creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000263891

2013年 8月

敎育學碩士(數學敎育)學位論文

4차 스플라인을 이용한 원호 근사

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

김 수 원

4차 스플라인을 이용한 원호 근사

Approximation of circular arc using quartic spline

2013年 8月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

김 수 원

4차 스플라인을 이용한 원호 근사

指導敎授　안 영 준

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로

提出함

2013年　4月

朝鮮大學校 敎育大學院

數 學 敎 育 專 攻

김　수　원

金秀原의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校　敎授　김 진 홍　(印)

審 査 委 員　朝鮮大學校　敎授　이 관 규　(印)

審 査 委 員　朝鮮大學校　敎授　안 영 준　(印)

2013年　6月

朝鮮大學校 敎育大學院

CONTENTS

ABSTRACT (요약) .....

제1장. 소개 .....

제2장. 예비 지식 (기초지식) .....

제3장. 연구 결과 .....

제4장. 결론 및 의견과 향후 연구 .....

참고문헌 .....

ABSTRACT

Approximation of circular arc using quartic spline

SOO WON KIM
Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In this paper we present a method of circular arc approximation by quartic Bezier curve. Our quartic approximation method has a smaller error than previous quartic approximation methods. Our method yields a closed form of error so that subdivision algorithm is available, and curvature continuous quartic spline under the subdivision of circular arc with equal-length until error is less than tolerance. We illustrate our method by some numerical examples.

Key Words : Quadratic rational Bezier curve, Bezier approximation , Circular arcs, Quartic Bezier curve, Spline, Hausdorff distance, Approximation order, Geometric contact, G^1 and G^1 end-point interpolation, Best approximation curve

4차 스플라인에 이용한 원호 근사

Approximation of circular arc using quartic spline

제1장 소개

본 학위논문은 논문[3]의 내용에 일부를 추가하였고 재구성 하였다. 단순 도형인 원은 주로 CAD / CAM, 컴퓨터 그래픽 영역에서 넓게 사용된다. 하지만 원은 다항식에 의해 표현 될 수 없기 때문에 베지어 곡선으로 원 근사와 원추 근사는 CAGD (컴퓨터 기하학적 디자인) 또는 기하학적 모델링은 중요한 작업으로 다루어졌다. 2차 스플라인으로 원 근사 방법은 오차를 간단히 계산하거나 다루기 쉽다. 이런 이유로 최근 20년간, 많은 논문에서 베지어 곡선 또는 스플라인으로 원 근사 방법이 많이 연구하였다. 논문[14]은 2차 베지어 곡선에 의해 원호의 단순 근사 방법을 제시 하였다. 논문[8]은 원추 곡선의 2차 근사가 원추의 어깨 점에서 세분할하면 곡률연속이며, 원추 곡선과 2차 근사 사이의 하우스도르프 거리의 상한을 제시해 보였다.

홀수 차수 스플라인에 의해 원 또는 원추 근사 방법은 논문[4],[9]에서 원호의 최적의 G^k $(k=0,1,2)$ 3차 근사를 제안 하였다. 논문[8]은 최적의 근사 차수 $2n$ 갖는 근사 곡선 홀수 차수 n의 가장 좋은 근사방법을 제시하였다.

4차 스플라인에 의해 원과 원추 곡선 근사 몇 가지 방법이 제시되고 있다. 논문[2]는 원호의 4차와 5차의 베지어 근사 $G^k(k \geq 2)$를 오차함수를 사용하여 얻었다. 논문[11]은 원호의 또 다른 4차 근사 방법을 제시하고, 논문[1]은 원추 곡선 근사 4차 스플라인에 의해 원호 근사 방법을 확장했다. 논문[10] 원호를 최적의 G^2 4차와 G^1 3차 근사를 제안하였다. 논문[13] 이전 4차 근사보다 작은 오차를 갖는 G^2 4차 스플라인에 의해 원호 근사했다. 본 논문에서는 이전 5차 근사보다 작은 오차를 갖는 원호를 4차 스플라인 이용한 근사을 제시하고자 한다.

제2장에서, 4차 스플라인에 의해 원 근사에 대한 이전의 방법을 소개하면서 본 논문에 예비지식(기초지식)을 소개하고, 제3장에서 원호에 대해서 우리의 4차 근사을 제시하고 원호와 4차 근사 곡선 사이의 하우스도르프 거리의 공식이 얻어진다. 우리는 세분할 알고리즘과 일부 예제를 제시하고, 제4장에는

요약 및 결론을 제시하겠다.

제2장 예비지식

2.1절 4차 다항식의한 원호 근사

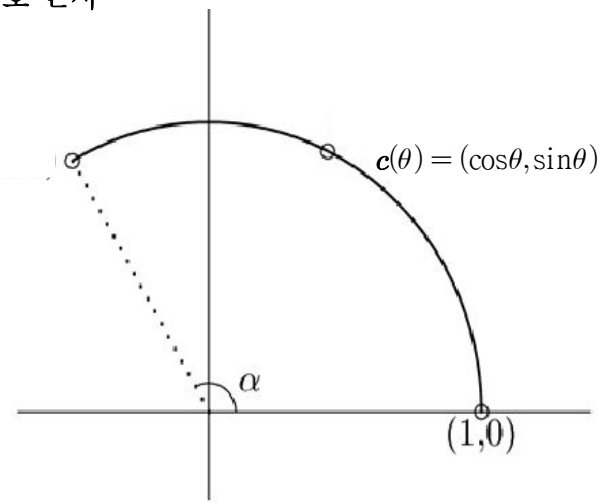


그림 2.1 각 α와 반경 1에 대한 원호$\boldsymbol{c}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$.

단위 원호 $\boldsymbol{c}$: $[0,\alpha]\rightarrow\mathbb{R}^2$은 그림 2.1.1처럼 표현된다.

$$\boldsymbol{c}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta),\quad 0<\theta<\alpha$$

각 $0<\theta<\alpha$와 반경1의 원호$\boldsymbol{c}(\theta)$에 대해서 4차 근사 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$를 찾는 것이 목표이다. $B_i^4(t)$을 4차 다항식이라고 하면

$$B_i^4(t)=\frac{4!}{i!(4-i)!}t^i(1-t)^{4-i}.$$

그러면 원호 $\boldsymbol{c}(\theta)$의 4차 베지어 근사 곡선 $\boldsymbol{b}$: $[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^2$을

$$\boldsymbol{b}(t):=(x(t),y(t)):=\sum_{i=0}^{4}\boldsymbol{b}_iB_i^4(t) \tag{1}$$

단, 제어점 $b_i:=(x_i,y_i)$, $0\le i\le 4$

$$\boldsymbol{b}_0=(1,0),\boldsymbol{b}_1=(1,u),\boldsymbol{b}_2=v\left(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{b}_4=(\cos\alpha,\sin\alpha)+u(\sin\alpha,-\cos\alpha),\quad \boldsymbol{b}_4=(\cos\alpha,\sin\alpha) \tag{2}$$

