creative commons
COMMONS DEED

저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000264396

2014년 2월
교육학석사(수학교육전공)학위논문

이차 유리 베지에 곡선의 등각공액과 Isotomic 공액

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

윤 찬 란

이차 유리 베지에 곡선의 등각 공액과 Isotomic 공액

Isogonal and Isotomic Conjugates

of Quadratic Rational Bezier Curve

2014년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

윤 찬 란

이차 유리 베지에 곡선의 등각공액과 Isotomic 공액

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2013년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

윤 찬 란

윤찬란의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 김남권 인

심사위원 조선대학교 교수 이관규 인

심사위원 조선대학교 교수 안영준 인

2013년 12월

조선대학교 교육대학원

목 차

ABSTRACT ---------- 1

1장. 소개 ---------- 2

2장. 예비지식 및 기존연구결과 ---------- 3
2.1절 베리센트릭 좌표비 ---------- 3
2.2절 등각공액과 Isotomic 공액 ---------- 6
2.3절 베지어 곡선 ---------- 10
2.4절 원뿔곡선과 이차유리베지어 곡선 ----------11
2.5절 삼각형의 중심관계 ---------- 14

3장. 연구결과 ---------- 18

4장. 결론 ---------- 33

참고문헌 ---------- 34

ABSTRACT

Isogonal and Isotomic Conjugates of Quadratic Rational Bezier Curve

Yun, Chan Ran

Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

It has been described in a recent paper [4] by Keith Dean and Floor van Lamoen how to express isogonal conjugates and isotomic conjugates through barycentric coordinates. It is shown that when conic points are sent to isogonal and isotomic conjugates, those conjugates are conic. In addition, the centroid's isotomic conjugate is its own conjugate as well as incenter's isogonal conjugate is its own conjugate. Therefore the centroid and incenter quadratic rational Bezier curves are the same as the isotomic conjugates and isogonal conjugates respectively.

Key word : homogeneous barycentric coordinate, quadratic rational Bezier curve, isogonal conjugate, isotomic conjugate, centroid, incenter.

이차 유리 베지에 곡선의 등각공액과 Isotomic공액
Isogonal and Isotomic Conjugates of Quadratic Rational Bezier Curve

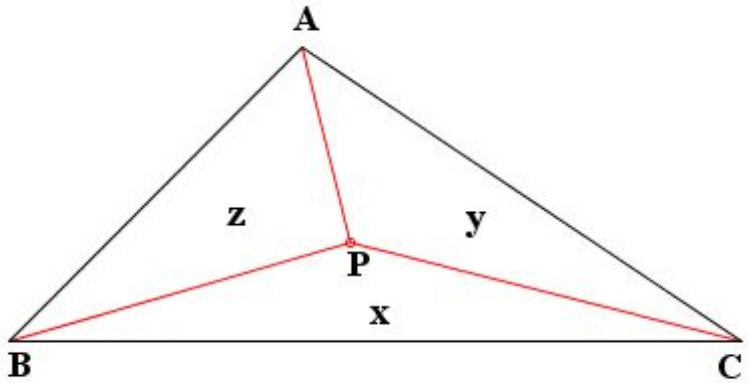
1장. 소개

중·고등학교 때 수학에서 배우는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선들은 모두 원뿔곡선이라고 불리는 도형들이다.
이 곡선들은 아이스크림콘 같은 원뿔 모양의 도형을 다양한 각도에서 평면으로 잘라보면 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 같은 단면을 얻을 수 있는데 이러한 도형들을 원뿔곡선 이라고 한다.
컴퓨터 그래픽에 자주 쓰이는 매개변수 곡선인 베지어 곡선은 웨이트(weight)에 따라서 이 원뿔곡선들을 표현할 수 있다.
이 논문에서는 원뿔곡선에 대해 알아보고 베리센트릭 좌표비(homogeneous barycentric coordinate)을 이용하여 삼각형에서 각점에 대한 등각공액(isogonal conjugate)과 아이소토믹 공액(isotomic conjugate)의 베리센트릭 좌표에 대해 조사하였고 삼각형에서 이 공액들의 성질을 연구하였다.
또한 이차 유리 베지어 곡선의 두 점에서 접선이 한 점에서 만난다고 가정했을 때 각 점을 등각공액 또는 아이소토믹 공액으로 보내도 이차 유리 베지어 곡선이 됨을 증명하였다.
이 논문의 구성은 다음과 같다.
2장에서는 베리센트릭 좌표비에 대해 소개하고 등각공액과 아이소토믹 공액에 대해 잘 알려진 사실을 정리하고 이들 공액을 베리센트릭 좌표로 표현하였다. 또한 이차 유리 베지어 곡선에 대하여 이미 알려진 사실을 정리하였고 등각공액의 성질을 이용한 몇 가지 흥미로운 사실을 소개하였다.
3장에서는 등각공액과 아이소토믹 공액을 이차 유리 베지어 곡선으로 표현할 수 있음을 증명하였다.
4장에서는 결론에 대해 정리하였다.

2장. 예비지식 및 기존연구결과

2.1 베리센트릭 좌표비(homogeneous barycentric coordinate)

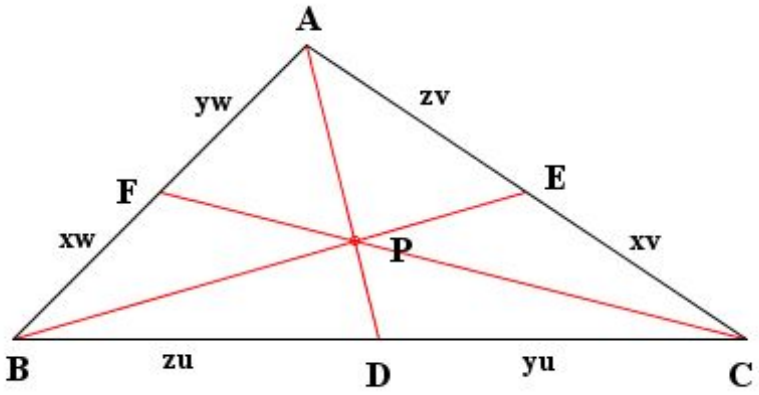
베리센트릭 좌표비란 삼각형의 세 변과
어떤 한 점이 이루는 세 삼각형의 넓이의 비로 나타내는 점의 좌표를 말한다.
$\triangle ABC$에 임의의 점P가 있다.
이때 점P에 의해 나누어지는 $\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$의 넓이의 비가 각각 $x:y:z$라 할 때 이 점P를 베리센트릭 좌표비라 하고 $P=(x:y:z)$로 표기한다.



[그림1]

이때 $\overline{AP}$의 연장선과 $\overline{BC}$가 만나는 점을D, $\overline{BP}$의 연장선과 $\overline{AC}$가 만나는 점을 E, $\overline{CP}$의 연장선과 $\overline{AB}$가 만나는 점을 F라고 하면 베리센트릭 좌표비 P는 D,E,F에 의한 점이므로 (1)을 만족한다.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{z}{y},\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{x}{z},\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{y}{x} \qquad (1)$$



[그림2]

다음 두 베리센트릭 좌표비$(x:y:z)$와 0이 아닌 정수 k에 대하여 $(kx:ky:kz)$는 같다.

그러므로 베리센트릭 좌표비를 정규화(normalize) 시킬 때는 합이 1이 되도록 한다.

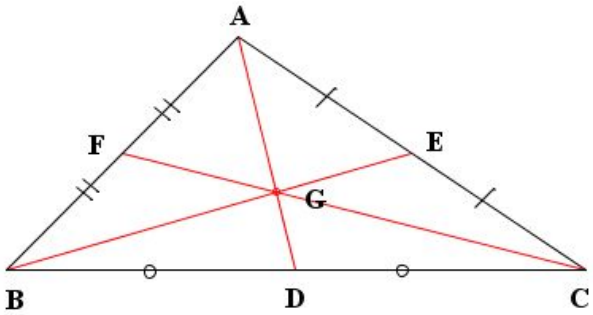
P를 정규화 시킨 좌표를 $\underline{P}$ 로 쓰고 이것을 베르센트릭 좌표라고 한다.

$$\underline{P}=\frac{1}{x+y+z}(x,y,z)=(\frac{x}{x+y+z},\frac{y}{x+y+z},\frac{z}{x+y+z})$$

베리센트릭 좌표비와 베리센트릭 좌표에 대해 몇 가지 예를 살펴보자.

1) 무게중심(centroid)

$\triangle ABC$의 중선 AD,BE,CF의 교점 G는 무게중심이다.(즉, D,E,F는 $\triangle ABC$의 세변의 중점이다.)



