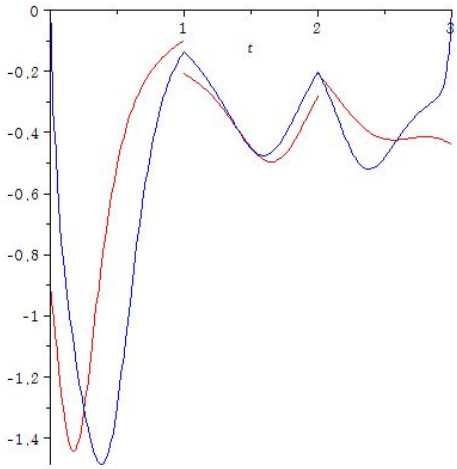
$b25(t)-b27(t)$ 삼차 베지에 곡선



$b25(t)-b27(t)$ 제어점 조정 베지에 곡선



제어점 조정 전 후 곡선
오차 : 1.35×10^{-1}



곡률 곡선

그림 4-15. 정리3.1.2 예제 $b25(t)-b27(t)$

정리3.1.2 의 예제로 $b25(t), t\in[0,1]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_0,\cdots,\boldsymbol{b}_3$, $b26(t), t\in[1,2]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_6$, $b27(t), t\in[2,3]$의 제어점을 $\boldsymbol{b}_6,\cdots,\boldsymbol{b}_9$라 하자. 먼저 $b25(t)$에서 $k(0^+)=0$과 $b27(t)$에서 $k(3^-)=0$을 만족하도록 제어점을 조정한다. $b25(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_3$과 $b26(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_3$을 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$ 위의 미지수로 잡고 $b26(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_6$과 $b27(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_6$을 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_5\boldsymbol{b}_7}$ 위의 미지수로 잡는다. 정리3.1.2에 의해 각 연결점에서 곡률연속을 만족하는 $\boldsymbol{b}_3$과 $\boldsymbol{b}_6$을 각 선분 $\overline{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4}$과 $\overline{\boldsymbol{b}_5\boldsymbol{b}_7}$ 위에서 찾을 수 있다. 그림 4-15 곡률곡선 그래프에서 $t=1, t=2$에서 곡률이 연속임을 확인할 수 있다.

dCollection @ chosun

참고문헌

[1] C. De Boor, K. Hollig, M. Sabin, “High accuracy geometric Hermite interpolation.” Computer Aided Geometric Design 4, 1987, p. 269–278.

[2] G. Farin, "Computer Graphics and Geometric Modeling", Fifth Edition, University of California, Morgan Kaufmann, 2002, p.191-203.

[3] Ha-Jine Kimn, "On the Construction of Piecewise Cubic G^2 Bezier's Curve", Ajou University, 1993, p.1-37.

[4] T.W. Sederberg, "Computer Aided Geometric Design Course Notes", Brigham Young University, 2011, p.17-37.

[5] D.J. Walton, D.S. Meek, "Generalising the planar cubic Bezier spiral" Department of Computer Science, University of Manitoba, 2012, p.1-14.

[6] Thomas' Calculus Early Transcendentals, 11th Edition 미분적분학(하), p.1045-1087.

dCollection @ chosun

dCollection @ chosun