[UCI]I804:24011-200000263759

2013년 2월
교육학석사(수학교육전공)학위논문

# 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선의 성질에 관한 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

박 해 연

# 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선의 성질에 관한 연구

Properties of isoparametric curve of quadratic F-Bezier curve

2013년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

박 해 연

# 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선의 성질에 관한 연구

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2012년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

박 해 연

박해연의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 박 순 철 인

심사위원 조선대학교 교수 김 남 권 인

심사위원 조선대학교 교수 안 영 준 인

2012년 12월

조선대학교 교육대학원

# 목　　차

ABSTRACT

제1장　소개 ---------- 1

제2장　예비 지식 (기초 지식) ---------- 3
제1절 이차 유리 베지에 곡선 (표준형) ---------- 3
제2절 F-베지에 곡선 ---------- 11

제3장　연구 결과 ---------- 17
제1절 이차 유리 베지에 곡선과
　　이차 F-베지에 곡선의 관계 ---------- 17
제2절 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 ---------- 21

제4장 결론 ---------- 29

참고문헌 ---------- 30

# ABSTRACT

## Properties of isoparametric curve of quadratic F-Bezier curve

Park, Hae Yeon
Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In this thesis, we consider isoparametric curves of quadratic F-Bezier curves. F-Bezier curves unify C-Bezier curves whose basis is $\{\sin t, \cos t, t, 1\}$ and H-Bezier curves whose basis is $\{\sinh t, \cosh t, t, 1\}$. Thus F-Bezier curves are more useful in Geometric Modeling or CAGD(Computer Aided Geometric Design). We derive the relation of quadratic F-Bezier curves and quadratic rational Bezier curves. We also obtain the geometric properties of isoparametric curve of the quadratic F-Bezier curves at both end points and prove the continuity of the isoparametric curve.

Key Words : F-Bezier curve, quadratic rational Bezier curve, isoprametric curve of quadratic F-Bezier curve.

# 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선의 성질에 관한 연구
# Properties of isoparametric curve of quadratic F-Bezier curve

## 제1장 소개

원뿔 곡선(Conic section curve)은 지금까지 알려진 곡선 유형들 중에 가장 주목받는 곡선이다[1]. 오늘날, 원뿔곡선은 항공기 산업의 중요한 설계 도구이며, 또한 글꼴 디자인 분야에 사용된다. 원뿔곡선은 이차유리 베지에(quadratic rational Bezier curve)로 표현가능하며, 사실상 동일한 곡선이다. 이차 유리 베지에 곡선의 차수를 높여서 고차의 유리 베지에 곡선을 표현할 수 있으며, CAD/CAM(Computer Aided Design/Computer Aided Manufacturing), Computer Vision 등에 매우 다양하게 쓰이고 있다. 유리 베지에 곡선은 타원, 원, 쌍곡선은 표현할 수 있지만, 나선이나 사이클로이드(cycloid)는 표현할 수 없다. 그런 이유로 개발된 곡선이 바로 C-베지에 곡선이다.

C-베지에 곡선은 타원, 나선[4], 사이클로이드는 정확하게 표현할 수 있는 장점이 있지만[3], 쌍곡선과 현수선은 정확하게 표현할 수는 없다. 반면에 H-베지에 곡선은 쌍곡선과 현수선은 정확하게 표현할 수 있지만[2], 타원, 나선, 사이클로이드는 정확하게 표현할 수 없다. 그래서 두 곡선을 통합한 기저를 사용하는 F-베지에 곡선족이 제안된 것이다[8]. F-베지에 곡선은 원호(또는 타원), 원기둥, 나선, 사이클로이드, 쌍곡선, 현수선 등을 정확하게 표현할 수 있다. 그래서 F-베지에 곡선은 공학 분야에서 곡선과 곡면을 구성하는데 있어 C-베지에 곡선과 H-베지에 곡선보다 더 유용할 뿐 아니라 두 곡선의 성질을 거의 다 가지고 있다.

차수 $n$의 F-베지에 곡선[8]은 세 종류의 곡선족이 통합된 곡선으로 $\alpha \in (-\pi, 0)$인 경우 $\{\sin t, \cos t, 1, t, \cdots, t^{n-2}\}$를 기저로 사용하는 C-베지에 곡선[4,5,6,7]으로 정의되고, $\alpha \in (0, \infty)$인 경우 $\{\sinh t, \cosh t, 1, t, \cdots, t^{n-2}\}$를 기저로 하는 H-베지에 곡선[2,4]으로 정의되며, $\alpha = 0$일 때는 차수 $n$의 베지에 곡선으로 정의된다. 그 중 우리는 이차 F-베지에 곡선을 중심으로 연구할 예정이다.

이차 F-베지에 곡선은 $t \in [0, 1]$에 대하여 각각의 $\alpha(\alpha > -\pi)$에 따라 원뿔 곡선을 표현한다. 이차 유리 베지에 곡선 역시 $t \in [0, 1]$에 대하여 각각의 $w(w \in \mathbb{R})$에 따라 원뿔 곡선을 표현한다.

F-베지에 곡선은 $t \in [0, 1]$에 대하여 고정된 $\alpha$값에 따라 곡선이 표현되는데, 여기에서 우리는 반대로 $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 고정된 $t_0$에 따라 곡선이 표현되는 F-베지에 곡선의 등매개변수(isoparametric) 곡선에 대해 관심을 갖게 되었다. 특히

이를 이차 유리 베지에 곡선의 등매개변수 곡선과 비교해보면, 이차 유리 베지에 곡선은 $w \in \mathbb{R}$ 에 대하여 각각의 $t_0\,(0 \le t_0 \le 1)$에 따라 직선으로 표현된다. 반면에 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선은 직선이 아닌 곡선의 형태로 표현된다. 우리는 이러한 차이에 관심을 갖고 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선에 대한 연구 할 예정이다.

이 논문은 2장에서는 기존에 연구된 내용을 바탕으로 베지에 곡선, 특히 이차 유리 베지에 곡선과 F-베지에 곡선에 대한 정의와 성질들에 대한 연구내용이 제시될 것이다. 3장에서는 같은 공간상에서 표현되는 이차 유리 베지에 곡선과 이차 F-베지에 곡선이 같은 곡선을 표현하는 조건과 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선이 갖는 성질들에 대한 연구내용이 제시될 것이다.

## 제2장 예비 지식 (기초 지식)

### 제1절 이차 유리 베지에 곡선 (표준형)

이차 베지에 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$의 일반형은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{p}(t) = B_0^2(t)\boldsymbol{b}_0 + B_1^2(t)\boldsymbol{b}_1 + B_2^2(t)\boldsymbol{b}_2\ ,\ t \in [0,1].$$

여기에서 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^2$은 이차 베지에 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$의 제어다각형(control polygon)의 제어점이고, $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$는 $n$차의 번스타인 다항함수 (Bernstein Polynomial)이며, 여기에서 $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$이다. 이차 베지에 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$의 번스타인 다항함수를 다시 써보면 다음과 같다. (그림 2-1 참고)

$$B_0^2(t) = (1-t)^2,\ B_1^2(t) = 2(1-t)t,\ B_2^2(t) = t^2.$$

이차 베지에 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$가 갖는 주요한 특징은 다음과 같다.

(1) 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$는 항상 양 끝 제어점을 지난다.

$$\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{b}_2$$

(2) 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$의 번스타인 다항함수는 대칭적이다.

$$B_0^2(t) = B_2^2(1-t)$$

따라서 두 제어 다각형 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$와 $\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_0$는 같은 곡선을 나타낸다.