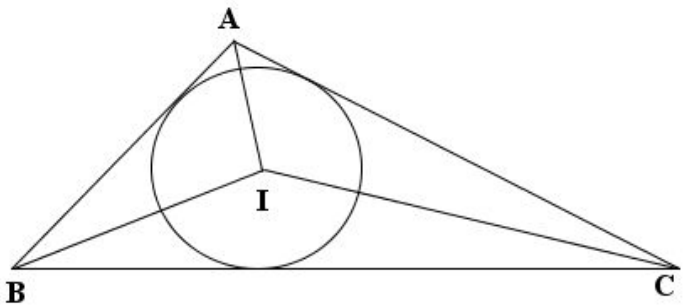
[그림3]

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=1$$

따라서 무게중심 G의 베리센트릭 좌표비는 $G=(1:1:1)$이고 이것을 정규화 한 베리센트릭 좌표는 $\underline{G}=\frac{1}{3}(1,1,1)$ 이다.

2) 내심(Incenter)

$\triangle ABC$의 내심을 I, r을 내접원의 반지름이라고 하자.



[그림4]

$$\triangle IBC=\frac{1}{2}ar,\quad \triangle ICA=\frac{1}{2}br\quad ,\triangle IAB=\frac{1}{2}cr$$ 이므로

내심의 베리센트릭 좌표비는

$$I=(\frac{1}{2}ar:\frac{1}{2}br:\frac{1}{2}cr)=(a:b:c)$$이고,

이 좌표를 정규화 시킨 베리센트릭 좌표는 $\underline{I}=\frac{1}{a+b+c}(a,b,c)$ 이다.

베리센트릭 좌표 P는 일차결합의 형태로 표현이 가능하다.

$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$P-A=\alpha(B-A)+\beta(C-A)$

$P=(1-\alpha-\beta)A+\alpha B+\beta C$

가 성립하고 같은 방법으로 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CP}$도 (2)식을 만족한다.

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C\quad (\text{단, } \alpha+\beta+\gamma=1) \tag{2}$$

이 때 $\alpha+\beta+\gamma=1$이므로 $\alpha=\frac{a}{a+b+c}$, $\beta=\frac{b}{a+b+c}$, $\gamma=\frac{c}{a+b+c}$ 이다.

간단히 말해서 베리센트릭 좌표 $P=(\alpha,\beta,\gamma)$로 표기할 수 있다.

2.2 Isogonal conjugate(등각공액)과 Isotomic conjugate

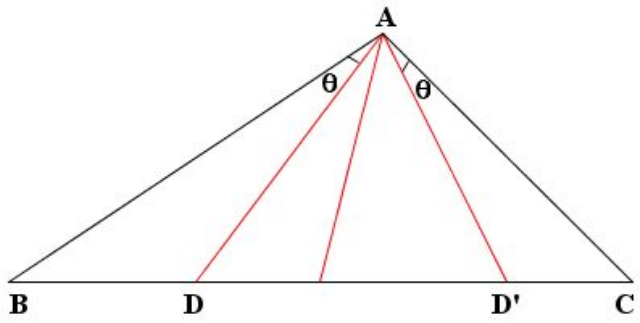
2.2.1) 등각공액(Isogonal conjugate)

등각공액과 아이소토믹공액은 19세기에 처음으로 연구된 종합기하학(synthetic geometry)에 관한 내용으로 삼각형 기하학에서 유용하게 쓰이고 있다.

등각공액은 1828년 Jacob Steiner에 의해 처음으로 증명되었다.

공액은 켤레라고도 하며 두 개의 점, 선, 수가 특수한 관계에 대해 서로 전환해도 그 성질의 변화가 없을 경우를 말한다.

등각은 예를 들어 $\triangle ABC$의 BC위의 한 점 D를 $\angle A$의 이등분선에 대하여 대칭이 되도록 BC 위에 있는 점 D'을 잡는다. 이 때 선분 AD, AD'을 Isogonal 이라고 한다.



[그림5]

$\triangle ABC$의 등각선분은 각각 AD와 AD', BE와 BE', CF와 CF'이고, AD, BE, CF가 한 점에서 만날 때 AD', BE', CF'도 또한 한 점에서 만난다.

이때 AD', BE', CF'의 교점P^*를 AD, BE, CF에서 만나는 한 점 P에 대한 등각공액이라고 한다.

정리1]

P의 베리센트릭 좌표비를 $(x : y : z)$라고 할 때 P^*의 베리센트릭 좌표비는 $P^* = (\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z})$로 표현된다.

증명) 그림6 참조.

$(AC, AP^*) = (AP, AB) = \theta_1$, $(BA, BP) = (BP^*, BC) = \theta_2$, $(CB, CP) = (CP^*, CA) = \theta_3$
라고 놓자.

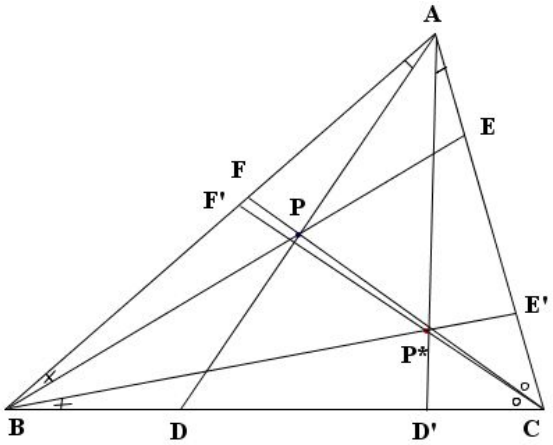
$$\frac{\triangle P^*AC}{\triangle P^*AB} = \frac{b}{c} \times \frac{\sin\theta_1}{\sin(A-\theta_1)} \quad , \quad \frac{\triangle PAC}{\triangle PAB} = \frac{b}{c} \times \frac{\sin(A-\theta_1)}{\sin\theta_1}$$

으로 넓이의 비를 나타낼 수 있다.

$$\text{이 때 } \frac{\sin\theta_1}{\sin(A-\theta_1)} = \frac{b}{c} \times \frac{\triangle PAB}{\triangle PAC} \text{ 이고}$$

$$\frac{\triangle P^*AC}{\triangle P^*AB} = \frac{b^2 \triangle PAB}{c^2 \triangle PAC} = \frac{b^2 z}{c^2 y} = \frac{\frac{b^2}{y}}{\frac{c^2}{z}} \text{ 이다.}$$

같은 방법으로 $\frac{\triangle P^*AC}{\triangle P^*BC} = \frac{\frac{b^2}{y}}{\frac{a^2}{x}}$ 가 성립하므로 $P^* = (\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z})$로 등각공액의 베리센트릭 좌표비를 표현할 수 있다.

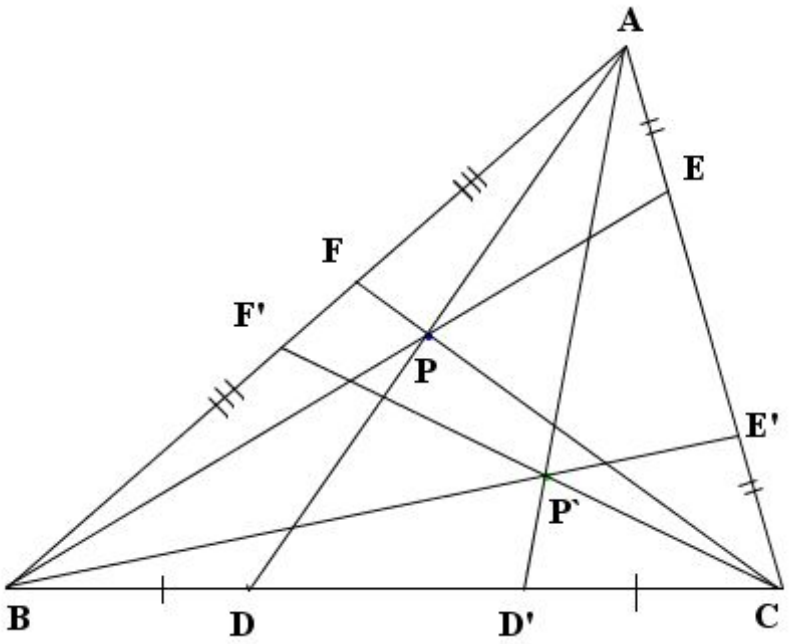


[그림 6]

2.2.2)아이소토믹 공액(Isotomic conjugate)

아이소토믹 공액은 1889년 John Casey에 의해 소개되었다.
$\triangle ABC$의 변BC의 중점M에 대해 $DM = MD'$가 되는 점D와 D'이 대칭일 때 선분 AD와 같은 방법으로 선분 BE, CF가 한 점P에서 만날 때 선분 AD', BE', CF'이 또한 한 점P'에서 만나면 점 D', E', F' 을 각각 점 D, E, F에 대한 아이소토믹 점이라고 하고 P' 를 점 P에 대한 아이소토믹 공액이라고 한다.

정리 2]
P의 베리센트릭 좌표비를 $(x : y : z)$라고 하면 그것의 아이소토믹공액을 P'으로 표현하고 베리센트릭 좌표비는 $(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z})$이다.



