creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000264118

2013년 7월
교육학석사(수학교육전공)학위논문

행렬 곱셈의 교환성에 관한 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 정 철

행렬 곱셈의 교환성에 관한 연구

A Study on the Commutative Property of Matrix Multiplication

2013년 7월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 정 철

행렬 곱셈의 교환성에 관한 연구

지도교수 박 순 철

이 논문을 교육학석사(수학교육전공)학위 청구논문으로 제출함.

2012년 7월

조선대학교 교육대학원

수학 교육전공

김 정 철

김정철의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 김 선 아 인

심사위원 조선대학교 교수 정 윤 태 인

심사위원 조선대학교 교수 박 순 철 인

2013년 7월

조선대학교 교육대학원

- 목 차 -

ABSTRACT

제1장 서론 p1

제2장 행렬곱셈의 교환법칙이 성립하는 경우 p4

제1절 행렬의 곱셈과 수의 곱셈의 차이점과 기초이론 p4

제2절 $AB=BA$가 성립하기 위한 조건 p7

제3절 정리3의 활용 p11

제3장 결론 및 제언 p25

참고문헌 p26

ABSTRACT

A Study on the Commutative Property of Matrix Multiplication

Kim Jeong-cheol
Advisor : Park Soon-cheol
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In this paper, we prove the followings :

Let α, β be real numbers. Let A and B be 2×2 matrices.. If $AB=BA$ then, $A=\alpha B+\beta E$ for some real numbers α, β. This fact is very easy and powerful in solving problems with respect to matrices in the SAT Mock Test or others. So, We propose that this fact should be introduced to High School Mathematics Curriculum.

행렬 곱셈의 교환성에 관한 연구
A Study on the Commutative Property of Matrix Multiplication

제1장 서론

일반적으로 직사각형 모양으로 배열된 수 또는 문자를 괄호로 묶어서 아래와 같이 나타낸 것을 행렬이라고 정의한다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{단 } m,\ n \text{ 은 자연수})$$

역사적으로 볼 때 선형방정식의 해의 필요성 때문에 행렬에 관한 이론보다 행렬식에 관한 이론이 먼저 탄생하였다. 1693년 라이프니츠(Leibniz, G. W. : 1646~1716)가 로피탈(L'Hospital, F. A. : 1661~1704)에게 보낸 편지에서 미지수가 3개인 연립일차방정식에서 두 개의 변수를 소거하기 위해 행렬식을 다루었다고 하는 것이 정설이다. 그러나 이것은 실제 행렬식 이론의 발전에는 큰 영향을 주지 못하였다. 그 후 크래머(Cramer, G. : 1704~1752)를 거쳐 코시(Cauchy, A. L. : 1789~1857)에 이르러 오늘날의 행렬식 이론에 가까운 형태로 발전하였다. 행렬식(Determinant)이란 말은 1815년에 코시가 처음으로 명확하게 정의하고 사용하였다. 코시에 의하여 확립된 행렬식의 이론은 그 후에 야코비(Jacobi, K. G. J. : 1804~1851)에 의하여 더욱 발전하였으며, 야코비에 의해 도입된 행렬식은 실베스터(Sylvester, J. : 1814~1897)에 의하여 야코비 행렬식(Jacobian)이란 이름이 붙여졌고, 이것은 현대해석학에서 누구나 배우게 되는 개념이 되었다. 한편, 행렬(Matrix)에 관한 이론은 행렬식보다는 상당히 늦게 영국의 수학자 케일리(Cayley, A. : 1821~1895)에 의하여 시작되었다. 행렬은 케일리가 1858년에 발표한 변환의 이론에 대한 논문으로부터 발전한 것이다. 케일리가 생각한 행렬은 케일리 자신과 실베스터, 프로베니우스(Frobenius, G. F. : 1849~1917) 등에 의하여 선형대수학으로 발전하였다. 실베스터 소거법이라는 이름은 케일리가 실베스터의 공을 찬양하여 붙인 것이고, Matrix(행렬)라는 이름은 실베스터가 지은 것이라고 전한다.

행렬에 관련된 성질을 알아보자.

체 $\mathbb{F}$ 위의 $m \times n$행렬 전체의 집합을 $Mat_{m \times n}(\mathbb{F})$로 나타내자. 즉,

$$Mat_{m \times n}(\mathbb{F}) = \{[a_{ij}]_{m \times n} : a_{ij} \in \mathbb{F},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$$

그리고, 임의의 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$와 $a\in\mathbb{F}$에 대하여 $A+B$, aA, $-A$를 각각 다음과 같이 정의하고

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n},\quad aA=[aa_{ij}]_{m\times n},\quad -A=[-a_{ij}]_{m\times n}$$

이때, A, B, $C\in Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$와 a, $b\in\mathbb{F}$에 대하여 다음이 성립한다.