(3) $t \in [0,1]$에 대한 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$ 위의 모든 점은 제어다각형 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$의 볼록 껍질(convex hull)안에 들어간다. $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$의 볼록 껍질이란 모든 제어점 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$을 포함하는 가장 작은 볼록 집합을 말한다.

(4) 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$는 $t$에 대하여 미분 가능하다. 따라서 우리는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) &= -2(1-t)\boldsymbol{b}_0 + [-2t + 2(1-t)]\boldsymbol{b}_1 + 2t\boldsymbol{b}_2 \\ &= 2\left[(1-t)(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0) + t(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1)\right]\end{aligned}$$

$t \in [0,1]$ 이므로 시작점과 끝점에서 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t)$ 값을 각각 구해보면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(0) = 2(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0),\ \ \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(1) = 2(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1)$$

즉, 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$의 시작점에서 접선벡터의 방향은 $\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1}$ 방향과 같고, 끝점에서 접선벡터의 방향은 $\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2}$ 방향과 같다.

(5) 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$의 제어점 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$가 일직선상에 있는 경우, 곡선 $\boldsymbol{p}(t)$는 직선으로 표현된다.

$n$차의 베지에 곡선은 $\{1, t, \ldots, t^n\}$을 기저로 하는데 이러한 기저대신 선형 매개변수 변환을 통하여 다양한 기저를 갖는 베지에 곡선이 연구되었다. 그 중에서도 우리는 원뿔곡선을 표현할 수 있는 유리 베지에 곡선에 주목하였고 특히 이차 유리 베지에 곡선을 중심으로 연구할 예정이다.

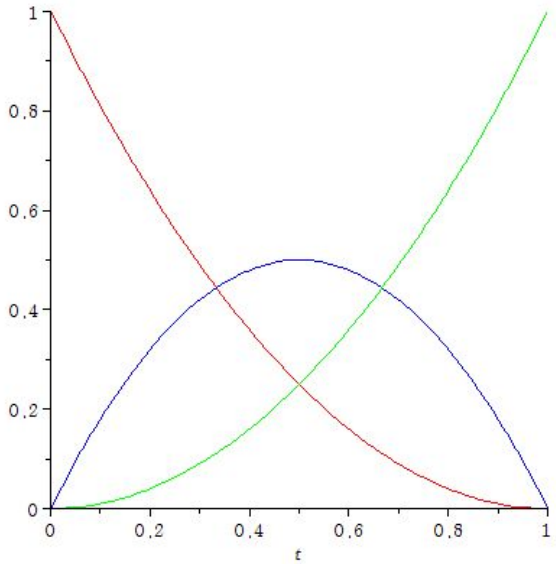


그림 2-1. 이차 베지에 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$의 번스타인 다항함수 $B_0^2(t), B_1^2(t), B_2^2(t)$

이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 일반형은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{w_0 B_0^2(t)\boldsymbol{b}_0+w_1 B_1^2(t)\boldsymbol{b}_1+w_2 B_2^2(t)\boldsymbol{b}_2}{w_0 B_0^2(t)+w_1 B_1^2(t)+w_2 B_2^2(t)},\ t\in[0,1].$$

여기에서 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\mathbb{R}^2$은 제어점이고, $w_0,w_1,w_2>0$은 각각의 제어점에 대응하는 가중치(weight)라 한다. $B_i^n(t)$는 $n$차의 번스타인 다항함수이다.

이를 곡선의 모양은 변화시키지 않고 유리 선형 매개변수 변환을 통해 가중치 값들을 변화시켜 $w_0=w_2=1$로 만들어주면 우리는 이차 유리 베지에의 표준형을 얻을 수 있다. 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 표준형은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{B_0^2(t)\boldsymbol{b}_0+wB_1^2(t)\boldsymbol{b}_1+B_2^2(t)\boldsymbol{b}_2}{B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)}$$

여기서 $w=\sqrt{\frac{{w_1}^2}{w_0 w_2}}$이다.

특히 우리는 이 논문에서 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 표준형을 중심으로 연구할 예정이다.

이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$에서 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{2}\right)$를 어깨점이라 하고, 어깨점 $\boldsymbol{s}$에서의 탄젠트 벡터는 $\overline{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2}$와 평행하다. 또한 $\boldsymbol{m}=\frac{\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_2}{2}$이라 하면 동일선상의 세 점 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{s},\boldsymbol{b}_1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$w=\frac{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{s}}$$

이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$가 갖는 여러 가지 특징은 다음과 같다[1].

(1) $w$의 값에 따라 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 원뿔곡선 종류를 결정할 수 있다.

원뿔곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 가중치 $w$ 대신에 $-w$를 대입해주면 우리는 원뿔곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 여부분(complementary segment) $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$, $t\in[0,1]$를 얻을 수 있다. (그림2-2 참조. 점선은 원뿔곡선 $\boldsymbol{r}(t)$이고, 실선은 여부분 $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$이다.)

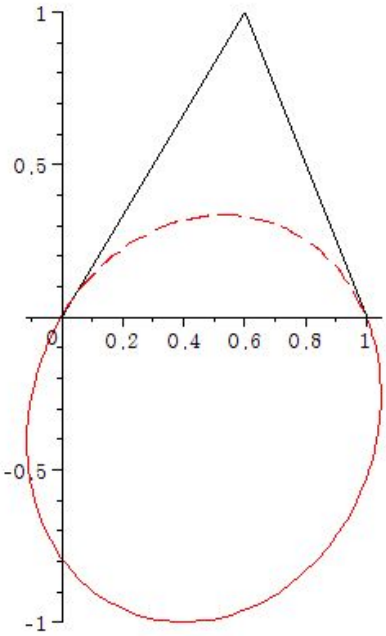


그림 2-2. $w=\dfrac{1}{2}$일 때 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$와 $\boldsymbol{r}(t)$의 여부분 $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$

이러한 여부분 $\hat{\boldsymbol{r}}(t)$의 분모를 $\hat{w}(t)$라 하면 $t\in[0,1]$에서 $\hat{w}(t)=0$을 만족하는 $t$를 특이점(singularities)이라 한다. 실수인 특이점은 최대 두 개이며 특이점의 개수에 따라 $\boldsymbol{r}(t)$의 원뿔 곡선 종류를 결정 할 수 있다. $\hat{w}(t)=0$를 만족하는 실근 $t$를 구해 보면 다음과 같다.

$$\hat{w}(t)=B_0^2(t)-wB_1^2(t)+B_2^2(t)=(1-t)^2-2wt(1-t)^2+t^2=0$$

$$(2+2w)t^2-2(1+w)t+1=0$$

$$t_{1,2}=\frac{1+w\pm\sqrt{w^2-1}}{2+2w}$$

따라서 $w$의 범위에 따른 특이점의 개수와 $\boldsymbol{r}(t)$의 원뿔 곡선 종류를 정리해 보면 다음과 같다. (보다 자세한 설명은 [1]을 참조)

특이점이 없다 $\Leftrightarrow$ $w<1$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}(t)$는 타원

특이점이 두 개 $\Leftrightarrow$ $w>1$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}(t)$는 쌍곡선

특이점이 한 개 $\Leftrightarrow$ $w=1$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}(t)$는 포물선

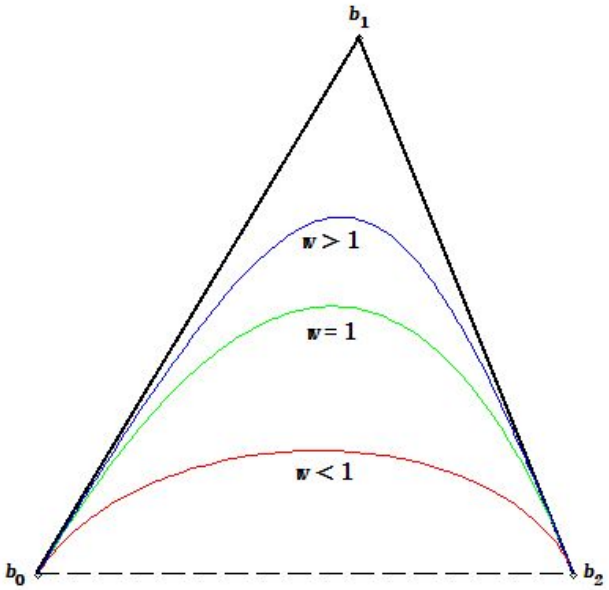


그림 2-3. 가중치 $w$의 범위에 따른 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 형태

(2) 실제 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$는 또 다른 매개변수 $w > 0$를 가지고 있다. $t = t_0$에 대하여

$$\boldsymbol{r}^*(w, t_0) = \boldsymbol{r}(t)$$

라 정의하자. 곡선 $\boldsymbol{r}^*(w,t_0)$는 각각의 $t_0$에 대하여 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 등매개변수 곡선 (isoparametric curve) 이다.

