creative commons

COMMONS DEED

저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000264397

2014년 2월
교육학석사(수학교육)학위논문

이차유리베지에 곡선의 분할

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

임 인 지

이차유리베지에 곡선의 분할

Subdivision of quadratic rational Bezier curve

2014년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

임 인 지

이차유리베지에 곡선의 분할

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로

제출함

2013년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

임 인 지

임인지의 교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장　조선대학교　교수　김 진 홍　(印)

심 사 위 원　조선대학교　교수　이 관 규　(印)

심 사 위 원　조선대학교　교수　안 영 준　(印)

2013년　12월

조선대학교 교육대학원

CONTENTS

ABSTRACT (요약) ····· 2

제 1장. 서론 ····· 3

제 2장. 기존 연구 결과 ····· 4
제 2.1절. 이차유리베지어 곡선의 코닉 표현 방법
제 2.2절. 이차유리베지어 곡선에 의한 근사 방법

제 3장. 연구 결과 ····· 26
제 3.1절. 이차유리베지어 곡선의 N등분 하는 방법
제 3.2절. 이차유리베지어 곡선의 최소 N등분

제 4장. 결론 및 의견과 향후 연구 ····· 35

참고문헌 ····· 36

ABSTRACT

Subdivision of quadratic rational Bezier curve

In Ji Im
Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In this paper we present a method of Subdivision by quadratic rational Bezier curve. It was shown that we can divide a quadratic tational Bezier curve not 2^N subdivision but N subdivision.
When $\boldsymbol{r}(t)$ curve is approximated to $\boldsymbol{b}(t)$ curve, we can find the closet curve when a Hausdorff distance should be smaller then TOL.
In this way when we subdivide the quadratic rational Bezier curve to find an approximated curve, there is an advantage to be able to divide less then 2^N subdivision. In addition it has applicabilities.

Key Words : Quadratic rational Bezier curve, Quartic Bezier curve, Spline, Hausdorff distance, Approximation order, Geometric contact, G^2.

이차유리베지에 곡선의 분할

Subdivision of quadratic rational Bezier curve

제1장 소개

베지에 곡선은 아핀변환에 대하여 불변하여 매우 안정된 모양을 만들고 계산하기 쉽다. 또한 미분이 가능하고, 볼록 다각형의 성질도 만족한다. 이러한 장점 때문에 CAD / CAM의 수학적 문제해결에도 많이 이용되고 있다.
이차 유리 베지에 곡선을 분할하는 방법으로는 Floater의 2^N조각 분할하는 방법이 있다. 그러나 이러한 방법을 사용하면 허용오차를 만족하기 위해 필요 이상의 분할을 해야 하는 단점이 있다. 본 학위 논문은 유리 베지에 곡선의 단점을 보완하기 위해 제시된 것이다[1], [5], [6], [7], [8], [9].
본 논문에서는 이러한 단점을 해결하기 위해 허용오차를 만족시키면서 최소한의 N조각 분할을 하는 방법을 제시하였다. 일단 주어진 곡선의 중심, 초점, 꼭짓점을 구하여 곡선의 끝 점과 중심이 이루는 각을 구하고, 그 각을 N 분할하여 $\frac{N-1}{N}$인 곡선 위의 점을 찾는다. 그 점을 중심으로 오른쪽 곡선을 Floater의 2^N조각 분할을 이용하여 분할한다. 그러면 분할 된 모든 곡선이 G^2연결 연속을 만족한다. 그리고나서 N조각 분할한 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$와 $\boldsymbol{b}(t)$의 Hausdorff distance가 허용오차를 만족하는지 확인할 것이다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다.
2장에서는 이차 유리 베지에 곡선의 기존 연구 결과에 대하여 정리하였다 [2], [3].
3장에서는 이차 유리 베지에 곡선의 2^N조각 분할하는 것을 확장하여 N조각 분할하는 방법에 대해서 정리하였다[4]. 그리고 N조각 분할에 대한 예시를 제시하였다.
4장에서는 결론 및 의견과 향후 연구에 대해서 정리하였다.

제 2장 기존 연구 결과

제 2.1절. 이차 유리 베지에 곡선의 코닉(conic) 표현 방법

이차 베지에 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{b}(t)=B_0^2(t)\boldsymbol{b_0}+B_1^2(t)\boldsymbol{b_1}+B_2^2(t)\boldsymbol{b_2}, \qquad t\in[0,1].$$

여기서, $\boldsymbol{b_0}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\in\mathbb{R}^2$는 제어점이고

$$B_i^2(t)=\binom{2}{i}t^i(1-t)^{2-i}$$

는 이차 번스타인 다항식이다.

이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{w_0\boldsymbol{b_0}B_0^2(t)+w_1\boldsymbol{b_1}B_1^2(t)+w_2\boldsymbol{b_2}B_2^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}, \qquad t\in[0,1]. \tag{1}$$

이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 표준형은 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{\boldsymbol{b_0}B_0^2(t)+w\boldsymbol{b_1}B_1^2(t)+\boldsymbol{b_2}B_2^2(t)}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)} \qquad (\text{여기서, } w=\frac{w_1}{\sqrt{w_0w_2}})$$

참고논문 [2]의 기호를 따르자면

$$B_0^2(t)=\phi_0(t),\ B_1^2(t)=\phi_1(t),\ B_2^2(t)=\phi_2(t)$$

이다.

정의2.1

(a) $|X|=\sqrt{x^2+y^2}$ 는 X의 유클리드 노름을 나타낸다.

(b) 분모 $w(t)=w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)$

(c) $\psi_i(t)=\dfrac{w_iB_i(t)}{w(t)}$라고 놓자. 그러면 $\boldsymbol{r}(t)=\psi_0(t)\boldsymbol{b}_0+\psi_1(t)\boldsymbol{b}_1+\psi_2(t)\boldsymbol{b}_2$로 표현된다. (2)

모든 i에 대하여 $w_i > 0$인 이차 유리 베지에 표준형 식을 주로 사용할 것이다.

성질2.2

(a) 분모

$$w(t) = w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)$$

는 $[0,1]$에서 양수이므로, $\boldsymbol{r}(t)$는 $[0,1]$에서 유계이다.

(b) $\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 = 1$, $\psi_i(t) \geqq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

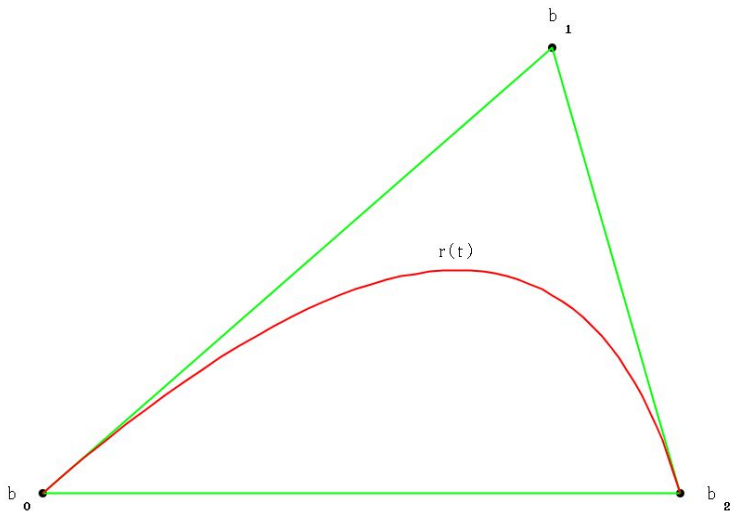


그림1. $\boldsymbol{r}(t)$의 예.

성질2.3 convex hull(볼록 다각형)

$$\sum \psi_i = 1, \ \boldsymbol{r}(t) \subset \triangle \boldsymbol{b}_0 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \quad \forall t \in [0,1]$$

즉, $0 \le t \le 1$에서 제어 점의 볼록 다각형(convex hull) 위에 놓인 $\boldsymbol{r}(t)$의 일부이다. $\psi_i(t)$는 $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$에 관한 $\boldsymbol{r}(t)$의 무게중심좌표(barycentric coordinates)이다.

정의2.4 $\triangle \boldsymbol{b}_0 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2$ 위에 있는 세그먼트는 표준 세그먼트라 하고, 끝점 $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_2$를 포함하는 곡선의 나머지는 “여(complement) 세그먼트”라 한다.

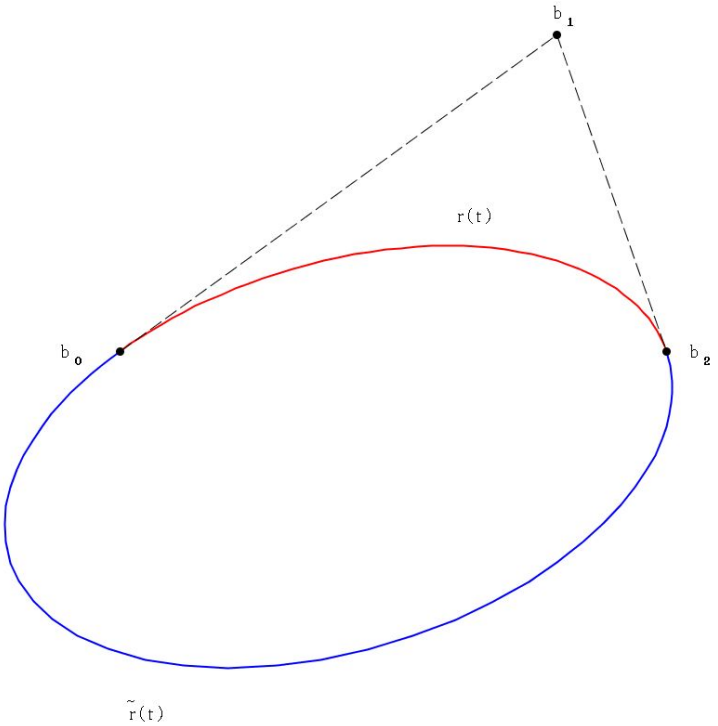


그림2. $\boldsymbol{r}(t)$와 $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ 예

성질2.5 $2t = \sum_{i=0}^{2} iB_i(t)$이므로, $(t, w(t)) = \sum(\frac{i}{2}, w_i)B_i(t)$.