[그림 7]

증명)

$\frac{\triangle P'AC}{\triangle P'AB}=\frac{\triangle ACD'}{\triangle ABD'}=\frac{\triangle ADB}{\triangle ADC}=\frac{\triangle PAB}{\triangle PAC}=\frac{z}{y}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}}$ 이고 같은 방법으로

$\frac{\triangle P'AC}{\triangle P'BC}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}}$가 성립하므로 $\triangle P'BC:\triangle P'CA:\triangle P'AB=\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$ 이다.

즉 점P'의 베리센트릭 좌표비는 $P'=(\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z})$ 이다.

2.3절 베지어 곡선(Bezier curve)

베지어 곡선은 프랑스 수학자 베지어(Bezier)가 고안한 곡선으로 컴퓨터 그래픽에서 임의의 형태의 곡선을 매개변수 다항 곡선으로 표현하기 위해 수학적으로 만든 곡선이다.

베지어 곡선은 다양하고 유용한 성질을 가져 CAD, 컴퓨터그래픽, 글자 데이터와 도형을 그릴 때 등 여러 가지 방면으로 쓰이고 있다.

이 때 곡선이 제어점 위를 통과하는 것이 아닌 시작점에서 시작한 곡선이 인접한 제어점 방향으로 진행하는데, 제어점의 영향을 받아서 매개 함수식을 통해 곡선이 만들어진다.

시작점과 끝점을 포함한 제어점의 개수가 많을수록 복잡한 곡선을 만들 수 있는데 계산에 시간이 많이 걸려 제어점을 너무 많이 사용할 수는 없다.

임의의 $n+1$개 제어점 $b_0,...,b_1$이 $\mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}^3$상에 주어질 때, n차 베지어 곡선 $r(t)$의 방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{r}(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\boldsymbol{b_i},\quad t\in[0,1]$$

이 때 $B_i^n(t)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$은 번스타인 함수(Bernstein basis function)이고,

$$\binom{n}{i}=\begin{cases}\dfrac{n!}{i!(n-i)!} & 0\le i\le n\\ 0 & else\end{cases}\text{ 이다.}$$

베지어 곡선에는 여러 가지 성질들이 있는데 $t\in[0,1]$에 대하여 곡선$b(t)$는 항상 p_0에서 출발해서 p_n에서 끝나고 여러 개의 베지어 곡선을 연결해 놓은 곡선을 스플라인곡선(spline curve)라고 한다.

2.4절 원뿔곡선과 이차 유리 베지어 곡선

원뿔곡선(conic curve)은 원, 포물선, 타원, 쌍곡선등을 말한다.
원뿔곡선은 이차 유리 베지어 곡선의 가중치(weight)에 따라 포물선, 타원, 쌍곡선이 된다. 이 절에서는 유리 베지어 곡선의 표준형과 이차 유리 베지어 곡선이 원뿔곡선이 되는 경우를 알아보겠다.

이차 유리 베지어 곡선의 일반적인 형태는

$$r(t)=\frac{w_0\boldsymbol{b_0}B_0^2(t)+w_1\boldsymbol{b_1}B_1^2(t)+w_2\boldsymbol{b_2}B_2^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}\quad,\quad t\in[0,1]$$

이고 이 때 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\mathbb{R}^2$는 제어점(control point)이고 양수인 $w_0,w_1,w_2\in\mathbb{R}$는 가중치이다.

이차 번스타인 함수는 각각 $B_0^2(t)=(1-t)^2$, $B_1^2(t)=2(1-t)t$, $B_2^2(t)=t^2$ 이다.

$r(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r(t)=\frac{\boldsymbol{b_0}B_0^2(t)+\dfrac{w_1}{\sqrt{w_0w_2}}\boldsymbol{b_1}B_1^2(t)+\boldsymbol{b_2}B_2^2(t)}{B_0^2(t)+\dfrac{w_1}{\sqrt{w_0w_2}}B_1^2(t)+B_2^2(t)}$$

간단히 $\sqrt{\dfrac{{w_1}^2}{w_0w_1}}$ 대신 w를 대입해서 다음과 같이 나타내기도 하는데 이식을 이차 유리 베지어 곡선의 표준형이라고 한다.

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{B_0^2(t)\boldsymbol{b}_0+wB_1^2(t)\boldsymbol{b}_1+B_2^2(t)\boldsymbol{b}_2}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)}$$

표준형 인 경우, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}(\frac{1}{2})$를 어깨점 (shoulder point)이라고 한다.

이때 다음과 같은 성질을 만족한다.

(1) 어깨 점에서 접선은 $\overline{\boldsymbol{b_0b_2}}$ 과 평행이다.

(2) 만약 $\boldsymbol{m}=(\boldsymbol{b_0}+\boldsymbol{b_2})/2$ 두면, $\boldsymbol{m},\boldsymbol{s},\boldsymbol{b_1}$ 에 대하여

$ratio(\boldsymbol{m},\boldsymbol{s},\boldsymbol{b_1})=w_1$

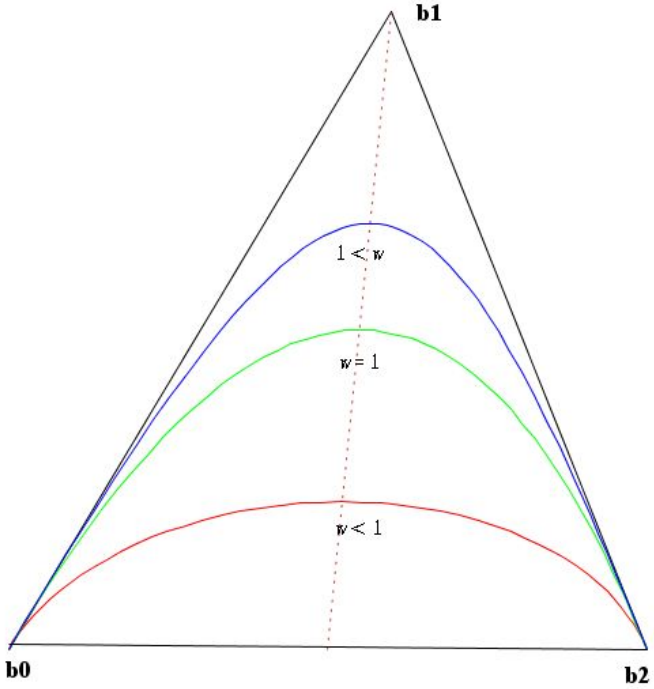
(3) 어깨점은 $\overline{\boldsymbol{b_0b_2}}$로부터 가장 멀리 떨어진 점이다.

(4) w의 크기에 따라 $r(t)$의 형태가 결정된다.

① $w<1$일 경우 $\boldsymbol{r}(t)$는 타원

② $w=1$일 경우 $\boldsymbol{r}(t)$는 포물선

③ $w>1$일 경우 $\boldsymbol{r}(t)$는 쌍곡선



[그림 8]

모든 이차 유리 베지어 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$는 음함수 형태를 갖는다

$$f(x,y)=0,$$

여기서, f는 이차다항식이다.

이제 $\boldsymbol{r}(t)$를 베리센트릭 좌표로 표현하자.

$$\boldsymbol{r}(t)=\tau_0\boldsymbol{b_0}+\tau_1\boldsymbol{b_1}+\tau_2\boldsymbol{b_2}$$

이때,

$$\tau_0=\frac{[w_0(1-t)^2]}{D}=\frac{w_0B_0^2(t)}{D}$$

$$\tau_1=\frac{[2w_1t(1-t)^2]}{D}$$

$$\tau_2=\frac{[w_2t^2]}{D}$$

여기서, $D=\sum w_iB_i^2(t)$ 이다.

$$\tau_1^2 = 4\frac{\tau_0\tau_2 w_1^2}{w_0 w_2}$$

얻고, 간단히 해보면

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_0\tau_2} = 4\frac{w_1^2}{w_0 w_2} \tag{1}$$

평면상의 모든 점 $\boldsymbol{x}$에 대하여 그 베리센트릭 좌표를 구하여

$$\boldsymbol{x} = \tau_0\boldsymbol{b}_0 + \tau_1\boldsymbol{b}_1 + \tau_2\boldsymbol{b}_2$$

그 (τ_0, τ_1, τ_2)가 식 (1)을 만족하는 점 $\boldsymbol{x}$를 모두 그리면 그것이 바로 이차 유리 베지어 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 그래프가 된다.

2.5절 삼각형 중심의 관계

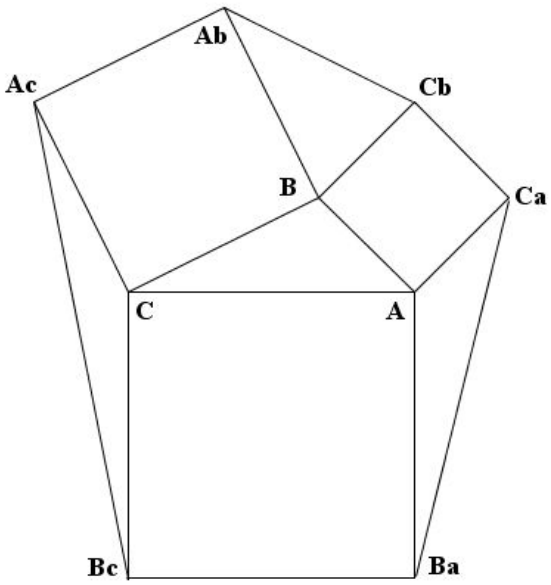
삼각형의 세 변의 길이가 다른 부등변 삼각형의 세 변위에 세 정사각형을 만들고 각 정사각형들의 꼭짓점을 이으면 새로운 삼각형 세 개가 만들어 지는데 이것을 플랭크(flank)라고 한다.