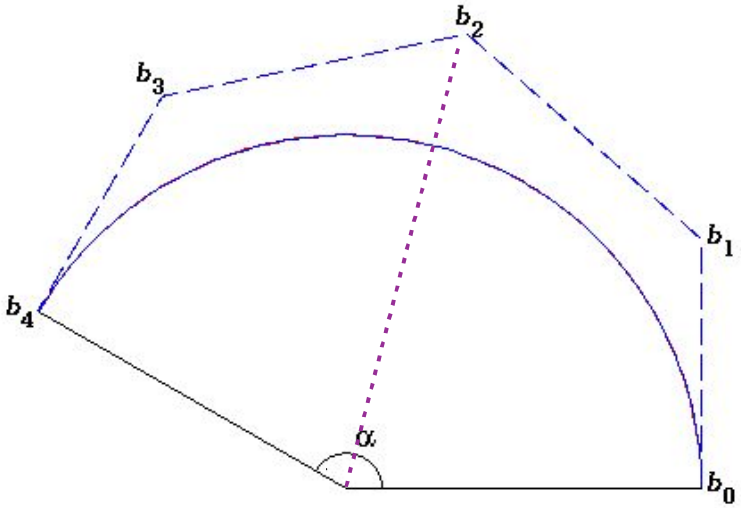


그림 2.2 단위 원호(붉은색) $c(\theta):=(\cos\theta,\sin\theta)$, $0\le\theta\le\alpha$와 제어점 b_i, $i=0,\cdots,4$인 4차 베지어 근사(파란색) $b(t)$. 점선(파란색)은 제어다각형.

4차 베지어 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$의 양 끝점을

$$\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{c}(0),\ \boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{c}(1)$$

나머지 제어점 $y=\tan(\alpha/2)$에 대해서 대칭성을 이용하여 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$을 다음과 같이 표현한다.

$$\boldsymbol{b}_1=(1,u),\ \boldsymbol{b}_2=v(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2}),\ \boldsymbol{b}_3=(\cos\alpha,\sin\alpha)+u(\sin\alpha,-\cos\alpha)\ .$$

양쪽 끝점에서 $\boldsymbol{c}$와 $\boldsymbol{b}$가 서로 같고, 접선의 방향이 일치하여, G^1 끝점 연결이다. 그러면 단위원호 $\boldsymbol{c}(\theta)$의 사차 베지어 근사 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$는 주어진 α에 대하여, 두 변수 u,v를 결정하면 된다.

원호 $c(\theta)$에 대해서, $c(\theta)$와 $b(t)$사이의 하우스도르프 거리 $d_H(b,c)$는

$$\begin{aligned} d_H(b,c) &= \max_{t\in[0,1]}\|\boldsymbol{b}(t)\|-1 \\ &= \max_{t\in[0,1]}|\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}-1| \end{aligned}$$

이다. 논문[2]에서 오차함수 $\psi(t)$를

$$\psi(t):=x^2(t)+y^2(t)-1 \qquad (3)$$

$$\| \psi(t) \|_{\infty} := \max_{t \in [0,1]} |\psi(t)| \quad .$$

$d_H(b,c) = \sqrt{\| \psi(t) \|_{\infty} + 1} - 1$ 계산하는데 이용했다.

그러면 $\boldsymbol{b}(t)$와 $\boldsymbol{c}(\theta)$는 양 끝점에서 같은 접선방향을 가지고 오차함수는

$$\psi_{\boldsymbol{b}}(t) = \sum_{i=2}^{6} c_i \binom{8}{i} t^i (1-t)^{8-i} \quad \text{단, } c_{8-i} = c_i \tag{4}$$

$\boldsymbol{b}(t)$가 G^2가 원호로 근사하기 위한 필요충분조건은 제어 계수 c_2가 0일 때이다. 간단한 계산에 의해 우리는 $c_2 = \frac{1}{14}\{4u^2 + 3rcos\frac{1}{2}\alpha - 3\}$을 얻고,

따라서

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{3(1 - rcos\frac{\alpha}{2}}$$

또는

$$v = \frac{3 - 4u^2}{3\cos\frac{\alpha}{2}} \tag{5}$$

일 때이다. 그리고 오차함수 $\psi_{\boldsymbol{b}_u}$를 가진다.

$$\psi_{\boldsymbol{b}_u}(t) = \sum_{i=3}^{5} c_i \binom{8}{i} t^i (1-t)^{8-i} \tag{6}$$

단, 계수 $c_3 = c_5$이고 c_4는 고정된 α에 대해 변수 u에만 의존한다.

이후 본 논문은 u를 구하는 방법에 따라 각 절을 소개하겠다.

2.1절 G^3 4차 다항식 근사

이 절에서 우리는 원호로 G^3 4차 근사 $\boldsymbol{b}_u$을 찾았던 이전 방법을 소개하겠다. 방정식 (3)에 있어서의 $\boldsymbol{b}_u$가 G^3근사 이기위한 필요충분조건은 제어계수 c_3가 0일 때이다.

간단한 계산에 의해 우리는

$$c_3 = \frac{1}{7}\{(\cos\alpha + usin\alpha + 2 - 3vcos\frac{1}{2}\alpha) + 6u(vsin\frac{1}{2}\alpha - 2u)\}$$

을 얻고,

위의 식에서 (5)식을 대입하면

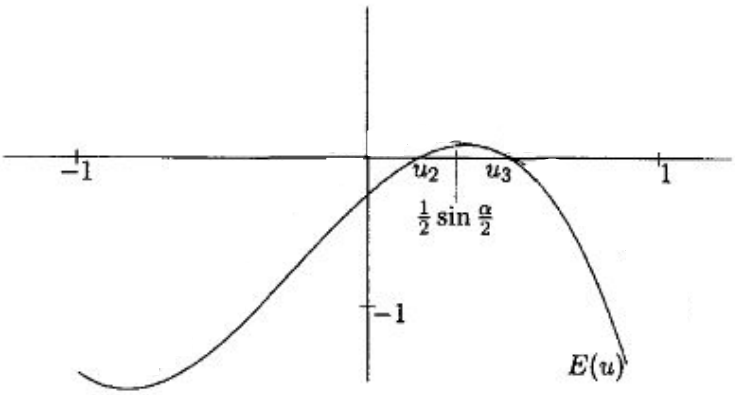


그림 2.3 3차 다항식 $E(u)$의 세근 u_1, u_2, u_3

$$c_3 = -\frac{8}{7}tan\frac{1}{2}\alpha\left\{u^3 + (\cot\frac{1}{2}\alpha)u^2 + (\frac{1}{4}sin^2\frac{1}{2}\alpha - 1)u + \frac{\sin\alpha}{8}\right\} \qquad (7)$$

$E(u)$를 식 (7)의 우변의 3차 다항식으로 정의한다. 즉,

$$c_3 = E(u) := -\frac{8}{7}tan\frac{1}{2}\alpha E_1(u) \qquad (8)$$

$E(u)$가 u에서 0일 필요충분조건은 E_1 역시 u에서 0일 때이다.
모든 $0 < \alpha < \pi$에 대해, $E_1(0) > 0$이고

$$E_1(\frac{1}{2}sin\frac{1}{2}\alpha) = -\sin\frac{\alpha}{2}sin^4\frac{\alpha}{4} < 0$$

이기 때문에

방정식 $E_1(u) = 0$은 그림 2.1.3에서 보는 것처럼 $u_1 < 0 < u_2 < \frac{1}{2}sin\frac{\alpha}{2} < u_3$을 만족하는 한 개의 음의 실근 u_1과 두 개의 양의 실근 u_2, u_3을 가진다.