곡선 $\boldsymbol{r}^*(w,t_0)$를 정리해보면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{r}^*(w,t_0) = \frac{B_0^2(t_0)\boldsymbol{b}_0 + wB_1^2(t_0)\boldsymbol{b}_1 + B_2^2(t_0)\boldsymbol{b}_2}{B_0^2(t_0) + wB_1^2(t_0) + B_2^2(t_0)}$$

$$= \frac{(1-t_0)^2\boldsymbol{b}_0 + 2wt_0(1-t_0)\boldsymbol{b}_1 + t_0^2\boldsymbol{b}_2}{(1-t_0)^2 + 2wt_0(1-t_0) + t_0^2}$$

$$= \frac{(1-t_0)^2\boldsymbol{b}_0 - (2t_0^2 - 2t_0 + 1)\boldsymbol{b}_1 + t_0^2\boldsymbol{b}_2}{(1-t_0)^2 + 2wt_0(1-t_0) + t_0^2} + \boldsymbol{b}_1$$

따라서 곡선 $\boldsymbol{r}^*(w,t_0)$는 각각의 $t_0$에 대하여 $w$에 상관없이 $\boldsymbol{b}_1$을 지나고 벡터

$\dfrac{(1-t_0)^2\boldsymbol{b}_0-(2t_0^2-2t_0+1)\boldsymbol{b}_1+t_0^2\boldsymbol{b}_2}{(1-t_0)^2+2wt_0(1-t_0)+t_0^2}$ 방향으로 움직이는 직선이다.

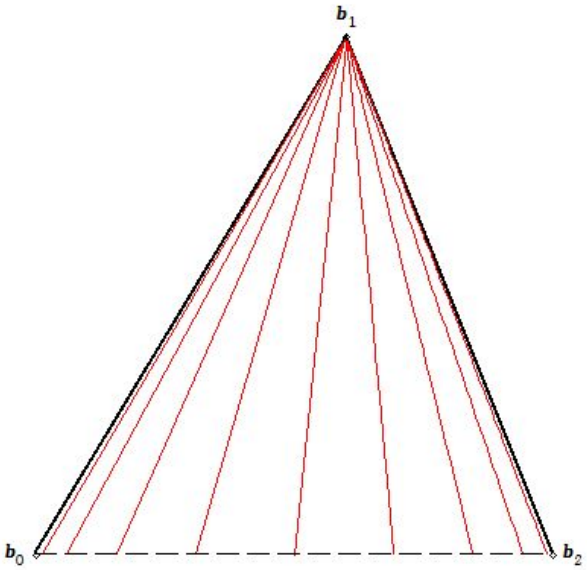


그림 2-4. $w\in\mathbb{R}$ 에 대한 $t_0=\dfrac{i}{10}\,(i=1,2,\ldots,9)$(왼쪽부터)일 때의 곡선 $\boldsymbol{r}^*(w,t_0)$

(3) 제어다각형 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$의 모든 점 $\boldsymbol{x}$에 대하여 $\boldsymbol{x}=\tau_0\boldsymbol{b}_0+\tau_1\boldsymbol{b}_1+\tau_2\boldsymbol{b}_2$으로 표현할 수 있다. 여기에서 $\tau_0+\tau_1+\tau_2=1$ 이다. 이때, $(\tau_0,\tau_1,\tau_2)$를 $\boldsymbol{x}$의 베리센트릭 좌표(barycentric coordinates)라 부른다.

제어다각형 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$의 모든 점 $\boldsymbol{x}$는 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$로 표현될 수 있고, 그러한 표현은 유일하기 때문에 $\boldsymbol{b}_i$의 계수를 비교하면 다음과 같다.

$$\tau_0=\frac{(1-t)^2}{D},$$

$$\tau_1=\frac{2wt(1-t)}{D},$$

$$\tau_2=\frac{t^2}{D}$$

여기서 $D=B_0^2(t)+wB_1^2(t)+B_2^2(t)$이다. 따라서 점 $\boldsymbol{x}=\tau_0\boldsymbol{b}_0+\tau_1\boldsymbol{b}_1+\tau_2\boldsymbol{b}_2$를 지나는 이

차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$의 가중치 $w$는 $\tau_1^2 - 4w^2\tau_0\tau_2 = 0$을 만족한다.

(4) 원을 그릴 수 있다.

각 $\theta_0$를 갖는 원호에 대하여 제어점은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}_0 = (1,0),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \left(1, \tan\frac{\theta_0}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{b}_2 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0).$$

이때 가중치는 $\cos\theta'$, $(\theta' = \angle(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1))$이다.

$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$일 때의 원호를 표현해 보면 다음과 같다.(그림 2-5) 파란색 선은 반지름의 길이가 1인 원을 나타낸 것이고, 빨간색 선은 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$로 표현한 원호이다.

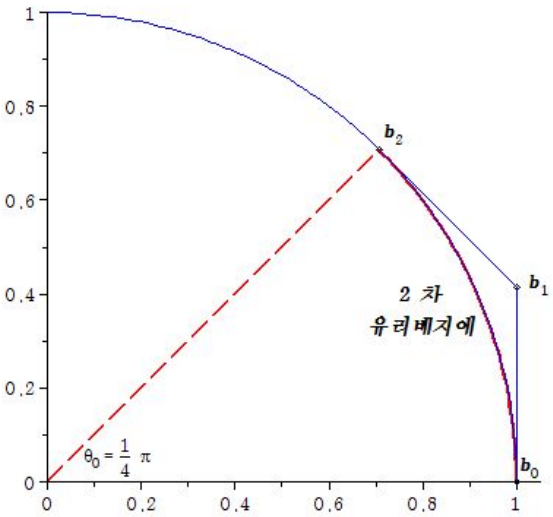


그림 2-5. 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$로 표현한 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$일 때의 원호

(5) 타원을 그릴 수 있다.

타원$(a\cos\theta, b\sin\theta), (\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2)$에서 임의의 각 $\theta$에 대한 제어점은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q}_0 = (a\cos\theta_1, b\sin\theta_1),$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \left(a\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1 \tan\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right), b\left(\sin\theta_1 - \cos\theta_1 \tan\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{q}_2 = (a\cos\theta_2, b\sin\theta_2).$$

이 때 가중치는 $w = \cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$이다.

$\theta_1 = \frac{2}{9}\pi, \theta_2 = \frac{17}{18}\pi, a = 2, b = 1.5$일 때 타원을 표현해 보면 다음과 같다.(그림 2-6) 파란색 선은 장축의 길이가 2, 단축의 길이가 1.5인 타원을 나타낸 것이고, 빨간색 선은 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$로 표현한 타원이다.