$\triangle ABC$의 중심 Y와 $\triangle ABC$의 플랭크 삼각형의 중심 X들에 대해 알아본다.

1.플랭크(Flank)

주어진 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 $BC=a, CA=b, AB=c$ 라고 하고 세 변위에 정사각형 $ACaCbB$, $BAbAcC$, $CBcBaA$을 만든다.

이 때 만들어 지는 삼각형 $ABaCa, BCbAb, CAcBc$ 을 $\triangle ABC$의 플랭크라고 한다.



[그림 9]

만약 A-플랭크($\triangle AB_aC_a$)를 꼭지점 A를 중심으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전시키면 C_a 는 B, B_a 는 변 CA 위에 있다.

삼각형 ABC와 A-플랭크의 이미지는 BA가 중선인 큰 삼각형을 만든다.

이것으로부터, ABC와 A-플랭크는 넓이가 같다.

이러한 관찰은 삼각형 ABC와 그 삼각형의 플랭크 사이에 밀접한 관계가 있다는 것을 제시한다.

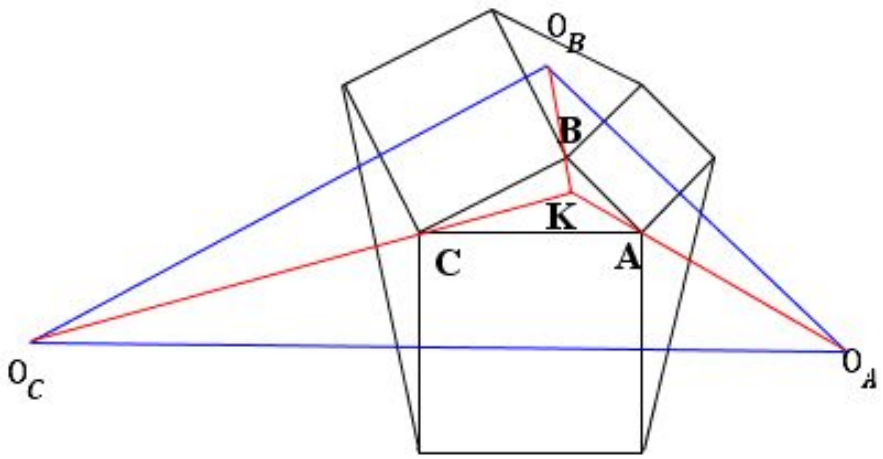
2.플랭크들의 외심(Circumcenters of flanks)

$\triangle ABC$의 중심을 P, $\triangle ABC$의 플랭크들의 중심을 각각 P_A, P_B, P_C라고 하고 $\triangle ABC$의 외심을 O라고 하자.
플랭크의 외심 O_A, O_B, O_C 를 이어서 만든 $\triangle O_A O_B O_C$에 대해 생각해보자.
외심은 변의 수직이등분선의 교점이므로 우리는 $\triangle O_A O_B O_C$이 $\triangle ABC$에 닮음임을 알 수 있고 그것은 $\triangle ABC$의 세 변위의 정사각형을 이등분함을 알 수 있다.

따라서 삼각형 ABC와 $O_A O_B O_C$의 대응변 사이의 거리는 $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ 이다.

3. 외심과 시메디언점의 프랜드관계
(Friendship of circumcenter and symmedin point)

이 두 삼각형의 꼭짓점을 연장하면 닮음의 중심이 만들어진다.
$\triangle ABC$와 $\triangle O_A O_B O_C$의 닮음의 중심으로부터 $\triangle ABC$의 변까지 길이는 두 삼각형의 대응변의 길이에 비례하므로 삼각형ABC의 변에도 비례하다. 이 닮음의 중심K는 시메디언이다.

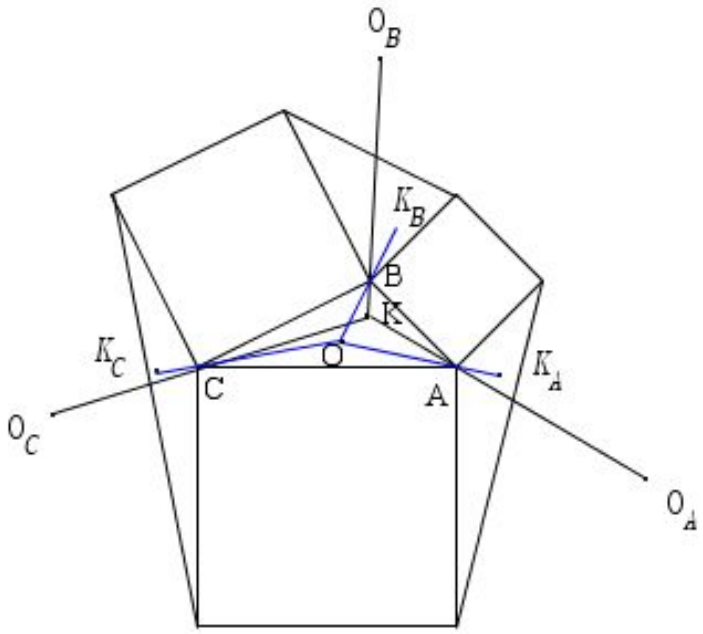


[그림 10]

플랭크의 외심들의 $\triangle O_A O_B O_C$는 $\triangle ABC$의 시메디언점 K에 대해 $\triangle ABC$와 닮음이다.
특히, $\triangle ABC$의 점K의 A-Cevian(AK) 은A-플랭크의 O_A의 A-Cevian(AO_A) 과

같은 선분 위에 있다.
$\triangle ABC$가 $\triangle AB_aC_a$의 A-플랭크이므로 A-플랭크의 K_A의 A-Cevian(AK_A)은 $\triangle ABC$의 점O의 A_Cevian(AO)과 같은 선분 위에 있다.
이는 B-와 C-플랭크 에서도 성립한다.

플랭크 삼각형들의 시메디안점(symmedian point)[1]의 삼각형 $K_AK_BK_C$은 외심 O에서 ABC와 닮음이다.
이러한 관계에 있는 점 O와 K를 프랜드(friend) 라고 한다.
일반적으로, 우리는 만약 삼각형 $P_AP_BP_C$가 Q에서 ABC와 닮음이면 P가 Q와 프랜드라고 한다.
A-,B-,C-플랭크는 그들 자신의 플랭크에 대해 대칭적이다.



[그림 11]

1) 시메디안점(symmedian point) : 무게중심의 등각공액

4. 등각 공액변형(Isogonal conjugacy)

$\triangle ABC$의 각의 이등분선은 또한 그것의 플랭크들의 대응각을 이등분한다.
그러므로 어떤 삼각형의 내심은 자기자신과 프랜드가 된다.
두 프랜드 P와 Q를 생각해보자.

각A의 이등분선의 반사에 의해, 선 PAQ_A는 P와 Q_A[2]의 등각공액을 지나는 선에 그려진다.

두 삼각형의 중심이 프랜드이면 그들의 등각공액도 프랜드이다.
즉 무게중심G와 수심H도 각각 시메디안점 K와 외심O의 등각공액이므로 G와 H도 또한 프랜드이다.

2) Q_A: $\triangle ABC$와 A-플랭크의 등각공액이 같은 직선위에 있을 때의 점

3장 연구결과

정리 3.1

$r(t)=\dfrac{w_0B_0^2(t)\boldsymbol{b_0}+w_1B_1^2(t)\boldsymbol{b_1}+w_2B_2^2(t)\boldsymbol{b_2}}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}$는 이차 유리 베지어 곡선이다.

$r(t)$를 아이소토믹공액으로 보낸 것을 $r'(t)$라고 할 때 $r'(t)$ 또한 이차 유리 베지어 곡선이 된다.

(증명)

$$\tau_0(t)=\frac{w_0B_0^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}$$

$$\tau_1(t)=\frac{w_1B_1^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}$$

$$\tau_2(t)=\frac{w_2B_2^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)} \text{ 라고 하자.}$$

$$r(t)=\frac{w_0B_0^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}\boldsymbol{b_0}+\frac{w_1B_1^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}\boldsymbol{b_1}$$
$$+\frac{w_2B_2^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}\boldsymbol{b_2}$$

이므로 $r(t)=\tau_0(t)\boldsymbol{b_0}+\tau_1(t)\boldsymbol{b_1}+\tau_2(t)\boldsymbol{b_2}$ 로 간단히 나타낼 수 있다.

(이때 $\tau_0(t)+\tau_1(t)+\tau_2(t)=1$이다.)