카르단 공식 [14]을 사용함으로써, 우리는 3차 다항식 $E(u) = 0$의 세 근 u_1, u_2, u_3의 명백한 형태를 발견하고, 다음의 성질에서 세 근 u_1, u_2, u_3이 서로 다른 양의 실근임을 보여준다.

성질 2.1.2 각각의 $0<\alpha<\pi$에 대해, $E(u)=0$의 세 근 u_1, u_2, u_3의 명백한 형태는 다음과 같다.

$$u_j = 2\cos(\phi_\alpha + \frac{2j\pi}{3})\sqrt{S_1(\alpha)} - \frac{1}{3}cot\frac{\alpha}{2}, \tag{9}$$

단, $S_1(\alpha) := \frac{1}{36}csc^2\frac{\alpha}{2}(4+8\sin^2\frac{\alpha}{2}-3\sin^4\frac{\alpha}{2})$,

$$S_2(\alpha) := \frac{1}{54}cos\frac{\alpha}{2}csc^3\frac{\alpha}{2}(4+14\sin^2\frac{\alpha}{2}+9\sin^4\frac{\alpha}{2}),$$

$$\phi_\alpha := \frac{1}{3}arccos\left\{\frac{-S_2(\alpha)}{2\sqrt{S_1(\alpha)^3}}\right\},$$

여기서, arccos 함수의 범위는 $[0,\pi]$이고,
$u_1 < 0 < u_2 < u_3$ 이다.

그러면 각각의 G^3 원호 근사 $\boldsymbol{b}_j, (j=2,3)$의 하우스도르프 거리는 다음과 같다.

$$d(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}_{u_j}) = \frac{1}{8\cos(\frac{\alpha}{2})}(-4u_j^2 + 2u_j\sin\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{4}(3-5\cos\frac{\alpha}{2})). \tag{10}$$

논문[2]에서 최적의 근사는u_3에 의해서 결정된 베지어 곡선 $\boldsymbol{b}_{u_3}$는 가장 좋은 각 α의 원호에서의 4차 G^3 근사이고, $\boldsymbol{c}$와 $\boldsymbol{b}_{u_2}$ 사이의 하우스도르프 거리의 점근적인 형태를$\frac{17-12\sqrt{2}}{2^{15}}\alpha^8 + O(\alpha^{10})$제시하였다.

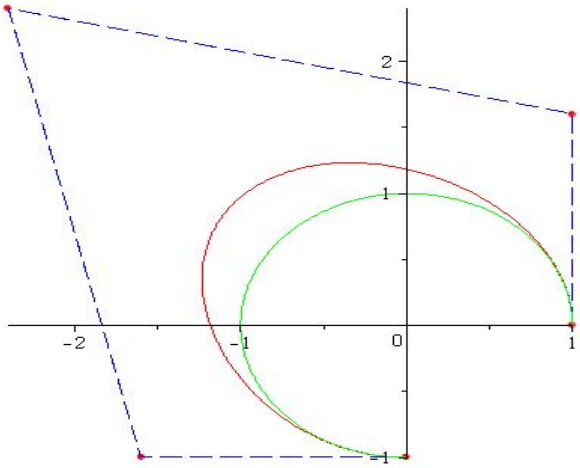


그림 2.4 $\alpha = 1.5\pi$인 단위원호 $\boldsymbol{c}$(연두색)으로 G^3 4차 다항식 근사방법에 의한 $\alpha = 1.5\pi$인 원호 근사 곡선$\boldsymbol{b}_{u_2}$(붉은색). 제어다각형(청색 점선), 제어점 $\boldsymbol{b}_i$, $(i = 0, \ldots, 4)$(붉은색 점)

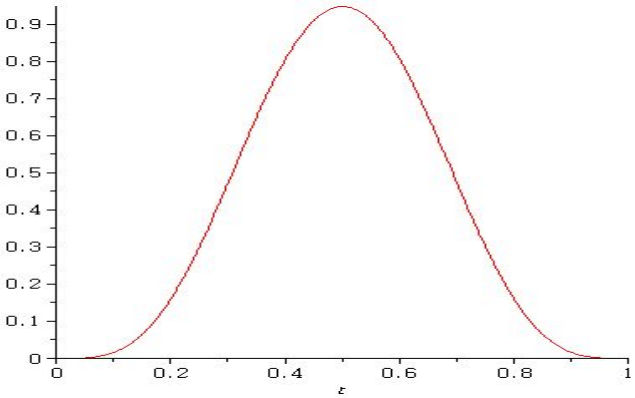


그림 2.5 $\alpha = 1.5\pi$인 오차함수 $\psi_{\boldsymbol{b}_u}(t)$.

2.2절 G^2 음의 4차 근사.

(1)-(6) 식을 성립하는 G^2 근사 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$를 찾기 위한 오차함수 $\psi_{\boldsymbol{b}}(t)$는

$$\psi_{\boldsymbol{b}}(t) = 14t^3(1-t)^3[4c_3\{(1-t)^2+t^2\}+5c_4t(1-t)] \tag{11}$$

여기서, $F(u)$을

$F(u) := 4c_3\{(1-t)^2+t^2\}+5c_4t(1-t)]$을 인수분해하면

$F(u) = p(u)q(u)$

$p(u) = (-8u^2+4usin(\alpha)+5\cos(\alpha)-16\cos(\alpha/2))$

$q(u) = (-8u^2+4usin(\alpha)+5\cos(\alpha)+16\cos(\alpha/2))$

$F(u)=0$의 근은 $p(u)=0$는 μ_1,μ_2을 갖고, $q(u)=0$은 μ_3,μ_4을 갖는다.

$$\mu_2 = \frac{1}{4}sin\alpha + \sin^2\frac{1}{\alpha}\sqrt{6+2\cos\frac{\alpha}{2}} \tag{12}$$

이때, 논문 [2]에 따르면 $\boldsymbol{b}_{\mu_2}$에서 최적의 근사를 갖는다.