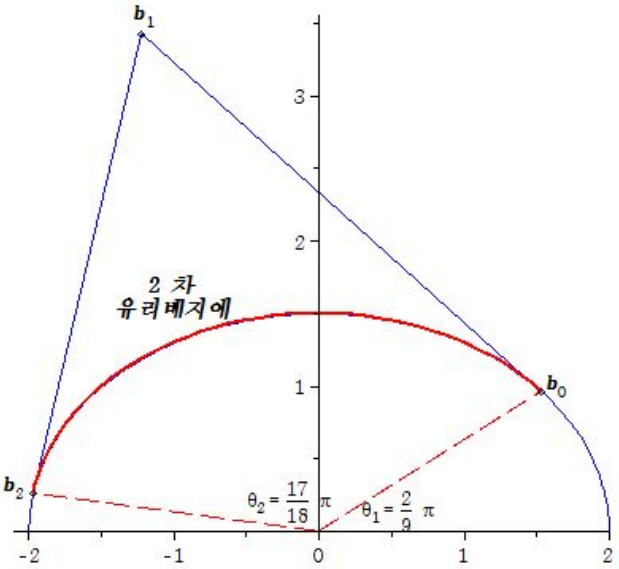


그림 2-6. 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$로 표현한 $\theta_1 = \frac{2}{9}\pi, \theta_2 = \frac{17}{18}\pi, a = 2, b = 1.5$일 때의 타원

## 제2절 F-베지에 곡선

차수 $n$의 F-베지에 곡선[8]은 세 종류의 곡선족이 통합된 곡선으로 $\alpha \in (-\pi, 0)$인 경우 $\{\sin t, \cos t, 1, t, \cdots, t^{n-2}\}$를 기저로 사용하는 차수 $n$의 C-베지에 곡선[4,5,6,7]으로 정의되고, $\alpha \in (0, \infty)$인 경우 $\{\sinh t, \cosh t, 1, t, \cdots, t^{n-2}\}$를 기저로 하는 차수 $n$의 H-베지에 곡선[2,4]으로 정의되고, $\alpha = 0$일 때는 차수 $n$의 베지에 곡선으로 정의된다.

자연수 $n \geq 2$에 대하여 제어점 $\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n-1}, \boldsymbol{q}_n$이 주어졌다고 하면, 임의로 선택된 실수값 $C(-1 < C < \infty)$에 대하여, 차수 $n$의 매개변수 $C$를 갖는 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$가 다음과 같이 정의 된다

$$\boldsymbol{q}(t) = \sum_{i=0}^{n} Z_{i,n}(t)\boldsymbol{q}_i \quad (0 \leq t \leq 1).$$

여기서, $Z_{i,n}(t)\,(0 \leq i \leq n)$는 다음의 재귀방정식에 의해 정의된다.

$$-1 < C < \infty, \quad \alpha := 2\mathrm{acos}(C), \quad \sin(\alpha) = 2C\sqrt{1-C^2},$$

$$Z_{1,1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha t)}{\sin(\alpha)} & (-\pi < \alpha < 0) \\ \dfrac{\sinh(\alpha t)}{\sinh(\alpha)} & (0 < \alpha) \\ t & (\alpha = 0) \end{cases},$$

$$Z_{0,1}(t) = Z_{1,1}(1-t)$$

이고

$$W_{i,n}(t) = \alpha \int_0^t Z_{i,n}(t)dt \qquad (0 \leq i \leq n, 1 \leq n),$$

$$Z_{0,n}(t) = 1 - \frac{W_{0,n-1}(t)}{W_{0,n-1}(1)} \qquad (2 \leq n \leq k),$$

$$Z_{i,n}(t) = \frac{W_{i-1,n-1}(t)}{W_{i-1,n-1}(1)} - \frac{W_{i,n-1}(t)}{W_{i,n-1}(1)} \qquad (1 \leq i \leq n-1,\ 2 \leq n),$$

$$Z_{n,n}(t) = \frac{W_{n-1,n-1}(t)}{W_{n-1,n-1}(1)} \qquad (2 \leq n).$$

$n=2$일 때, 즉 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$의 기저함수를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$Z_{2,2}(t)=\begin{cases} \dfrac{\cos(\alpha t)-1}{\cos(\alpha)-1} & (-\pi<\alpha<0) \\ \dfrac{\cosh(\alpha t)-1}{\cosh(\alpha)-1} & (0<\alpha) \\ t^2 & (\alpha=0) \end{cases},$$

$$Z_{0,2}(t)=Z_{2,2}(1-t),$$

$$Z_{1,2}(t)=1-Z_{0,2}(t)-Z_{2,2}(t).$$

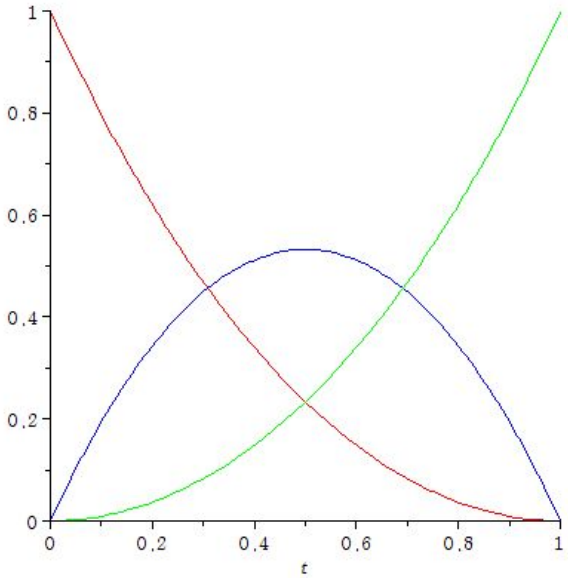


그림 2-7. $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$일 때 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$의 기저함수

$n=3$일 때, 즉 삼차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$의 기저함수를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$Z_{3,3}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\alpha t)-\alpha t}{\sin(\alpha)-\alpha} & (-\pi<\alpha<0)\\[2ex] \dfrac{\sinh(\alpha t)-\alpha t}{\sinh(\alpha)-\alpha} & (0<\alpha)\\[2ex] t^3 & (\alpha=0)\end{cases},$$

$$Z_{0,3}(t)=Z_{3,3}(1-t),$$

$$Z_{1,3}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\alpha)-\alpha t+\sin(\alpha(t-1))}{\sin(\alpha)-\alpha} & \\ -\dfrac{\sin(\alpha)-\alpha t(\cos(\alpha)+1)+\sin(\alpha(t-1))+\sin(\alpha t)}{2\sin(\alpha)-\alpha-\alpha\cos(\alpha)} & (-\pi<\alpha<0)\\[2ex] \dfrac{\sinh(\alpha)-\alpha t+\sinh(\alpha(t-1))}{\sinh(\alpha)-\alpha} & \\ -\dfrac{\sinh(\alpha)-\alpha t(\cosh(\alpha)+1)+\sinh(\alpha(t-1))+\sinh(\alpha t)}{2\sinh(\alpha)-\alpha-\alpha\cosh(\alpha)} & (0<\alpha)\\[2ex] t^3 & (\alpha=0)\end{cases},$$

$$Z_{2,3}(t)=Z_{1,3}(1-t).$$

F-베지에 곡선은 C-베지에 곡선과 H-베지에 곡선의 통합된 기저를 사용하기 때문에 두 베지에 곡선이 갖는 특징을 거의 가지고 있는데 그 중 이차 F-베지에 곡선이 갖는 주요한 특징 몇 가지를 살펴보면 다음과 같다.