정의2.6

$$\Delta \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0,\ \ \Delta \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$$

이라 하자. 그러면 U, V는 다음과 같다.

$$U = -\Delta \boldsymbol{b}_0,\ \ V = \Delta \boldsymbol{b}_1$$

정리 2.7

(a) $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{b}_2$.

(b) $\boldsymbol{r}'(0) = \dfrac{2w_1}{w_0}\Delta\boldsymbol{b}_0, \quad \boldsymbol{r}'(1) = \dfrac{2w_1}{w_2}\Delta\boldsymbol{b}_1.$

<증명>

(b) $\boldsymbol{r}(t)$를 미분하여 0과 1을 대입하면,

$$\boldsymbol{r}'(0) = 2\frac{w_1}{w_0}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0), \quad \boldsymbol{r}'(1) = \frac{2w_1}{w_2}(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1)$$

이다.

성질2.8

(a) $\boldsymbol{r}(t) = \psi_0(t)\boldsymbol{b}_0 + \psi_1(t)\boldsymbol{b}_1 + \psi_2(t)\boldsymbol{b}_2$에서 $\boldsymbol{r}(t)$의 oblique 좌표계는

$\alpha(t) = \psi_0(t), \ \beta(t) = \psi_2(t).$

(b) $B_0(t)B_2(t) = \dfrac{B_1^2(t)}{4}$

$(1-t)^2t^2 = \dfrac{2t(1-t)^2}{4}$이므로 성립한다.

(c) 임의의 t에 대하여

$$\alpha(t)\beta(t) = \frac{w_0w_2}{w^2(t)}B_0(t)B_2(t) = \frac{w_0w_2}{4w^2(t)}B_1^2(t) = \frac{w_0w_2}{4w_1^2}\psi_1^2(t).$$

따라서 곡선이 다음 (사교)양의 방정식을 만족한다.

정리2.9 $\quad k = \dfrac{w_0w_2}{4w_1^2}$일 때, $\boldsymbol{r}(t)$에 대하여

$$\alpha(t)\beta(t) = k(1-\alpha(t)-\beta(t))^2, \quad t \in [0,1] \tag{3}$$

위 식은 이차이기 때문에, 전체 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$는 코닉이다.

식 (1)에서 동일한 곡선 세그먼트의 표현이 $w_0 : w_1 : w_2$의 값에 따라 다양한 결과로 표현이 가능하다. 그러나 좌표계 $(\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$가 고정되어 있기 때문에

식 (3)에 따라서 $k=\dfrac{w_0 w_2}{4w_1^2}$ 값은 이러한 모든 매개변수화에서 불변이며 동일하게 유지된다.

$$\alpha = a_0,\ 1-\alpha-\beta = a_1,\ \beta = a_2. \tag{4}$$

따라서 $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$의 평면은 $x-y$평면이며, $X=(x,y)$, $P_i=(x_i,y_i)$의 경우 X의 oblique 좌표계 α,β 는

$$\alpha = \frac{(y-y_1)(x_2-x_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)}{(y_0-y_1)(x_2-x_1)-(x_0-x_1)(y_2-y_1)},$$

$$\beta = \frac{(y-y_1)(x_0-x_1)-(x-x_1)(y_0-y_1)}{(y_2-y_1)(x_0-x_1)-(x_2-x_1)(y_0-y_1)}. \tag{5}$$

정의2.10

모든 $w_i>0$에 대하여, 여 세그먼트 곡선 $\tilde{\boldsymbol{r}}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = (w_0\boldsymbol{b_0}B_0(t) - w_1\boldsymbol{b_1}B_1(t) + w_2\boldsymbol{b_2}B_2(t))/\tilde{w}(t),$$

$$\tilde{w}(t) = w_0B_0(t) - w_1B_1(t) + w_2B_2(t). \qquad t\in[0,1]$$

$\tilde{\boldsymbol{r}}$의 좌표 $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$는

$$\tilde{\alpha} = w_0B_0/\tilde{w}\ ,\ \tilde{\beta} = w_2B_2/\tilde{w}\ ,\ 1-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta} = -w_1B_1/\tilde{w}$$

이다.

식 (5)는 다음을 만족한다.

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t) - \boldsymbol{b}_1 = \frac{w(t)}{\tilde{w}(t)}(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{b}_1), \qquad t\in[0,1],\ \tilde{w}(t)\neq 0. \tag{6}$$

즉, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{r}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$는 동일 직선상에 있다.

$\tilde{w}(t) = (w_0+2w_1+w_2)t^2 - 2(w_0+w_1)t + w_0$에서 근 t_1, t_2는 다음 식과 같다.

$$t_i = \frac{w_0+w_1 \pm w_1\sqrt{1-4k}}{w_0+2w_1+w_2} \tag{7}$$

일반적으로 $\boldsymbol{r}(t)$를 $[0,1]$위에서 다음과 같이 분류할 수 있다.

(a) $4k>1$: 타원이다. $\tilde{w}$는 실근이 없다. 그래서 이것은 0에서 떨어져 유계이고, $\tilde{\boldsymbol{r}}[0,1]$도 유계이다.

(b) $4k=1$: 포물선이다. $t_1=t_2$이고 $\tilde{w}$는 부호가 변하지 않는다. 유계가 아니다.

(c) $4k<1$: 쌍곡선이다. $\tilde{w}$는 특이한 해 $t_1<t_2$를 갖는다.

정리2.11

$$\frac{1-\lambda}{w_0B_0(t)}=\frac{\lambda}{w_2B_2(t)} \tag{8}$$

<증명>

$$Y=(1-\lambda)\boldsymbol{b}_0+\lambda\boldsymbol{b}_2,\ \ \lambda=\frac{\overline{\boldsymbol{b}_0Y}}{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2}=\frac{|Y-\boldsymbol{b}_0|}{|\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_0|}$$

임의의 스칼라 k에 대하여,

$$k(Y-\boldsymbol{b}_1)=\boldsymbol{b}(t)-\boldsymbol{b}_1$$

을 만족한다. 그러면

$$k\{(1-\lambda)\boldsymbol{b}_0+\lambda\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1\}=\frac{w_0B_0(t)}{w(t)}\boldsymbol{b}_0+\frac{w_1B_1(t)}{w(t)}\boldsymbol{b}_1+\frac{w_2B_2(t)}{w(t)}\boldsymbol{b}_0-\boldsymbol{b}_1$$

이다. 따라서 $k(1-\lambda)=\dfrac{w_0B_0(t)}{w(t)}$이고, $k\lambda=\dfrac{w_2B_2(t)}{w(t)}$이다.

위의 두 식에서 k는 $k=\dfrac{w_0B_0(t)}{w(t)(1-\lambda)}$, $\quad k=\dfrac{w_2B_2(t)}{w(t)\lambda}$이기 때문에

두 k값을 같다고 두고 정리하면

$$\frac{1-\lambda}{w_0(1-t)^2}=\frac{\lambda}{w_2t^2}$$

이므로 위 정리가 성립한다.

따름정리2.12

$$\tau_1=\frac{\sqrt{\lambda w_0}}{\sqrt{\lambda w_0}+\sqrt{(1-\lambda)w_2}},\ \ \tau_2=\frac{\sqrt{\lambda w_0}}{\sqrt{\lambda w_0}-\sqrt{(1-\lambda)w_2}} \tag{9}$$

명백히, X가 표준 세그먼트 일 때 $X=\boldsymbol{r}(\tau_1)$, 여 세그먼트 일 때 $X=\boldsymbol{r}(\tau_2)$이다. 동일선상에 있으므로 $\boldsymbol{r}(\tau_2)=\tilde{\boldsymbol{r}}(\tau_1)$, 식 (9)에 의해 $\tau_1+\tau_2=2\tau_1\tau_2$이고 이것과 관련하여 다음 식을 나타낼 수 있다.

따름정리2.13

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(\frac{t}{2t-1}) \tag{10}$$

<증명>

$$\tau_1 + \tau_2 = 2\tau_1\tau_2$$

이므로 τ_1, τ_2는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_1 = \frac{\tau_2}{2\tau_2 - 1},\ \tau_2 = \frac{\tau_1}{2\tau_1 - 1}$$

그런데

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(\tau_1) = \boldsymbol{r}(\tau_2)$$

이므로

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(\tau_1) = \boldsymbol{r}(\frac{\tau_1}{2\tau_1 - 1})$$

과 같이 쓸 수 있고, 따라서 정리가 성립한다.

유리베지어식의 장점 중에 하나는 변환에 불변한다는 것이다.
T가 삼차원 공간에서 아핀 변환이면(즉, $T(X) = L(X) + A$),

$$T(P(t)) = \sum L(P_i)\psi_i(t) + A\sum\psi_i(t) = \sum T(P_i)\psi_i(t).$$

즉, $T(P(t)) = \sum \frac{w_i T(P_i)\phi_i(t)}{w(t)}$

위 식은 $P(t)$곡선을 변형시키는 것과 컨트롤 포인트만 변형하여 베지에 곡선을 그리는 것이 같은 결과를 보여준다는 것을 의미하고 있다.