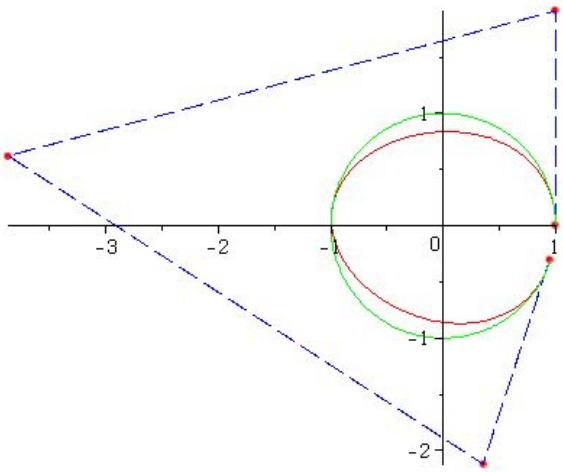


그림 2.6 $\alpha=1.9\pi$인 단위원호 $\boldsymbol{c}$(연두색)으로 G^2 음의 4차 근사방법에 의한 $\alpha=1.9\pi$인 원호 근사 곡선$\boldsymbol{b}_\mu$(붉은색). 제어다각형(청색 점선), 제어점 $\boldsymbol{b}_i$, $(i=0,\ldots,4)$(붉은색 점)

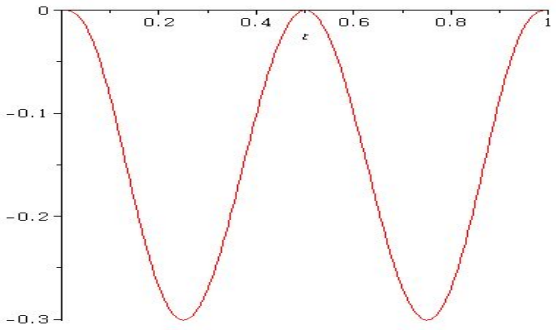


그림 2.7 $\alpha=1.9\pi$인 오차함수 $\psi_{\boldsymbol{b}_\mu}(t)$.

2.3절 G^2 4차 스플라인 근사

(1)-(3) 식을 성립하고 양쪽 끝점에서 $\boldsymbol{c}$와 $\boldsymbol{b}$가 서로 같고, 접선의 방향이 일치하여, G^1 끝점 연결이다. 오차함수 $\psi_{\boldsymbol{b}}(t)$가 $t=1/2$에서 4중근을 갖도록 한다. 그러면 $y=\tan(\alpha/2)x$에 대하여 대칭이고, 양쪽 끝점에서 곡률연속을 만족하여, 단위 원호$\boldsymbol{c}(\theta)$로 4차 스플라인 근사 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$는 양쪽 끝에서도 G^2를 만족하게 된다. 양쪽 끝 점과 접선의 방향조건과 $t=1/2$에서 4중근 갖는 조건을 이용하여

$$v=\frac{8}{3}-\frac{5}{3}cos(\alpha/2)-\frac{4}{3}u\sin(\alpha/2) \tag{13}$$

$$u=\frac{3\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)-2\sin(\alpha/2)+4\sqrt{2}\,sin^3(\alpha/4)}{2\cos(\alpha/2)^2}. \tag{14}$$

(13)-(14) 식을 (3)에 대입하면, 오차함수$\psi_{\boldsymbol{b}}$는

$$\psi_{\boldsymbol{b}}:=\frac{2^{10}\sin^8\frac{\alpha}{4}(\sqrt{2}\,cos\frac{\alpha}{4}-1)^4}{\cos^4(\frac{\alpha}{2})}t^2(t-1)^2(t-1/2)^4 \tag{15}$$

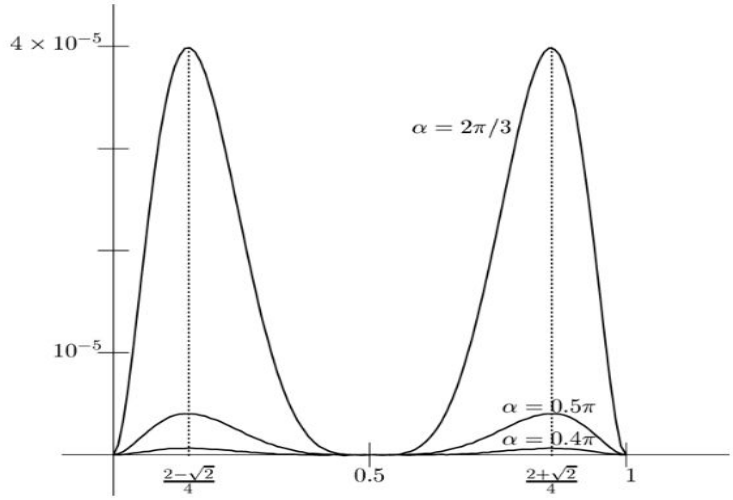


그림 2.8 각 $0.4\pi, 0.5\pi, 2\pi/3$ 에 따른 G^2 4사 스플라인 $\boldsymbol{b}(t)$의 오차함수 $\psi_{\boldsymbol{b}}(t)$.각α가 작아질수록 오차가 작다.

원호 $\boldsymbol{c}$ 과 4차 스플라인 근사 $\boldsymbol{b}(t)$사이의 하우스도르프 거리 $d_H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})$는

$$d_H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b}) = \sqrt{\frac{\sin^8\frac{\alpha}{4}(\sqrt{2}\,cos\frac{\alpha}{4}-1)^4}{4\cos^4(\frac{\alpha}{2})}+1}-1. \tag{16}$$

$\boldsymbol{c}$과 $\boldsymbol{b}$사이의 하우스도르프 거리의 점근적인 형태는

$$d_H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b}) = \frac{(\sqrt{2}-1)^4}{2^{19}}\alpha^8 + O(\alpha^{10}). \tag{17}$$

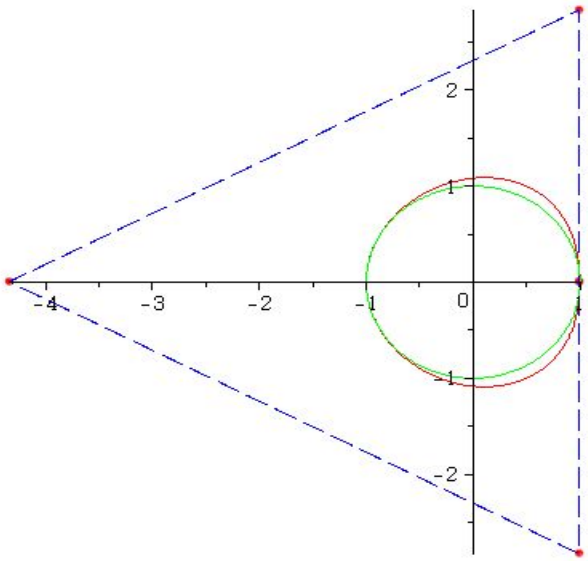


그림 2.9 $\alpha = 2\pi$인 단위 원호 $\boldsymbol{c}$(연두색)으로 G^2 4차 스플라인 근사방법에 의한 $\alpha = 2\pi$인 원호 근사 곡선$\boldsymbol{b}_\mu$(붉은색). 제어다각형(청색 점선), 제어점 $\boldsymbol{b}_i, (i = 0, \ldots, 4)$(붉은색 점)