$A.1$: $(A+B)+C=A+(B+C)$ (덧셈에 관한 결합법칙)

$A.2$: $A+B=B+A$ (덧셈에 관한 교환법칙)

$A.3$: 영행렬 $O\in Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$가 존재하여, 모든 행렬 $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$에 대하여 등식 $A+O=O+A=A$가 성립한다. (덧셈에 관한 항등원)

$A.4$: 각 행렬 $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$에 대하여 $A+(-A)=(-A)+A=O$인 행렬 $-A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$가 존재한다. (덧셈에 관한 역원)

$SM.1$: $a(A+B)=aA+aB$

$SM.2$: $(a+b)A=aA+bA$

$SM.3$: $(ab)A=a(bA)$

$SM.4$: $1A=A$

$Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$에서 뺄셈은 다음과 같이 정의한다.

$[a_{ij}]_{m\times n}-[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

체 $\mathbb{F}$ 위의 $m\times n$행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$와 그리고 $n\times r$행렬 $B=[b_{ij}]_{n\times r}$에 대하여 곱 AB는 다음과 같이 정의된 $m\times r$행렬이다.

$$AB=[c_{ij}]_{m\times r}\ \text{ 여기서 }\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

만약 $m=n$일 때, n차 정사각행렬이라 부르고 n차 정사각행렬의 집합을 $Mat_n(\mathbb{F})=\{[a_{ij}]_{n\times n}: a_{ij}\in\mathbb{F},\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le n\}$로 나타낸다.

A, B, $C\in Mat_n(\mathbb{F})$와 a, $b\in\mathbb{F}$에 대하여 다음이 성립한다.

$M.1$: $(AB)C=A(BC)$ (곱셈에 관한 결합법칙)

$M.2$: 항등행렬 $I\in Mat_n(\mathbb{F})$가 존재하여, 모든 $A\in Mat_n(\mathbb{F})$에 대하여 등식 $AI=IA=A$가 성립한다. (곱셈에 관한 항등원)

D : $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ (분배법칙)

$M.SM$: $a(AB)=(aA)B=A(aB)$

행렬은 고등학교 수학1에서 처음으로 다뤄지고 대학수학에서는 선형대수학과 관

련된다. 본 연구를 시작하게 된 동기는 “대학과정에서 다루는 선형대수학이론 중 고등학생 인지수준을 뛰어넘지 않으면서 유용한 이론이 있지 않을까?” “그러한 이론 중 문제풀이를 신속 정확하고 쉽게 해 주는 이론이 있지 않을까?” 라는 호기심에서부터 시작되었다. 그러한 호기심으로 논문주제를 정하였고 고등학교 교육과정에서 다루는 행렬인 2차 정사각행렬을 연구의 대상으로 삼았다.

연구 초기에는 선형대수학 이론을 정리하고 이와 관련이 있는 교과서 내용과 수능 모의고사 문제를 정리하는 하향식 분석을 채택했다. 이로 인해 고등학생 인지수준을 뛰어넘는 선형대수학 이론을 가르쳐야 되는 어려움이 뒤따르게 되었고 시간도 오래 걸렸다. 이에 생각을 바꿔 거꾸로 상향식 분석을 하기로 했다. 교육과정에서 행렬이 어떻게 출제되는가를 먼저 분석하였다. 평가를 먼저 분석한 이유는 시험평가란 학습자가 성취해야 할 교육과정상의 목표에 부합되도록 출제하며 그 성취정도를 평가하여 성취목표 달성 수준에 대한 정보를 제공하며 학습자가 성취목표를 달성할 수 있도록 피드백을 주기 위함이므로 분석의 시간을 단축시켜 줄 것이라는 기대감 때문이었다. 그래서 특히 교육과정이 충실히 반영되어 있는 수능 모의고사 위주로 분석을 하였다. 분석할 때 유형을 어떻게 구분을 해야 하는가에 대해 고민도 했다. 유형을 너무 세밀하게 하면 안 될 것 같아서 큰 줄기로 묶으려고 했다. 유형 분류의 기준은 교과서 내용을 주로 참고하려고 애를 썼으며 빈도수가 많은 문제를 먼저 찾고 그 문제 위주로 유형분류를 했다. 이렇게 하여 빈도수가 높은 문항들을 추려냈고 아래와 같이 6가지 소주제로 분류를 하였다.

① 행렬의 곱이 의미를 가질 때
② 행렬의 곱이 교환법칙이 성립할 때
③ 행렬의 진위판정문제
④ 특수한 형태의 행렬의 거듭제곱
⑤ 행렬과 연립일차방정식
⑥ 행렬과 그래프

각 소주제별로 관련이 있는 선형대수학이론을 찾고 이에 대해 연구하려고 하였으나 한 소주제에 대해 깊이 있게 연구하는 것이 좋을 것 같았다. 위의 여섯 가지 중 한 개의 주제를 무엇으로 할 것인가에 고민하다가 ②번을 선택했다.

행렬의 곱이 교환법칙이 성립할 때에 대한 필요조건, 충분조건, 필요충분조건이 있는지에 대해 연구를 하였다. 그러한 조건이 있을 때, 문제풀이를 쉽고 간결하게 할 수 있도록 영향을 미치는지, 그러하다면 문제에 어떻게 적용을 해야 하는지에 초점을 뒀고 고등학생이 이해를 할 수 있을지도 숙고하였다. 본 논문은 고등학생 인지수준에서 이해할 수 있도록 이론과 증명을 서술하였고 문제에 대한 이론의 적용도 상세히 기술하였다.

