creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000264310

2014년 2월
교육학석사(수학)학위논문

변형된 오일러 방정식의 극한 공간에서의 존재성

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

구 정 화

변형된 오일러 방정식의 극한 공간에서의 존재성

Existence of Modified Euler Equations in Limiting Spaces

2014년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

구 정 화

변형된 오일러 방정식의 극한 공간에서의 존재성

지도교수 김 남 권

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2013년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

구 정 화

구정화의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장	조선대학교 교	홍 성 금	인
심사위원	조선대학교 교수	김 남 권	인
심사위원	조선대학교 교수	안 영 준	인

2013년 12월

조선대학교 교육대학원

CONTENTS

1. INTRODUCTION ····· 1

2. 변형된 Euler 방정식 ····· 2

3. 함수공간 ·····3

4. 해의 존재성 ·····12

REFERENCES ·····18

영 문 초 록

Existence of Modified Euler Equations in Limiting Spaces

구 정 화
지도교수 : 김 남 권
조선대학교 교육대학원 수학교육전공

We introduce a modified system of 2D Euler equations, which contain a retarding term in the vortex equation, and show the existence of the Cauchy problem the solutions of the system when the initial data belongs to LBMO and L^{∞}.
The main ingredient is the preservation of certain norm along a flow whose vorticity belongs to LBMO, which was derived in [1].

1. Introduction

Euler 방정식은 공간에 가득찬 유체가 시간에 따라 운동할 때 그 운동을 기술하는 방정식의 일종이다. 특히, 주어진 유체가 운동중에 그 체적이 변하지 않고 점성의 성질이 없을 때 Euler 방정식에 의해 기술된다. 이 방정식은 시간 $t=0$에서 초기속도가 주어졌을 때 그 이후 시간에서의 해를 찾는 초기문제를 풀어야 하는 방정식으로 특히 2차원 공간에서 Cauchy 문제의 해의 존재성이 여러 각도로 증명되어졌다. ([2])
하지만 해의 존재성과 유일성을 함께 보장할 수 있는 공간에서의 해의 존재성 증명은 상대적으로 어려운데 [1]에서 보여진 LBMO 공간에서의 해의 존재가 가장 일반적인 결과이다.

Euler 방정식에는 유체의 속도가 시간에 따라 저항 또는 자연적인 노이즈에 의해 약화되는 항이 존재하지 않는다. 하지만, 자연계에는 유체의 움직임에 따른 자연적인 저항이 있다. 우리는 이 저항을 vorticity의 운동방정식에 넣은 변형된 2D Euler 방정식을 소개한다. 이 방정식은 vorticity가 저항을 갖게 되어 시간에 따라 vorticity의 감소를 기대할 수 있는데, 본 논문에서는 이 방정식에 대해 그 해의 존재성을 L^∞공간과 LBMO 공간에서 증명할 것이다.

2. 변형된 Euler 방정식

Euler 방정식은 다음과 같다.

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p$$
$$\nabla \cdot u = 0$$

여기서 p는 압력, u는 속도를 나타낸다. 이 방정식은 시간에 따라서 공간의 각 지점의 속도 u가 변하는 것을 결정하는 방정식이다. 이와 같은 방정식은 초기문제를 연구하는데 초기문제는 $u(0,x) = u_0(x)$를 추가로 만족하는 해 u를 구하는 것이다. 이 방정식을 공부하는데 유용한 개념으로 vorticity, $\omega = \nabla \times u$가 있다.
2차원 Euler 방정식에 대해서는 $u_0 \in L^2$, $\omega_0 \in L^\infty$일 때 Yudovich에 의해 L^∞공간에서 초기문제의 해의 존재성이 증명되었고 ([3]), $u_0 \in L^2$, $\omega_0 \in L^p \cap LBMO$일 때는 Bernicot and Keraani에 의해 증명되었다. ([1])

하지만 자연계의 system은 그 system 만이 갖는 retardation이 대부분 존재한다. 이와 같은 retardation을 Euler 방정식에 선형적으로 표시한 다음과 같은 변형된 Euler 방정식을 $\mathbb{R}^2$위에서 생각하자.

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot u = 0, \\ &\nabla \times u = \omega, \\ &\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f(t,x)\omega \ . \quad (\omega(0,x) = \omega_0(x)) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$는 계수함수로 natural retardation의 세기를 나타낸다. 이와 같은 방정식을 공부할 때는 다음과 같은 particle trajectory map ψ을 정의하는 것이 편리하다.

$$\partial_t \psi = u(\psi,t) \ , \psi(x,0) = x$$

ψ는 u가 미분가능이면 모든 t에 대해 homeomorphism 임이 알려져 있다.

3. 함수공간

함수공간의 대표적인 경우는 L^p 공간이지만 L^p 공간의 극단의 경우로 BMO 공간을 생각할 수 있다. 우리는 BMO 공간의 부분공간인 LBMO 공간에서 편미분방정식의 Cauchy 문제를 고려할 것이다. 이 장에서는 함수의 적분에 관한 기본적인 부등식인 Hölder 부등식과 Minkowski 부등식을 소개한다.
또 BMO 공간의 몇 가지 기본적인 성질과 John-Nirenberg 부등식, LBMO 공간을 소개하고 우리가 공부할 변형된 Euler 방정식을 소개하겠다.