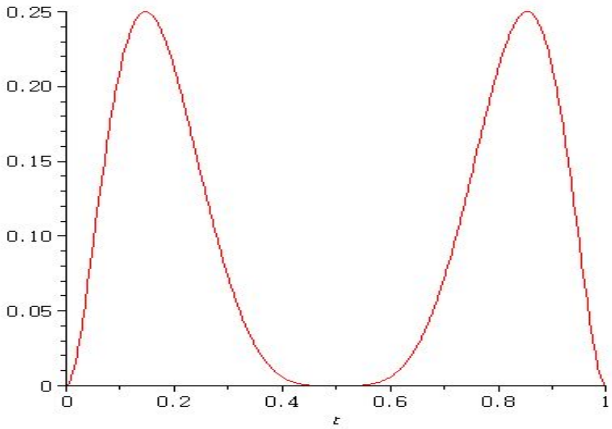


그림 2.10 $\alpha = 2\pi$인 G^2 4사 스플라인 $\boldsymbol{b}(t)$의 오차함수 $\psi(t)$

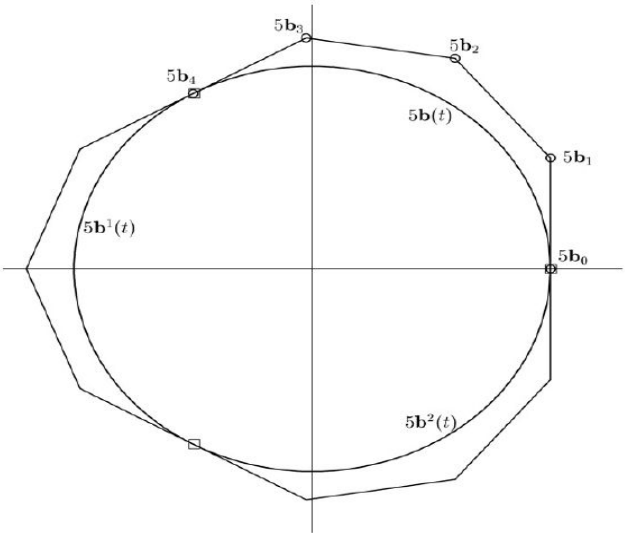


그림 2.2.3 반경이 5인 원의 4차 스플라인 근사 $\boldsymbol{c}(t)$ (실선)이다. $\boldsymbol{c}(t)$는 $\alpha=2\pi/3$이고 $5\boldsymbol{b}(t)$, $5\boldsymbol{b}^1(t)$, $5\boldsymbol{b}^2(t)$에 의한 합성이다. 연속 베지어 곡선 사이의 연결 지점(작은 상자)에서 스플라인 $\boldsymbol{c}(t)$는 연속 곡률이다. 점 $5\boldsymbol{b}_i$, $i=0,\ldots,4$(작은 원)은 4차 근사 $5\boldsymbol{b}(t)$의 제어점이다.

2.4절 G^2 최적의 4차 근사

(1)-(6) 식을 성립하는 G^2 근사 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$는

$$x(t)=(-8u^2-4u\sin\alpha-3\cos\alpha+3)t^4+4(4u^2+u\sin\alpha+\cos\alpha-1)t^3-8u^2t^2+1,$$

$$\begin{aligned}y(t)=\frac{1}{1+\cos\alpha}((&-8u^2\sin\alpha+4u\cos^2\alpha-4u-3\sin\alpha\cos\alpha+3\sin\alpha)t^4\\&+4(4u^2\sin\alpha-u\cos^2\alpha+2u\cos\alpha+3u+\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha)t^3\\&+(-8u^2\sin\alpha-12u\cos\alpha-12u+6\sin\alpha)t^2+4u(\cos\alpha+1)t).\end{aligned}$$

오차함수 $\psi(t)$는

$$\psi(t)=x^2(t)+y^2(t)-1=2\frac{t^3(t-1)^3}{1+\cos\alpha}(a(u)t(t-1)+b(u)).$$

$$\tilde{\psi}(t)=\frac{\psi(t)}{a(u)}=2\frac{t^3(t-1)^3}{1+\cos\alpha}(t(t-1)+\frac{b(u)}{a(u)})$$

여기서,

$$a(u)=64u^4+64(\sin\alpha)u^3-16(\cos^2\alpha-3\cos\alpha+2)u^2+24\sin\alpha(\cos\alpha-1)u+9(\cos\alpha-1)^2,$$
$$b(u)=4(8(\sin\alpha)u^3+8(\cos\alpha+1)u^2-\sin\alpha(\cos\alpha+7)u+(1-\cos^2\alpha),$$

$$k=\frac{b(u)}{a(u)}.$$

오차함수 $\psi(t)$의 극점을 구하기 위해서 $\dfrac{\partial\psi(t)}{\partial t}=0$을 구해보면,

$$t=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-3k}}{2}.$$

그림 보듯이 $\psi(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{1-3k}}{2}$에서 극소, $t=1/2$에서 극대를 갖는다.

$t=1/2$에 대칭하기 때문에 $\psi(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{1-3k}}{2})=\psi(1/2)$이며, 이 조건을 이용하면

$$27k^4+4k-1=0$$

방정식 (18)을 풀어보면 4개의 근중에서 복소 켤레근과 음근을 제외한 k는

$$k=0.2308349475.$$

그러면 $k=b(u)/a(u)$이므로,

$$\begin{aligned}&-64ku^4+32\sin\alpha(1-2k)u^3+16(k\cos\alpha^2-3k\cos\alpha+2k+2\cos\alpha+2)u^2\\&+4\sin\alpha(-6k\cos\alpha+6k-\cos\alpha-7)u-9k(1-\cos\alpha)^22+4(1-\cos^2\alpha)=0.\end{aligned}\tag{18}$$

예를 들어, 각$\alpha=1.9\pi$이면 ,

u관한 4차 방정식(18)은 4개의 근 중 세 개의 근은 음근이고 한 개의 근이 양근

u=1.967666750

얻을 수 있다.

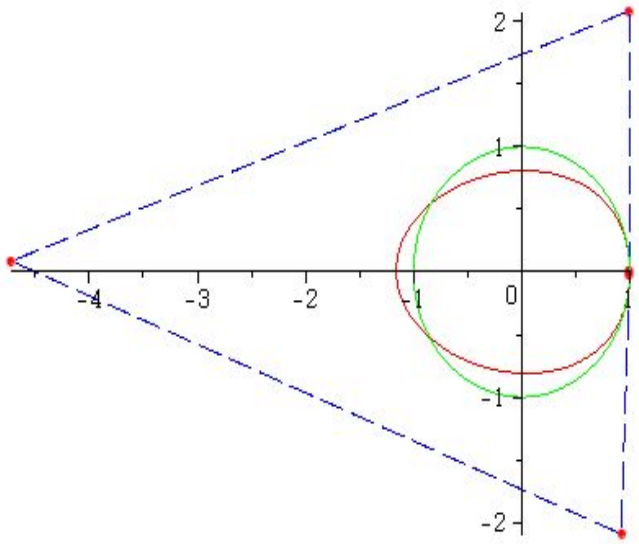


그림 2.10 $\alpha=2\pi$인 단위원호 $\boldsymbol{c}$(연두색)으로 G^2 4차 최적의 근사방법에 의한 $\alpha=1.99\pi$인 원호 근사 곡선$\boldsymbol{b}_\mu$(붉은색). 제어다각형(청색 점선), 제어점 $\boldsymbol{b}_i,(i=0,\ldots,4)$(붉은색 점)