(1) $Z_{0,2}(t)+Z_{1,2}(t)+Z_{2,2}(t)\equiv 1.$

(2) $Z_{i,2}(t)\geq 0 \quad (i=0,1,2).$

(3) 대칭성 : 같은 $\alpha$에 대하여, 다른 매개변수변환을 하더라도 $\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$와 $\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_0$ 모두 같은 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$를 나타낸다.

$$\boldsymbol{q}(t,\alpha,\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)\equiv\boldsymbol{q}(1-t,\alpha,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_0),\quad (0\leq t\leq 1,\ \alpha>-\pi)$$

(4) 기하학적 불변성 : F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$의 모양은 좌표 선택에서 독립적이다.

(5) 볼록껍질(convex hull) 성질 : F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$ 전체 부분은 반드시 $\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$에 걸친 제어 다각형 안에 있다.

특히 우리는 이차 F-베지에 곡선을 중심으로 연구할 예정이다.

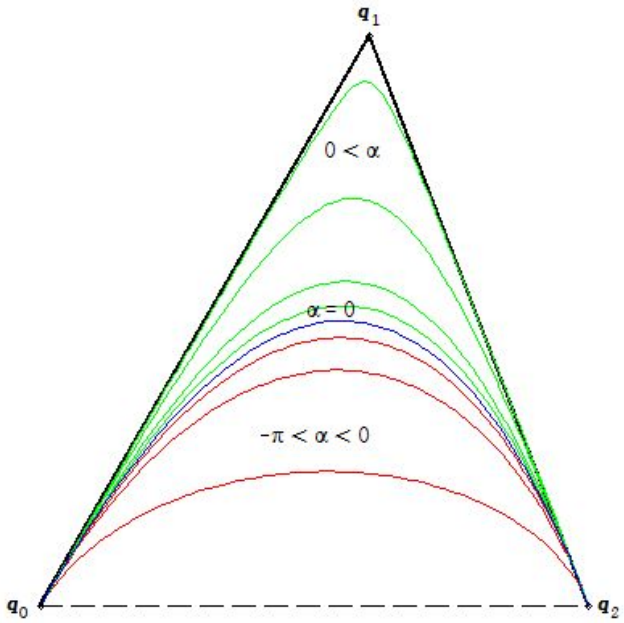


그림 2-8. $t \in [0,1]$에 대한
$\alpha = -0.8\pi, -0.5\pi, -0.3\pi, 0, 0.3\pi, 0.5\pi, \pi, 2\pi$(아래쪽부터)일 때의
이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$

## 제3장 연구 결과

### 제1절 이차 유리 베지에 곡선과 이차 F-베지에 곡선의 관계

정리 3.1.1

모든 $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$는 항상 양 끝 제어점을 지난다.

증명

모든 $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 $t \in [0,1]$이므로 $t=0$과 $t=1$을 각각 대입해보면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{q}(1) = \boldsymbol{q}_2$$

따라서 모든 $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$는 항상 양 끝 제어점을 지난다.

□

정리 3.1.2

각각의 $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$는 원뿔곡선이다.

증명

각각의 $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 이차 F-베지에 곡선은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{q}(t) = Z_{0,2}(t)\boldsymbol{q}_0 + Z_{1,2}(t)\boldsymbol{q}_1 + Z_{2,2}(t)\boldsymbol{q}_2$$

또한 각각의 기저함수에 대하여 $Z_{i,2}(t) \geq 0$ $(i = 0,1,2)$을 만족하고, $Z_{0,2}(t) + Z_{1,2}(t) + Z_{2,2}(t) \equiv 1$이다. 따라서 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$의 베리센트릭 좌표(barycentric coordinates)는 $(Z_{0,2}(t), Z_{1,2}(t), Z_{2,2}(t))$이고, 모든 $t \in [0,1]$에 대하여 $\dfrac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}}$를 계산하면 다음과 같다.

$-\pi < \alpha < 0$ 인 경우

$$\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}} = \frac{1}{2}\frac{\cos(\alpha) - \cos(-\alpha + \alpha t) - \cos(\alpha t) + 1}{(\cos(\alpha) - 1)\sqrt{\dfrac{(\cos(-\alpha + \alpha t) - 1)(\cos(\alpha t) - 1)}{(\cos(\alpha) - 1)^2}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos(\alpha) - \cos(\alpha t) + 1 - \cos(-\alpha + \alpha t)}{\sqrt{(1 - \cos(-\alpha + \alpha t))}\ \sqrt{1 - \cos(\alpha t)}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\alpha t+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\alpha t+\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$\alpha = 0$인 경우

$$\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}} = \frac{1}{2}\frac{2(1-t)t}{\sqrt{(1-t)^2t^2}} = 1$$

$\alpha > 0$인 경우

$$\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}} = \frac{1}{2}\frac{\cosh(\alpha)-\cosh(-\alpha+\alpha t)-\cosh(\alpha t)+1}{(\cosh(\alpha)-1)\sqrt{\frac{(\cosh(-\alpha+\alpha t)-1)(\cosh(\alpha t)-1)}{(\cosh(\alpha)-1)^2}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cosh(\alpha)-\cosh(\alpha t)+1-\cosh(-\alpha+\alpha t)}{\sqrt{(1-\cosh(-\alpha+\alpha t))}\sqrt{1-\cosh(\alpha t)}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sinh\left(\frac{\alpha t+\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha t}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sinh\left(\frac{\alpha t+\alpha}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\alpha t-\alpha}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha t}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\sinh\left(\frac{\alpha t}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha t}{2}\right)}$$

$$= \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

즉, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & (-\pi < \alpha < 0) \\ 1 & (\alpha = 0) \\ \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) & (\alpha > 0) \end{cases}$$

따라서 베리센트릭 좌표의 비 $\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}}$가 일정하므로 각각의 $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$는 원뿔곡선이다.

□

<u>정리 3.1.3</u>

모든 $t \in [0,1]$에 대하여 $w = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 또는 $w = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$를 만족하는 $\alpha(-\pi < \alpha < 0$ 또는 $\alpha > 0)$에 대하여 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$와 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$는 동일한 곡선을 표현한다. $\alpha = 0$인 경우에는 이차 베지에 곡선이다.

증명

이차 유리베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t) = \frac{B_0^2(t)\,\boldsymbol{b}_0 + w\,B_1^2(t)\,\boldsymbol{b}_1 + B_2^2(t)\boldsymbol{b}_2}{B_0^2(t) + w\,B_1^2(t) + B_2^2(t)}$에서 모든 $t \in [0,1]$에 대하여 베리센트릭 좌표 비는 다음과 같다.

$$\frac{B_1^2(t)}{2\sqrt{B_0^2(t)B_2^2(t)}} = \frac{1}{2}\frac{2\,w(1-t)t}{\sqrt{(1-t)^2 t^2}} = w.$$

이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$에서 모든 $t \in [0,1]$에 대하여 $-\pi < \alpha < 0$인 경우 $\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$이고, $\alpha > 0$인 경우 $\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2.2}(t)}} = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$이다.

따라서 $w=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$를 만족하는 $\alpha(-\pi<\alpha<0)$또는 $w=\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$를 만족하는 $\alpha$ $(\alpha>0)$에 대하여 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$는 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$와 같은 곡선을 표현한다.

또한 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$는 $w=1$일 때 이차 베지에 곡선이다. 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$에서 모든 $t\in[0,1]$에 대하여 $\alpha=0$인 경우 $\frac{Z_{1,2}(t)}{2\sqrt{Z_{0,2}(t)Z_{2,2}(t)}}=1$이므로, 이차 베지에 곡선이다.

□

그림 3-1은 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$인 경우 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$와 $w=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$인 경우 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$를 표현한 것이다. 빨간색 실선은 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$, 파란색 점선은 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$로 같은 곡선을 표현함을 확인할 수 있다.