정리1. (Hölder부등식) $S=[a,b]\subset[0,1]$, $f,g\in C(S)$

$$\int_S |fg| \le \left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (\text{단, } q=\frac{p}{p-1},\ p>1)$$

증명) $\left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}=1$ 이고 $\left(\int_S |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}=1$ 인 경우에 $\int_S |fg|\le 1$ 임을 먼저 보이자.

Young의 부등식을 이용하면 $|fg|=|f||g|\le \frac{1}{p}|f|^p+\frac{p-1}{p}|g|^{\frac{p}{p-1}}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_S |fg| &\le \int_S \frac{1}{p}|f|^p+\frac{p-1}{p}|g|^{\frac{p}{p-1}}\\ &= \frac{1}{p}\int_S |f|^p+\frac{p-1}{p}\int_S |g|^{\frac{p}{p-1}}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1\end{aligned}$$

이다. 따라서 Hölder 부등식이 성립한다.

이제 $\left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ne 1$ 이거나 $\left(\int_S |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}\ne 1$ 인 경우를 보이자.

먼저, $\left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}=m\ne 0$ 이고 $\left(\int_S |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}=n\ne 0$ 일 때,

$$\int_S \left|\frac{f}{m}\right|^p=\frac{1}{m^p}\int_S |f|^p=\frac{1}{\int_S |f|^p}\int_S |f|^p=1 \qquad \text{이고}$$

$\int_S \left|\frac{g}{n}\right|^q = \frac{1}{n^q}\int_S |g|^q = \frac{1}{\int_S |g|^q}\int_S |g|^q = 1$ 이다.

따라서 $\int_S \left|\frac{f}{m}\frac{g}{n}\right| \le 1$ 이다.

그러므로 $\int_S |fg| \le |mn| = \left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 이다.

이제, $\int_S |f|^p = 0$ 또는 $\int_S |g|^q = 0$ 이면 $|f|, |g| \ge 0$ 이므로 $f = 0$ 또는 $g = 0$를 의미한다.

따라서 좌변=0, 우변=0으로 성립한다. □

정리2. (Minkowski 부등식) $S = [a,b] \subset [0,1]$, $f, g \in C(S)$

$$\left(\int_S |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{단, } q = \frac{p}{p-1},\ p > 1)$$

증명) $h = f$, $k = (f+g)^{p-1}$라 하면 Hölder 부등식에 의하여

$$\int_S |f(f+g)^{p-1}| \le \left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1)$$

다음은 $h = g$, $k = (f+g)^{p-1}$인 경우를 생각하면

$$\int_S |g(f+g)^{p-1}| \le \left(\int_S |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2)$$

$\int_S |f+g|^p \le \int_S (|f|+|g|)|(f+g)^{p-1}|$ 이고, (1)식과 (2)식을 더하면

$\int_S |f+g|^p \le \left\{\left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_S |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\int_S |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ 이다.

양변을 $\left(\int_S |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ 로 나누면 $\left(\int_S |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_S |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_S |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 이 되어 증명이 끝난다. □

함수공간의 대표적인 경우는 L^p 공간이지만 L^p 공간의 극단의 경우로 BMO 공간을 생각할 수 있다.

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, S는 n차원 cube, 그리고 $f_S = \frac{1}{|S|}\int_S f$, $Q_S f = \frac{1}{|S|}\int_S |f - f_S|$ 라 하자.

$f \in BMO(\mathbb{R}^n)$라는 것은 함수 f가 모든 n-cube S에 대해 $\sup \frac{1}{|S|}\int_S |f - f_S| < +\infty$ 를 만족하는 것이다.

정리3. $BMO(\mathbb{R}^n)$에 대해 다음이 성립한다.

① 유계인 함수는 모두 $BMO(\mathbb{R}^n)$에 속한다.

② $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 이면 $f+g$, $cf \in BMO(\mathbb{R}^n)$이다.
(여기서 c는 임의의 상수.)

③ $\inf_{S \subset R^n} \frac{1}{|S|}\int_S |f - c| \le Q_S f \le 2 \inf_{S \subset R^n} \frac{1}{|S|}\int_S |f - c|$.

증명) ①을 먼저 증명하자.

$$\begin{aligned} Q_S f &= \frac{1}{|S|}\int_S |f - f_S| \le \frac{1}{|S|}\int_S (|f| + |f_S|) \\ &\le \| f \|_{L^\infty} + |f_S| = \| f \|_{L^\infty} + \left| \frac{1}{|S|}\int_S f \right| \\ &\le \| f \|_{L^\infty} + \frac{1}{|S|}\int_S |f| \\ &= 2 \| f \|_{L^\infty} < +\infty \end{aligned}$$

다음으로 ②를 증명하자.

$$\begin{aligned} Q_S(f+g) &= \frac{1}{|S|}\int_S |(f+g) - (f+g)_S| \\ &= \frac{1}{|S|}\int_S |f - f_S + g - g_S| \\ &\le \frac{1}{|S|}\int_S |f - f_S| + |g - g_S| \\ &= Q_S f + Q_S g \end{aligned}$$