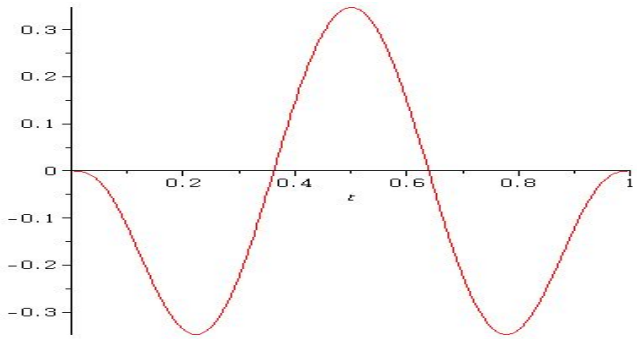


그림 2.11 $\alpha=1.99\pi$인 G^2 4사 최적의 근사 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$의 오차함수 $\tilde{\psi}(t)$

제3장. 연구 결과

3.1절 우리의 G^2 4차 근사

방정식(1)-(3)에서 얻는 $\psi(t)=4t^2(t-1)^2\zeta(t)$은

$$\zeta(t)=(-9v^2-(24u\sin\frac{\alpha}{2}+18\cos\frac{\alpha}{2})v-16u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-12u\sin\alpha-9\cos^2\frac{\alpha}{2})(t-12)^4$$
$$+(\frac{9}{2}v^2-9\cos\frac{\alpha}{2}v-8u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-8u\sin\alpha+4-\frac{17}{2}cos^2\frac{\alpha}{2})(t-\frac{1}{2})^2 \tag{19}$$
$$-\frac{9}{16}v^2-(\frac{3}{2}u\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{15}{8}cos\frac{\alpha}{2})v-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}u\sin\alpha+4-\frac{25}{16}cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

표3.1을 보면 논문[2]은 $t=1,2$인 양쪽 끝점에서 중근을 갖는 오차함수 $\psi(t)$로 근사한 $\boldsymbol{b}_{u3}$ 와 양쪽 끝점에서 3중근을 갖고 $t=\frac{1}{2}$인 중점에서 중근을 갖는 $\boldsymbol{b}_{\mu 2}$를 제시하였다. 우리의 근사 곡선 $b(t)$는 중간에서 원호 c와의 접점을 가지고 있다. $\zeta(1/2)=0$풀면, 두 가지 해

$i=1,2$

$$v_i=-\frac{5}{3}cos(\alpha/2)-\frac{4}{3}u\sin(\alpha/2)+(-1)^i\frac{8}{3}.$$

만약 $v=v_i$ 그러면 $\zeta(t)=4(t-1/2)^2\eta_i(t)$

$$\eta_1(t)=(16(\cos\frac{\alpha}{2}+1))(2\sin^2\frac{\alpha}{4}u^2+2\sin\frac{\alpha}{2}u+1+\cos\frac{\alpha}{2})t(t-1) \tag{20}$$
$$+4u^2-2u\sin\alpha-(\cos\alpha^2+1)(5\sin\frac{\alpha}{2}+3)$$

$v=v_i$를 결정되면 4차 근사 $\boldsymbol{b}(t)$는 하나의 매개 변수 u의존한다. 논문[11] 중점에 중근을 갖는 $\eta_2(t)$에 대한 G^2 4차 근사 $\boldsymbol{b}(t)$를 제시하고, 논문[13] $t=1/4, 3/4$에서 근을 갖는 $\eta_2(t)$에 대한 $\tilde{\boldsymbol{b}}$를 제시하였다.

만약 $u>0$, 이면 4차 베지어 곡선 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{u}}(t)$는 원호 $c(\theta)$의 끝점은 G^1이다. 게다가, $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{u}}(t)$는 두 끝점 $\boldsymbol{b}_u(0)$과$\boldsymbol{b}_u(1)$ 에서 동일한 곡률을 가진다. 따라서 만약 $u>0$, 원호의 4차 근사 $\boldsymbol{b}_u(t)$의 방법은 원호의 같은 길이의 세분할 의한 G^2

4차 스플라인의 근사 허용오차보다 작다. (참조[11, 8])

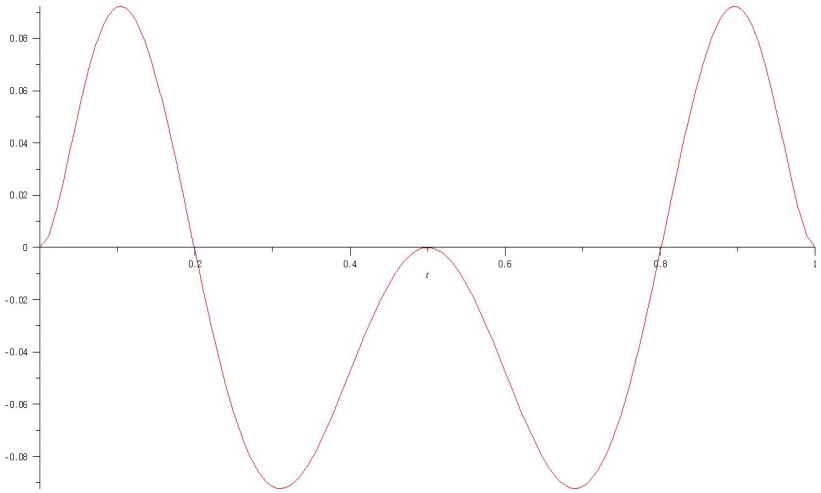


그림 3.1.1. $a=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{6-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}-1}}$ 대한

8차 모닉다항식 $f(t)=t^2(t-1)^2(t-1/2)^2(t-a)(t-(1-a))$

은 $f(-b)=\max f(x)=-\min f(x)=\|f\|_\infty$이다.

보조정리 3.1

8차 모닉다항식 $f(t)=t^2(t-1)^2(t-1/2)^2(t-a)(t-(1-a)), t\in[0,1]$가

만약 $a=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{6-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}-1}}$ 이라면

$$\|f\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}f(t)=-\min_{t\in[0,1]}f(t) \tag{21}$$

을 만족한다.

증명. 방정식$f'(t)=0$을 풀면, 해는

$t=(4\pm\sqrt{12a^2-20a+9}\pm\sqrt{12a^3-4a+1})/8, 0, 1, 1/2$ 이다. 이를 $i=1,2$에 대해서,

$$b_i = (4 \pm \sqrt{12a^2 - 20a + 9} \pm \sqrt{12a^3 - 4a + 1})/8$$

이라고 두자.