이 때 $r(t)$의 베리센트릭 좌표비는 $(w_0B_0^2(t):w_1B_1^2(t):w_2B_2^2(t))$이므로 이를 정규화시킨 베리센트릭 좌표는 $(\tau_0(t),\tau_1(t),\tau_2(t))$ 이다.

이제 $r(t)$의 아이소토믹공액의 베리센트릭 좌표비와 베리센트릭 좌표를 알아보자.

$$\text{베리센트릭 좌표비 : } r'(t)=\left(\frac{1}{w_0B_0^2(t)}:\frac{1}{w_1B_1^2(t)}:\frac{1}{w_2B_2^2(t)}\right)$$

$$\tau_0'(t)=\frac{\dfrac{1}{w_0B_0^2(t)}}{\dfrac{1}{w_0B_0^2(t)}+\dfrac{1}{w_1B_1^2(t)}+\dfrac{1}{w_2B_2^2(t)}}=\frac{2w_1w_2t^2}{2w_1w_2t^2+w_0w_2t(1-t)+2w_0w_1(1-t)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{w_0}t^2}{\frac{2}{w_0}t^2 + \frac{1}{2w_1}2t(1-t) + \frac{2}{w_2}(1-t)^2}$$

$$\tau_1'(t) = \frac{\frac{1}{w_1 B_1^2(t)}}{\frac{1}{w_0 B_0^2(t)} + \frac{1}{w_1 B_1^2(t)} + \frac{1}{w_2 B_2^2(t)}} = \frac{w_0 w_2 t(1-t)}{2w_1 w_2 t^2 + w_0 w_2 t(1-t) + 2w_0 w_1 (1-t)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2w_1}2t(1-t)}{\frac{2}{w_0}t^2 + \frac{1}{2w_1}2t(1-t) + \frac{2}{w_2}(1-t)^2}$$

$$\tau_2'(t) = \frac{\frac{1}{w_2 B_2^2(t)}}{\frac{1}{w_0 B_0^2(t)} + \frac{1}{w_1 B_1^2(t)} + \frac{1}{w_2 B_2^2(t)}} = \frac{2w_0 w_1 (1-t)^2}{2w_1 w_2 t^2 + w_0 w_2 t(1-t) + 2w_0 w_1 (1-t)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{w_2}(1-t)^2}{\frac{2}{w_0}t^2 + \frac{1}{2w_1}2t(1-t) + \frac{2}{w_2}(1-t)^2}$$

라고 하면

$$r'(t) = \tau_0'(t)\boldsymbol{b_0}' + \tau_1'(t)\boldsymbol{b_1}' + \tau_2'(t)\boldsymbol{b_2}' = \frac{w_0' B_0(t)\boldsymbol{b_0}' + w_1' B_1(t)\boldsymbol{b_1}' + w_2' B_2(t)\boldsymbol{b_2}'}{w_0' B_0(t) + w_1' B_1(t) + w_2' B_2(t)}$$

와 같이 나타낼 수 있으며 이때 $w_0' = \frac{2}{w_0}$, $w_1' = \frac{1}{2w_1}$, $w_2' = \frac{2}{w_2}$ 이고

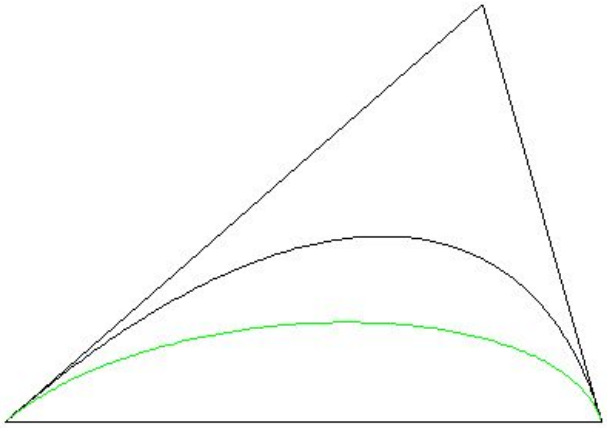
$\boldsymbol{b_0}' = \boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_1}' = \boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}' = \boldsymbol{b_0}$ 이다.

이것의 베리센트릭 좌표는 $(\tau_0'(t), \tau_1'(t), \tau_2'(t))$ 이다.

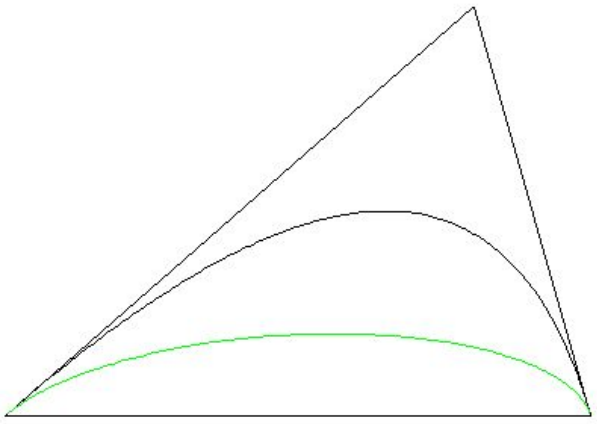
$\frac{\tau_1'^2(t)}{\tau'_0(t)\tau'_2(t)} = \frac{w_0 w_2}{4w_1^2}$ 는 상수이므로

$r'(t) = \tau_0'(t)\boldsymbol{b_0}' + \tau_1'(t)\boldsymbol{b_1}' + \tau_2'(t)\boldsymbol{b_2}'$ 도 이차 유리 베지어 곡선이다.

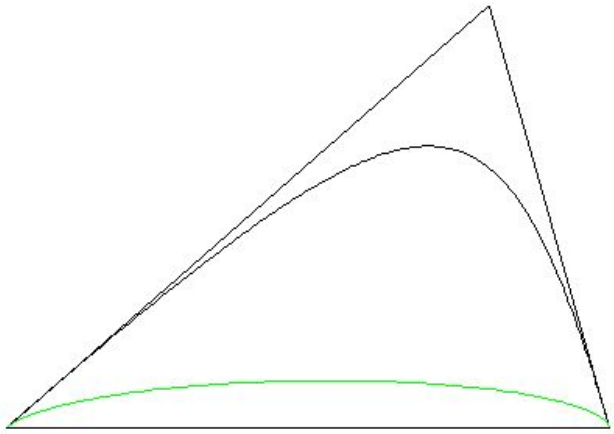
(다음 그림 12,13,14의 검정색 곡선은 $r(t)$를, 연두색 곡선은 $r'(t)$를 나타낸다.)



[그림 12] (타원)



[그림 13] (포물선)



[그림 14] (쌍곡선)

정리3.2

$r(t)=\dfrac{w_0B_0^2(t)\boldsymbol{b_0}+w_1B_1^2(t)\boldsymbol{b_1}+w_2B_2^2(t)\boldsymbol{b_2}}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}$는 이차 유리 베지어 곡선이다.

$r(t)$를 등각공액으로 보낸 것을 $r^*(t)$라고 할 때 $r^*(t)$ 또한 이차 유리 베지어 곡선이 된다.

(증명)

[정리3.1]과 같이 $r(t)=\tau_0(t)\boldsymbol{b_0}+\tau_1(t)\boldsymbol{b_1}+\tau_2(t)\boldsymbol{b_2}$ 로 간단히 나타낼 수 있다.

(단, $\tau_0(t)+\tau_1(t)+\tau_2(t)=1$)

이 때 $r(t)$의 베리센트릭 좌표비는 $(w_0B_0^2(t):w_1B_1^2(t):w_2B_2^2(t))$이므로 이를 정규화시킨 베리센트릭 좌표는 $(\tau_0(t),\tau_1(t),\tau_2(t))$ 이다.

