creative commons

COMMONS DEED

저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000263628

2013년 2월
교육학석사(수학교육전공)학위논문

다항곡면을 이용한 반구 근사

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

서 혜 미

다항곡면을 이용한 반구근사

Approximation of half sphere by polynomial surfaces

2013년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

서 혜 미

다항곡면을 이용한 반구근사

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2012년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

서 혜 미

서혜미의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 강성권 인

심사위원 조선대학교 교수 이관규 인

심사위원 조선대학교 교수 안영준 인

2012년 12월

조선대학교 교육대학원

목 차

ABSTRACT

1장. 소개 ---------- 1

2장. 예비지식 및 기존연구결과 ---------- 2
2.1절 베지에 곡선 및 곡면 ---------- 2
1. 베지에 곡선 ---------- 2
2. 베지에 곡면 ---------- 3
2.2절 원뿔곡선과 이차 유리베지에 곡면 ---------- 4
2.3절 플로터의 근사방법 ---------- 8

3장. 원호근사 ---------- 12
3.1절 π이상의 각에 대한 원호근사 ---------- 12
3.2절 오차분석 ---------- 24

4장. 반구근사 ---------- 26
4.1절 다항곡면을 이용한 반구근사와 제어망 ---------- 26
4.2절 오차분석 ---------- 31

5장. 결론 ---------- 37

참고문헌 ---------- 38

ABSTRACT

Approximation of half sphere by polynomial surfaces

Seo, Hye Mi

Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

It was described in a recent paper [7] by Floater, how one can approximate a conic section in the form of a rational quadratic Bézier curve, by polynomial parametric curves. Using this method, we obtain the approximation for circular arc of angular of more than π by polynomial parametric curve of odd degree in this thesis. The approximation method can be extended to approximate the half sphere by polynomial surfaces, and the Hausdorff distance between these surfaces is analyzed. Our approximation surfaces are visualized using mathematical software.

Key word : approximation, Bezier curve, half sphere, polynomial surface, Hausdorff distance

다항곡면을 이용한 반구 근사
Approximation of half sphere by polynomial surfaces

1장. 소개

다항 매개 곡선(Bezier curves)에 의한 원호의 근사는 CAD에서 주요 이슈이다.[3] 원호를 포함하여 원뿔 곡선(conic section)은 CAD " 컴퓨터의 지원에 의한 설계 시스템 “ 그리고 CAM "컴퓨터의 지원에 의한 제조 시스템 ” 에 중요한 역할을 하며, 기계적인 부품을 만들거나 그 모형을 표현하는데 가장 일반적으로 사용하는 기하학적 요소 중에 하나이다.
그러나 원뿔 곡선(conic section)은 다항식을 사용하여 정확하게는 표현할 수 없다. 그래서 CAD/CAM 시스템에서는 원뿔 곡선(conic section)을 처리할 수 없을 때 주로 NURBS(Non Uniform Rational B-spline)을 사용하여 매개변수 방정식으로 표현한다. 그렇기 때문에 항상 사람들은 원뿔 곡선을 근사시키기 위하여 매개변수 다항식을 택한다.
한편 뛰어난 기하학적 성질을 기반으로 다항 매개 곡선(Bezier curves)은 곡선과 곡면을 자유롭게 표현할 수 있고 CAD/CAM 시스템에서 다양한 응용프로그램을 제공한다. 이러한 관점에서 사람들은 다항 매개 곡선(Bezier curves)에 의한 원뿔 곡선(conic section)의 근사에 대해서 항상 연구한다.[8]
Floater의 논문([6])에서도 임의의 유리 2차 베지에 곡선의 형태에서 어떻게 그것이 원뿔곡선으로 근사할 수 있는지 설명했다. 그리고 원뿔 곡선과 곡면을 2차 스플라인과 텐서 곱(tensor product), 2차 스플라인 형태로 변환시키는 방법을 제공하고 있다. 여기에서 근사 방법으로는 2차 기하학적 에르미트 보간을 고려하고 있다. 그리고 Floater의 논문([7])에서는 홀수 n차의 기하학적 에르미트(Hermite) 보간과 하우스도르프(Hausdorff) 오류의 상계를 나타내었다. Fang의 논문([3])에서는 임의의 홀수차 n차에 대한 원호의 근사 방법을 제시하였다. Fang과 Floater의 두 논문([3,6])에서는 각이 $0<\theta<\pi$인 원호의 근사에 적용 가능한 근사방법을 제시하였고, 본 논문에서는 이것을 확장하여 각이 π 이상인 원호에 대한 근사 방법을 연구할 것이다.
그리고 Floater의 논문([7])에서 에르미트 보간법을 이용하여 유리 이차 베지에 곡면으로 $\frac{1}{8}$구면을 그릴 수 있다는 것을 제시했다. 우리는 다항곡면을 이용하여 반구 근사를 할 수 있을 것인가에 대해서 중점적으로 연구할 것이다. 그러면 Floater