따라서 $Q_S(f+g) \le Q_S f + Q_S g$ 를 만족하고, $\sup Q_S(f+g) \le \sup Q_S f + \sup Q_S g$도 성립한다. 그러므로 $\sup Q_S(f+g) < +\infty$ 이다.

$$Q_S(cf) \le \frac{1}{|S|}\int_S |cf-(cf)_S| \qquad = \frac{1}{|S|}\int_S |cf-cf_S|$$
$$= \frac{1}{|S|}\int_S |c||f-f_S| \qquad = \frac{|c|}{|S|}\int_S |f-f_S|$$
$$= |c|\, Q_S$$

따라서 $\sup Q_S(cf) = \sup\ |c| Q_S f$ 를 만족하고, $Q_S(cf) < +\infty$ 가 성립한다.

③을 증명하자.

$$Q_S f = \frac{1}{|S|}\int_S |f-f_S|$$
$$= \frac{1}{|S|}\int_S |f-c+c-f_S|$$
$$\le \frac{1}{|S|}\int_S |f-c|+|c-f_S|$$
$$= \frac{1}{|S|}\int_S |f-c| + \left|c-\frac{1}{|S|}\int_S f\right|$$
$$= \frac{1}{|S|}\int_S |f-c| + \left|\frac{1}{|S|}\int_S (c-f)\right|$$
$$\le \frac{1}{|S|}\int_S |f-c| + \frac{1}{|S|}\int_S |f-c|$$
$$= 2\frac{1}{|S|}\int_S |f-c|$$

따라서 $\inf Q_S f \le 2\inf \frac{1}{|S|}\int_S |f-c|$ 가 성립하고

inf 정의에 의해 $\inf\ \frac{1}{|S|}\int_S |f-c| \le Q_S f$ 도 성립한다.

그러므로 $\inf\ \frac{1}{|S|}\int_S |f-c| \le Q_S f \le 2 \quad \inf\ \frac{1}{|S|}\int_S |f-c|$ 이다. □

보조정리1. $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$이고 $B_1 \supset B_2$일 때 부등식 $\left|\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} f - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} f\right|$ $\le \frac{|B_1|}{|B_2|}\|f\|_{BMO}$ 가 성립한다.

증명)
$$\left|\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} f - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} f\right| = \left|\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}\left(f - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} f\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}\left|f - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} f\right|$$
$$\le \frac{1}{|B_2|}\int_{B_1}\left|f - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} f\right|$$
$$= \frac{|B_1|}{|B_2|}\|f\|_{BMO}$$

보조정리1을 이용하여 다음의 정리4를 증명할 수 있다.

정리4. $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$이고 $B_1 \supset B_2$일 때 부등식 $|f_{B_1} - f_{B_2}| \le C\ln\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\|f\|_{BMO}$ 가 성립한다.

증명) B_1의 반경은 r_1이고, B_2의 반경을 $\frac{r_1}{2^k}$라 하자.

보조정리1에 의해

$$|f_{B_1} - f_{B_2}| \le \left|f_{B_1} - f_{\frac{B_1}{2}}\right| + \left|f_{\frac{B_1}{2}} - f_{\frac{B_1}{2^2}}\right| + \cdots + \left|f_{\frac{B_1}{2^{k-1}}} - f_{\frac{B_1}{2^k}}\right| + \left|f_{\frac{B_1}{2^k}} - f_{B_2}\right|$$
$$\le KC\|f\|_{BMO} \qquad (C\text{는 상수})$$

이 성립한다. 여기서 $K = \dfrac{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{\ln 2}$이다.

그런데 $\ln 2$는 상수이고 $\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \le \ln\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)$이므로 부등식

$$|f_{B_1} - f_{B_2}| \le \quad C\ln\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\|f\|_{BMO}$$

가 성립한다. □

정리3의 ①은 $L^\infty \subset BMO$임을 말 한다. 한편 다음의 보기가 $L^\infty \ne BMO$임을 알려준다.

예) $y=\ln|x|$, $I=[-a,a]$일 때,

$$f_I=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\ln|x|\,dx \quad =\frac{1}{a}\int_0^a \ln x\,dx \ =\frac{1}{a}[x\ln x-x]_0^a$$

$$=\frac{1}{a}(a\ln a-a) \ =\ln a-1.$$

$$Q_I=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|\ln|x|-\ln a+1|dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\left|\ln\frac{|x|}{a}+1\right|dx$$

이다. 이때 $x=ay$로 치환하면

$$Q_I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|\ln|y|+1|\,dy$$

이고 a에 무관하므로 $\sup Q_I(\ln|x|)<+\infty$ 이다.

마지막으로 John-Nirenberg 부등식과 BMO 함수의 Interpolation 부등식을 소개하겠다.

정리5. (John-Nirenberg 부등식) $f\in BMO(\mathbb{R}^n)$, Q는 cube일 때, 모든 $\lambda>0$에 대해 부등식 $|\{x\in Q:|f-f_Q|>\lambda\}|\le Ce^{-C\lambda}|Q|$ 이 성립한다. (단, $C>0$는 n차원에 의존하는 상수)

증명) $\|f\|_{BMO}=1$일 때 부등식 $|\{x\in Q:|f-f_Q|>\lambda\}|\le c(\lambda)|Q|$ 을 만족하는 가장 좋은 상수를 $c(\lambda)$라 정의하자. 체비셰프 부등식에 의해 $c(\lambda)\le min(1,\frac{1}{\lambda})$를 만족한다.