제2장 행렬 곱셈의 교환법칙이 성립하는 경우

1절 행렬의 곱셈과 수의 곱셈의 차이점과 기초 이론

일반적으로 행렬은 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다. 두산동아 교과서 28쪽, 행렬의 곱셈단원의 생각열기에 아래와 같이 서술하고 있다.

생각 열기

행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립할까?

지민

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$이므로, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$을 계산하면 역시 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$이 될 것입니다.

선생님

왜 그렇게 생각했습니까?

지민

2×3과 3×2가 같듯이,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$도 같지 않을까요?

1. 두 행렬의 곱 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$을 각각 계산하여 그 결과를 비교해 보자.

2. 1의 결과를 바탕으로 지민이의 생각이 타당한지 이야기해 보자.

임의의 두 실수 a, b에 대하여 교환법칙 $ab=ba$가 성립한다.

그러나 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & 1+0 \\ 3-4 & 3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ -1+0 & -2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

이므로 $AB\neq BA$이다.

곧, 일반적으로 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

참고 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 14 & 23 \end{pmatrix}$인 경우도 있다.

여기에서 참고 부분에 있는 두 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$에 주목하자. 무엇 때문에 이 두 행렬 사이에는 곱셈의 교환법칙이 성립하는지, 이 두 행렬 사이에 특별한 어떤 조건이 숨겨져 있는지에 대해 생각해보자. 두 행렬 A, B에서 곱셈의 교환법칙이 성립하는 특별한 경우를 우선 알아보자. $AB = BA$가 성립하는 경우를 열거해보면 행렬A 입장에서 행렬B는 행렬A의 실수배, 또는 단위행렬E의 실수배, 행렬A의 거듭제곱의 실수배, 역행렬A^{-1}의 실수배, 역행렬A^{-1}의 거듭제곱의 실수배이다. 이들에 관련된 정리는 교과서에 다음과 같이 기술되어 있다.

[정리1] 실수 m, n과 단위행렬 E에 대하여
$A = mE$ 또는 $B = nE$ 이면 $AB = BA$이다.

[증명] $A = mE$라 하자.

$$\begin{aligned} AB &= (mE)B \\ &= m(EB) \\ &= mB \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= B(mE) \\ &= m(BE) \\ &= mB \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

① = ②이므로 $AB = BA$

같은 방법으로 $B = nE$인 경우도 $AB = BA$가 성립한다.

그러므로 실수 m, n에 대하여 $A = mE$ 또는 $B = nE$ 이면 $AB = BA$이다.

□

위 정리의 경우가 아니라면 어떤 경우에 행렬의 곱셈의 교환법칙이 성립하는지 조사해 보자. 기출된 모의고사 문제를 분석하던 중 눈에 띄게 많이 나오는 식을 발견했다. $mA + nB = kE$이다. 대학교에서 배우는 선형대수학의 일차결합의 꼴처럼 보이기도 한다. $mA + nB = kE$와 관련된 다음의 명제를 증명해 보자.

[정리2] 적당한 실수 m, n, k와 단위행렬 E에 대하여
$mA + nB = kE$ 이면 $AB = BA$이다.

[증명] m, n, k 중 어느 하나가 0이면 자명하다.

만일 $m = 0$이라면 $B = \dfrac{k}{n}E$가 되어 정리1에 의하여 $AB = BA$가 성립한다.

m, n, k 가 모두 0이 아닐 때를 생각하자.

$B = -\frac{m}{n}A + \frac{k}{n}E$이고

이를 AB에 대입하면,

$$AB = A(-\frac{m}{n}A + \frac{k}{n}E)$$

$$= -\frac{m}{n}A^2 + \frac{k}{n}A$$

$$= (-\frac{m}{n}A + \frac{k}{n}E)A$$

$$= BA \qquad \square$$

앞의 두 정리는 행렬의 곱셈이 교환법칙이 성립하는 경우에 중요하게 쓰이게 된다.

2절 $AB=BA$가 성립하기 위한 조건

이차 정사각행렬 A, B에 대해서 $AB=BA$가 성립하기 위한 조건을 찾아보자. 앞에서 살펴본 두 개의 정리로부터 다음의 정리를 얻는다.

[정리3] 이차정사각행렬 A, B와 실수 m, n, k, 단위행렬 E에 대하여 $AB=BA$이면 $mA+nB=kE$이다.

정리3을 증명하기 앞서 다음을 살펴보자.
$A\neq mE$라 가정을 하면 $m\neq 0$이다. $mA+nB=kE$의 양변을 m으로 나누면 $A=\alpha B+\beta E$(단, α, β는 실수)라 할 수 있다.
따라서 주어진 조건하에서 $A=\alpha B+\beta E$(단, α, β는 실수)임을 보이면 된다. 그리고 실수 a, b, c, d, e, f, g, h에 대하여 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$라 두고 AB, BA를 직접 계산을 하면 아래와 같은 관계식을 얻는다.