정의2.14

부분분할(Subdivision)을 위해 이차 유리 베지에 곡선을 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{\sum \boldsymbol{V_i}\phi_i(t)}{\sum w_i\phi_i(t)}.$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \frac{V_0}{w_0},\ \boldsymbol{r}(1) = \frac{\boldsymbol{V}_2}{w_2}\ \text{(단, } w_0 \neq 0, w_2 \neq 0)$$

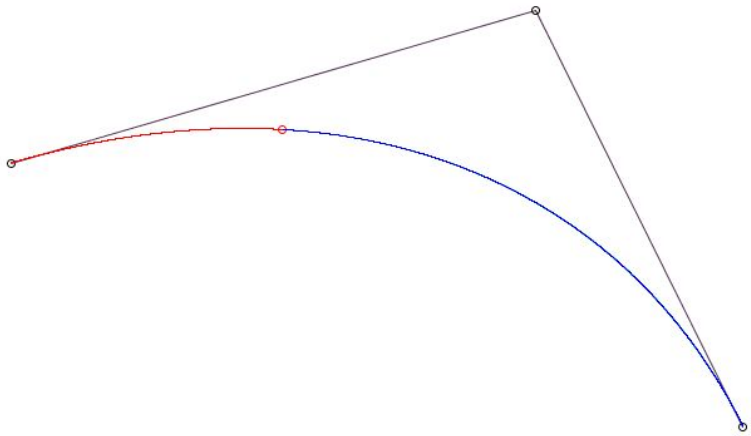


그림3. 유리베지에 곡선의 부분분할

$\boldsymbol{r}(t)$의 성질은 t의 범위에 따라 결정된다.
유리 곡선의 부분분할을 위해 충분히 작은 t_0에 대하여 $0 \le t \le t_0 \in (0,1)$인 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 분모, 분자를 분리하자.

$$\begin{array}{ccccc} V_{0,0} & & V_{0,1} & & V_{0,2} \\ & V_{1,1} & & V_{1,2} & \\ & & V_{2,2} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} W_{0,0} & & W_{0,1} & & W_{0,2} \\ & W_{1,1} & & W_{1,2} & \\ & & W_{2,2} & & \end{array}$$

$$\boldsymbol{V}_{i,j} = (1-t_0)\boldsymbol{V}_{i-1,j-1} + t_0 \boldsymbol{V}_{i-1,j}$$

이고,

$$w_{i,j} = (1-t_0)w_{i-1,j-1} + t_0 w_{i-1,j}$$

이다.
위의 점으로부터 만들어진 곡선의 왼쪽 부분을 $\boldsymbol{r}(t_0 t)$라 표기하자.
$0 \le t \le 1$에 대하여 $\boldsymbol{r}(t_0 t)$는 웨이트 $w_{0,0}$, $w_{1,1}$, $w_{2,2}(\neq 0)$를 갖고, 제어점은 $\dfrac{\boldsymbol{V}_{0,0}}{w_{0,0}}, \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,1}}{w_{1,1}}, \dfrac{\boldsymbol{V}_{2,2}}{w_{2,2}}$ 이다.
비슷하게 곡선의 오른쪽 부분을 $\boldsymbol{r}(t_0 + (1-t_0)t)$라 표기하자.
$0 \le t \le 1$에 대하여 $\boldsymbol{r}(t_0 + (1-t_0)t)$는 웨이트 $w_{2,2}$, $w_{1,2}$, $w_{0,2}(\neq 0)$를 갖고, 제어점은 $\dfrac{\boldsymbol{V}_{2,2}}{w_{2,2}}, \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,2}}{w_{1,2}}, \dfrac{\boldsymbol{V}_{0,2}}{w_{0,2}}$ 이다. 그리고 $\boldsymbol{r}(t_0)$의 접선의 방향은 $\dfrac{\boldsymbol{V}_{1,2}}{w_{1,2}} - \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,1}}{w_{1,1}}$ 이다.

rho-conic parameterization :

conic과 $\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_m}$의 교차점을 $\tilde{\boldsymbol{r}}$이라 하고, $t_* = \frac{1}{2}$이라 하자. 그러면 $\boldsymbol{b}_m = \frac{\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_2}{2}$은 현의 중점이 된다.

정의2.15 ρ는 다음 식에 의해 정의된다.

$$\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{b}_m = \rho(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_m)$$

따름정리2.16 ρ의 조건에 의해,

$$w_0 : w_1 : w_2 = 1-\rho : \rho : 1-\rho \tag{11}$$

<증명>

$0 < \rho < 1$일 때, $\tilde{\boldsymbol{r}}$는 $\triangle \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2$안에 있다. 그러므로 웨이트의 비는

$$\begin{aligned} w_0 : w_1 : w_2 &= a_0 : \frac{1}{2}a_0 : a_2 \\ &= 1-\rho : \frac{1}{2}(2\rho) : 1-\rho \\ &= 1-\rho : \rho : 1-\rho \\ &= 1 : \frac{\rho}{1-\rho} : 1 \end{aligned}$$

과 같다. 그리고 $k = \frac{w_0 w_2}{4w_1^2}$는 $\frac{(1-\rho)^2}{4\rho^2}$과 같으므로 ρ에 대하여 정리하면

$$\rho = \frac{1}{1 \pm 2\sqrt{k}}$$

이다. 따라서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho_1 = \frac{1}{1+2\sqrt{k}} \ , \ \rho_2 = \frac{1}{1-2\sqrt{k}}, \ \rho_1 \in (0,1) \tag{12}$$

ρ_1에 의해 만들어진 $\tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\boldsymbol{r}}^1$는 $\triangle \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2$ 안에 있다. ρ_1은 포물선에서$\rho_1 = \frac{1}{2}$, 타원에서 $\rho_1 < \frac{1}{2}$, 쌍곡선에서 $\rho_1 > \frac{1}{2}$이다.

ρ_2에 의해 만들어진 $\tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{\boldsymbol{r}}^2$는 $\triangle \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2$ 밖에 있다. ρ_2는 타원에서 $\rho_2 < 0$, 쌍곡선에서 $\rho_2 > 1$, 포물선에서는 존재하지 않는다.

위 식으로 주어진 매개변수를 ρ-conic 매개변수화로 쉽게 바꿀 수 있다.

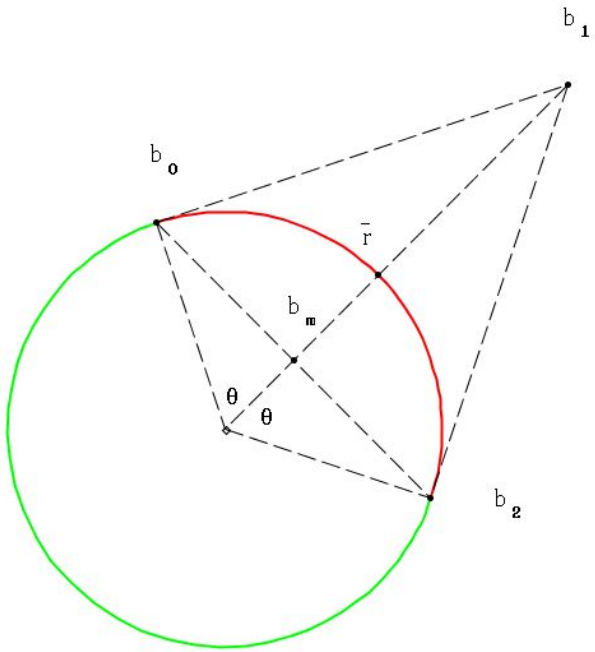


그림4. 이차 유리 베지에 곡선으로 나타낸 원

conic의 특성:

이제 코닉의 모든 기하학적 특징을 제어점 $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$와 $k = \dfrac{w_0 w_2}{4w_1^2}$로 표현할 수 있다.

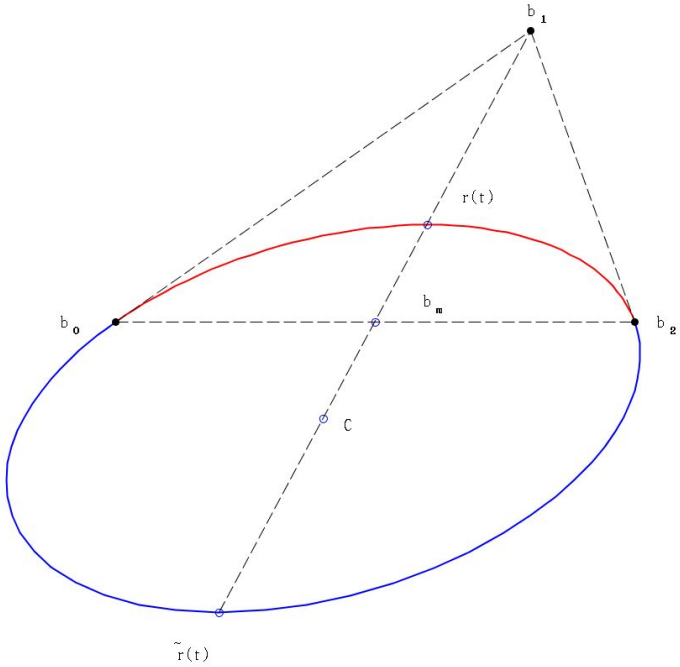


그림5. 이차 유리 베지에 곡선으로 나타낸 타원

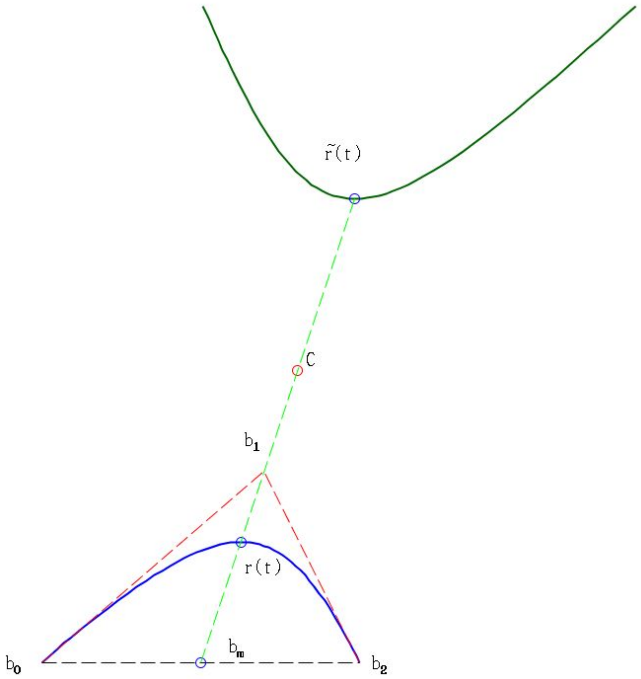


그림 6. 이차 유리 베지에 곡선으로 나타낸 쌍곡선

정의 2.17 conic의 중심 식 :

$$C = \boldsymbol{b}_1 + \frac{2k}{4k-1}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}) \tag{13}$$

<증명>

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\overline{\boldsymbol{b}^1}+\overline{\boldsymbol{b}^2}}{2} = \frac{\overrightarrow{O\boldsymbol{r}}+\overrightarrow{O\tilde{\boldsymbol{r}}}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{b}_m\boldsymbol{r}} - \overrightarrow{\boldsymbol{b}_m O} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}_m\tilde{\boldsymbol{r}}} - \overrightarrow{\boldsymbol{b}_m O}\right) \\
&= -\overrightarrow{\boldsymbol{b}_m O} + \frac{1}{2}\left(\rho_1\overrightarrow{\boldsymbol{b}_m\boldsymbol{r}} + \rho_2\overrightarrow{\boldsymbol{b}_m\tilde{\boldsymbol{r}}}\right) \\
&= \overrightarrow{O\boldsymbol{b}_m} + \frac{(\rho_1+\rho_2)}{2}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_m) \\
&= \boldsymbol{b}_m + \frac{(\rho_1+\rho_2)}{2}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_m) \\
&= \boldsymbol{b}_1 + \frac{\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{b}_1}{2} - \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\left(-\boldsymbol{b}_1 + \frac{\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{b}_1 + \frac{\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}}{2} - \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\left(\frac{\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{b}_1 + \left(1 - \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\right)\frac{\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}}{2} \qquad \left(\rho_1 = \frac{1}{1+2\sqrt{k}},\ \rho_2 = \frac{1}{1-2\sqrt{k}}\right) \\
&= \boldsymbol{b}_1 + \frac{2k}{4k-1}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})
\end{aligned}$$

정의2.18

$$\epsilon = \frac{2k}{4k-1},$$

$$\alpha = |\boldsymbol{U}|^2 \quad , \quad \beta = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} \ , \quad \gamma = |\boldsymbol{V}|^2$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = |\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}|^2 \ ,$$

$$\zeta = \alpha+\gamma+2\beta = |\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}|^2 \ ,$$

$$\eta = \alpha+\gamma-2\beta = |\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}|^2 \ .$$

이차 유리 베지어 곡선이 포물선, 타원, 쌍곡선일 경우에 대하여 알아보자.