의 논문([7])에서는 원의 근사 그림을 그리기 위해서는 $\frac{1}{8}$구면을 8번 그려야 했지만, 우리의 논문의 방법으로는 원의 근사 그림을 그리기 위해서 반구를 2번 그리면 되기에 원의 근사 그림을 그릴 때 더 유용할 것이라고 생각한다.
그리고 이 논문은 다음과 같은 순서로 쓰여있다. 2장에서는 예비지식 및 기존의 연구 결과로서 베지에 곡선과 베지에 곡면에 대한 간단한 정의 및 성질 등에 대해 써질 것이며, 플로터의 근사 방법으로 에르미트 근사법에 대해 쓸 것이다.
3장에서는 각이 π 이상일 경우에 원호 근사에 대해서 쓸 것이며, 실제로 n이 $3, 5, 7$차 일 경우에 $\frac{6}{5}\pi$의 각에 대한 원호 근사 곡선 그림을 첨부하고, 하우스도르프 거리에 관한 식이 간단히 설명될 것이다.
4장에서는 다항곡면을 이용한 반구근사에 대해서 쓰여질 것이며, n이 $3, 5, 7$차 일 경우 다항곡면을 이용한 반구 근사 그림을 첨부하고, 하우스도르프 거리를 수치적으로 구할 것이다.

2장. 예비지식 및 기존연구결과

2.1절 베지에 곡선 및 곡면

1. 베지에 곡선

베지에 곡선은 임의의 형태의 곡선을 매개변수 다항곡선으로 표현하기 위해 프랑스의 수학자 베지에(Bezier)가 처음으로 고안한 곡선이다. 베지에 곡선의 매우 다양하고 유용한 성질로 인해, CAD/CAM, 컴퓨터그래픽스(Computer Graphics), 기하모델링(Geometric Modeling) 등에 매우 많이 쓰이고 있다.
임의의 $n+1$개의 제어점(control points) $\boldsymbol{p}_0, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}^3$이 주어지면, n차 베지에 곡선 $\boldsymbol{b}(t)$의 방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{p}_i, \quad t \in [0,1]$$

여기에서 $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$는 번스타인 함수이며, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$이다.
베지에 곡선의 성질은 다음과 같다.
(1) 곡선 $\boldsymbol{b}(t), t \in [0,1]$은 항상 첫 번째 제어점 $\boldsymbol{p}_0$에서 출발하고 마지막 제어점 $\boldsymbol{p}_n$에서 끝난다.

$$\boldsymbol{b}(0) = \boldsymbol{p}_0, \ \boldsymbol{b}(1) = \boldsymbol{p}_1$$

(2) 시작점에서의 접선은 처음 두 제어점을 연결하는 직선 $\overline{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1}$과 일치하고, 끝점에서의 접선은 마지막 두 끝점을 연결하는 직선 $\overline{\boldsymbol{p}_{n-1}\boldsymbol{p}_n}$과 일치한다.
(3) 모든 $t \in [0,1]$에 대하여 $\boldsymbol{b}(t)$는 제어점들의 볼록껍질(convex hull) 위에 존재한다. 참고로, 제어점들의 볼록껍질는 모든 제어점을 포함하는 가장 작은 볼록다각형을 뜻한다.
(4) 여러개의 베지에 곡선을 연결해 놓은 곡선을 스플라인곡선(spline curve)라 부른다.