그리고 처음 cube를 Q_0라 하고, Q_0의 변을 각각 이등분한 cube들을 B_1, 같은 방법으로 B_1을 이등분한 cube들을 B_2라 하고 이를 반복한다.

이제 $A>1$인 상수 A를 선택하자.

$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|>A$ 인 cube(즉 bad cube)를 $\widetilde{B}$의 원소라고 하고, maximal bad

cube의 모임을 B라고 하자.

즉, $Q \in B$이면 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_{Q_0}| > A$ 이고 $\frac{1}{|2Q|}\int_{2Q} |f-f_{Q_0}| \le A$ 이다.

$\frac{1}{|2Q|}\int_{2Q} |f-f_{Q_0}| = \frac{1}{2^n|Q|}\int_{2Q} |f-f_{Q_0}|$ 이므로 $A < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_{Q_0}| < 2^n A$ 을 만족한다.

$|Q| < \frac{1}{A}\int_Q |f-f_{Q_0}|$ 이므로 $\sum_{Q\in B}|Q| < \frac{1}{A}\sum_{Q\in B}\int_Q |f-f_{Q_0}|$ 를 만족한다.

또 $\frac{1}{A}\int_{Q_0} |f-f_{Q_0}| \le \frac{1}{A}|Q_0|$ 이므로

$$\sum_{Q\in B}|Q| < \frac{1}{A}\sum_{Q\in B}\int_Q |f-f_{Q_0}| \le \frac{1}{A}|Q_0| \tag{3}$$

$$|f_Q - f_{Q_0}| \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_{Q_0}| \le 2^n A \tag{4}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
|\{x\in Q_0 : |f-f_{Q_0}| > \lambda\}| &= \left|\left\{x \in \bigcup_{Q\in B} Q : |f-f_{Q_0}| > \lambda\right\}\right| \\
&= \left|\left\{x \in \bigcup_{Q\in B} Q : |f-f_{Q_0}| > \lambda - |f_Q - f_{Q_0}|\right\}\right| \\
&\le \sum_{Q\in B} |\{x\in Q : |f-f_Q| > \lambda - 2^n A\}| \qquad ((4)\text{로부터}) \\
&\le \frac{1}{\lambda - 2^n A}\frac{1}{A}|Q_0| \qquad ((3)\text{으로부터})
\end{aligned}$$

한편 $c(\lambda)$의 정의에 의해 $\sum_{Q\in B}|\{x\in Q : |f-f_Q| > \lambda - 2^n A\}|$

$\le c(\lambda - 2^n A)\frac{1}{A}|Q_0|$ 이다.

그러면 $c(\lambda) \le \frac{c(\lambda - 2^n A)}{A}$ 이 성립한다.

$\lambda \cong m2^n A$라고 하자. 그러면 $c(\lambda) \le c(m2^n A) \le \frac{c((m-1)2^n A)}{A}$ 이고 반복하면

$$c(\lambda) \le \frac{c(2^n A)}{A^m} = \frac{c(2^n A)}{A^{\frac{\lambda}{2^n A}}} \approx \frac{C}{2^{C\lambda}} = Ce^{-C\ln 2 - \lambda} = Ce^{-C\lambda}$$

그러므로 $|\{x\in Q : |f-f_Q| > \lambda\}| \le Ce^{-C\lambda}|Q|$ 가 성립한다. □

정리5를 이용하여 다음 정리6을 알 수 있다.

정리6. $1 < p < q < \infty$이고 $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap BMO(\mathbb{R}^n)$이면 $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$이고 부등식 $\| f \|_{L^q} \le c(\| f \|_{L^p} + \| f \|_{BMO})$ 를 만족한다.

이제 우리가 이 논문에서 주로 사용할 공간으로 BMO 공간의 부분공간인 LBMO 공간을 소개하겠다. 이 공간은 [1]에서 소개되었다.

정의1. $$\|f\|_{LBMO} = \|f\|_{BMO} + \sup_{B_1, B_2} \frac{\left| \frac{1}{|B_2|} \int_{B_2} f - \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} f \right|}{1 + \ln\left(\frac{1 - \ln r_2}{1 - \ln r_1} \right)}$$

(단 $0 < r_1 \le 1$, $2B_2 \subset B_1$)

정리4와 비교해보면 LBMO공간은 BMO의 부분공간으로 평균의 비율이 $C \ln\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)$에서 $1 + \ln\left(\frac{1 - \ln r_2}{1 - \ln r_1}\right)$으로 변한 것을 알 수 있다.
$1 + \ln\left(\frac{1 - \ln r_2}{1 - \ln r_1}\right) \le C \ln\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)$,
$(r_2 < r_1 < 1)$ 이므로 따라서 LBMO 공간은 BMO 공간의 부분공간이 된다.

보조정리2. $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in LBMO$일 때,
부등식 $\| g * f \|_{LBMO} \le \| g \|_{L^1} \| f \|_{LBMO}$가 성립한다.