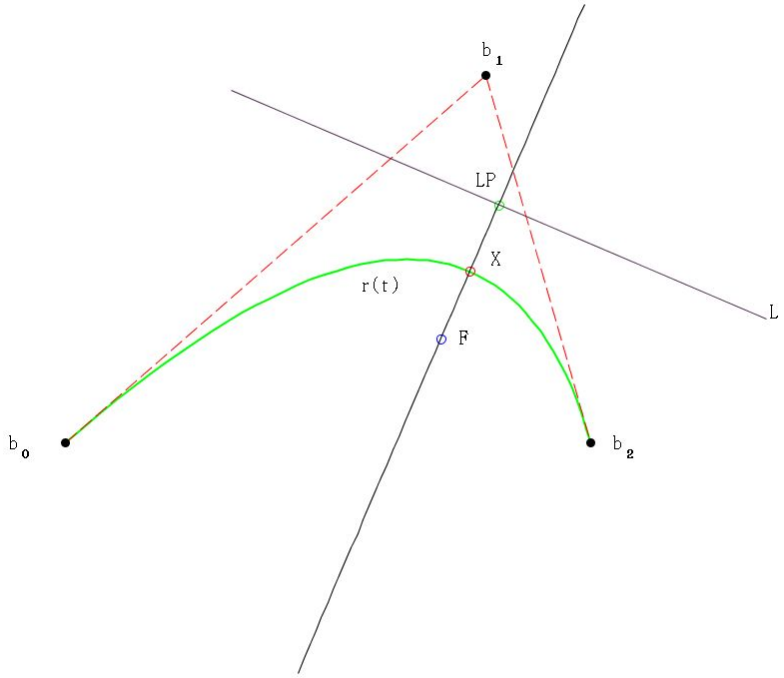


그림7. 이차유리베지에 곡선으로 나타낸 포물선의 초점, 꼭짓점, 준선

1) 포물선일 때

· 초점

$$F = \boldsymbol{b}_1 + \frac{\gamma \boldsymbol{U} + \alpha \boldsymbol{V}}{\zeta}$$

· 꼭짓점

$$X = \boldsymbol{b}_1 + \left(\frac{\gamma+\beta}{\zeta}\right)^2 \boldsymbol{U} + \left(\frac{\alpha+\beta}{\zeta}\right)^2 \boldsymbol{V}$$

· 준선이 지나는 한 점

$$LP = 2X - F$$

· 준선

$$L = LP + t(-F + X)$$

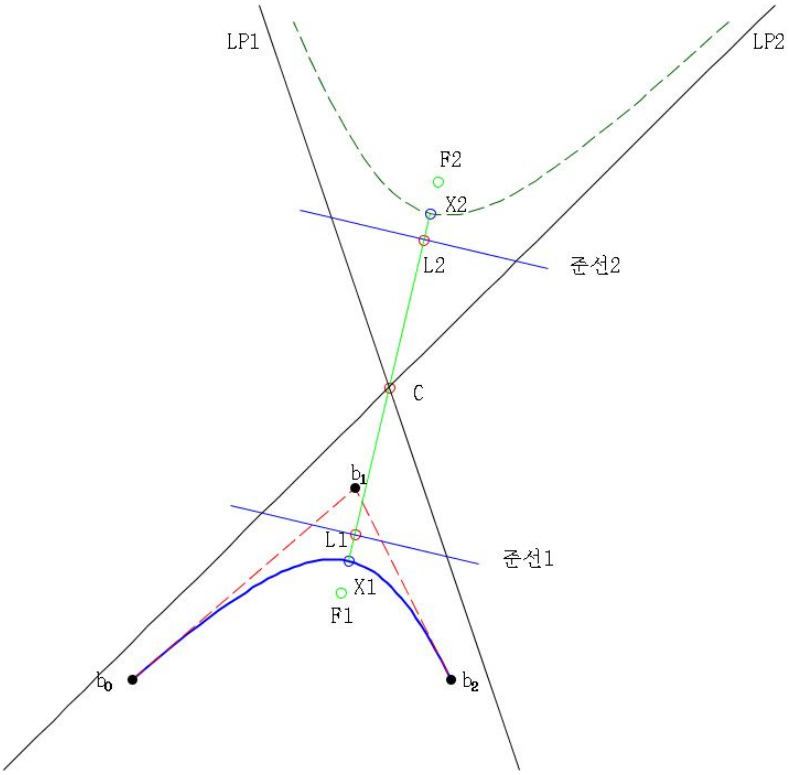


그림8. 이차유리베지에 곡선으로 나타낸 쌍곡선의
중심, 초점, 꼭짓점, 준선

2) 쌍곡선일 때,

· 중심

$$C = \boldsymbol{b}_1 + \epsilon(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V})$$

· 주축거리

$$2d_1 = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda_1}}$$

쌍곡선의 꼭짓점을 구하기 위해 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 중 하나를 잡자.

$$x_1 = \beta\lambda_1 - 2k + 1, \quad y_1 = 2k - \alpha\lambda_1$$
$$x_2 = 2k - \gamma\lambda_1, \quad y_2 = \beta\lambda_1 - 2k + 1$$

그리고 $x_0 = \dfrac{x_1}{\rho}$, $y_0 = \dfrac{y_1}{\rho}$, $\rho = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 y_1 + \gamma y_1^2$로 잡으면 꼭짓점 X_1, X_2는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

· 꼭짓점

$$X_1 = \boldsymbol{b}_1 + (\epsilon + d_1 x_0)\boldsymbol{U} + (\epsilon + d_1 y_0)\boldsymbol{V}$$
$$X_2 = \boldsymbol{b}_1 + (\epsilon - d_1 x_0)\boldsymbol{U} + (\epsilon - d_1 y_0)\boldsymbol{V}$$

· 중심에서 초점까지의 거리

$$rr = 2d_1$$

· 초점

$$F = C + rr\,W$$

· 준선이 지나는 한 점

$$L_1 = C + \frac{X - C}{e}, \quad L_2 = C - \frac{C - X}{e}$$

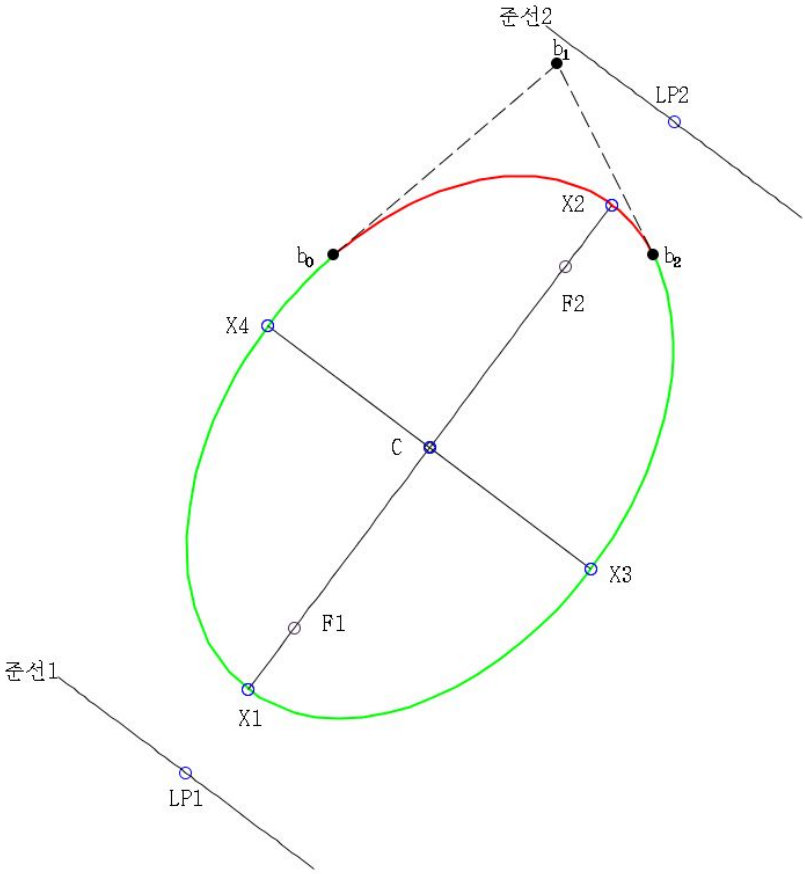


그림9. 이차유리베지에 곡선으로 나타낸 타원의
중심, 초점, 꼭짓점, 준선

3) 타원일 때

· 중심

$$C = \boldsymbol{b}_1 + \epsilon(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V})$$

· 장축길이 d_1, 단축길이 d_2

$$d_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda_1}}\ , \quad d_2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda_2}}$$

· 꼭짓점

$$X_1 = \boldsymbol{b}_1 + (\epsilon + d_1 x_0)\boldsymbol{U} + (\epsilon + d_1 y_0)\boldsymbol{V}$$
$$X_2 = \boldsymbol{b}_1 + (\epsilon - d_1 x_0)\boldsymbol{U} + (\epsilon - d_1 y_0)\boldsymbol{V}$$

· 준선

$$LP_1 = C + \frac{X - C}{e}, \quad LP_2 = C - \frac{C - X}{e}$$

제 2.2절 이차유리베지어 곡선에 의한 근사 방법

the error bound(오차범위)

유리이차베지어곡선의 근사를 생각해보자.