베지에 곡선의 단점으로는 원호를 표현할 수 없다는 점이 있다.

2. 베지에 곡면

베지에 곡선이 제어다각형(control polygon)에 의해 정의되듯이 베지에 곡면은 제어망(control net, characteristic polygon, charateristic mesh)에 의해서 정의된다.
2개의 베지에 곡선을 사용하여 주어진 임의의 제어점에 의해 정해지는 객체의 면을 나타낼 수 있는데, 베지에 곡면에 대한 매개변수 벡터 함수는 베지에 배합 함수의 데카르트 적으로 나타내어진다. 다음은 베지에 곡면 $\boldsymbol{b}(t,s)$에 대한 방정식이다.

$$\boldsymbol{b}(t,s) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) B_j^n(s) \boldsymbol{p}_{i,j},$$

$(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$. 여기에서 $\boldsymbol{p}_{i,j}$는 베지에 곡면의 $(n+1)\cdot(m+1)$개의 제어점이고, $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, $B_j^n(t) = \binom{n}{i} s^j (1-s)^{n-j}$ 는 번스타인 다항함수이다.

베지에 곡면은 베지에 곡선과 같은 성질을 가지고 있다. 특히 베지에 곡면은 제어망의 네 개의 제어점 $\boldsymbol{p}_{0,0}, \boldsymbol{p}_{0,n}, \boldsymbol{p}_{n,0}, \boldsymbol{p}_{n,n}$을 구석점으로 가지며, 베지에 곡면의 모서리 곡선은 두 개의 구석점을 연결하는 곡선이 된다. 또한 베지에 곡면도 볼록껍질(convex hull) 성질을 가지고 있다.

2.2절 원뿔곡선과 이차 유리 베지에 곡선

이차 유리 베지에 곡선의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{w_0 B_0^2(t) \boldsymbol{p}_0 + w_1 B_1^2(t) \boldsymbol{p}_1 + w_2 B_2^2(t) \boldsymbol{p}_2}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}, \quad t \in [0,1]$$

여기에서 $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ 은 제어점이고, $w_0, w_1, w_2 > 0$은 $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$와 관계된(associated) 가중치(weight)이다. $B_0^2(t) = (1-t)^2$, $B_1^2(t) = 2(1-t)t$, $B_2^2(t) = t^2$은 이차 번스타인 함수(quadratic Bernstein basis function)이다.
특히, 이차유리베지에 곡선의 형상(모양)은 변하지 않고 $w_0 = w_2 = 1$이 되도록 만들 수 있다. 이런 경우를 2차 유리 베지에 곡선의 **표준형**이라고 하며, 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{B_0^2(t)\boldsymbol{p}_0 + \frac{w_1}{\sqrt{w_0 w_2}} B_1^2(t)\boldsymbol{p}_1 + B_2^2(t)\boldsymbol{p}_2}{B_0^2(t) + \frac{w_1}{\sqrt{w_0 w_2}} B_1^2(t) + B_2^2(t)}$$

간단하게 $\sqrt{\frac{{w_1}^2}{w_0 w_1}}$ 대신에 w를 대입하여 다음과 같이 표준형을 쓰기도 한다.

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{B_0^2(t)\boldsymbol{p}_0 + wB_1^2(t)\boldsymbol{p}_1 + B_2^2(t)\boldsymbol{p}_2}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)} \tag{2.1}$$

2차 유리 베지에 곡선의 표준형인 경우에 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}(\frac{1}{2})$을 어깨점(shoulder point)이라고 하며, 어깨점은 $\overline{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$로부터 가장 멀리 떨어진 점이고 어깨 점에서 탄젠트 벡터는 $\overline{\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_2}$과 평행한다. 또한 $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_2)/2$이라 두면, 세 점 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}_1$은 동일 선상에 있으며, 다음이 성립한다.

$$ratio(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}_1) = \frac{s - m}{p_1 - s} = w$$

표준형 이차유리베지에의 성질은 다음과 같다.