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}$$

① $ae+bg=ae+cf \Rightarrow bg=cf \Rightarrow \dfrac{b}{f}=\dfrac{c}{g}$ (단, $f\neq 0$, $g\neq 0$)

② $af+bh=be+df \Rightarrow (a-d)f=b(e-h) \Rightarrow a-d=\dfrac{b}{f}(e-h)$ (단, $f\neq 0$)

③ $ce+dg=ag+ch \Rightarrow (a-d)g=c(e-h) \Rightarrow a-d=\dfrac{c}{g}(e-h)$ (단, $g\neq 0$)

④ $cf+dh=bg+dh \Rightarrow bg=cf$

4개의 관계식에서 f와 g가 0이냐 0이 아니냐에 따라 증명을 나누어서 한다.

[증명] (1) $A=mE$인 경우 자명하다.
(2) $B=nE$인 경우 자명하다.
(3) $A\neq mE$, $B\neq nE$인 경우
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$라 하자.
(i) $f\neq 0$, $g\neq 0$일 때
$AB=BA$에서 4개의 관계식을 얻고,

①식에서 $\frac{b}{f}=\frac{c}{g}=\alpha$라 두자.

②식 $\Rightarrow a-d=\frac{b}{f}(e-h)=\alpha(e-h)$

③식 $\Rightarrow a-d=\frac{c}{g}(e-h)=\alpha(e-h)$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} d+\alpha(e-h) & \alpha f \\ \alpha g & d \end{pmatrix}$

$=d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha e-\alpha h & \alpha f \\ \alpha g & 0 \end{pmatrix}$

$=d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\alpha h & 0 \\ 0 & -\alpha h \end{pmatrix}$

$=(d-\alpha h)E+\alpha B$

$=\alpha B+(d-\alpha h)E$ (단, $\beta=d-\alpha h$인 실수)

(ii) $f\neq 0,\ g=0$일 때

$AB=BA$에서

① $ae=ae+cf \Rightarrow 0=cf \Rightarrow c=0$ $(\because f\neq 0)$

② $af+bh=be+df \Rightarrow (a-d)f=b(e-h) \Rightarrow a-d=\frac{b}{f}(e-h)$ $(\because f\neq 0)$

③ $ce=ch$

④ $cf=0$

$\frac{b}{f}=\alpha$라 두면

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} d+\alpha(e-h) & \alpha f \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$=d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha e-\alpha h & \alpha f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$=d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\alpha h & 0 \\ 0 & -\alpha h \end{pmatrix}$ $(\because g=0)$

$=(d-\alpha h)E+\alpha B$

$=\alpha B+(d-\alpha h)E$ (단, $\beta=d-\alpha h$인 실수)

(iii) $f=0,\ g\neq 0$일 때

$AB=BA$에서

① $ae+bg=ae \ \Rightarrow\ bg=0 \Rightarrow b=0 \qquad (\because\ g\neq 0)$

② $bh=be$

③ $ce+dg=ag+ch \Rightarrow g(a-d)=c(e-h) \Rightarrow a-d=\dfrac{c}{g}(e-h)$

④ $dh=bg+dh$

$\dfrac{c}{g}=\alpha$라 두면

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} d+\alpha(e-h) & 0 \\ \alpha g & d \end{pmatrix}$$

$$=d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha e-\alpha h & \alpha f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\alpha h & 0 \\ 0 & -\alpha h \end{pmatrix} \qquad (\because f=0)$$

$$=(d-\alpha h)E+\alpha B$$

$$=\alpha B+(d-\alpha h)E \qquad (\text{단, } \beta=d-\alpha h\text{인 실수})$$

(iv) $f=0,\ g=0$일 때

$AB=BA$에서

① $ae=ae$

② $bh=be$

③ $ce=ch$

④ $dh=dh$

1) $h=e$인 경우 $B=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}=eB$가 성립한다.

2) $h\neq e$인 경우

② $bh=be$, ③ $ce=ch$에서 $b=0,\ c=0$

$\dfrac{a-d}{e-h}=\alpha$라 두면,

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha e-\alpha h+d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha e - \alpha h & \alpha f\\ \alpha g & \alpha h\end{pmatrix} \qquad (\because f = 0,\ \ g = 0)$$

$$= d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha e & \alpha f\\ \alpha g & \alpha h\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\alpha h & 0\\ 0 & -\alpha h\end{pmatrix}$$

$$= (d - \alpha h)E + \alpha B$$

$$= \alpha B + (d - \alpha h)E \qquad (\text{단, } \beta = d - \alpha h\text{인 실수})$$

(1), (2), (3)에 의하여 $AB = BA$이면 $mA + nB = kE$이다. □

위의 정리의 증명은 고등학생들도 충분히 이해를 할 수 있을 수준이다. 다음 절에서는 이 정리를 문제풀이에 이용한다. 그리고 정리3에 의해 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

[따름정리4] 이차정사각행렬 A가 역행렬을 가지면 적당한 상수 α, β에 대하여 $A^{-1} = \alpha A + \beta E$이 성립한다.