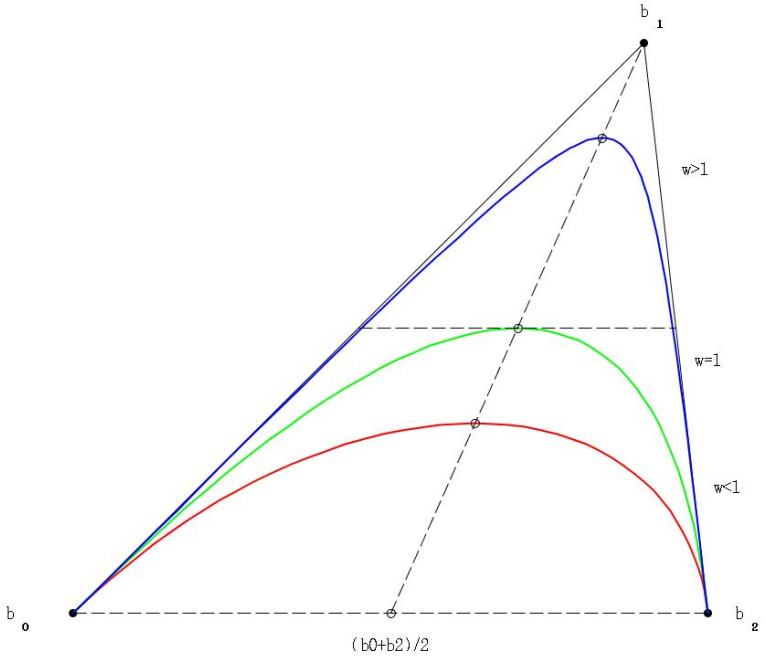


그림10. $w<1$, $w=1$, $w>1$일 때, $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{\boldsymbol{b_0}B_0^2(t)+w\boldsymbol{b_1}B_1^2(t)+\boldsymbol{b_2}B_2^2(t)}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)} \quad , \ \boldsymbol{b_0}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2} \in R^2$$

w의 크기에 따라 $\boldsymbol{r}$의 모양이 달라지는데 $w<1$일 때는 타원, $w>1$일 때는 쌍곡선, $w=1$일 때는 포물선이 그려진다.

$\boldsymbol{q}$가 베지에 곡선 위에 있을 때 최대 오차 $|\boldsymbol{q}(s)-\boldsymbol{r}(t)|$ 에 대해 생각해 보자.

$$\boldsymbol{q}(s)=B_0(s)\boldsymbol{b_0}+B_1(s)\boldsymbol{b_1}+B_2(s)\boldsymbol{b_2} \quad , \quad s\in[0,1]$$

점 $\boldsymbol{r}(1/2)$와 $\boldsymbol{q}(1/2)$는 $\boldsymbol{r}$과 $\boldsymbol{q}$의 어깨점인 것은 잘 알려진 사실이고, 둘 다 $(\boldsymbol{b_0}+\boldsymbol{b_2})/2$와 $\boldsymbol{b_1}$의 직선 위에 놓여있다. 일반적으로 $t=1/2$일 때 $|\boldsymbol{q}(t)-\boldsymbol{r}(t)|$가 최댓값을 가진다.

실제로 $t=s=1/2$일 때 $|\boldsymbol{q}(s(t))-\boldsymbol{r}(t)|$ 의 최댓값을 얻을 수 있는 매개변수화

$s(t)$를 생각한다. 벡터 $\boldsymbol{q}(s(t))-\boldsymbol{r}(t)$가 $\boldsymbol{b}_0-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$와 평행하는 $s(t)$는 다음과 같이 정의된다.

$$s=t(1+a(1-t))/(1+aB_1(t)),$$
$$1-s=(1-t)(1+at)/(1+aB_1(t))$$

그리고 이것은 다음 성질을 따른다.

$$B_0(s)=B_0(t)(1+at)^2/(1+aB_1(t))^2$$
$$B_1(s)=B_1(t)(1+at)(1+a(1-t))/(1+aB_1(t))^2,$$
$$B_2(s)=B_2(t)(1+a(1-t))^2/(1+aB_1(t))^2.$$

보조정리2.19

$a=w-1>-1$일 때, $s=t(1+a(1-t))/(1+2a(1-t)t)$ 이라 하자.
그러면

$$\boldsymbol{q}(s)-\boldsymbol{r}(t)=\frac{a(2+a)(1-t)^2t^2}{(1+2a(1-t)t)^2}(\boldsymbol{b}_0-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2).$$

$0<t<1$일 때는 반드시 s와 $1-s$가 둘 다 양수이다. 왜냐하면 $a>-1$이기 때문이다.
$s(t)$의 1계 도함수는 다음과 같다.

$$s'(t)=(1+a(1-2t(1-t)))/(1+2a(1-t)t)^2, \quad s'(t)>0$$

$a>0$ 일 때 벡터 $\boldsymbol{q}(s(t))-\boldsymbol{r}(t)$와 $\boldsymbol{b}_0-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ 는 같은 방향이고 $a<0$ 일 때는 반대방향이다. $\boldsymbol{q}(s(t))-\boldsymbol{r}(t)$의 크기는 다음 따름정리를 보자.
보조정리2.19에 의해 다음 식을 찾을 수 있다.

$$|\boldsymbol{q}(s)-\boldsymbol{r}(t)|=\frac{|a|(2+a)B_1^2(t)}{4(1+aB_1(t))^2}|\boldsymbol{b}_0-2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2| \quad .$$

만약,

$$\phi(t)=B_1(t)/(1+aB_1(t))$$

이면

$$\phi'(t)=B_1'(t)/(1+aB_1(t))^2$$

이다.
그리고 $B_1'(1/2)=0$일 때, ϕ는 $t=1/2$일 때 $[0,1]$범위에서 최대값을 가진다. 그러므로 $t=s=1/2$일 때 $|\boldsymbol{q}(s)-\boldsymbol{r}(t)|$ 은 최댓값을 가진다. $B_1(1/2)=1/2$와 $\phi(1/2)=1/(2+a)$로부터 다음 정리가 증명되었다.

정리2.20 오차(하우스도르프 거리)

$$|\boldsymbol{q}(s)-\boldsymbol{r}(t)| \le |\boldsymbol{q}(1/2)-\boldsymbol{r}(1/2)| = \frac{|w-1|}{4(w+1)}|\boldsymbol{b_0}-2\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}| \qquad , \quad t \in [0,1]$$

Approximation by subdivision (부분분할에 의한 근사)

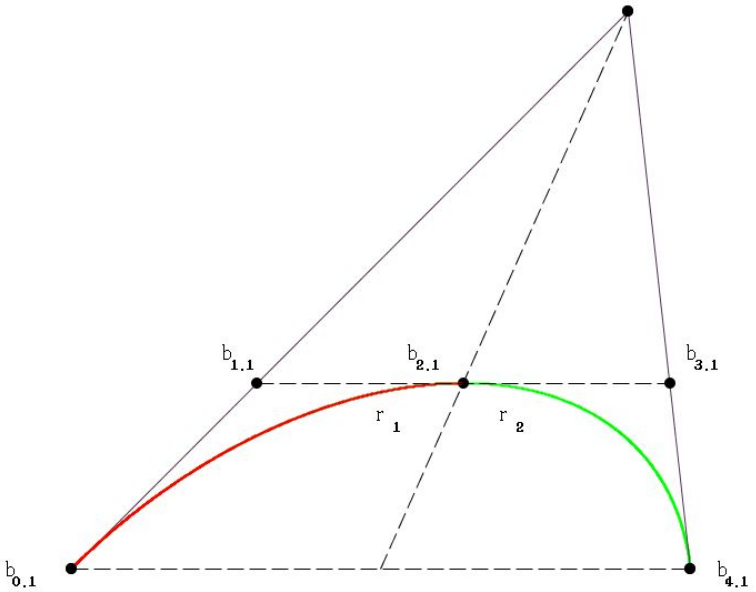


그림11. $\boldsymbol{r}$의 첫 번째 분할 ($w<1$)

정리2.20은 $\boldsymbol{q}$에 의해 $\boldsymbol{r}$을 근사할 때 오차에서 상한을 구하는 식이다.
이것은 $\boldsymbol{r}$과 $\varepsilon_0 = |a||\boldsymbol{b_0}-2\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}|/4(2+a)$ 으로부터 q_0의 최대거리가

$$d(q_0, \boldsymbol{r}) = \max_{t \in [0,1]} \min_{s \in [0,1]} |q_0(s)-\boldsymbol{r}(t)|$$

인 곳에서 $d(p_0, \boldsymbol{r}) \le \varepsilon_0$ 이다.
반복적으로 이진법 분할을 하여 베지에 활꼴의 수열 형태로 $\boldsymbol{r}$에 가까워지는 스플라인 근사를 얻으려면 이 범위를 사용할 수 있다.
오른쪽 점에서 $\boldsymbol{r}$을 부분 분할함으로써 G^2 연속을 만족하는 것을 볼 수 있다. 용어 G^2는 기하학적 연속성을 의미한다.
$\boldsymbol{r_1}$이 하위곡선 $\boldsymbol{r}|_{o \le t \le 1/2}$ 과 $\boldsymbol{r_2}$가 하위곡선 $\boldsymbol{r}|_{1/2 \le t \le 1}$ 이 되면 다음을 찾을 수 있다.