(1) w의 크기에 의해서 원뿔곡선 $\boldsymbol{r}$의 형태가 결정된다.([5])

① $w < 1$일 경우 $\boldsymbol{r}(t)$는 타원

② $w = 1$일 경우 $\boldsymbol{r}(t)$는 포물선

③ $w > 1$일 경우 $\boldsymbol{r}(t)$는 쌍곡선 ; 그림 2.2.1을 참조

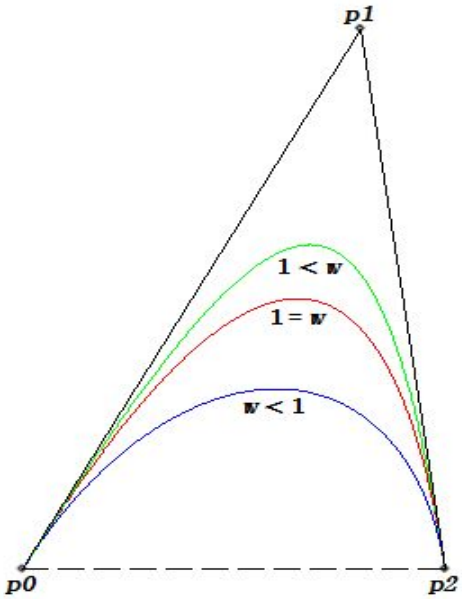


그림 2.2.1 . $w<1,\ w=1,\ w>1$ 인 경우의 원뿔곡선 $\boldsymbol{r}(t)$

(2) $\boldsymbol{r}(t)$는 음함수꼴(implicit representation)로 표현할 수 있다.([7])
임의의 점 $(x,y)\in\triangle\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2$은 베리센트릭 좌표(barycentric coordinates) τ_0,τ_1,τ_2의 형식으로 쓰여질 수 있다.

$$(x,y)=\tau_0\boldsymbol{p}_0+\tau_1\boldsymbol{p}_1+\tau_2\boldsymbol{p}_2 \text{이고 } \tau_0+\tau_1+\tau_2=1.$$

표준형 이차유리베지에 곡선의 가중치 $w>0$에 대하여 새로운 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x,y)=\tau_1^2-4w^2\tau_0\tau_2$$

f는 이차함수이며, τ_0,τ_1,τ_2의 함수로 표현된 것이다.
한편, 볼록껍질성질에 의해 모든 $t\in[0,1]$에 대하여 $\boldsymbol{r}(t)\in\triangle\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2$이고, 따라서 $\boldsymbol{r}(t)$가 세 꼭지점 $\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$의 베리센트릭 좌표 (barycentric coordinates)의 형태로 표현될 수 있다.

$$\boldsymbol{r}(t)=\tau_0\boldsymbol{p}_0+\tau_1\boldsymbol{p}_1+\tau_2\boldsymbol{p}_2$$

$\boldsymbol{r}(t)$가 표준형 이차유리베지에 곡선이고 식 (2.1)에 의해 좌표 (τ_0, τ_1, τ_2)를 다음과 같이 쉽게 얻을 수 있다.

$$\tau_0 = (1-t)^2/D$$
$$\tau_1 = [2wt(1-t)]/D$$
$$\tau_2 = t^2/D$$

여기서, $D = B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)$이다. 이때, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다. 모든 $t \in [0,1]$에 대하여 $f(\boldsymbol{r}(t)) = 0$이 성립한다.

(3) 원호를 그릴 수 있다.

각을 α로 갖고 $\boldsymbol{p}_0 = (\cos(\alpha), -\sin(\alpha))$, $\boldsymbol{p}_1 = (\sec(\alpha),\ 0)$, $\boldsymbol{p}_2 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$은 제어점이고, 가중치는 $w_0 = w_1 = 1$, $w_2 = \cos(\alpha)$이다. : 그림 2.2.2 참조

(4) $\frac{1}{8}$구면을 그릴 수 있다.