이제 $r(t)$의 등각공액의 베리센트릭 좌표비와 베리센트릭 좌표를 알아보자.

$$\text{베리센트릭 좌표비 : } r^*(t)=\left(\frac{a^2}{w_0B_0^2(t)}:\frac{b^2}{w_1B_1^2(t)}:\frac{c^2}{w_2B_2^2(t)}\right)$$

$$\tau_0^*(t)=\frac{\dfrac{a^2}{w_0B_0^2(t)}}{\dfrac{a^2}{w_0B_0^2(t)}+\dfrac{b^2}{w_1B_1^2(t)}+\dfrac{c^2}{w_2B_2^2(t)}}=\frac{2a^2w_1w_2t^2}{2a^2w_1w_2t^2+b^2w_0w_2t(1-t)+c^2 2w_0w_1(1-t)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{w_0}a^2t^2}{\dfrac{2}{w_0}a^2t^2+\dfrac{1}{2w_1}b^2 2t(1-t)+\dfrac{2}{w_2}c^2(1-t)^2}$$

$$\tau_1^*(t)=\frac{\dfrac{b^2}{w_1B_1^2(t)}}{\dfrac{a^2}{w_0B_0^2(t)}+\dfrac{b^2}{w_1B_1^2(t)}+\dfrac{c^2}{w_2B_2^2(t)}}=\frac{b^2w_0w_2t(1-t)}{2a^2w_1w_2t^2+b^2w_0w_2t(1-t)+c^2 2w_0w_1(1-t)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{b^2}{2w_1}2t(1-t)}{\dfrac{2}{w_0}a^2t^2+\dfrac{1}{2w_1}b^2 2t(1-t)+\dfrac{2}{w_2}c^2(1-t)^2}$$

$$\tau_2^*(t)=\frac{\dfrac{c^2}{w_2B_2^2(t)}}{\dfrac{a^2}{w_0B_0^2(t)}+\dfrac{b^2}{w_1B_1^2(t)}+\dfrac{c^2}{w_2B_2^2(t)}}=\frac{2c^2w_0w_1(1-t)^2}{2a^2w_1w_2t^2+b^2w_0w_2t(1-t)+2c^2w_0w_1(1-t)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{w_2}c^2(1-t)^2}{\dfrac{2}{w_0}a^2t^2+\dfrac{1}{2w_1}b^2 2t(1-t)+\dfrac{2}{w_2}c^2(1-t)^2}$$

라고 하면

$r^*(t)=\tau_0^*(t)\boldsymbol{b_0}^*+\tau_1^*(t)\boldsymbol{b_1}^*+\tau_2^*(t)\boldsymbol{b_2}^*=\dfrac{w_0^*B_0(t)\boldsymbol{b_0}^*+w_1^*B_1(t)\boldsymbol{b_1}^*+w_2^*B_2(t)\boldsymbol{b_2}^*}{w_0^*B_0(t)+w_1^*B_1(t)+w_2^*B_2(t)}$ 와

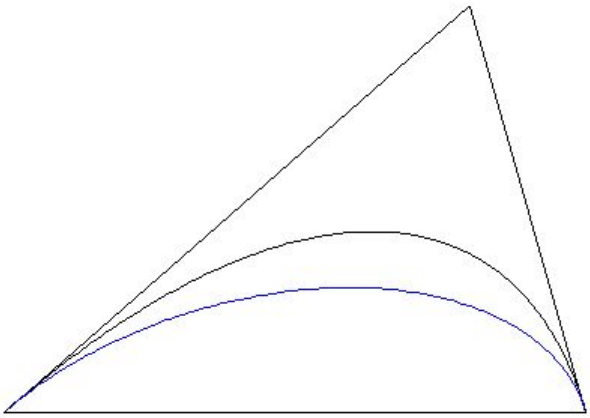
같이 나타낼 수 있으며 $w_0^*=\dfrac{2a^2}{w_0}$, $w_1^*=\dfrac{b^2}{2w_1}$, $w_2^*=\dfrac{2c^2}{w_2}$ 이고

$\boldsymbol{b_0}^*=\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_1}^*=\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}^*=\boldsymbol{b_0}$ 이다.

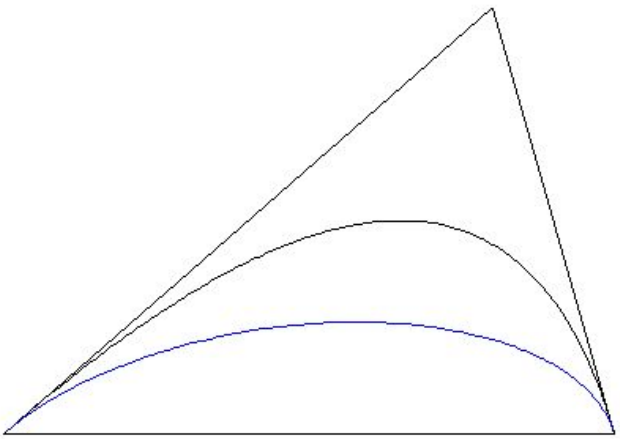
이것의 베리센트릭 좌표는 $(\tau_0^*(t),\tau_1^*(t),\tau_2^*(t))$ 이다.

$\dfrac{\tau^{*2}_1(t)}{\tau^*_0(t)\tau^*_2(t)}=\dfrac{w_0w_2}{w_1^2}\times\dfrac{b^2}{4a^2c^2}$ 가 상수이므로

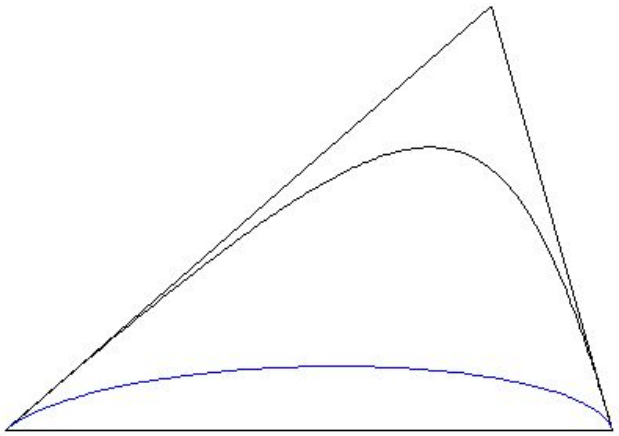
$r^*(t) = \tau_0^*(t)\boldsymbol{b_0}^* + \tau_1^*(t)\boldsymbol{b_1}^* + \tau_2^*(t)\boldsymbol{b_2}^*$ 도 이차 유리 베지어 곡선이다.



[그림 15] (타원)



[그림 16] (포물선)



[그림17] (쌍곡선)

이제 w_0, w_1, w_2를 w로 바꾼 표준형식에 대해 알아보자.

$$r(t) = \frac{\boldsymbol{b_0} B_0^2(t) + w\boldsymbol{b_1} B_1^2(t) + \boldsymbol{b_2} B_2^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)} \quad (\text{단, } w = \sqrt{\frac{w_2^2}{w_0 w_1}})$$

$$r(t) = \frac{B_0^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)}\boldsymbol{b_0} + \frac{wB_1^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)}\boldsymbol{b_1} + \frac{B_2^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)}\boldsymbol{b_2}$$

$$\text{이 때, } \tau_0(t) = \frac{B_0^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)}$$

$$\tau_1(t) = \frac{wB_1^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)}$$

$$\tau_2(t) = \frac{B_2^2(t)}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)} \quad \text{라고하면}$$

위 식은 $r(t) = \tau_0(t)b_0 + \tau_1(t)b_1 + \tau_2(t)b_2$ 이고 이때 $\tau_0(t) + \tau_1(t) + \tau_2(t) = 1$ 이다.

이것의 아이소토믹공액은 $(\frac{1}{\tau_0}:\frac{1}{\tau_1}:\frac{1}{\tau_2})$ 이므로

$$\tau_0'(t)=\frac{\frac{1}{\tau_0}}{\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}},\tau_1'(t)=\frac{\frac{1}{\tau_0}}{\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}},\tau_2'(t)=\frac{\frac{1}{\tau_0}}{\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}}$$ 이고

이때 $\tau_0'(t)+\tau_1'(t)+\tau_2'(t)=1$이다.

즉 $r'(t)$의 베리센트릭 좌표 표현은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r'(t)=\tau_0'(t)\boldsymbol{b_0}'+\tau_1'(t)\boldsymbol{b_1}'+\tau_2'(t)\boldsymbol{b_2}'$$

따라서 $\boldsymbol{b_0}'=\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_1}'=\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}'=\boldsymbol{b_0}$ 이고, $w'=\frac{1}{4w}$ 이다.

이때 $\tau_0'(t)$, $\tau_1'(t)$, $\tau_2'(t)$를 계산해 보면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\tau_0'(t)&=\frac{wB_1^2(t)B_2^2(t)}{wB_2^2(t)B_1^2(t)+B_0^2(t)B_2^2(t)+wB_0^2(t)B_1^2(t)}\\&=\frac{2wt^2}{(4w-1)t(t-1)+2w}\end{aligned}$$

같은 방법으로,

$$\begin{aligned}\tau_1'(t)&=\frac{wB_0^2(t)B_2^2(t)}{wB_2^2(t)B_1^2(t)+B_0^2(t)B_2^2(t)+wB_0^2(t)B_1^2(t)}\\&=\frac{wt(1-t)}{(4w-1)t(t-1)+2w}\\\tau_2'(t)&=\frac{wB_0^2(t)B_1^2(t)}{wB_2^2(t)B_1^2(t)+B_0^2(t)B_2^2(t)+wB_0^2(t)B_1^2(t)}\\&=\frac{2w(1-t)^2}{(4w-1)t(t-1)+2w}\end{aligned}$$

이제 표준형식을 사용해서 나타낸 등각공액의 베리센트릭 좌표 표현을 알아보자.