증명) $$\| g * f \|_{LBMO} = \sup \frac{Avg_{B_1}(g * f) - Avg_{B_2}(g * f)}{\ln\left(\frac{1 - \ln r_2}{1 - \ln r_1} \right)}$$

$$= \sup \frac{g * (Avg_{B_1} f - Avg_{B_2} f)}{\ln\left(\frac{1-\ln r_2}{1-\ln r_1}\right)}$$

$$= \sup \int g(x-y)\left(\frac{Avg_{B_1}(g*f) - Avg_{B_2}(g*f)}{\ln\left(\frac{1-\ln r_2}{1-\ln r_1}\right)}\right)dy$$

$$\leq \int |g(x-y)|\left|\frac{Avg_{B_1}(g*f) - Avg_{B_2}(g*f)}{\ln\left(\frac{1-\ln r_2}{1-\ln r_1}\right)}\right|dy$$

$$\leq \| f \|_{LBMO} \int |g| dy$$

$$= \| g \|_{L^1} \| f \|_{LBMO}$$ □

정리7. (Gronwall's Lemma) $t_0 < t < T$에서 $\phi(t) \leq 2c\int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds + ce^{cT}$ 이면 $\phi(t)$는 $\phi(t) \leq ce^{cT} e^{2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds}$ 를 만족한다.

증명) 우선 양변을 $2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)\phi(s)ds + ce^{cT}$로 나누면 $\dfrac{\phi(t)}{2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)\phi(s)ds + ce^{cT}} \leq 1$ 이 되고 양변에 $2c\psi(t)$를 곱한 후 적분을 취하면

$\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{2c\psi(s)\phi(s)ds}{2c\int_{t_0}^{s}\psi(\tau)\phi(\tau)d\tau + ce^{cT}} \leq 2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds$ 이다.

정리하면 $\ln(2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)\phi(s)ds + ce^{cT})|_{t_0}^{t} \leq 2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds$ 이고

$\ln(2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)\phi(s)ds + ce^{cT}) - \ln ce^{cT} \leq 2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds$ 이므로

$\int_{t_0}^{t}\psi(s)\phi(s)ds \leq e^{cT}e^{2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds}$ 가 성립한다. 그러므로 $\phi(t) \leq 2ce^{cT}e^{2c\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds} + ce^{cT}$ 이다. □

4. 해의 존재성

이 장에서는 주 결과인 $\omega \in L^{\infty}, LBMO$에 속할 때 각각 해가 존재함을 보일 것이다.

정리8. 방정식 (5)의 해 $\omega(t,x)$는 $\omega(t,x) = w_0(\psi_t^{-1}(x))e^F$로 주어진다.

(단, $F = \int_0^t f(t,x)$, $\partial_t \psi = u(\psi,t)$)

증명) $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f\omega_0(\psi_t^{-1}(x))e^F + e^F \partial_t(\omega_0(\psi_t^{-1}(x)) + u \cdot \nabla \omega$ 이다.

$\partial_t(\omega_0(\psi_t^{-1}(x)) = \partial_j \omega_0 \partial_t \psi_{t,j}^{-1}(x)$ 이고, $\psi_t \circ \psi_t^{-1}(x) = x$이므로

양변을 t에 관하여 미분하면 $\partial_t \psi_t + \partial_t \psi_{t,k}^{-1} \partial_k \psi_t = 0$ 이다.

또 $\partial_t \psi_t = u_i(\psi_t)$이므로 $\partial_t \psi_{t,k}^{-1} \partial_k \psi_t = -u$ 이다.

따라서 $\partial_t \psi_{t,k}^{-1} = -u[\nabla \psi_t]^{-1}$ 이다.

그러므로 $\partial_j \omega_0 \partial_t \psi_{t,j}^{-1}(x) = -u[\nabla \psi_t]^{-1} \cdot \nabla \omega_0$

$$\begin{aligned} u \cdot \nabla \omega &= \sum_i u_i(t,x)\partial_i(\omega_0(\psi_t^{-1}(x)))e^F \\ &= e^F u_i \partial_i \psi_{t,j}^{-1} \partial_j \omega_0 \\ &= e^F u[\nabla \psi_t]_j^{-1} \partial_j \omega_0 \end{aligned}$$

그러므로 $w_0(\psi_t^{-1}(x))e^F$는 식 (5)을 만족한다. □

이제 Hölder norm 보다 약한 norm 을 소개한다.

정의2. $\| \psi \|_* := \sup_{x \neq y} \Phi(|\psi(x) - \psi(y)|, |x-y|)$

단, $\Phi(r,s) = \begin{cases} \max\left(\frac{1+|\ln(s)|}{1+|\ln r|}, \frac{1+|\ln r|}{1+|\ln(s)|}\right), & \text{if } (1-s)(1-r) \geq 0 \\ (1+|\ln s|)(1+|\ln r|), & \text{if } (1-s)(1-r) \leq 0 \end{cases}$ 이다.

정의3. $\| u \|_{LL} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|(1+|\ln|x-y||)}$

$\| \cdot \|_*$에 관하여는 다음과 같은 사실이 성립한다.