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}(t/2) = \frac{B_0(t)\boldsymbol{b}_{0,1} + B_1(t)v\boldsymbol{b}_{1,1} + B_2(t)v\boldsymbol{b}_{2,1}}{B_0(t) + B_1(t)v + B_2(t)v}$$

그리고

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{r}((1+t)/2) = \frac{B_0(t)\,v\boldsymbol{b}_{2,1} + B_1(t)v\boldsymbol{b}_{3,1} + B_2(t)\boldsymbol{b}_{4,1}}{B_0(t)v + B_1(t)v + B_2(t)}\ ,\ \ t \in [0,1]$$

여기서 $v = (1+w)/2$ 이다. 그리고

$$\boldsymbol{b}_{0,1} = \boldsymbol{b}_0$$
$$\boldsymbol{b}_{1,1} = (\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1)/(1+w),$$
$$\boldsymbol{b}_{2,1} = (\boldsymbol{b}_0 + 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)/2(1+w),$$
$$\boldsymbol{b}_{3,1} = (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)/(1+w),$$
$$\boldsymbol{b}_{4,1} = \boldsymbol{b}_2\ .$$

표준형 식에서 $\boldsymbol{r}_1$과 $\boldsymbol{r}_2$을 넣어 재매개화하면 다음 식이 성립한다.

$$\boldsymbol{b}_1(t) = \boldsymbol{r}_1(t/(\sqrt{v}(1-t)+t)) = \frac{B_0(t)\boldsymbol{b}_{0,1} + B_1(t)w_1\boldsymbol{b}_{1,1} + B_2(t)\boldsymbol{b}_{2,1}}{B_0(t) + B_1(t)w + B_2(t)}$$

그리고

$$\boldsymbol{b}_2(t) = \boldsymbol{r}_2(\sqrt{v}\,t/(1-t+\sqrt{v}\,t)) = \frac{B_0(t)\,\boldsymbol{b}_{2,1} + B_1(t)w_1\boldsymbol{b}_{3,1} + B_2(t)\boldsymbol{b}_{4,1}}{B_0(t) + B_1(t)w_1 + B_2(t)}$$

여기서 $w_1 = \sqrt{v} = \sqrt{(1+w)/2}$ 를 얻을 수 있다.

만약,

$$\boldsymbol{q}_{1,1}(s) = B_0(s)\boldsymbol{b}_{0,1} + B_1(s)\boldsymbol{b}_{1,1} + B_2(s)\boldsymbol{b}_{2,1}$$

그리고

$$\boldsymbol{q}_{2,1}(s) = B_0(s)\boldsymbol{b}_{2,1} + B_1(s)\,\boldsymbol{b}_{3,1} + B_2(s)\boldsymbol{b}_{4,1}$$

에 의하여 우리가 $\boldsymbol{r}_1$과 $\boldsymbol{r}_2$를 근사하면, $d(\boldsymbol{q}_{1,1}, \boldsymbol{r}_1) \le \varepsilon_{1,1}$, $d(\boldsymbol{q}_{2,1}, \boldsymbol{r}_2) \le \varepsilon_{2,1}$ 을 얻을 수 있다.

여기서

$$\varepsilon_{1,1} = |a_1||\boldsymbol{b}_{0,1} - 2\boldsymbol{b}_{1,1} + \boldsymbol{b}_{2,1}|/4(2+a_1),$$
$$\varepsilon_{2,1} = |a_1||\boldsymbol{b}_{2,1} - 2\boldsymbol{b}_{3,1} + \boldsymbol{b}_{4,1}|/4(2+a_1), \qquad a_1 = w_1 - 1.$$

이다.

두 개의 활꼴 $\boldsymbol{q}_{1,1}$과 $\boldsymbol{q}_{2,1}$으로 구성된 근사치 $\boldsymbol{q}_1$이 위의 범위에 수렴한 결과는 $d(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{r}) \le \varepsilon_1 = \max(\varepsilon_{1,1}, \varepsilon_{2,1})$ 이다.

Subdivision algorithm.

각각의 새로운 표준화 된 활꼴의 중간점에서 분할을 계속하여 분할 체계를 얻는다.

(i) $i=0,1,2,\quad w_0=w$에 대해서 $\boldsymbol{b}_{i,0}=\boldsymbol{b}_i$ 으로 놓는다.

(ii) $i=0,\ldots,2^{r-1}-1$ 에 대해서 , $r=1,2,\ldots$ 이라 하자.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_{4i,r} &= \boldsymbol{b}_{2i,r-1},\\
\boldsymbol{b}_{4i+1,r} &= (\boldsymbol{b}_{2i,r-1}+w_{r-1}\boldsymbol{b}_{2i+1,r-1})/(1+w_{r-1}),\\
\boldsymbol{b}_{4i+2,r} &= (\boldsymbol{b}_{2i,r-1}+2w_{r-1}\boldsymbol{b}_{2i+1,r-1}+\boldsymbol{b}_{2i+2,r-1})/2(1+w_{r-1}),\\
\boldsymbol{b}_{4i+3,r} &= (w_{r-1}\boldsymbol{b}_{2i+1,r-1}+\boldsymbol{b}_{2i+2,r-1})/(1+w_{r-1}),\\
\boldsymbol{b}_{4i+4,r} &= \boldsymbol{b}_{2i+2,r-1}.
\end{aligned} \tag{14}$$

그리고 $w_r=\sqrt{(1+w_{r-1})/2}$ 라 하자.

$s\in[0,1]$에서 r으로 r번째 근사하는 $\boldsymbol{q}_r(s)$는 구간적으로 이차이다.

$$\boldsymbol{q}_r(s)=B_0(\xi)\boldsymbol{b}_{2i,r}+B_1(\xi)\boldsymbol{b}_{2i+1,r}+B_2(\xi)\boldsymbol{b}_{2i+2,r}$$

여기서 $s\in[i/2^r,(i+1)/2^r],\ i=0,\ldots,2^r-1$에 대하여 $\xi=2^r s-i$ 이다.

Order of continuity(연속성의 차수)

부분분할 $\boldsymbol{b}_{0,r},\boldsymbol{b}_{2,r},\boldsymbol{b}_{4,r},\ldots,\boldsymbol{b}_{2^{r+1},r}$의 점에서 $\boldsymbol{r}$번째 근사 $\boldsymbol{q}_r$이 접선으로 $\boldsymbol{r}$에 다가갈 때 $\boldsymbol{q}_r$과 $\boldsymbol{r}$은 만난다.

다음 정리에 따르면 $\boldsymbol{q}_r$의 연속 차수가 G^2가 되는 것이 증명된다.

두 베지에 곡선

$$B_0(u)a_0+B_1(u)a_1+B_2(u)a_2,$$
$$B_0(u)b_0+B_1(u)b_1+B_2(u)b_2$$

이 $u=1,\ u=0$에서 G^2연속 연결이 되는 충분조건은 스칼라 λ에 대하여

$$a_2=b_0,\ a_1-2a_2+b_1=0,\ b_2-a_0=\lambda(b_1-a_1)$$

이다.

그러므로 $r=1$일 때, $\boldsymbol{q}_1$의 두 하위곡선은 G^2곡률 연속임을 알 수 있다. 비슷한 방법으로 $r=2$일 때, 네 개의 $\boldsymbol{q}_2$하위곡선 또한 G^2곡률 연속된다. 두 하위곡선 사이의 연속차수는 $\boldsymbol{q}_1$의 두 하위곡선의 연속성을 따른다.

정리2.21 곡선 q_r은 G^2이다.

위 정리는 균일한 유리 스플라인으로 $\boldsymbol{r}$번째 근사 $\boldsymbol{q}_r$을 표현할 수 있다는 것을 의미한다. 이것은 제어 점

$$\boldsymbol{b}_{0,r}, \boldsymbol{b}_{1,r}, \boldsymbol{b}_{3,r}, \ldots, \boldsymbol{b}_{2^{r+1}-1,r}, \boldsymbol{b}_{2^{r+1},r}$$

그리고 노트 벡터는 $0, 0, 1/2^r, 2/2^r, \ldots, (2^r-1)/2^r, 1, 1.$

근사된 G^2곡률 연속은 $\boldsymbol{r}$이 동시에 모든 간격에서 부분 분할되는 사실에 의존한다.

제 3장. 연구결과

제 3.1절. 어깨점 N조각 분할

정리 3.1 타원 $\bar{r}(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$의 어깻점 N-조각 분할의 분할점은

$$\theta_i = \frac{(N-i)\alpha + i\beta}{N}, \quad i=1,..,N-1 \tag{15}$$

이다.

<증명>

$\theta_0=\alpha$, $\theta_N=\beta$라고 하자. $i=1,..,N-1$, $\bar{r}'(\theta_i)=(-a\sin\theta_i, b\cos\theta_i)$

그리고

$$\begin{aligned}\bar{r}(\theta_{i+1})-\bar{r}(\theta_{i-1}) &= (a(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_{i-1}), b(\sin\theta_{i+1}-\sin\theta_{i-1})) \\ &= 2\sin\frac{\beta-\alpha}{N}(-a\sin\theta_i, b\cos\theta_i).\end{aligned}$$

이다.

그러므로 $\bar{r}'(\theta_i) \parallel \bar{r}(\theta_{i+1})-\bar{r}(\theta_{i-1})$이다. 점 $\bar{r}(\theta_i)$는 $\theta\in[\theta_{i-1},\theta_{i+1}]$에서 타원 호 $\bar{r}(\theta)$의 어깨점이다.

정리 3.2 쌍곡선 $\hat{r}(\theta)=(a\cosh\theta, b\sinh\theta)$, 일 때, $\alpha \le \theta \le \beta$에서 분할 점의 θ의 값은

$$\theta_i = \frac{(N-i)\alpha + i\beta}{N}, \quad i=1,..,N-1 \tag{16}$$

<증명>

$\theta_0=\alpha$, $\theta_N=\beta$라고 하자. $i=1,..,N-1$, $\hat{r}'(\theta_i)=(a\sinh\theta_i, b\cosh\theta_i)$

그리고

$$\begin{aligned}\hat{r}(\theta_{i+1})-\hat{r}(\theta_{i-1}) &= (a(\cosh\theta_{i+1}-\cosh\theta_{i-1}), b(\sinh\theta_{i+1}-\sinh\theta_{i-1})) \\ &= 2\sinh\frac{\beta-\alpha}{N}(a\sinh\theta_i, b\cosh\theta_i).\end{aligned}$$

이다.

그러므로 $\hat{r}'(\theta_i) \parallel \hat{r}(\theta_{i+1})-\hat{r}(\theta_{i-1})$이다. 점 $\hat{r}(\theta_i)$는 $\theta\in[\theta_{i-1},\theta_{i+1}]$에서 쌍곡선 호 $\hat{r}(\theta)$의 어깨점이다.

예제 1. (이차유리베지에 곡선의 5등분)

제어점을 $\boldsymbol{b}_0=[0,0]$, $\boldsymbol{b}_1=[8.4,7.2]$, $\boldsymbol{b}_2=[12,0]$로 잡고, $w=\frac{\sqrt{2}}{2}$라 하자.