각을 α로 갖고 $w_0 = w_1 = 1$, $w_2 = \cos(\alpha)$, 일 때 가중치가 $w_{i,j} = w_i w_j$이다. : 그림 2.2.3 참조

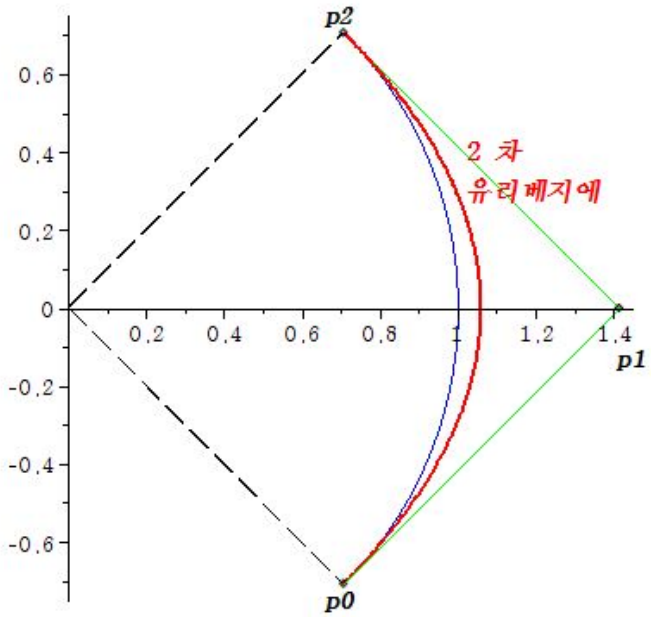
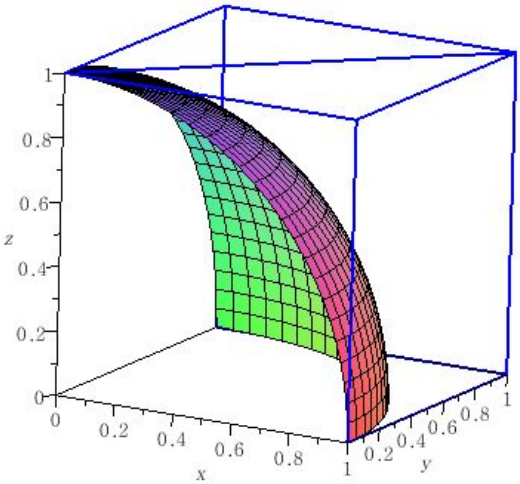


그림 2.2.2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$를 갖는 이차 유리 베지에를 이용해서 그린 원호



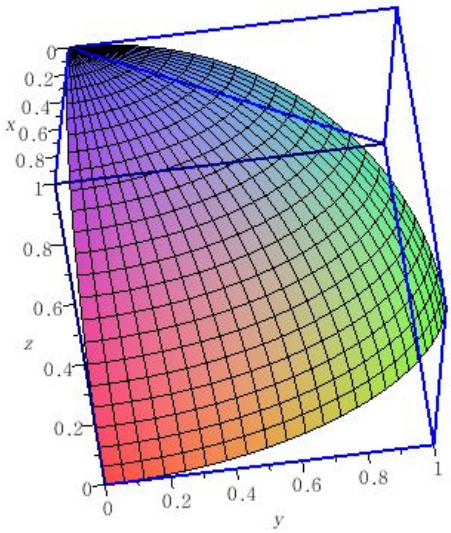


그림 2.2.3. 이차 유리 베지에 곡면을 이용해서 그린 $\frac{1}{8}$ 구면. (파란선들은 제어망(control net)을 표현한 것이다.)

2.3절 플로터의 근사 방법

플로터는 그의 논문([6])에서 원뿔곡선 $\boldsymbol{r}$을 2차 다항곡선으로 근사하는 방법과 오차 분석을 제시하였다. 그리고 구, 원환체(torus), 원뿔, 원기둥과 같은 원뿔곡면을 2차 스플라인과 텐서 곱(tensor product)의 형태로 근사시키는 간단한 방법을 제공하였다.
플로터[6]의 근사 방법은 2차 기하학적 에르미트 보간(Hermite interpolant)을 확장하여 3차 또는 5차와 같은 홀수 n차의 곡선 및 곡면의 근사를 제시하고 있다. ([7])

플로터의 근사 방법으로는 에르미트 보간법을 사용하여 유리 2차 베지에 곡선 $\boldsymbol{r}(t)$를 다항곡선 $\boldsymbol{q}(t)$로 근사한다.