정리9. 임의의 $g \in LBMO \cap L^p$에 대해
$\| g \circ \psi \|_{LBMO \cap L^p} \leq C \ln(1 + \| \psi \|_*) \| g \|_{LBMO \cap L^p}$를 만족하는 상수 C가 존재한다.

증명) [1]참조

보조정리2. u를 smooth divergence-free vector fields라 하고
ψ를 이에 대응하는 particle trajectory map이라하면 ψ는 모든 $t \geq 0$에 대해
이 부등식 $\| \psi(t, \cdot) \|_* \leq e^{\int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau}$ 을 만족한다.
증명) $t \geq 0, x \neq y$ 일 때 $z(t) = |\psi(t,x) - \psi(t,y)|$ 라고 하자.
$\| u(t) \|_{LL} = \sup \dfrac{|u(z(t))|}{z(t)(1 + |\ln z(t)|)}$ 이므로
$\partial_t z(t) \leq \| u(t) \|_{LL} (1 + |\ln z(t)|) z(t)$ 를 만족한다.
따라서 $|g(z(t)) - g(z(0))| \leq \int_0^t \| u(t) \|_{LL} d\tau$ 이다.
단, $g(\tau) := \begin{array}{l} \ln(1 + \ln(\tau)) \ , \text{if } \tau \geq 1, \\ -\ln(1 + \ln(\tau)), \text{if } 0 < \tau < 1 \end{array}$ 이다.
그러므로 $\Phi(z(t), z(0)) \leq e^{\int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau}$ 이 성립한다. □

보조정리3. $\| \omega(t) \|_{L^2} \leq \| \omega_0 \|_{L^2} \exp\{2(\sup f)t\}$ 가 성립한다.

증명) $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f(t,x) \omega$ 의 양변에 ω를 곱하면
$\partial_t \dfrac{\omega^2}{2} + u \cdot \nabla \dfrac{\omega^2}{2} = f\omega^2$이 성립하고 $u \cdot \nabla \dfrac{\omega^2}{2} = \nabla \cdot (u \dfrac{\omega^2}{2})$ 이므로 양변을 x와 t에
관해 적분하면 $\int \dfrac{\omega^2}{2}(t) - \int \dfrac{\omega_0^2}{2} = \int_0^t \int f\omega^2$ 이 성립한다.
그리고 $\sup f = m$ 이라 하자.

그러면 $\| \omega(t) \|_{L^2}^2 \le 2m\int_0^t \| \omega(t) \|_{L^2}^2 + \| \omega_0 \|_{L^2}^2$ 이 되고

Gronwall 정리에 의하여 $\| \omega(t) \|_{L^2} \le \| \omega_0 \|_{L^2} \exp(2mt)$ 이 성립한다. □

보조정리4. $\| h_1 h_2 \|_{LBMO} \le \| h_1 \|_{LBMO} \| h_2 \|_{L^\infty} + \| h_1 \|_{L^2} \| h_2 \|_{C^1}$ 이 성립한다.

증명) $\| h_1 h_2 \|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |h_1 h_2 - Avg(h_1 h_2)|$

$$\le C \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |h_1 h_2 - Avg\, h_1 Avg h_2)|$$

$$\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |h_1 h_2 - (Avg\, h_1) h_2| + \frac{1}{|Q|}\int_Q |(Avg h_1) h_2 - Avg h_1\, Avg h_2|$$

$$\le \| h_2 \|_{L^\infty} \frac{1}{|Q|}\int_Q |h_1 - Avg\, h_1| + |Avg\, h_1| \frac{1}{|Q|}\int_Q |h_2 - Avg\, h_2|$$

그런데 $h_2(x) - Avg\, h_2 = h_2(x) - h_2(x_0) = |\nabla h_2| \cdot (x - x_0) \le |\nabla h_2| \cdot l$ 이고

$$|Avg\, h_1| = \left| \frac{1}{|Q|}\int_Q h_1 \right| = \frac{1}{l^2}\left(\int_Q h_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q 1\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{l}\left(\int_{R^2} h_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

이므로 $\| h_1 h_2 \|_{BMO} \le \| h_1 \|_{BMO} \| h_2 \|_{L^\infty} + \| h_1 \|_{L^2} \| h_2 \|_{C^1}$ 이다.

$\| f \|_{LBMO} = \| f \|_{BMO} + \sup_{B_1, B_2} \dfrac{|Avg_{B_2}(f) - Avg_{B_1}(f)|}{1 + \ln\left(\dfrac{1 - \ln r_2}{1 - \ln r_1}\right)}$ 이므로