[증명] (i) $A = \gamma E$ 이면 $A^{-1} = \dfrac{1}{\gamma}E$ (단, γ는 실수)

(ii) $A \neq \delta E$ 이면 $A^{-1} \neq \dfrac{1}{\delta}E$ (단, δ는 실수)

$AA^{-1} = A^{-1}A$ 이므로

정리3에 의하여

적당한 상수 m, n, k에 대하여 $mA + nA^{-1} = kE$이 성립한다.

따라서 $A^{-1} = -\dfrac{m}{n}A + \dfrac{k}{n}E$

$$= \alpha A + \beta B \qquad (\text{단, } \alpha = -\frac{m}{n},\ \beta = \frac{k}{n}\text{인 실수})$$ □

3절 정리3의 활용

정리3을 문제에 적용하여 보자. 적용할 때, 주어진 행렬의 성분에 집중하여 $mA+nB=kE$가 되도록 하면 된다. 문제 상황에서는 확실한 단서가 주어지므로 $mA+nB$의 (1, 2)성분이나 (2, 1)성분이 0이 되도록 하면 된다. 이 성질을 이용하면 행렬 곱셈의 번거로움을 피할 수 있을 뿐 아니라, 시간절약이 되는 효과가 있다. 또한 행렬의 선형성을 이용하는 문제를 풀 때도 도움이 된다.

【선형사상의 성질을 이용한 문제】

이차정사각행렬 A 가 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$를 만족시킬 때,

연립일차방정식 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$의 해는 $x=p,\ y=q$ 이다. $p+q$ 의 값은?

[3점-2006년 9월 수리영역(나) 평가원]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

【풀이】

정답 ⑤

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ 이므로

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1+1\\2+1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$\therefore\ x=2,\ y=3$에서 $p=2,\ q=3$

$\therefore\ p+q=5$

그럼 이제 본격적으로 본 연구 주제와 관련된 예제를 살펴보자.

【예제-1】

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$가 $AB^{-1}=B^{-1}A$를 만족시킬 때, a의 값을 구하시오. [3점-2007년 6월 수리영역(나) 평가원]

【풀이】

정답 15

$AB^{-1}=B^{-1}A$를 변형해 보자.

$BAB^{-1}=A,\quad BA=AB$

$\therefore \begin{pmatrix}0 & a\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-a & 2a\\ 6 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 3a-15\\ 6 & -a+6\end{pmatrix}$

$\therefore a=15$

【정리3을 이용한 풀이】

$AB^{-1}=B^{-1}A$를 변형하면 $BAB^{-1}=A,\quad BA=AB$

행렬 A의 (2, 1)성분과 행렬 B의 (2, 1)성분에 주목하자.

각 성분을 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=1,\ n=3$

$A+3B=kE$

$\begin{pmatrix}0 & a\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & -15\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & a-15\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

$\therefore a=15$

【예제-2】

5이하의 세 자연수 x, y, z에 대하여 두 행렬 A, B를

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \log x & \log y \\ 0 & \log z \end{pmatrix}$

라 하자. A의 역행렬 A^{-1}가 존재할 때, $A^{-1}BA=B$를 만족시키는 행렬 A의 개수는? [4점-2006년 3월 수리영역(나) 평가원]

① 1 ② 2 ③ 4

④ 8 ⑤ 16

【풀이】

정답 ③

$A^{-1}BA=B$을 정리하면 $AB=BA$

$AB=\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log x & \log y \\ 0 & \log z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xlog\,x & xlog\,y+ylog\,z \\ \log x & \log y+zlogz \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} \log x & \log y \\ 0 & \log z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xlog\,x+\log y & ylog\,x+zlog\,y \\ \log z & zlogz \end{pmatrix}$

$AB=BA$이므로 $\log y=0$, $\log x=\log z$

$\therefore y=1$, $x=z$

행렬 A가 역행렬을 가지므로 $xz\neq y$

따라서 주어진 조건을 만족하는 행렬 A는

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$로 4개이다.

【정리3을 이용한 풀이】

행렬 A의 (2, 1)성분과 행렬 B의 (2, 1)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=0$, $n=1$

$0A+1B=kE$

$B=\begin{pmatrix} \log x & \log y \\ 0 & \log z \end{pmatrix}=kE$

$\log y=0$이므로 $y=1$

$\log x=\log z$, $x=z$

행렬 A가 역행렬을 가지므로 $xz\neq y$

따라서 주어진 조건을 만족하는 행렬 A는

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$로 4개이다.