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{B_0^2(t)\boldsymbol{p}_0 + wB_1^2(t)\boldsymbol{p}_1 + B_2^2(t)\boldsymbol{p}_2}{B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)},\ t \in [0,1]$$

여기에서 $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ 은 제어점이고, $w \in \mathbb{R}$ 은 $\boldsymbol{p}_1$과 관련된 가중치이며 양수라고 가정한다. $\psi = \psi(t) = 2(1-w)(1-t)t$라 하면 $\boldsymbol{r}$의 분모 $B_0^2(t) + wB_1^2(t) + B_2^2(t)$을 $1-\psi(t)$로 쓸 수 있으며 $\boldsymbol{r}$을 다음과 같은 형태로 다시 표현 할 수 있다.

$$\boldsymbol{r}(t) = J_0(t)\boldsymbol{p}_0 + J_1(t)\boldsymbol{p}_1 + J_2(t)\boldsymbol{p}_2$$

여기에서

$$J_0(t) = \frac{(1-t)^2}{1-\psi(t)},\ J_1(t) = \frac{2w(1-t)t}{1-\psi(t)},\ J_2(t) = \frac{t^2}{1-\psi(t)},$$

이며, $\sum_{i=0}^{2} J_i(t) = 1$이며, 또한 $m = \frac{n-1}{2}$로 정의한다. $(m = 1, 2, \cdots)$
그리고 홀수 $n(\geq 3)$에 대하여 n차 다항곡선 $\boldsymbol{q}$의 방정식을 다음과 같이 보여줄 수 있다.

$$\boldsymbol{q}(t) = K_0(t)\boldsymbol{p}_0 + K_1(t)\boldsymbol{p}_1 + K_2(t)\boldsymbol{p}_2$$

여기에서 다음의 식은 $\boldsymbol{r}$에서의 기하학적 에르미트 보간이다.

$$K_0(t) = (1-t)^2 \sum_{i=0}^{m-1} \psi^i + \frac{(1-t)}{1+w}\psi^m$$

$$K_1(t) = 2wt(1-t)\sum_{i=0}^{m-1}\psi^i + \frac{w}{1+w}\psi^m$$

$$K_2(t) = t^2\sum_{i=0}^{m-1}\psi^i + \frac{t}{1+w}\psi^m$$

그리고 $\boldsymbol{q}(t)$는 베지에 형태로 나타내어지며 번스타인 형태에서 K_0를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$K_0 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}k_{i,0}$$

여기에서 $n \geq 3$ 이고, $m = \frac{n-1}{2}$, $a = \cos(\alpha) - 1$ 일 때,

$$k_{i,0} = \begin{cases} i = 0, \ldots, m-1\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\Big/\binom{n}{i} \\ i = m\text{에 대하여}, & \left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right) + \frac{(-2)^i(\cos(\alpha)-1)^i}{1+\cos(\alpha)}\right)\Big/\binom{n}{i} \\ i = m+1, \ldots, n-2\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{n-i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)\binom{n-2j-2}{i-j}\Big/\binom{n}{i} \\ i = n-1, n\text{에 대하여}, & 0 \end{cases}$$

만약 $K_1(t)$와 $K_2(t)$의 번스타인 계수가 각각 $k_{i,1}$과 $k_{i,2}$라면 $k_{i,2} = k_{n-i,0}$ 이고 $k_{i,1} = 1 - k_{i,0} - k_{i,2}$ 이다. 그리고 이것으로부터 $\boldsymbol{q}(t)$의 제어점은 나타내진다.