$x_0 \in B_2 \subset B_1$이고 B_1, B_2의 반지름을 각각 r_1, r_2라고 하면

$$|Avg_{B_2}(h_1 h_2) - Avg_{B_1}(h_1 h_2)| \le \left| \frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} h_1 h_2 - \frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} h_1 Avg h_2 \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{|B_2|}\int_{B_2} h_1 Avg h_2 - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} h_1 Avg h_2 \right| + \left| \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} h_1 Avg h_2 - \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} h_1 h_2 \right|$$

$$\le \| h_1 \|_{LBMO} \| h_2 \|_{L^\infty} + \frac{1}{r_2^2}\int_{B_2} h_1 \| \nabla h_2 \|_{L^\infty} r_2 + \frac{1}{r_1^2}\int_{B_1} h_2 \| \nabla h_1 \|_{L^\infty} r_1$$

$$\le \| h_1 \|_{LBMO} \| h_2 \|_{L^\infty} + \| h_2 \|_{C^1} \frac{1}{r_2}\left(\int_{B_2} h_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_2} 1\right)^{\frac{1}{2}} + \| h_1 \|_{C^1} \frac{1}{r_1}\left(\int_{B_1} h_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1} 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \| h_1 \|_{LBMO} \| h_2 \|_{L^\infty} + \| h_2 \|_{C^1} \| h_1 \|_{L^2}$$

이다. 따라서 $\| h_1 h_2 \|_{LBMO} \le \| h_1 \|_{LBMO} \| h_2 \|_{L^\infty} + \| h_1 \|_{L^2} \| h_2 \|_{C^1}$ 이 성립한다.

위 정리8, 9와 보조정리2, 3, 4을 사용해 다음 정리를 증명하자.

정리10. $\| \omega(t) \|_{LBMO} \le Ce^{ct}$ 가 성립한다. (단, 상수 C는 $\| F \|_{C^1}$에 의존한다.)

증명) 정리8에 의해 $\| \omega(t) \|_{LBMO} = \| \omega_0(\psi_t^{-1}(x))e^F \|_{LBMO}$ 이고

보조정리4와 정리9에 의해

$\| \omega(t) \|_{LBMO} \le C \| \omega_0 \|_{LBMO \cap L^p} \ln(1 + \| \psi_t^{-1} \|_*)$, $\| \psi_t \|_* = \| \psi_t^{-1} \|_*$이므로

$$\begin{aligned}
\| \omega(t) \|_{LBMO} &\le C \| \omega_0 \|_{LBMO \cap L^p} \ln(1 + e^{\int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau}) \\
&= C \| \omega_0 \|_{LBMO \cap L^p} \ln(e^0 + e^{\int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau}) \\
&\le C \| \omega_0 \|_{LBMO \cap L^p} \ln(2e^{\int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau}) \\
&= C \| \omega_0 \|_{LBMO \cap L^p} (\ln 2 + \ln e^{\int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau}) \\
&\le C \| \omega_0 \|_{LBMO \cap L^p} (1 + \int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau) \\
&= C(1 + \int_0^t \| u(\tau) \|_{LL} d\tau) \| \omega_0 \|_{LBMO \cap L^p}
\end{aligned}$$

이다. 보조정리3와 $\| u(\tau) \|_{LL} \le \| \omega(t) \|_{L^2} + \| \omega(t) \|_{BMO}$ 로부터

$$\begin{aligned}
\| \omega(t) \|_{LBMO} &\le C(Ce^{Ct} + \int_0^t \| \omega(t) \|_{BMO}) \\
&\le C(e^{Ct} + \int_0^t \| \omega(t) \|_{LBMO}) \\
&\le Ce^{Ct} + C\int_0^t \| \omega(t) \|_{LBMO}
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $\| \omega(t) \|_{LBMO} \le Ce^{Ct} + C\int_0^t \| \omega(t) \|_{LBMO}$ 가 성립한다.

Gronwall inequality에 의해 $\| \omega(t) \|_{LBMO} \le 2Ce^{Ct}e^{2Ct} + Ce^{Ct}$

$$\le Ce^{ct}$$

이 성립한다. □

정리11. 주어진 $\omega_0, f \in L^\infty \cap L^p$에 대하여 식 $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f\omega$, $\nabla \times u = \omega$, $\nabla \cdot u = 0$은 $\omega \in L^\infty(0,\infty; L^\infty \cap L^p)$에서 해를 갖는다. (단, $p < 2$)