$r(t)$에 대한 등각공액은 $(\frac{a^2}{\tau_0}:\frac{b^2}{\tau_1}:\frac{c^2}{\tau_2})$ 이므로

$\tau_0^*(t)=\dfrac{\frac{a^2}{\tau_0}}{\frac{a^2}{\tau_0}+\frac{b^2}{\tau_1}+\frac{c^2}{\tau_2}}$, $\tau_1^*(t)=\dfrac{\frac{b^2}{\tau_1}}{\frac{a^2}{\tau_0}+\frac{b^2}{\tau_1}+\frac{c^2}{\tau_2}}$, $\tau_2^*(t)=\dfrac{\frac{c^2}{\tau_2}}{\frac{a^2}{\tau_0}+\frac{b^2}{\tau_1}+\frac{c^2}{\tau_2}}$ 라고 하면

$$r^*(t)=\tau_0^*(t)\boldsymbol{b_0}^*+\tau_1^*(t)\boldsymbol{b_1}^*+\tau_2^*(t)\boldsymbol{b_2}^*$$

따라서 $\boldsymbol{b_0}^*=\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_1}^*=\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}^*=\boldsymbol{b_0}$ 이고 $w^*=\dfrac{b^2}{2\sqrt{ac}}$ 이다.

이때 $\tau_0^*(t)$, $\tau_1^*(t)$, $\tau_2^*(t)$를 계산해 보면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_0^*(t)=\frac{1}{a^2}\times\frac{2wt^2}{2wa^2t^2+b^2(1-t)t+wc^2(1-t)^2}$$
$$\tau_1^*(t)=\frac{1}{b^2}\times\frac{wt(1-t)}{2wa^2t^2+b^2(1-t)t+wc^2(1-t)^2}$$
$$\tau_2^*(t)=\frac{1}{c^2}\times\frac{2w(1-t)^2}{2wa^2t^2+b^2(1-t)t+wc^2(1-t)^2}$$

정리3]

무게중심 G 에 대한 $r(t)$의 이차 유리 베지어 곡선은 아이소토믹공액으로 변환 시켜도 일치한다.

(증명)

무게중심의 베리센트릭 좌표비 : $G=(1:1:1)=\frac{1}{3}(1,1,1)$

$$r(t)=\tau_0(t)\boldsymbol{b_0}+\tau_1(t)\boldsymbol{b_1}+\tau_2(t)\boldsymbol{b_2}$$ 이므로

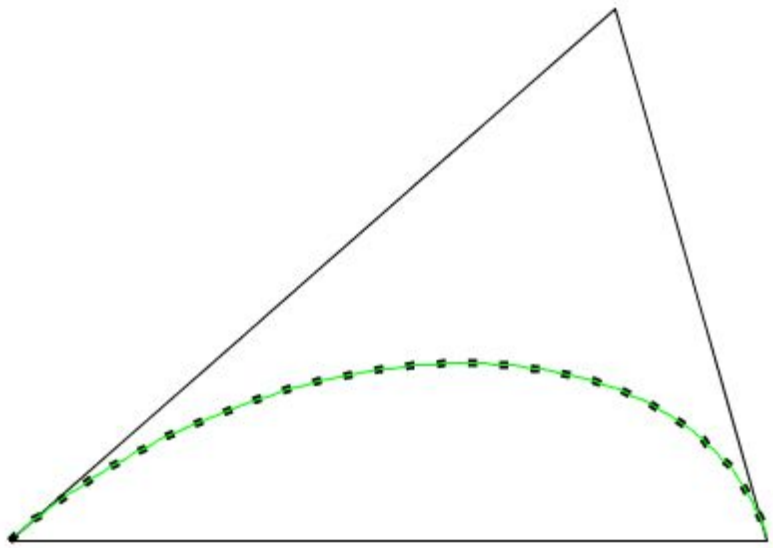
$$\tau_0(t)=\frac{B_0^2(t)}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)}=\frac{1}{3}\quad -①$$

$$\tau_1(t)=\frac{wB_1^2(t)}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)}=\frac{1}{3}\quad -②$$

$$\tau_2(t)=\frac{B_2^2(t)}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)}=\frac{1}{3}\quad -③$$

위 식 ①,③를 연립하면 $t=\frac{1}{2}$ 이고 이것을 식②에 대입하면 $w=\frac{1}{2}$이다.

또한 아이소토믹공액에 대한 w를 w'라고 표현할 때 $w' = \frac{1}{4w}$이고 $w = \frac{1}{2}$를 대입하면 $w' = \frac{1}{2}$이므로 결국 $w = w'$이므로 $r(t)$와 $r'(t)$는 일치한다.



[그림 18]

정리4]

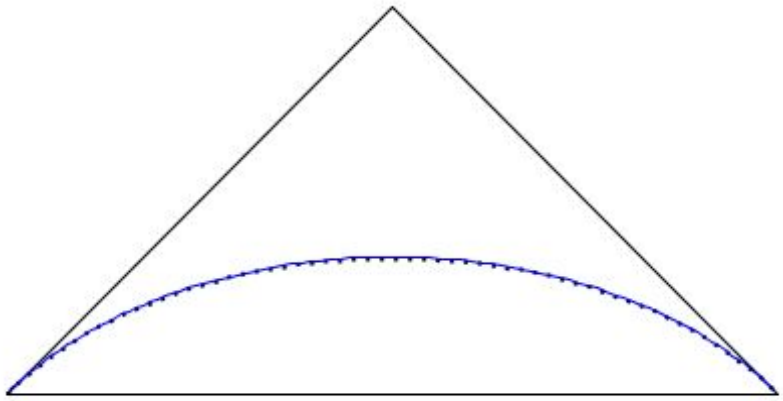
내심I 에 대한 $r(t)$의 이차 유리 베지어 곡선은 등각공액으로 변환시켜도 일치한다.

(증명)

내심의 베리센트릭 좌표비와 좌표는 각각 $I=(a:b:c)=\frac{1}{a+b+c}(a,b,c)$ 이다.

등각공액은 각의 이등분선에 대해 대칭시킨 선분의 교점이므로 내심과 같다.

$w=w^*$이므로 $w=\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ 가 성립한다.($\because$ $w^*=\frac{b^2}{4ac}\times\frac{1}{w}$)



[그림 19]

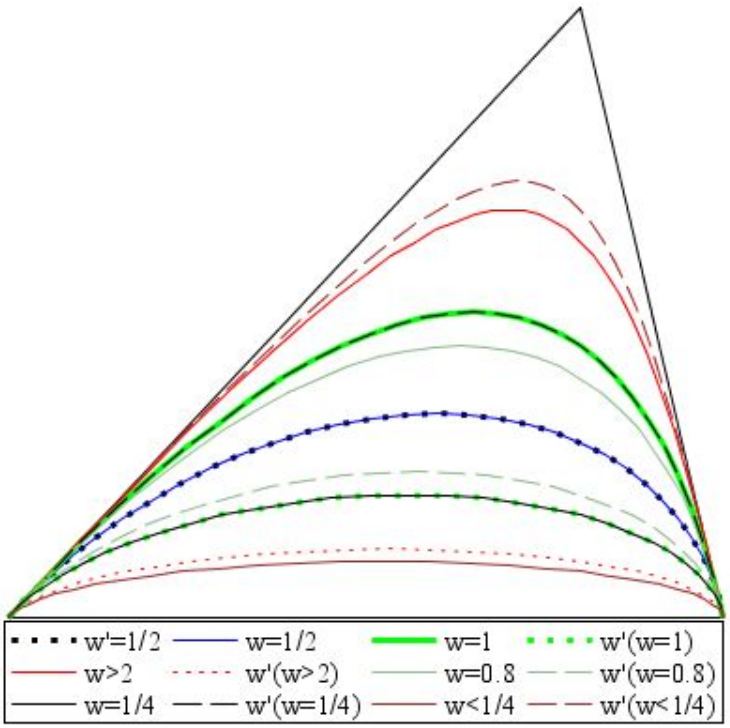
따름정리5]

w의 크기에 따라 이차 유리 베지어 곡선 $r(t)$의 아이소토믹공액과 등각공액에 대한 이차 유리 베지어 곡선은 다음과 같다.