【예제-3】

양수 a, b에 대하여 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$가 등식 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$을 만족한다. 밑변의 길이와 높이가 각각 a, b인 직각삼각형의 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.
[3점-2002년 6월 수리영역(나) 평가원]

【풀이】

정답 $M^2=64$

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$를 정리하면 $AB=BA$

A, B는 E의 실수배가 아니므로

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} a+1 & a+b \\ 8 & 7b+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+1 & 8 \\ a+b & 7b+1 \end{pmatrix}$에서 $a+b=8$

$a>0$, $b>0$ 이므로 산술기하평균을 적용하면 $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ 이므로 $ab \leqq 16$

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이고 $\frac{ab}{2} \leq 8$이므로

따라서 $M=8$이므로 $M^2=64$

【정리3을 이용한 풀이】

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$를 정리하면 $AB=BA$

행렬 A의 (2, 1)성분과 행렬 B의 (2, 1)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=1$, $n=-1$

$A-B=kE$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 7-b \end{pmatrix}$

$a-1=7-b$, $a+b=8$

$a>0$, $b>0$ 이므로 산술기하평균을 적용하면 $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ 이므로 $ab \leqq 16$

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이고 $\frac{ab}{2} \leq 8$이므로

따라서 $M=8$이므로 $M^2=64$

【예제-4】

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$가 성립할 때, $a+b$의 값은?(단, a, b는 상수이다.) [3점-2007년 3월 수리영역(나) 평가원]

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

【풀이】

정답 -1

$AB=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & -a+1 \\ -b & -1 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2 \\ ab & b-1 \end{pmatrix}$

$AB=BA$이므로

$a+b=a$에서 $b=0$

$-a+1=2$에서 $a=-1$

$\therefore a+b=-1$

【정리3을 이용한 풀이】

행렬 A의 (1, 2)성분과 행렬 B의 (1, 2)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=1$, $n=1$

$A+B=kE$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$a+1=0$에서 $a=-1$

$b=0$

$\therefore a+b=-1$

【예제-5】

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$가 성립할 때, 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점-2009년 3월 수리영역(나) 평가원]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

【풀이】

정답 ③

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$이면 $AB=BA$이므로

$AB=\begin{pmatrix} a & a \\ -b+1 & 2 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 1 & ab-1 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$에서

$a=1,\ b=2 \quad \therefore\ a+b=3$

【정리3을 이용한 풀이】

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$이면 $AB=BA$이고

행렬 A의 (2, 1)성분과 행렬 B의 (2, 1)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=1,\ n=1$

$A+B=kE$

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & a-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$a=1,\ b=2 \quad \therefore\ a+b=3$

【예제-6】

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$가 성립할 때 x, y의 값을 구하시오. [두산동아 수학1 익힘책 19p 4번]

【풀이】

정답 $x=-1,\ y=0$

$AB=\begin{pmatrix}2x & 2y-4\\ x & y-2\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2x+y & 4x+2y\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ 에서

$2x=2y-4,\ 2y-4=4x+2y,\ x=-1,\ y-2=-2$

$\therefore\ x=-1,\ y=0$

【정리3을 이용한 풀이】

행렬 A의 (2, 1)성분과 행렬 B의 (2, 1)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=0,\ n=1$

$0A+B=kE$

$\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & -1\end{pmatrix}=kE$

$x=-1,\ y=0$

【예제-7】

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ k & 2\end{pmatrix}$에 대하여 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$가 성립할 때 k의 값을 구하여라. [두산동아 수학1 익힘책 20p 4번]

【풀이】

정답 $k=0$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$을 정리하면 $AB=BA$

$AB=\begin{pmatrix}2+k & -1\\ k & 2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ k & k+2\end{pmatrix}$

$k+2=2$

$\therefore\ k=0$

【정리3을 이용한 풀이】

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$을 정리하면 $AB=BA$

행렬 A의 (1, 2)성분과 행렬 B의 (1, 2)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=3,\ n=1$

$3A+B=\alpha E$

$\begin{pmatrix}5 & 0\\ k & 5\end{pmatrix}=\alpha E$

$k=0$

$\therefore\ k=0$

【예제-8】

행렬 $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}=kA+lE$가 성립하도록 k, l의 값을 정하여라. [두산동아 수학1 익힘책 27p 4번]

【풀이】

정답 $k=-\frac{1}{2}$, $l=3$

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=kA+lE=\begin{pmatrix}4k+l & 3k\\ 2k & 2k+l\end{pmatrix}$

$4k+l=1$, $3k=-\frac{3}{2}$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$, $l=3$

【정리3를 이용한 풀이】

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

행렬 A의 (1, 2)성분과 행렬 A^{-1}의 (1, 2)성분에 주목하자.
각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=1$, $n=2$

$A+2A^{-1}=6E$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$, $l=3$

【예제-9】

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & y\\x & 6\end{pmatrix}$에 대하여 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이 성립할 때 x, y의 값을 구하여라. [수학의 정석 기본편 수학1 30p 기본 문제 2-3]

【풀이】

정답 $x=6,\ y=4$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$을 정리하면 $AB=BA$

$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & y\\x & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & y+12\\4x & 3y+24\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}0 & y\\x & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y & 4y\\x+18 & 2x+24\end{pmatrix}$

$3y=2x,\ 4y=y+12,\ x+18=4x,\ 2x+24=3y+24$

연립하여 풀면 $x=6,\ y=4$

【정리3을 이용한 풀이】

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$을 정리하면 $AB=BA$

행렬 A의 (1, 2)성분과 행렬 B의 (1, 2)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=y,\ n=-2$