만약 $w = 1$이면 $\psi = 0$ 그리고 $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0(t)$, $t \in [0, 1]$이다 또한 모든 w에 대하여 $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{p}_0$ 그리고 $\boldsymbol{q}(1) = \boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{p}_2$ 이다. 즉, 이차 유리 베지에 곡선과 다항곡선은 $t = 0$, $t = 1$일 때 만나게 되며, 이 때, 제어점의 양 끝점과 만나게 된다.

이차 유리 베지에 곡선은 양함수 형태로 표현되어 질 수 있다. $J_0(t), J_1(t), J_2(t)$도 점 $\boldsymbol{r}(t)$의 베리센트릭 좌표(barycentric coordinate)이므로 마찬가지로 양함수 형태로 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$J_1^2(t) - 4w^2 J_0(t)J_2(t) = 0$$

그리고

$$\alpha_0(t) = \frac{1-t}{1+w}, \quad \alpha_1(t) = \frac{w}{1+w}, \quad \alpha_2(t) = \frac{t}{1+w}$$

이라면,

$$K_0(t) = J_0(t)(1-\psi^m) + \alpha_0\psi^m$$

$$K_1(t) = J_1(t)(1-\psi^m) + \alpha_1\psi^m$$

$$K_2(t) = J_2(t)(1-\psi^m) + \alpha_2\psi^m$$

으로 다시 쓰여 질 수 있으며, $\sum_{i=0}^{2} J_i = \sum_{i=0}^{2} K_i = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 1$ 이다.

그리고 $K_0(t), K_1(t), K_2(t)$ 또한 $\boldsymbol{q}(t)$의 베리센트릭 좌표(barycentric coordinate)이다. 그래서 $f(x, y) = \tau_1^2 - 4w^2\tau_0\tau_2$ 일 때, $f(\boldsymbol{q}(t))$는 $2n$차 다항식이다. $\boldsymbol{q}$가 $\boldsymbol{r}$의 기하학적 에르미트 근사(Hermite interpolant)이다. 곡선 $\boldsymbol{q}$는 방정식 $f(\boldsymbol{q}(t)) = 0$ 이 $[0, 1]$에서 $2n$개의 근을 갖는다.

그래서 두 곡선은 $t = 0, \frac{1}{2}, 1$의 세 점에서 만나며, 예를 들면, $n = 3$일 경우에는 6차 다항식 $f(\boldsymbol{q}(t))$은 각각의 $t = 0, \frac{1}{2}, 1$에서 $2, 2, 2$ 중근을 갖는다. 그리고 $\boldsymbol{r}$이 원인 특별한 경우에는 [2]에서 찾은 다항식의 상수배가 되어야 한다.

이것은 근사되는 곡선 $\boldsymbol{q}$가 [2]에서 원뿔 곡선이며 일반적으로 홀수차수 n인 첫 번째 3차 근사의 일반화로 여겨질 수 있다.

그리고 곡선의 근사방법과 마찬가지로 에르미트 보간법을 사용하여 2차 베지에 곡면 $\boldsymbol{r}(u,v)$를 다항곡면 $\boldsymbol{q}(u,v)$로 근사한다.

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} B_i^2(u) B_j^2(v) w_{i,j} \boldsymbol{p}_{i.j}}{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} B_i^2(u) B_j^2(v) w_{i,j}}$$

여기에서 $\boldsymbol{p}_{i,j} \in R^3$ 이고, $w_{0,0} w_{i,j} = w_{i,0} w_{0j}$라 가정하면, r을 첫 번째로 매개변수화 할 수 있다. 그리고 다음과 같은 형태로 $\boldsymbol{r}$을 다시 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} J_{i, w_1}(u) J_{j, w_2}(v) \boldsymbol{p}_{i,j}$$

여기에서 첨자 w_1과 w_2는

$$J_0(t) = \frac{(1-t)^2}{1-\psi(t)},\ J_1(t) = \frac{2w(1-t)t}{1-\psi(t)},\ J_0(t) = \frac{t^2}{1-\psi(t)},$$

에서 w에 의해서 J_i가 변화됨을 보여주고 있다.