그러면 $w<1$이므로 타원인 이차 유리 베지에 곡선이 그려진다.

이 타원에서 중심은

$$C=[3.6,-7.2],$$

장축의 꼭짓점은

$$X_1=[-3.23,\ -16.307],\ X_2=[10.430,\ 1.907],$$

단축의 꼭짓점은

$$X_3=[9.671,-11.753],\ X_4=[-2.471,-2.646],$$

초점은

$$F_1=[-1.491,-13.988],\ F_2=[8.691,-0.411]$$

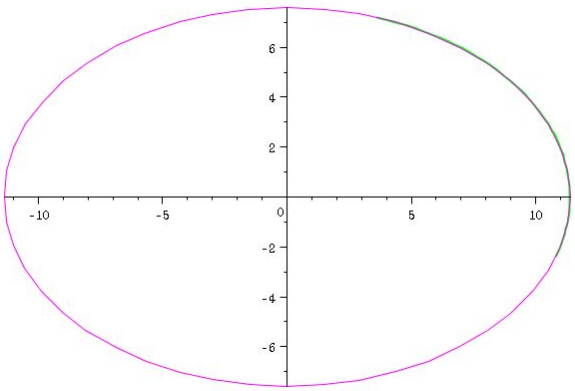
이다. 위 결과를 이용하여 새로운 축을 찾아낼 수 있다. 새로운 축에 대하여 제어 점 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$의 새로운 좌표를 찾고, 베지에 곡선을 다시 표현할 것이다.

$$\boldsymbol{b}_0=[3.6,\ 7.2]$$

$$\boldsymbol{b}_1=[14.4,\ 4.8]$$

$$\boldsymbol{b}_2=[10.8,-2.4]$$

새로운 점을 이용하여 타원을 그리면 아래 그림과 같이 나타낼 수 있다.

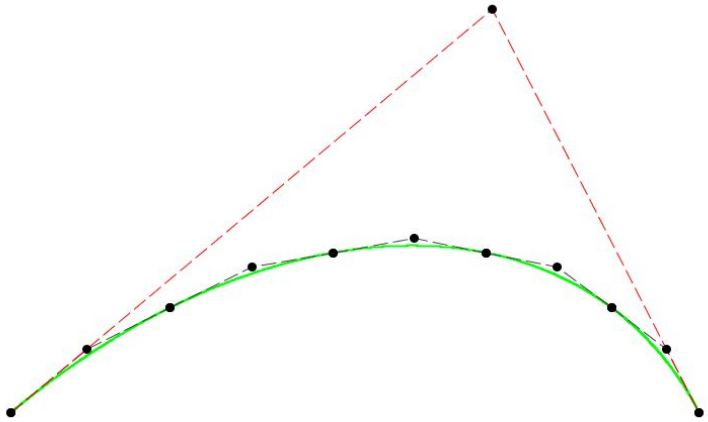


여기서, $\angle \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2$의 $\frac{4}{5}$인 각을 가진 베지에 곡선 위의 점 t_1을 찾았다. t_1은 베지에 곡선의 5분의 1인 점을 말한다.

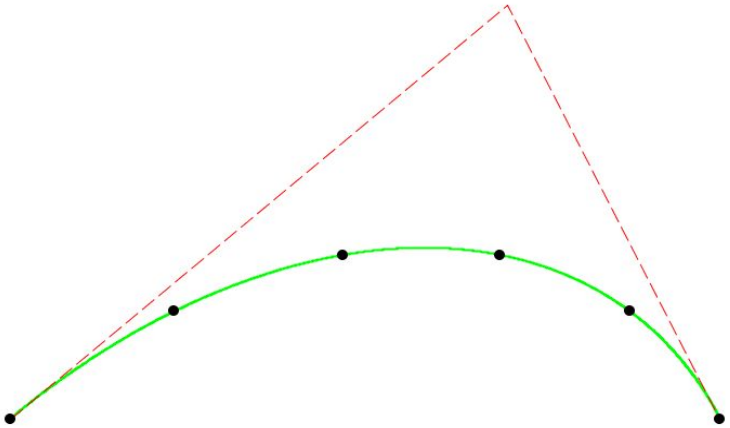
$$t_1=[2.309,\ 1.56]$$

베지에 곡선을 t_1에서 분할하면 부분곡선이 나오는데 오른쪽 부분곡선을 2등

분하고, 또 그 곡선을 각각 2등분하여 4등분했다.



<5조각 분할 점과 각 곡선의 제어점>



<5조각 분할>

5등분되어진 각 곡선의 웨이트를 확인해 본 결과

$$w = 0.988$$

으로 같았고,

$$\cos\left(\frac{\arccos(w)}{5}\right) = 0.988$$

의 값과 일치했다. 그러므로 각각의 곡선들은 G^2를 만족한다.

예제2. (이차유리베지에 곡선의 3등분)

제어점을 $\boldsymbol{b}_0=[0,0]$, $\boldsymbol{b}_1=[8.4,7.2]$, $\boldsymbol{b}_2=[12,0]$로 잡고, $w=1.7$라 하자.

그러면 $w>1$이므로 쌍곡선인 이차유리베지에 곡선이 그려진다.

이 쌍곡선에서

중심은

$$C=[9.669,\ 11.009],$$

꼭짓점은

$$X_1=[8.134,\ 4.462],\ \ X_2=[11.205,\ 17.556],$$

초점은

$$F_1=[7.859,\ 3.288],\ \ F_2=[11.480,\ 18.730]$$이다.

위 결과를 이용하여 새로운 축을 찾아낼 수 있다.

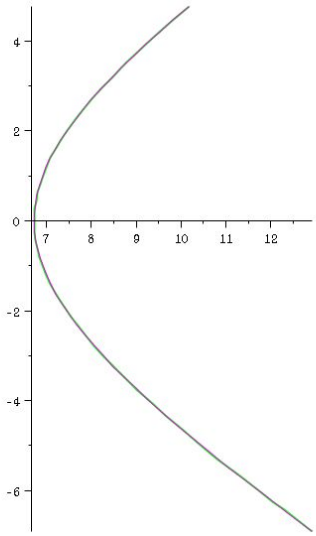
새로운 축에 대하여 제어 점 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$의 새로운 좌표를 찾고 베지어 곡선을 다시 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{b}_0=[12.926,\ -6.9]$$

$$\boldsymbol{b}_1=[3.998,-0.366]$$

$$\boldsymbol{b}_2=[10.186,\ 4.782]$$

새로운 점을 가지고 쌍곡선을 그리면 아래 그림과 같이 나타낼 수 있다.

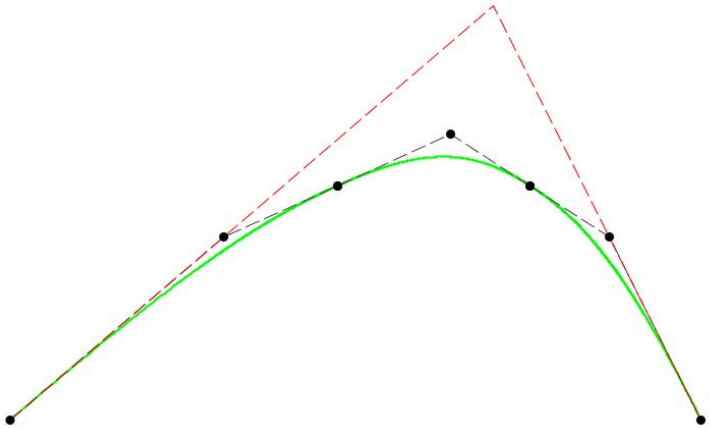


여기서, $\angle \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2$의 $\frac{2}{3}$인 각을 가진 베지에 곡선 위의 점 t_1을 찾았다.

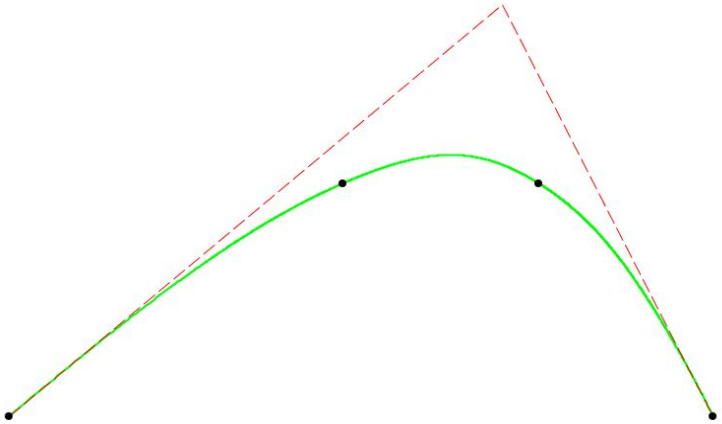
$$t_1=[5.685,\ 4.074]$$

베지에 곡선을 t_1에서 분할하면 부분곡선이 나오는데 오른쪽 부분곡선을 2등

분 했다.



<3조각 분할 점과 각 곡선의 제어점>



<3조각 분할>

3등분되어진 각 곡선의 웨이트를 확인해 본 결과

$$w = 1.071$$

으로 같았고,

$$\cosh\left(\frac{\operatorname{arccosh}(w)}{5}\right) = 1.071$$

의 값과 일치했다. 그러므로 각각의 곡선들은 G^2를 만족한다.

제 3.2절. 응용 - 이차유리베지에 곡선의 최소 N등분

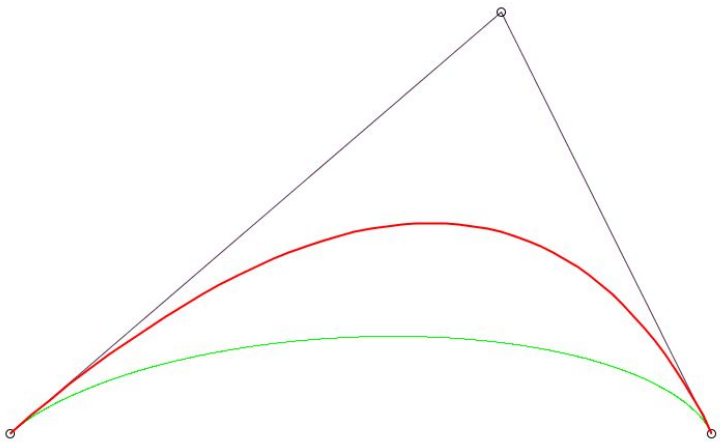
허용오차(TOL)=0.1일 때, 최소 N등분을 하자.