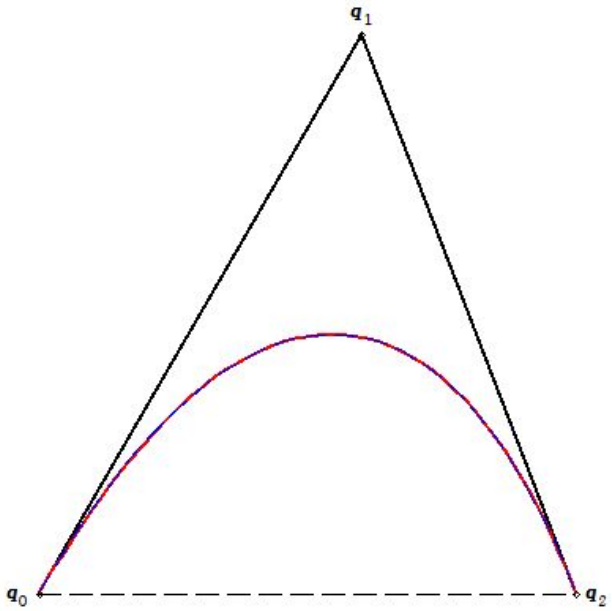


그림 3-1. $\alpha=-\frac{\pi}{3}$인 경우 이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$와 $w=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$인 경우 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$

## 제 2절 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수(isoparametric) 곡선

이차 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$의 $t=t_0$에 대한 등매개변수(isoparametric) 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)=Z_{0,2}(\alpha,t_0)\boldsymbol{q}_0+Z_{1,2}(\alpha,t_0)\boldsymbol{q}_1+Z_{2,2}(\alpha,t_0)\boldsymbol{q}_2$$

$t_0\in[0,1]$. 여기서 $\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$은 제어점이고, $\alpha$의 범위 $-\pi<\alpha<0$, $\alpha=0$, $\alpha>0$에 따른 각각의 기저함수는 다음과 같다.

$\alpha\in(-\pi,0)$인 경우

$$Z_{0,2}(\alpha,t_0)=\frac{1-\cos(\alpha(1-t_0))}{1-\cos\alpha}$$

$$Z_{1,2}(\alpha,t_0)=\frac{\cos(\alpha t_0)+\cos(\alpha(1-t_0))-1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$Z_{2,2}(\alpha,t_0)=\frac{1-\cos(\alpha t_0)}{1-\cos\alpha}$$

$\alpha\in(0,\infty)$인 경우

$$Z_{0,2}(\alpha,t_0)=\frac{1-\cosh(\alpha(1-t_0))}{1-\cosh\alpha}$$

$$Z_{1,2}(\alpha,t_0)=\frac{\cosh(\alpha t_0)+\cosh(\alpha(1-t_0))-1-\cosh\alpha}{1-\cosh\alpha}$$

$$Z_{2,2}(\alpha,t_0)=\frac{1-\cosh(\alpha t_0)}{1-\cosh\alpha}$$

$\alpha=0$인 경우

$$Z_{0,2}(0,t_0)=(1-t_0)^2$$

$$Z_{1,2}(0,t_0)=2t_0(1-t_0)$$

$$Z_{2,2}(0,t_0)={t_0}^2$$

<u>정리 3.2.1</u>

각각의 $t_0\in[0,1]$에 대하여, 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$,

$\alpha \in (-\pi, \infty)$의 시작점은 $\frac{1}{2}((1+\cos(\pi t_0))\boldsymbol{q}_0 + (1-\cos(\pi t_0))\boldsymbol{q}_2)$이고, 끝점은 $\boldsymbol{q}_1$이다.

증명

각각의 $t_0 \in [0,1]$에 대하여 시작점은 $\alpha \to -\pi$일 때 $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$이고 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{\alpha \to -\pi} \boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0) = \frac{1}{2}((1+\cos(\pi t_0))\boldsymbol{q}_0 + (1-\cos(\pi t_0))\boldsymbol{q}_2)$$

각각의 $t_0 \in (0,1)$에 대하여 끝점은 $\alpha \to \infty$일 때 $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$이고 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{\alpha \to \infty} \boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0) = \boldsymbol{q}_1$$

□

모든 시작점은 선분 $\overline{\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{q}_2}$ 위에 놓여있다.

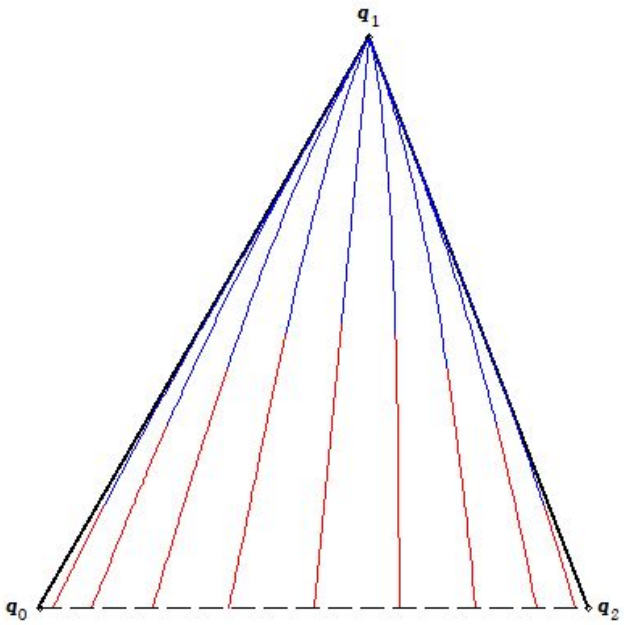


그림 3-2. $\alpha \in (-\pi, \infty)$에 대하여 각 $t_0 = \frac{i}{10}(i = 1,2,\ldots,9)$에 대한 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$

정리 3.2.2

각각의 $t_0 \in [0,1]$에 대하여, 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$의 시작점($\alpha \to -\pi$)에서의 탄젠트 벡터는 $\frac{1}{2}\sin(\pi t_0)((t_0-1)\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}_1 - t_0\boldsymbol{q}_2)$이고, 끝 점($\alpha \to \infty$)에서의 탄젠트 벡터는 $0 \le t_0 < \frac{1}{2}$인 경우는 $\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_0$, $t_0 = \frac{1}{2}$인 경우는 $\frac{2\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{q}_2}{2}$, $\frac{1}{2} < t_0 \le 1$인 경우는 $\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2$이다.

증명

$\alpha \in (-\pi, 0)$인 경우, $\alpha$에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{0,2}(\alpha, t_0) = \frac{\sin(\alpha(1-t_0))(1-t_0)}{1-\cos\alpha} - \frac{(1-\cos(\alpha(1-t_0))\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{1,2}(\alpha, t_0) = -\frac{\sin(\alpha(1-t_0))(1-t_0) + \sin(\alpha t_0)t_0}{1-\cos\alpha} + \frac{(2-\cos(\alpha(1-t_0) - \cos(\alpha t_0))\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{2,2}(\alpha, t_0) = \frac{\sin(\alpha t_0)t_0}{1-\cos\alpha} - \frac{(1-\cos(\alpha t_0))\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}$$

각각의 $t_0$에 대하여 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$의 시작점($\alpha \to -\pi$)에서의 탄젠트 벡터는 $\lim_{\alpha \to -\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha}\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$이다. 여기서 $D\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$라 하면 시작점($\alpha \to -\pi$)에서의 탄젠트 벡터는 다음과 같다.

$$\lim_{\alpha \to -\pi} D\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0) = \frac{1}{2}\sin(\pi t_0)((t_0-1)\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}_1 - t_0\boldsymbol{q}_2)$$