$yA-2B=kE$

$\begin{pmatrix}y & 2y\\3y & 4y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2y\\2x & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & 0\\3y-2x & 4y-12\end{pmatrix}$

$3y-2x=0,\ y=4y-12$

연립하여 풀면 $x=6,\ y=4$

【예제-10】

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}17 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 등식 $(x^2+y^2)A-(x-y)E=B$를 만족하는 실수 x, y를 $\begin{cases}x=\alpha_1\\ y=\beta_1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\alpha_2\\ y=\beta_2\end{cases}$ 라 하자. 이때, 좌표평면 위의 두 점 $P(\alpha_1,\ \beta_1)$, $Q(\alpha_2,\ \beta_2)$ 사이의 거리는? (단, E는 단위행렬이다.)

[전국연합학력평가문제-블랙라벨 수학1 11p 6번]

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

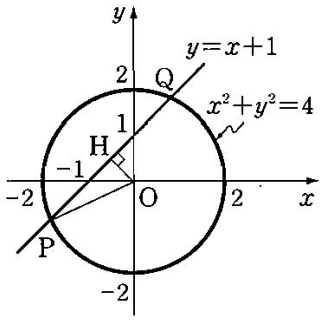
【풀이】

정답 ⑤

주어진 등식에 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}17 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$을 대입하면

$\begin{pmatrix}4(x^2+y^2)-(x-y) & x^2+y^2\\ x^2+y^2 & -(x-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2=4,\ x-y=-1$



$$\overline{OH}=\frac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $\overline{OP}=2$이므로 $\triangle OHP$에서

피타고라스 정리를 적용하면

$$\overline{PH}=\sqrt{2^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{14}$$

【정리3을 이용한 풀이】

$(x^2+y^2)A-(x-y)E=B$ 이므로 $AB=BA$

행렬 A의 (1, 2)성분과 행렬 A^{-1}의 (1, 2)성분에 주목하자.

각 성분에 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=4,\ n=-1$

$4A-B=-E,\quad 4A+E=B$

$x^2+y^2=4,\ x-y=-1$

나머지는 위 해설과 동일

【예제-10】

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & |x| \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} |y-2| & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 만족하는 점 $(x,\ y)$가 나타내는 그래프의 길이를 구하여라. (단, x, y는 실수이다.)

[블랙라벨 수학1 15p 1번]

【풀이】

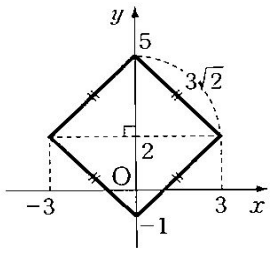
정답 $12\sqrt{2}$

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 정리하면 $AB=BA$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & |x| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |y-2| & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |y-2| & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & |x| \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2|y-2|+1 & 3 \\ |x|+|y-2| & |x|+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2|y-2|+1 & |x|+|y-2| \\ 3 & |x|+1 \end{pmatrix}$

행렬이 같을 조건에 의하여 $|x|+|y-2|=3$이고 이를 그래프로 나타내면



왼쪽 그림과 같다.

그러므로 구하는 점 $(x,\ y)$는 한 변의 길이가 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$인 마름모의 둘레의 길이이므로 $12\sqrt{2}$

【정리3을 이용한 풀이】

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 정리하면 $AB=BA$이고

행렬 A의 (1, 2)성분과 행렬 A^{-1}의 (1, 2)성분에 주목하자.

각 성분을 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=1,\ n=-1$

즉 $A-B=kE$

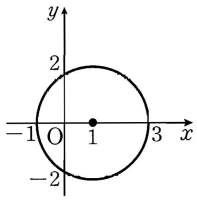
$\begin{pmatrix} 2-|y-2| & 0 \\ 0 & |x|-1 \end{pmatrix}=kE$

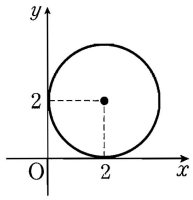
$2-|y-2|=|x|-1$에서 $|x|+|y-2|=3$

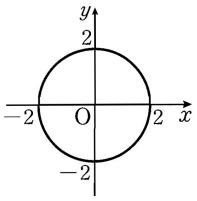
나머지는 위 해설과 동일

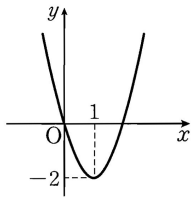
【예제-11】

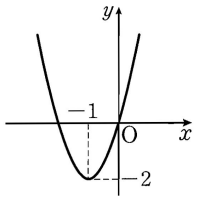
두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2x \\ x & y^2 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이 성립할 때, 다음 중 x, y사이의 관계를 그래프로 나타낸 것은?(단, x, y는 실수이다.)
[블랙라벨 수학1 14p 21번]

①


②


③


④


⑤


【풀이】

정답 ①

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이므로 $AB=BA$

$AB=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2x \\ x & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x & 2x^2+2y^2 \\ 3+2x & 2x+2y^2 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 3 & 2x \\ x & y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x & 6+4x \\ x^2+y^2 & 2x+2y^2 \end{pmatrix}$

$2x^2+2y^2=6+4x$, $3+2x=x^2+y^2$

$\therefore (x-1)^2+y^2=4$

따라서 점 (x, y)가 나타내는 도형은 중심이 $(1, 0)$이고 반지름이 2인 원이다.