1) 타원

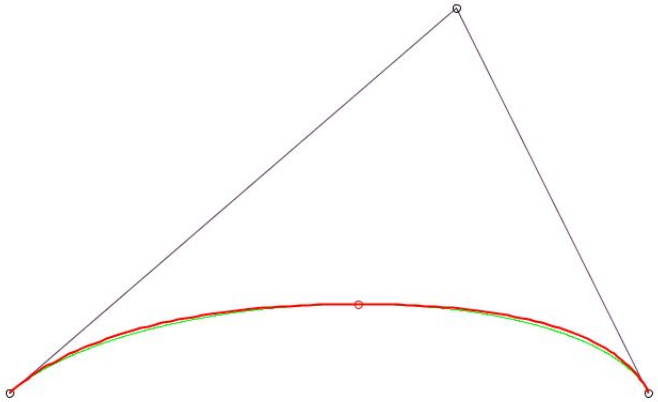
제어점을 $\boldsymbol{b}_0=[0,0]$, $\boldsymbol{b}_1=[2.1,1.8]$, $\boldsymbol{b}_2=[3,0]$로 잡고, $w=0.3$라 하자.
이때 각 분할된 이차 유리 베지에 곡선에 대해 이차 베지에 곡선으로 근사할 때의 오차(Hausdorff distance)를 구하자.

N조각	$d_H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})$
1	$5.11\times10^{-1}>$ TOL
2	$1.39\times10^{-1}>$ TOL
4	$3.94\times10^{-2}<$ TOL
3	$7.02\times10^{-2}<$ TOL

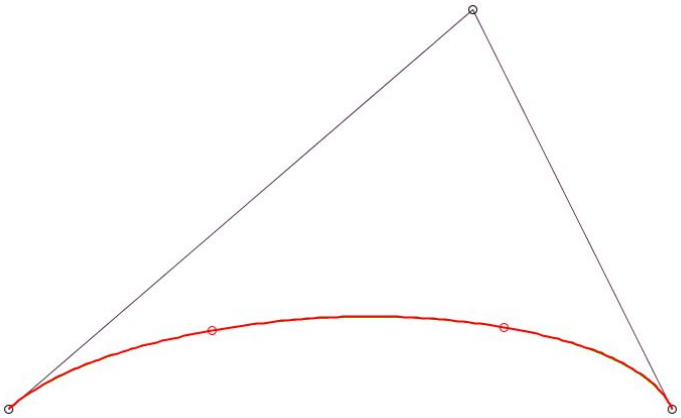
우리의 방법으로 3등분을 해보면 오차는 7.02×10^{-2}로 허용오차보다 작다.
floater의 방법으로는 허용오차보다 작게 하려면 4등분을 해야 하지만 우리의 방법으로는 3등분만으로도 가능하다.



<1조각 분할>



<2조각 분할>



<3조각 분할>

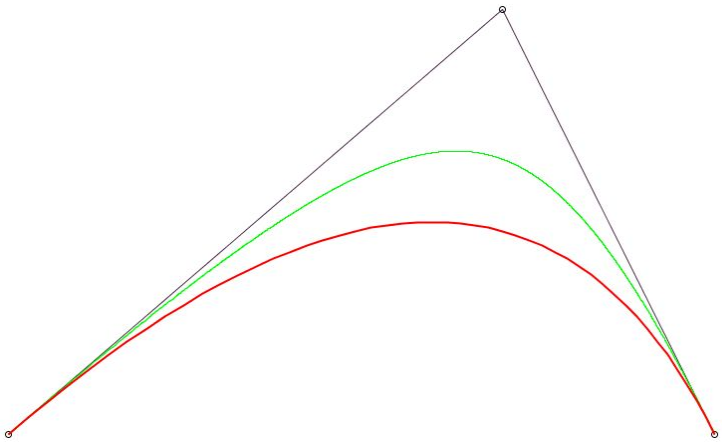
2) 쌍곡선

제어점을 $\boldsymbol{b}_0=[0,0]$, $\boldsymbol{b}_1=[6.3,5.4]$, $\boldsymbol{b}_2=[9,0]$로 잡고, $w=2$라 하자.

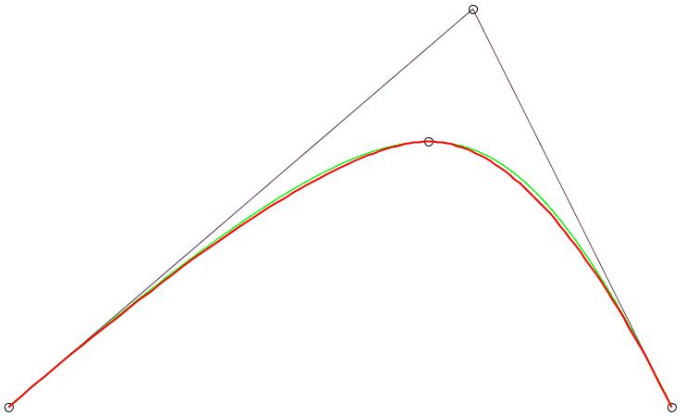
이때 각 분할된 이차 유리 베지에 곡선에 대해 이차 베지에 곡선으로 근사할 때의 오차(Hausdorff distance)를 구하자.

N조각	$d_H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})$
1	$9.49\times10^{-1}>$ TOL
2	$3.75\times10^{-1}>$ TOL
4	$1.31\times10^{-1}>$ TOL
8	$1.21\times10^{-2}<$ TOL
5	$9.45\times10^{-2}<$ TOL

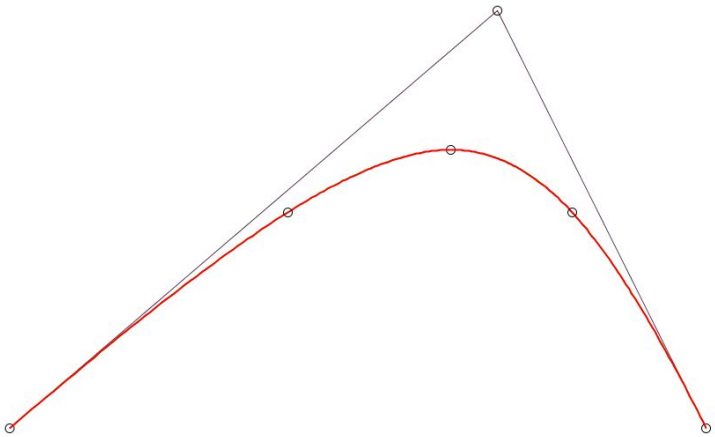
우리의 방법으로 5등분을 해보면 오차는 9.45×10^{-2}로 허용오차보다 작다. floater의 방법으로는 허용오차보다 작게 하려면 8등분을 해야 하지만 우리의 방법으로는 5등분만으로도 가능하다.



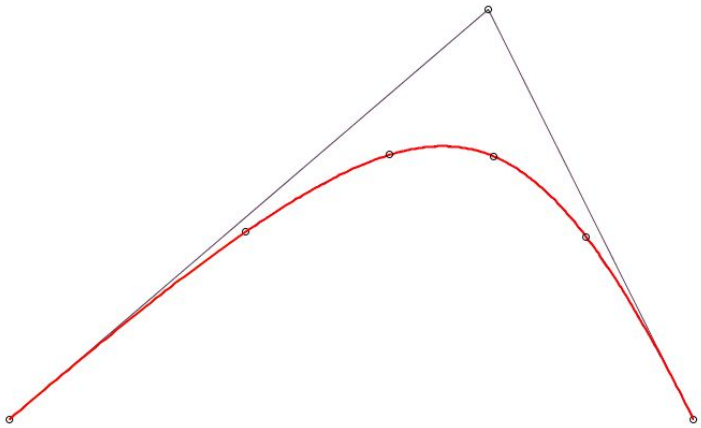
<1조각 분할>



<2조각 분할>



<4조각 분할>



<5조각 분할>

제4장. 결론 및 의견과 향후 연구

이 논문에서는 기존 floater의 방식인 이차 유리 베지에 곡선의 2^N 분할이 아닌 N분할을 성공했다. 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$를 $\boldsymbol{b}(t)$에 근사할 때 오차(Hausdorff distance)가 허용오차(TOL)보다 작아야 가장 근사한 곡선을 찾을 수 있다. 우리의 방법은 근사한 곡선을 찾기 위해 부분분할을 할 때 2^N분할하는 방법보다 더 적게 분할하여 허용오차를 만족할 수 있다는 장점이 있다. 또한 그것의 응용성도 있다.

참고문헌

[1] Y. J. Ahn, “*Approximation of conic sections by curvature continuous quartic Bezier curves*,” Comp. *Math. Appl.*, 60:1986-1993, 2010

[2] Gerald Farin, "*Curves and Surfaces for CAGD*", chapter 12 Conic Sections.

[3] Eugene. T. Y. Lee, "*The rational bezier Representation for conics*," Geometric modeling.

[4] M. Floater, "*High order approximation of conic sections by quadratic splines,*" *Comp. Aided Geom. Desi.,* 12(6):617-637, 1995.

[5] M. Floater. An $O(h^{2n})$ Hermite approximation for conic sectoins. *Comp. Aided Geom. Desi.,* 14:135-151, 1997.

[6] Soo Won Kim, “*Approximation of circular arc using quartic spline*,”2013.

[7] Hye Mi Seo, *"Approximation of half sphere by polynomial surfaces*,"2013.

[8] Hae Yeon Park, "*Properties of isoparametric curve of quadratic F-Bezier curve*,"2013.

[9] Ryeong Lee, "*study on convolution of compatible quadratic Bezier curves and quadratic approximation,* "2013.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20118059	과 정	석사
성 명	한글: 임인지 한문: 林仁智 영문: Im In Ji				
주 소	광주광역시 북구 문흥동 금호타운아파트 102동 101호				
연락처	010-2547-7941 E-MAIL: dladlswl2@naver.com				
논문제목	한글 : 이차유리베지에 곡선의 분할 영문 : Subdivision of quadratic rational Bezier curve				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2012 년 12 월 일

저작자: 임인지 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하