증명) ω_n을 귀납적으로 정의하자.
방정식 $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f\omega_{n-1}$의 해를 ω_n라 하자.
$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f\omega_{n-1}$의 양변에 $|\omega|^{q-2}\omega$ 를 곱하면
$\partial_t \frac{\omega^q}{q} + u \cdot \nabla \frac{\omega^q}{q} = f\omega_{n-1}|\omega|^{q-2}\omega$ 이 성립하고 $u \cdot \nabla \frac{\omega^q}{q} = \nabla \cdot (u\frac{\omega^q}{q})$이므로 양변을 x에 관하여 적분하면 $\partial_t \int \frac{\omega^q}{q}(t) = \int f\omega_{n-1}|\omega|^{q-2}\omega$ 이 성립한다.
$\| f \|_{L^\infty} = m$이라 하자.
그러면 $\partial_t \| \omega(t) \|_{L^q}^q \le mq \| \omega(t) \|_{L^q}^{q-1} \| \omega_{n-1} \|_{L^q}$ 이 되고
$q \| \omega(t) \|_{L^q}^{q-1} \partial_t \| \omega(t) \|_{L^q} \le mq \| \omega(t) \|_{L^q}^{q-1} \| \omega_{n-1} \|_{L^q}$와 같게 된다.
양변을 $q \| \omega(t) \|_{L^q}^{q-1}$로 나누면 $\partial_t \| \omega(t) \|_{L^q} \le m \| \omega_{n-1} \|_{L^q}$이다.
이제 양변을 t에 관하여 적분하면 $\| \omega_n(t) \|_{L^q} \le \int_0^t m \| \omega_{n-1} \|_{L^q} + \| \omega_0 \|_{L^q}$ 이다.
$t < \frac{1}{2m}$일 때, $\sup_t \| \omega_n(t) \|_{L^q} \le \frac{1}{2} \sup_t \| \omega_{n-1} \|_{L^q} + \| \omega_0 \|_{L^q}$ 를 만족한다.
$\| \omega_0 \|_{L^q} + \frac{1}{2} \| \omega_0 \|_{L^q} + \frac{1}{2^2} \| \omega_0 \|_{L^q} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \| \omega_0 \|_{L^q} \le 2 \| \omega_0 \|_{L^q}$ 이므로
귀납적으로 $\| \omega_n(t) \|_{L^q} \le 2 \| \omega_0 \|_{L^q}$임을 알 수 있다.
$0 \le t < \frac{1}{2m}$일 때, n을 무한대로 보내면 부분수열을 선택하여 $\langle \omega_n \rangle$이 ω로 약하게 수렴하고, u_n은 u로 수렴함을 알 수 있다. 또한, $\| \omega(t) \|_{L^q} \le 2 \| \omega_0 \|_{L^q}$이다.
그러므로 ω는 변형된 Euler 방정식을 만족한다.
이제 $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f\omega$의 양변에 $|\omega|^{q-2}\omega$ 를 곱하면
$\partial_t \frac{\omega^q}{q} + u \cdot \nabla \frac{\omega^q}{q} = f\omega^q$이 성립하고 $u \cdot \nabla \frac{\omega^q}{q} = \nabla \cdot (u\frac{\omega^q}{q})$이므로 양변을 x와 t에 관해 적분하면 $\int \frac{\omega^q}{q}(t) - \int \frac{\omega_0^q}{q} = \int_0^t \int f\omega^q$ 이 성립한다.

$\| f \|_{L^\infty} = m$이라 하자.

그러면 $\| \omega(t) \|_{L^q}^q \le mq \int_0^t \| \omega(t) \|_{L^q}^q + \| \omega_0 \|_{L^q}^q$ 이 되고

Gronwall 정리에 의하여 $\| \omega(t) \|_{L^q}^q \le \| \omega_0 \|_{L^q}^q e^{mqt}$ 가 성립한다.

이 때 $\frac{1}{q}$제곱하고 q를 무한대로 보내면 $\| \omega(t) \|_{L^\infty} \le \| \omega_0 \|_{L^\infty} e^{mt}$ 를 만족한다.

따라서 모든 시간에서 해 ω가 존재한다. □

정리12. $\omega_0 \in L^p \cap LBMO$, $f \in C^1$에 대하여 $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f\omega, \nabla \times u = \omega$, $\nabla \cdot u = 0$는

$\omega \in L^\infty(0, \infty; LBMO \cap L^p)$에서 해를 갖는다.

증명) $u_0 = K * \omega_0$, $\rho \in C_0^\infty, \rho \ge 0$이고 $\int \rho(x)dx = 1$ 인 ρ를 잡자. 그리고 $\omega_0^n = \rho_n * \omega_0$, $u_0^n = \rho_n * u_0$일 때

$$\begin{aligned} &\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = f\omega, \\ &\nabla \times u = \omega, \\ &\nabla \cdot u = 0, \\ &\omega(0, x) = w_0^n \end{aligned}$$

위 식을 만족하는 해 ω^n을 생각하자.

이때 n을 무한대로 보내면 정리10에 의해 $\| \omega^n \|_{LBMO} < C$ 이 된다.

(단, $\rho_n(x) = n^2 \rho(nx), K(x) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}$, C는 임의의 상수)

따라서 n을 무한대로 보냈을 때 ω^n은 ω로 수렴하고 ω는 변형된 Euler 방정식의 해가 된다.

REFERENCES

[1] Frederic Bernicot and Sahbi Keraani, *On the global well-posedness of the 2d Euler equations for a large claa of Yudovich type data*, preprint.
[2] J.Y. Chemin, Fluides Parfaits Incompressibles, Antérisque 230 (1995); Perfect Incompressible Fluids, transl. by I. Gallagher and D. Iftimie, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Vol. 14, Clarendon Press-Oxford University Press, Cambridge, 2002.
[3] Elias M. Stein, Harmonic Analysis, Princet on University Press, Princeton New Jersey, 1993.
[4] Y. Yudovich, *Nonstationary flow of an ideal incompressible liquid*. Zh Vych Mat., 3 (1963), 1032-1066.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20118053	과 정	석사
성 명	한글: 구 정화 한문 : 具 正和 영문 : Jung-Hwa Koo				
주 소	전라남도 광양시 중동 무등파크 102동 403호				
연락처	E-MAIL : p0166171283@naver.com				
논문제목	한글 : 변형된 오일러 방정식의 극한 공간에서의 존재성 영어 : Existence of Modified Euler Equations in Limiting Space				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사 표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

동의여부 : 동의(○) 반대( )

2013 년 12 월 20 일

저작자: 구 정 화 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하