【정리3을 이용한 풀이】

행렬 A의 (1, 2)성분과 행렬 A^{-1}의 (1, 2)성분에 주목하자.

각 성분을 적당히 실수배하여 더했을 때 0이 되려면 $m=x,\ n=-1$

$xA-B=kE$

$$\begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ x & 2x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2x \\ x & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-3 & 0 \\ 0 & 2x-y^2 \end{pmatrix}$$

$x^2-3=2x-y^2$

$\therefore (x-1)^2+y^2=4$

따라서 정답은 ①이다.

이상에서 제시한 예제는 수능모의고사, 수학익힘책, 시중에서 구할 수 있는 문제집인 수학의 정석과 블랙라벨에 실린 문제들이다. 이 외에도 정리를 적용할 수 있는 문제들을 다른 책에서 발견할 수 있다.

제3장 결론 및 제언

본 연구에서 2차 정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$가 성립하기 위한 조건을 찾고 풀이에 적용하여 기존의 문제풀이보다 간결하고 풀이시간을 단축시킬 수 있음을 보였다.

1. 실수 m, n과 단위행렬 E에 대하여 $A=mE$ 또는 $B=nE$ 이면 $AB=BA$이다. 2. 실수 m, n, k와 단위행렬E에 대하여 $mA+nB=kE$ 이면 $AB=BA$이다. 3. $AB=BA$이면 적당한 상수 m, n, k에 대하여 $mA+nB=kE$이다. (단, E는 단위행렬) 4. A가 역행렬을 가지면 적당한 상수 α, β에 대하여 $A^{-1}=\alpha A+\beta E$이 성립한다. (단, E는 단위행렬)

AB, BA를 직접 계산하는 번거로운 수고를 하지 않고 주어진 조건과 이들 정리를 이용해서 쉽게 문제를 해결할 수 있다.

연구결과를 토대로 두 가지 제안을 하고자 한다.

첫째, 본 연구의 후속 연구로 n차 정사각행렬에서 $n \geq 3$에 대하여 위의 정리가 성립하는지에 대해 연구를 할 것을 제안한다. 제시한 정리의 일반화에 대한 연구이다. 제시한 정리 중 1, 2번 정리는 쉽게 일반화가 되므로 3, 4번 정리에 초점을 두어야 할 것이다. 특히 $n \geq 3$에 대하여 3번 정리가 성립하는지에 대한 연구를 해야 할 것이다. 4번 정리는 3번 정리의 따름정리이므로 3번 정리의 일반화에 대한 의문이 풀리면 4번 정리는 쉽게 해결될 것이다. 아직 본격적으로 연구를 안했기 때문에 성립하는지 성립하지 않는지 단언을 할 수 없지만 추측하건대 $n \geq 3$에서도 성립할 것 같다. 만일 추측이 참이라면 $AB=BA$인 문제는 쉽게 해결 가능할 것이다. n차 정사각행렬에서 $AB=BA$인 문제를 해결하기 위해서는 AB, BA를 구해야 하므로 총 $2n^2$번 계산을 해야 한다. 하지만 제시한 정리를 이용하면 계산횟수를 줄일 수 있어 결과적으로 빠른 문제해결에 도달할 수 있다.

둘째, 2차 정사각행렬일 때 위의 정리를 교과서에 싣기를 제안한다. 교육과정을 충실히 반영하여 출제되고 있는 수능 모의고사에서 이와 관련된 문제가 자주 출제되기 때문이다. 그리고 본 연구에서 제시한 정리와 증명이 고등학생 인지수준에서 충분히 이해할 수 있는 수준이고 AB, BA를 구해야 하는 번거로운 계산을 피하고 보다 쉽게 문제를 해결할 수 있기 때문이다. 개념이 중요하기에 본 내용으로 다루기가 곤란하다면 단원 끝에 '생각해 봅시다.'란 코너에 넣어 교과서에 싣는다면 수준 높은 학생들의 탐구능력을 향상시킬 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 김응태·박승안, “선형대수학”, 경문사, 2006 pp6-7, pp9-10, pp14-15.

[2] 우정호 외 7인, “수학1”, 두산동아, 2012, p28.

[3] 우정호 외 7인, “수학1 익힘책”, 두산동아, 2012, pp19-20, p27.

[4] 이문호 외 7인, “블랙라벨 수학1”, 진학사, 2012, p11, pp14-15.

[5] 홍성대, “수학의 정석 수학1 기본편”, 성지사, 2010, p30.

[6] Howard Anton and Chris Rorres, “*Elementary Linear Algebra*”, John Wiley & Sons, inc., 2005, pp25-39.

[7] 서울시 교육청 기출문제자료실, http://www.sen.go.kr