만약 $0 < a < 12$ 또는 $12 < a < 1$ 정의되면 그림 3.1.1 처럼, $[0,1]$위에서 다항식 $f(t)$의 극댓값

$$f(b_1) = f(1 - b_1)$$

이고,

$f(t)$의 극솟값

$$f(b_2) = f(1 - b_1)$$

이다. a관한 방정식 $f(b_1) = -f(b_2)$을 풀면 (3.3.1)을 만족하는 두 실수 값

$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3} - 1}}\ .$$

□

수치적으로, 그림 3.2.1에서처럼, $a \approx$ 0.199 과 $\|f\|_\infty = f(b_1) \approx 9.01 \times 10^{-5}$를 갖는다. u관한 방정식$\eta_i(a) = 0$을 풀면 $i, j = 1,2$에 대해서, 근$u_{i,j}$를 4개 얻는다. 그러므로 $u = u_{1,j}, j = 1,2$ 대해서, 4차 다항식 $\eta_1(t)$은

$$\eta_1(t) = (16(\cos\frac{\alpha}{2} + 1))(2\sin^2\frac{\alpha}{4}u^2 + 2\sin\frac{\alpha}{2}u + 1 + \cos\frac{\alpha}{2})(t - a)(t - (1 - a))$$

이고, $\|\psi\|_\infty = 2^{10} f(b_1) + O(\alpha^2)$, 근사 $\boldsymbol{b}_{u_1,j}, j = 1,2$ 는 근사차수가 0이고 $\boldsymbol{b}_{u_1,j}$는 좋은 근사를 얻을 수 없다. 이제, 두 근사 $\boldsymbol{b}_{u_2,j}, j = 1,2$ 의 오차를 비교하겠다. 두 개의 매개변수는 $u_2, j = (\xi_1 + (-1)^j\sqrt{\xi 2})/2\xi$, 여기서 ξ는

$$\xi = 4a(a-1)\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1$$

$$\xi_1 = \sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} + 16a(a-1)\sin^2\frac{\alpha}{4}) \qquad (22)$$

$$\xi_2 = 16\sin^6\frac{\alpha}{2}(2 - (2a-1)^2\sin^2\frac{\alpha}{4})$$

성질 3.2 $\boldsymbol{b}_{u_{2,2}}$는 $\boldsymbol{b}_{u_{2,1}}$보다 더 잘 근사된다.

증명.

만약 $u = u_{2,j}$이면 $\eta_2(t) = \eta_{2,j}$는 $t = a, 1-a$에서 근을 갖는다. 그러므로

$$\eta_{2,j}(t) = 2^6 \sin^2\frac{\alpha}{4}(u_{2,j}\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})^2(t-a)(t-(1-a))$$

이고,

$$(u_{2,1}\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})^2 - (u_{2,2}\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})^2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} sin^2\frac{\alpha}{4}(2\cos^2\frac{\alpha}{4}+1)\sqrt{\xi_2}}{\xi_2} \geq 0$$

따라서,

$\boldsymbol{b}_{u_{2,2}}$는 $\boldsymbol{b}_{u_{2,1}}$보다 더 잘 근사된다. □

성질 3.3 $u = u_{2,2}$에 대해서, 오차함수는

$$\psi(t) = 2^{10}\sin^2\frac{\alpha}{4}(u_{2,2}\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})^2 t^2(t-1)^2(t-12)^2(t-a)(t-(1-a)) \qquad (23)$$

이고,

$$\begin{aligned} \| \psi \|_\infty &= 2^{10}\sin^2\frac{\alpha}{4}(u_{2,2}\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})^2 f(b_1) \\ &= \frac{17-12\sqrt{3}}{2^6} f(b_1)\alpha^8 + O(\alpha^{10}) \end{aligned} \qquad (24)$$

증명.

$$\psi(t) = 4t^2(t-1)^2\zeta(t), \zeta(t) = 4(t-1/2)^2\eta_2(t)$$

이고

$$\eta_{2,j}(t) = 2^6\sin^2\frac{\alpha}{4}(u_{2,j}\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})^2(t-a)(t-(1-a)),$$

이므로

$$u_{2,2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - (1-\cos\frac{\alpha}{2}) = \frac{2\sqrt{2}-3}{2^2}\alpha^3 + O(\alpha^5).$$

(24) 식을 얻는다. □

성질 3.4 4차 근사 $\boldsymbol{b}$와 원호 $\boldsymbol{c}$사이 하우스도르프 거리는

$$d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 1 - \sqrt{1 - 2^{10}\sin^2\frac{\alpha}{4}(u_{2,2}\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4})^2 f(b1)} \qquad (25)$$

이고,

$$d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \frac{17-12\sqrt{2}}{2^7} f(b_1)\alpha^8 + O(\alpha^{10}) \tag{26}$$

증명. $\psi(t)$의 범위는 $[-\|\psi\|\infty, \|\psi\|\infty]$ 이므로,
$\sqrt{\psi(t)+1}-1$은 $[\sqrt{1-\|\psi\|_\infty}-1, \sqrt{1+\|\psi\|_\infty}-1]$. 그러므로, 근사 $\boldsymbol{b}$와 원호 $\boldsymbol{c}$ 사이 하우스도르프 거리$d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$는

$$d_H(b,c) = \max\left\{|\sqrt{1-\|\psi\|_\infty}-1, \sqrt{1+\|\psi\|_\infty}-1\right\} \tag{27}$$

그래서 , $0<s<1$ 에 대한 임의의 실수는 $|\sqrt{1-s}-1| \geq |\sqrt{1+s}-1|$

$$d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 1-\sqrt{1-2^{10}\sin^2\frac{\alpha}{4}(u_{2,2}\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4})^2 f(b1)} \tag{28}$$

방정식 (24)-(25) 으로부터
방정식(26)을 얻는다. □

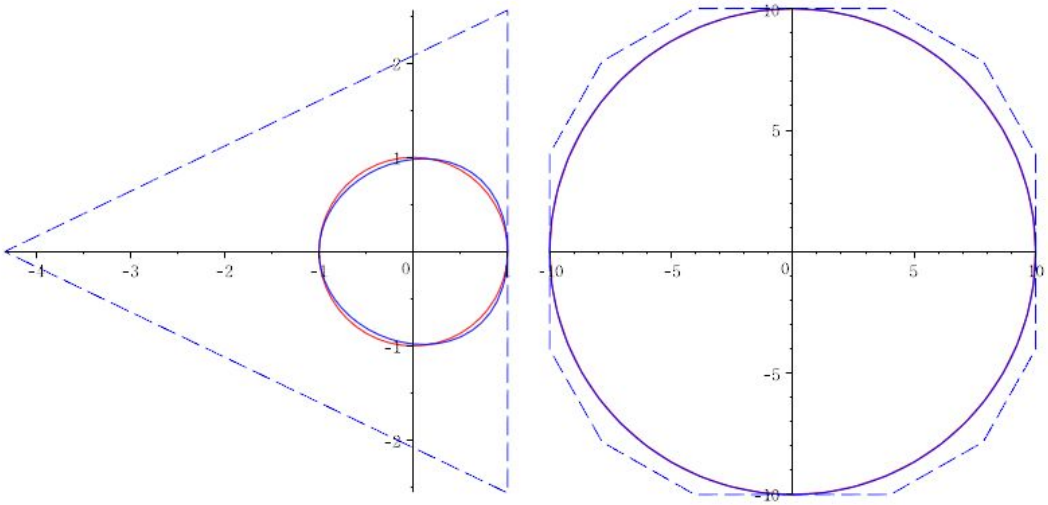
각 α의 단위 원호$\boldsymbol{c}$와 방정식 (25)에서 우리의 4차 근사$\boldsymbol{b}_{u_{2,2}}$사이의 하우스도르프 거리$d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$는 오로지 α에 의존한다. 그러므로$\epsilon(\alpha)$의해서 $d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$는 정의된다.

3.4절 알고리즘과 수치 예제

4차 베지어 곡선은 시작 점과 끝점이 만나는 곳에서 같은 곡률을 가진다. 제어 다각형은 점선으로 그렸다.

4차 베지어 곡선에 의해 원 근사 방법을 이용해서 우리는 주어진 허용 오차 내에서 원호의 4차 G^2 스플라인 근사에 대한 세분화 알고리즘을 표현할 수 있다.