$\alpha \in (0, \infty)$인 경우, $\alpha$에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{0,2}(\alpha, t_0) = -\frac{\sinh(\alpha(1-t_0))(1-t_0)}{1-\cosh\alpha} + \frac{(1-\cosh(\alpha(1-t_0))\sinh\alpha}{(1-\cosh\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{1,2}(\alpha, t_0) = \frac{\sinh(\alpha(1-t_0))(1-t_0) + \sinh(\alpha t_0) t_0}{1-\cosh\alpha} - \frac{(2-\cosh(\alpha(1-t_0)) - \cosh(\alpha t_0))\sinh\alpha}{(1-\cosh\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{2,2}(\alpha, t_0) = -\frac{\sinh(\alpha t_0) t_0}{1-\cosh\alpha} + \frac{(1-\cosh(\alpha t_0))\sinh\alpha}{(1-\cosh\alpha)^2}$$

위의 각각의 함수를 $DZ_{0,2}(\alpha, t_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{0,2}(\alpha, t_0)$, $DZ_{1,2}(\alpha, t_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{1,2}(\alpha, t_0)$, $DZ_{2,2}(\alpha, t_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} Z_{2,2}(\alpha, t_0)$라 하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{DZ_{0,2}(\alpha, t_0)}{DZ_{2,2}(\alpha, t_0)} = \begin{cases} \infty & \left(0 \le t_0 < \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(t_0 = \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2} < t_0 \le 1\right) \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{DZ_{1,2}(\alpha, t_0)}{DZ_{2,2}(\alpha, t_0)} = \begin{cases} -\infty & \left(0 \le t_0 < \frac{1}{2}\right) \\ -2 & \left(t_0 = \frac{1}{2}\right) \\ -1 & \left(\frac{1}{2} < t_0 \le 1\right) \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{DZ_{1,2}(\alpha, t_0)}{DZ_{0,2}(\alpha, t_0)} = \begin{cases} -1 & \left(0 \le t_0 < \frac{1}{2}\right) \\ -2 & \left(t_0 = \frac{1}{2}\right) \\ -\infty & \left(\frac{1}{2} < t_0 \le 1\right) \end{cases}$$

위의 결과를 통하여 $0 \le t_0 < \frac{1}{2}$인 경우 $DZ_{0,2}(\alpha, t_0)$의 크기가 가장 크고, $t_0 = \frac{1}{2}$

인 경우 $DZ_{1,2}(\alpha,t_0)$의 크기가 가장 크고, $\frac{1}{2}< t_0 \le 1$인 경우 $DZ_{2,2}(\alpha,t_0)$크기가 가장 큰 것을 알 수 있다. 즉, 각각의 $t$의 범위에 따른 끝 점($\alpha\to\infty$)에서의 탄젠트 벡터의 방향은 $0 \le t_0 < \frac{1}{2}$인 경우 $\lim_{\alpha\to\infty}\frac{D\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)}{|DZ_{0,2}(\alpha,t_0)|}$, $t_0=\frac{1}{2}$인 경우 $\lim_{\alpha\to\infty}\frac{D\boldsymbol{q}^*\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)}{\left|DZ_{1,2}\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)\right|}$, $\frac{1}{2}< t_0 \le 1$인 경우 $\lim_{\alpha\to\infty}\frac{D\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)}{|DZ_{2,2}(\alpha,t_0)|}$와 같다. 따라서 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{D\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)}{|DZ_{0,2}(\alpha,t_0)|}=\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_0$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{D\boldsymbol{q}^*\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)}{\left|DZ_{1,2}\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)\right|}=\frac{2\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_0-\boldsymbol{q}_2}{2}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{D\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)}{|DZ_{2,2}(\alpha,t_0)|}=\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2$$

□

특히 $t_0=\frac{1}{2}$인 경우 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 제어점 $\boldsymbol{q}_0$와 $\boldsymbol{q}_2$의 중점 $\frac{\boldsymbol{q}_0+\boldsymbol{q}_2}{2}$에서 시작하여 $\boldsymbol{q}_1$를 향하는 직선이다.

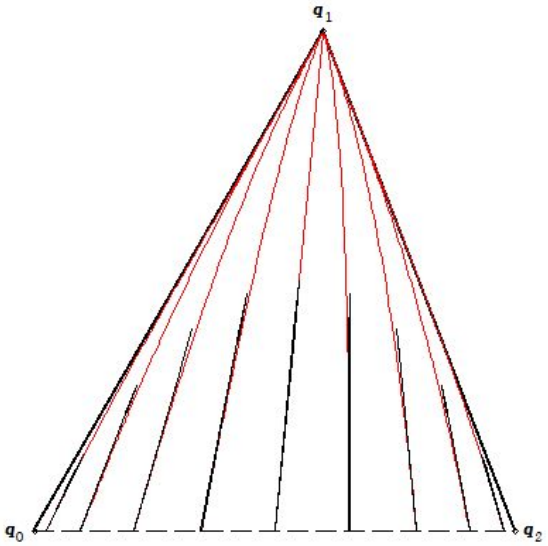


그림 3-3. 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선$\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$의

각 $t_0=\dfrac{i}{10}\,(i=1,2,...,9)$에 대한 시작점($\alpha\to-\pi$)에서의 탄젠트벡터

<u>정리3.2.3</u>

이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 $\alpha=0$일 때 연속이고 미분가능하다.

증명

i) 연속성

이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 $\alpha\in(-\pi,0)$인 경우와 $\alpha\in(0,\infty)$인 경우의 기저함수가 다르므로 $\alpha\to-0$인 경우와 $\alpha\to+0$인 경우의 극한을 비교하자.

먼저 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$의 $\alpha\to-0$인 경우와 $\alpha\to+0$인 경우의 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{\alpha\to-0}\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)=t_0^2\boldsymbol{q}_0+2t_0(1-t_0)\boldsymbol{q}_1+(1-t_0)^2\boldsymbol{q}_2$$

$$\lim_{\alpha\to+0}\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)=t_0^2\boldsymbol{q}_0+2t_0(1-t_0)\boldsymbol{q}_1+(1-t_0)^2\boldsymbol{q}_2$$

즉, $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$에서 $\alpha \to 0$일 때 극한은 존재하고 이를 $\boldsymbol{q}^*(0, t_0)$과 비교하여 보면 다음과 같다.

$$\lim_{\alpha \to 0} \boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0) = t_0^2 \boldsymbol{q}_0 + 2t_0(1-t_0)\boldsymbol{q}_1 + (1-t_0)^2 \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}^*(0, t_0)$$

따라서 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$는 $\alpha = 0$일 때 연속이다.

ii) 미분가능성

$\triangle\alpha \to 0$일 때 $\lim_{\triangle\alpha \to 0} \dfrac{\boldsymbol{q}^*(\triangle\alpha, t_0) - \boldsymbol{q}^*(0, t_0)}{\triangle\alpha}$의 좌우극한이 동일함을 보이자.