(1) 아이소토믹 공액

$r(t)$ \ $r'(t)$	타원	포물선	쌍곡선
타원	$\frac{1}{4} < w < 1$	$w = \frac{1}{4}$	$w < \frac{1}{4}$
포물선	$w = 1$	×	×
쌍곡선	$w > 1$	×	×

[표1]



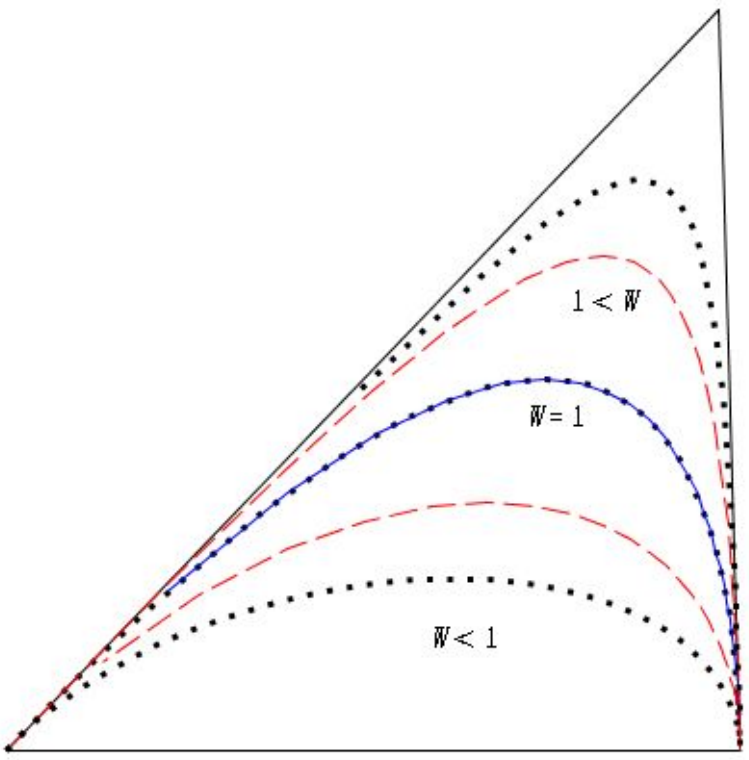
[그림 20]

(2) 등각공액

① $w=\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}=1$일 때$(w=w^*)$, $w^*=\dfrac{b^2}{4ac}\times\dfrac{1}{w}=\dfrac{b^2}{4ac}$

$r(t)$ \ $r^*(t)$	타원	포물선	쌍곡선
타원	×	×	$w<1$
포물선	×	$w=1$	×
쌍곡선	$w>1$	×	×

[표2]

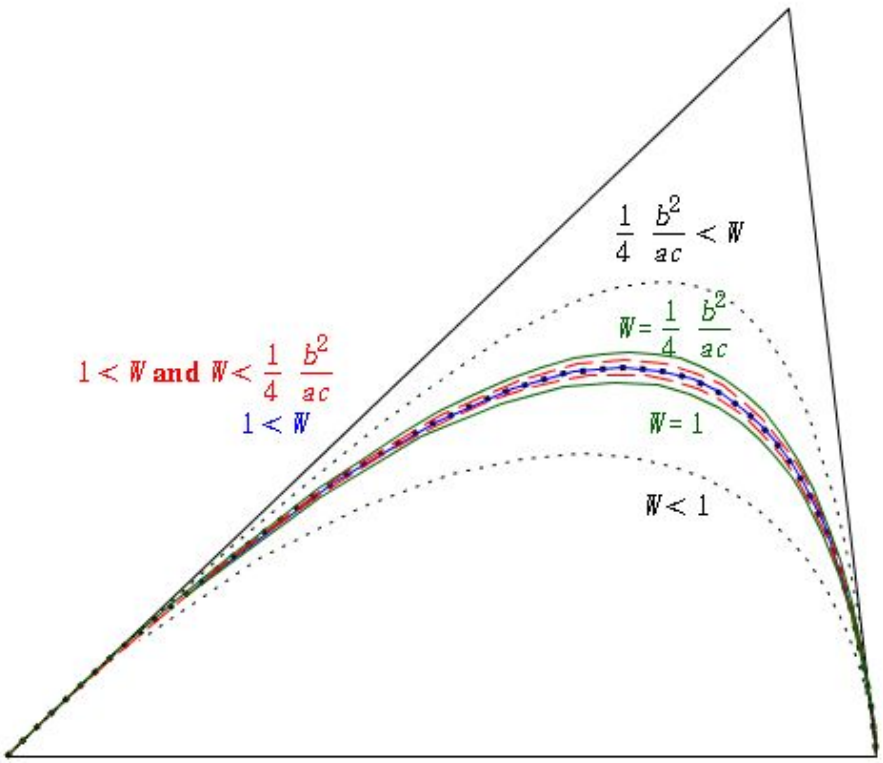


[그림 21]

② $w = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} > 1$일 때$(w = w^*)$, $w^* = \dfrac{b^2}{4ac} \times \dfrac{1}{w}$

$r(t)$ \ $r^*(t)$	타원	포물선	쌍곡선
타원	×	×	$w < 1$
포물선	×	×	$w = 1$
쌍곡선	$w > \dfrac{b^2}{4ac}$	$w = \dfrac{b^2}{4ac}$	$1 < w < \dfrac{b^2}{4ac}$

[표3]

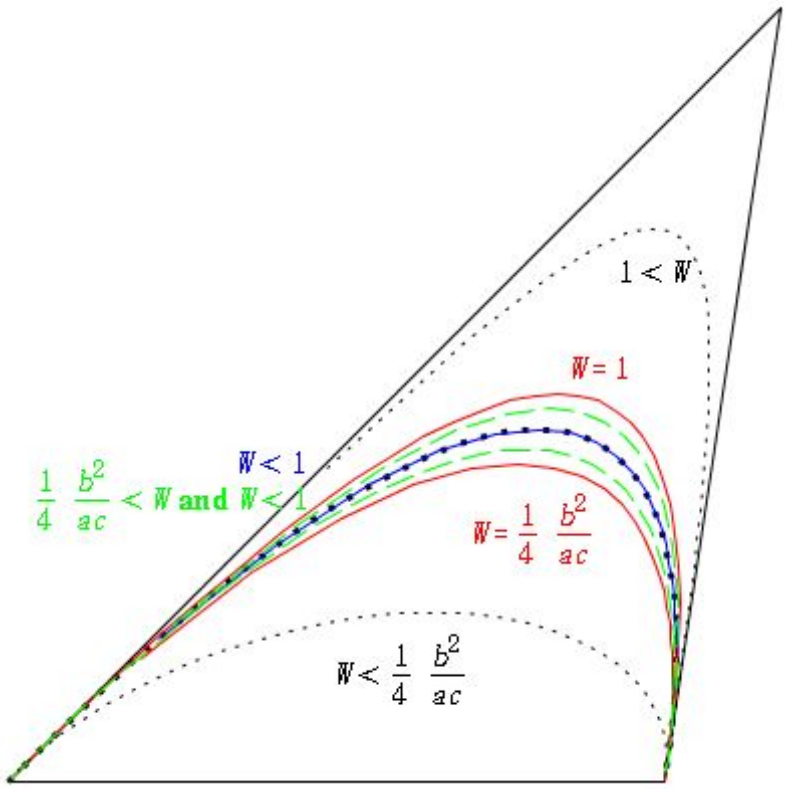


[그림 22]

③ $w = \frac{b}{2\sqrt{ac}} < 1$일 때$(w = w^*)$, $w^* = \frac{b^2}{4ac} \times \frac{1}{w}$

$r(t)$ \ $r^*(t)$	타원	포물선	쌍곡선
타원	$\frac{b^2}{4ac} < w < 1$	$w = \frac{b^2}{4ac}$	$w < \frac{b^2}{4ac}$
포물선	$w = 1$	×	×
쌍곡선	$w > 1$	×	×

[표4]



[그림 23]

4장. 결론

이 논문에서는 베리센트릭 좌표를 이용하여 삼각형 내부에 있는 점을 이차 유리 베지어 곡선으로 표현하였다.

이러한 표현을 이용하여, 등각공액과 아이소토믹 공액을 소개하였다.

또한 이차 유리 베지어 곡선의 두 점에서 접선이 한 점에서 만난다고 가정했을 때 각 점을 등각공액또는 아이소토믹 공액으로 보내도 이차 유리 베지어 곡선이 됨을 증명하였다.

그리고 무게중심의 아이소토믹 공액는 다시 자기 자신이 되고, 내심의 등각공액도 자기 자신 내심 이므로 이차 유리 베지어 곡선도 각각 일치함을 증명하였다.

참고문헌

[1] Cyril F. Parry, *"The Isogonal Tripolar Conic,"* Forum Geometricorum, (2001), p.33-42.

[2] P.Yiu, *"The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry"* Int.J.Math.Educ.Sci.Technol.,31(2000)569-578.

[3] K.R.S Sastry,*"Triangles with Special Isotomic Conjugate Pairs"*, Forum Geometricorum (2004) 73-80.

[4] Keith Dean and Floor van Lamoen, *"Geometric Construction of Reciprocal Conjugations"*, Forum Geometricorum (2001) 115-120.

[5] Floor van Lamoen, *"Friendship Among Triangle Centers"*, Forum Geometricorum (2001)1-6.

[6] M. Floater, *"High-roder approximation of conic sections by quadratic splines"*, Comp. Aided Geom. Desi., 12(6):617-637,1995.

[7] Gerald Farin, *Curves and Surfaces for CAGD* 205-220.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20108190	과 정	석사
성 명	한글: 윤 찬 란	한문: 尹 燦 欄	영문: Yun Chanran		
주 소	광주광역시 북구 운암동 벽산블루밍 206동 1303호				
연락처	010-3957-1880	E-MAIL: crkissme@naver.com			
논문제목	한글 : 이차 유리 베지에 곡선의 등가공액과 Isotomic 공액 영문 : Isogonal and Isotomic Conjugates of Quadratic Rational Bezier Curve				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집·형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포·전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송·출력을 허락함.

2013 년 12 월 25일

저작자: 윤 찬 란 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하