알고리즘 1. 입력 : 원호에 대한 반지름 r ,각도 ϕ, 허용오차 τ 2. $r\epsilon(\phi/k) < \tau$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 k를 찾아라. 3. $\alpha=\phi/k$에 대해 단위 원에 대한 4차 근사 $\boldsymbol{b}(t)$의 제어점 b_i를 계산한다. 4. 출력 : 4차 스플라인 근사의 제어점 $T^j r b_i$, $i=0,\cdots 4$, $j=0,\cdots,k-1$ 을 출력된다. 여기서, T는 각α에 의한 회전변환



(a) (b)

그림 3.1.2 (1) 단원 (붉은 색)이고 우리의 4차 베지어 근사(파란색)이다. 대쉬 라인 (파란색)은 제어다각형이다. 하우스도르프 거리는 4.72×10^{-2}이다. (b) 4차 베지어곡선의 4개의 세그먼트를 사용하여, 반경이 10인 원과 우리의 4차 G^2 스플라인 근사 (파란색)을 얻는다. 스플라인 곡선에 각각의 연결점들은 곡률 연속이다. 하우스도르프 거리는 7.60×10^{-6}이다.

그림 3.1.2(a)는 우리의 방법을 사용해서 단위 원(붉은색)과 4차 베지어 근사(파란색)을 보여준다. 4차 베지어 곡선은 시작 점과 끝점이 만나는 곳에서 같은 곡률을 가진다. 제어 다각형은 점선으로 그려진다. 원과 베지어 곡선 사이의 하우스도르프 거리는 4.72×10^{-2}이다.

만약 원의 반경이 $r=10$, 허용오차 $TOL=10^{-5}$으로 주어진다면,
알고리즘에 의해 $k=4$가 나오고, 그림 3.4.1(b)와 같이 4차 G^2스플라인이 나온다.
원과 4차 스플라인 사이의 하우스도르프 거리는 $7.60\times10^{-6}<\tau$ 이다. 단위원의 4차 베지어 근사의 제어점 b_i는 방정식 (1)-(8)과 $\alpha=\pi/2$로부터 얻어진다. 4차 스플라인 근사의 모든 제어점은 각 $\pi/2$에 대한 회전변환을 사용해서

$T^j rb_i$, $(j=0\cdots 3)$으로부터 얻어진다.

Quartic approximation	zeros of $\psi(t)$ at	$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d_H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})}{\alpha^8}$	$d_H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})$, $\alpha=\pi/2$
$\boldsymbol{b}_{u3}[2]$	$0,0,0,0,1,1,1,1$	$\frac{17-12\sqrt{2}}{2^{15}}\approx 8.98\times 10^{-7}$	3.50×10^{-5}
$\boldsymbol{b}_{\mu 2}[2]$	$0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1,1$	$\frac{27(17-12\sqrt{2})}{2^{23}}\approx 9.47\times 10^{-8}$	3.55×10^{-6}
$\boldsymbol{b}[10]$	$0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1$	$\frac{(\sqrt{2}-1)^4}{2^{19}}\approx 5.61\times 10^{-8}$	2.03×10^{-6}
$\tilde{\boldsymbol{b}}[12]$	$0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,1$	$\frac{(1413+399\sqrt{57})(\sqrt{2}-1)^4}{2^{32}}$ $\approx 3.03\times 10^{-8}$	1.11×10^{-6}
$\boldsymbol{b}_{u2,2}$	$0,0,a,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1-a,1,1$	$\frac{(2\sqrt{2}-3)^2}{2^7}\approx 2.07\times 10^{-8}$	7.60×10^{-7}

표3.1 4차 베지어 근사 $\boldsymbol{b}_{u3}$, $\boldsymbol{b}_{\mu 2}$, $\boldsymbol{b}$에 의한 원호 근사는 논문[2], 논문[11], 논문[13]에 의하여 제시하였다. 각각 오차함수 $\psi(t)$=0을 만족하는 다른t 갖는다. 마지막 $\boldsymbol{b}_{u2,2}$는 우리가 고안한 방법이다.

제4장. 결론 및 의견과 향후 연구

이 논문에서 4차 스플라인 곡선에 의한 원 근사 방법을 나타냈다. 4차 G^2에 의한 원 근사는 적당한 공적을 가진다. 우리의 방법은 4차 베지어 곡선에 의한 원 근사의 다른 이전의 방법보다 더 작은 에러를 가진다. 또한 우리의 방법은 에러의 닫힌 형태와 이전의 방법으로서 곡률-연속 4차 스플라인을 생성한다. 향후 연구로서, 우리는 원뿔에 4차 스플라인에 의해 원 근사값을 확장할 것이다.

참고문헌

[1] Y. J. Ahn. Approximation of conic sections by curvature continuous quartic Bezier curves. Comp. *Math. Appl.*, 60:1986–1993, 2010

[2] Y. J. Ahn and H. O. Kim. Approximation of circular arcs by Bezier curves. *J. Comp. Appl. Math.*, 81:145–163, 1997.

[3] Y. J. Ahn. and S. W. Kim Circle Approximation by quartic G^2 spline using alternation of Error function. *Comp. Math. Appl.*, 17:171–179, 2013.

[4] T. Dokken, M. Dæhlen, T. Lyche, and K. Mørken. Good approximation of circles by curvature-continuous Bezier curves. *Comp. Aided Geom. Desi.,* 7:33–41, 1990.

[5] L. Fang. Circular arc approximation by quintic polynomial curves. *Comp. Aided Geom. Desi.,* 15:843–861, 1998.

[6] L. Fang. G^3 approximation of conic sections by quintic polynomial. *Comp. Aided Geom. Desi.,* 16:755–766, 1999.

[7] M. Floater. High-order approximation of conic sections by quadratic splines. *Comp. Aided Geom. Desi.,* 12(6):617–637, 1995.

[8] M. Floater. An $O(h^{2n})$ Hermite approximation for conic sectoins. *Comp. Aided Geom. Desi.,* 14:135–151, 1997.

[9] M. Goldapp. Approximation of circular arcs by cubic polynomials. *Comp. Aided Geom. Desi.,* 8:227–238, 1991.

[10] S. Hur and T. Kim. The best G^1 cubic and G^2 quartic Bezier approximations of circulararcs. *J. Comp. Appl. Math.,* 236:1183–1192, 2011.

[11] S. H. Kim and Y. J. Ahn. Approximation of circular arcs by quartic Bezier curves. *Comp. Aided Desi.,* 39(6):490–493, 2007.

[12] I. K. Lee, M. S. Kim, and G. Elber. Planar curve offset based on circle approximation. *Comp. Aided Desi.,* 28:617–630, 1996.

[13] Z. Liu, J. Tan, X. Chen, and L. Zhang. An approximation method

to circular arcs. *Appl. Math. Comp.,* 15:1306–1311, 2012.
[14] K. Mørken. Best approximation of circle segments by quadratic B´ezier curves. In P.J. Laurent, A. Le M´ehaut´e, and L.L. Schumaker, editors, Curves and Surfaces, pages 387–396. *Academic Press*, 1990.