테일러급수 전개식에 따라 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha, t_0)$의 기저함수 $Z_{2,2}(\alpha, t_0)$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$\alpha \in (-\pi, 0)$인 경우

$$\frac{1-\cos(\alpha t)}{1-\cos\alpha} = \frac{\dfrac{t^2\alpha^2}{2!} - \dfrac{t^4\alpha^4}{4!} + \cdots}{\dfrac{\alpha^2}{2!} - \dfrac{\alpha^4}{4!} + \cdots} = \frac{t^2 - \dfrac{2\alpha^2 t^4}{4!} + \cdots}{1 - \dfrac{2\alpha^2}{4!} + \cdots}$$

$$= t^2 + \frac{t^2 - t^4}{12}\alpha^2 + O(\alpha^4)$$

$\alpha \in (0, \infty)$인 경우

$$\frac{1-\cosh(\alpha t)}{1-\cosh\alpha} = \frac{-\dfrac{t^2\alpha^2}{2!} - \dfrac{t^4\alpha^4}{4!} + \cdots}{-\dfrac{\alpha^2}{2!} - \dfrac{\alpha^4}{4!} + \cdots} = \frac{t^2 + \dfrac{2\alpha^2 t^4}{4!} + \cdots}{1 + \dfrac{2\alpha^2}{4!} + \cdots}$$

$$= t^2 + \frac{t^4 - t^2}{12}\alpha^2 + O(\alpha^4)$$

즉,

$$Z_{2,2}(\alpha, t_0) = \begin{cases} t_0^2 + \dfrac{t_0^2 - t_0^4}{12}\alpha^2 + O(\alpha^4) & (-\pi < \alpha < 0) \\ t_0^2 & (\alpha = 0) \\ t_0^2 + \dfrac{t_0^4 - t_0^2}{12}\alpha^2 + O(\alpha^4) & (\alpha > 0) \end{cases}$$

이고, 정의에 의해 $Z_{0,2}(\alpha, t_0) = Z_{2,2}(\alpha, 1-t_0)$, $Z_{1,2}(\alpha, t_0) = 1 - Z_{0,2}(\alpha, t_0) - Z_{2,2}(\alpha, t_0)$이다. 따라서 위의 테일러급수 전개식을 통해 $\triangle\alpha \to 0$일 때

$\lim_{\triangle\alpha\to 0}\frac{\boldsymbol{q}^*(\triangle\alpha,t_0)-\boldsymbol{q}^*(0,t_0)}{\triangle\alpha}$의 좌우극한을 살펴보면,

$$\lim_{\triangle\alpha\to -0}\frac{\boldsymbol{q}^*(\triangle\alpha,t_0)-\boldsymbol{q}^*(0,t_0)}{\triangle\alpha} = 0 = \lim_{\triangle\alpha\to +0}\frac{\boldsymbol{q}^*(\triangle\alpha,t_0)-\boldsymbol{q}^*(0,t_0)}{\triangle\alpha}$$

이며, 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 $\alpha=0$일 때 미분가능하다.

□

곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 $\alpha=0$일 때 미분가능하므로, 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 모든 $\alpha\in(-\pi,\infty)$에 대해서 미분가능하다.

<u>정리3.2.4</u>

이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 두 번 미분가능하지 않다.

증명

$$\lim_{\triangle\alpha\to +0}\frac{DZ_{2,2}(\triangle\alpha,t_0)-DZ_{2,2}(0,t_0)}{\triangle\alpha} = \frac{t_0^4-t_0^2}{6}$$

$$\lim_{\triangle\alpha\to -0}\frac{DZ_{2,2}(\triangle\alpha,t_0)-DZ_{2,2}(0,t_0)}{\triangle\alpha} = \frac{t_0^2-t_0^4}{6}$$

$Z_{2,2}(\alpha,t_0)$가 $\alpha$에 대하여 $\alpha=0$에서 두 번 미분가능하지 않고 $Z_{0,2}(\alpha,t_0)$, $Z_{1,2}(\alpha,t_0)$도 마찬가지이다. 따라서 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 두 번 미분가능하지 않다.

□

## 제4장 결론

이차 유리 베지에 곡선과 이차 F-베지에 곡선은 모두 원뿔곡선이다. 따라서 두 곡선은 적절한 조건이 주어지면 같은 곡선을 표현 할 수 있었고 우리는 그러한 조건을 베리센트릭 좌표(barycentric coordinates)를 이용하여 접근해보았다. 이차 F-베지에 곡선의 베리센트릭 좌표의 비 $w=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 또는 $w=\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$를 만족하는 $\alpha(-\pi<\alpha<0$ 또는 $\alpha>0)$에 대하여 F-베지에 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$는 이차 유리 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$와 같은 곡선을 표현한다.

우리는 이차 F-베지에 곡선의 $t=t_0$에 대한 등매개변수(isoparametric) 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$에 대하여 연구하였고 이에 관한 몇 가지 성질을 찾을 수 있었다. 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$의 각각의 $t_0\in[0,1]$에 대하여 시작점과 끝점을 구할 수 있었다. 또한 시작점과 끝점에서의 탄젠트 벡터를 구할 수 있었으며, 특히 $t_0=\frac{1}{2}$인 경우에는 제어점 $\boldsymbol{q}_0$와 $\boldsymbol{q}_2$의 중점 $\frac{\boldsymbol{q}_0+\boldsymbol{q}_2}{2}$에서 시작하여 $\boldsymbol{q}_1$를 향하는 직선임을 알 수 있었다. 그리고 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 $\alpha=0$, $\alpha\to-0$, $\alpha\to+0$일 때 정의되는 기저함수가 다르므로 이 때 연속성과 미분가능성에 대해 연구하였고 $\alpha=0$일 때 연속이고 미분가능함을 증명함으로서 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 모든 영역 $-\pi<\alpha<\infty$에서 미분가능곡선임을 보였다. 그러나 $\alpha=0$일 때 두 번 미분이 불가능하기 때문에 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$는 두 번 미분가능한 곡선이 아니다.

우리는 곡선 $\boldsymbol{q}(t)$가 두 개의 매개변수 $\alpha$와 $t$를 갖는다는 사실에서 등매개변수 곡선 $\boldsymbol{q}^*(\alpha,t_0)$에 관심을 가졌고 그에 대한 특징을 연구해 보았다. 본 논문에서는 이차 등매개변수 곡선을 중심으로 한 연구가 이루어 졌지만 향후 3차 4차 등의 고차 등매개변수 곡선에 대한 연구가 이루어 질 것으로 예상된다.

## 참고문헌

[1] G. Farin., “Curves and surfaces for CAGD: A practical guide”, 5th edition, California: Morgan Kaufmann, 2002.

[2] Lu, Y., Wang, G., Yang, X., “Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves.” Computer Aided Geometric Design *19*: 379-393, 2002.

[3] Mainar, E., Peña, J.M., Sánchez-Reyes, J., "Shape preserving alternatives to the rational Bézier model." Computer Aided Geometric Design *18*: 37-60, 2001.

[4] Pottmann, H., “The geometry of Tchebycheffian spines.” Computer Aided Geometric Design *10*: 181-210, 1993.

[5] Zhang, J.W., “C-curves, an extension of cubic curves.” Computer Aided Geometric Design *13*: 199-217, 1996.

[6] Zhang, J.W., “Two different forms of CB-splines.” Computer Aided Geometric Design *14*: 31-41, 1997.

[7] Zhang, J.W., “C-Bézier curves and surfaces.” Graphical Models and Image Process *61*: 2-15, 1999.

[8] Zhang, J.W., Krause, F.L., Zhang, H., "Unifying C-curves and H-curves by extending the calculation to complex numbers." Computer Aided Geometric Design *22*: 865-883, 2005.

# 저작물 이용 허락서

| 학 과 | 수학교육 | 학 번 | 20108061 | 과 정 | 석사 |
|---|---|---|---|---|---|
| 성 명 | 한글: 박 해 연 한문: 朴 垓 姸 영문: Park Hae-Yeon | | | | |
| 주 소 | 광주광역시 남구 백운2동 594-18번지 | | | | |
| 연락처 | 010-8770-7877 E-MAIL: parkhy87@hanmail.net | | | | |
| 논문제목 | 한글 : 이차 F-베지에 곡선의 등매개변수 곡선의 성질에 관한 연구<br>영문 : Properties of isoparametric curve of quadratic F-Bezier curve | | | | |

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2012 년 12월 일

저작자: 박 해 연 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하