그리고 다음의 식이 기하학적 에르미트 보간(Hermite interpolant)에 의한 다항식 곡면의 다항식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q}(u, v) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} K_{i, n_1, w_1}(u) K_{j, n_2, w_2(v)} \boldsymbol{p}_{i,j}$$

(에르미트 보간법에 대한 좀 더 자세한 내용은 Floater의 논문을 참조[6])

3장. 원호 근사

3.1절 π 이상의 각에 대한 원호 근사

다음과 같은 정리로 인해서 각이 π이상일 경우에 원호를 다항곡선으로 근사가 가능하다는 것을 보여 줄 수 있다. 그리고 예제를 통해서 실제로 각이 π이상일 경우에 반경이 1인 원호와 근사하는 3차, 5차, 7차 베지에 곡선을 그려보았다.

보조정리 3.1) 각 $2\alpha < 2\pi$를 갖는 원호에 대한 홀수차 베지에 곡선은

$$\boldsymbol{b}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{b}_i$$

이고, 여기에서 제어점 $\boldsymbol{b}_i = (x_i, y_i)(i = 0, \ldots, n)$은 다음과 같다.

$\boldsymbol{b}_0 = (\cos(\alpha), -\sin(\alpha))$

$\boldsymbol{b}_1 = \left(\frac{1}{n}(2 + n\cos(\alpha) - 2\cos^2(\alpha)),\ \frac{1}{n}\sin(\alpha)(-n + \cos(\alpha))\right)$

$i = 2, \ldots, m-1$일 경우,

$$\boldsymbol{b}_i = \Big(\sec(\alpha) + (\cos(\alpha) - \sec(\alpha))(H(n,i) + H(n,i-2))/\binom{n}{i},$$
$$(\sin(\alpha))(H(n,i-2) - H(n,i))/\binom{n}{i}\Big)$$

$$\boldsymbol{b}_m = \Big(\sec(\alpha) + (\cos(\alpha) - \sec(\alpha))\left(H(n,m-2) + H(n,m-1) + \frac{(-2)^m(\cos(\alpha)-1)^m}{\cos(\alpha)+1}\right)/\binom{n}{m},$$
$$\sin(\alpha)\left(H(n,m-2) - H(n,m-1) + \frac{(-2)^m(\cos(\alpha)-1)^m}{1+\cos(\alpha)}\right)/\binom{n}{m}\Big)$$

$i = m+1, \ldots, n$일 경우,

$$\boldsymbol{b}_i = (x_i, y_i) = (x_{n-i}, -y_{n-i}).$$

여기서, $H(n,i) = \sum_{j=0}^{i} 2^j(1-\cos\alpha)^j\binom{n-2j-2}{i-j}$.

증명)

$n \geq 3$ 이고, $m = \frac{n-1}{2}$, $a = \cos(\alpha) - 1$ 일 때,

$$k_{i,0}=\begin{cases} i=0,\ldots,m-1\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{i}(-2a)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\Big/\binom{n}{i} \\ i=m\text{에 대하여}, & \left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-2a)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)+\frac{(-2a)^i}{2+a}\right)\Big/\binom{n}{i} \\ i=m+1,\ldots,n-2\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{n-i-2}(-2a)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\Big/\binom{n}{i} \\ i=n-1,n\text{에 대하여}, & 0 \end{cases}$$

이고, $k_{i,2}=k_{n-i,0}$ 그리고 $k_{i,1}=1-k_{i,0}-k_{i,2}$ 이다.

n이 3이상의 임의의 홀수차 n차 베지에 곡선의 i번째 제어점은

$$\boldsymbol{b_i}=\left(k_{i,0}\cos(\alpha)+k_{i,1}\sec(\alpha)+k_{i,2}\cos(\alpha)\ ,\ \ k_{i,0}(-\sin(\alpha))+k_{i,2}\sin(\alpha)\right)\ \cdots\ ㉠$$

이다. (여기에서 $i=0,1,\ \cdots,n$)

먼저 $a=\cos(\alpha)-1$ 을 $k_{i,0}$에 대입하여 정리하면,

$$k_{i,0}=\begin{cases} i=0,\ldots,m-1\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\Big/\binom{n}{i} \\ i=m\text{에 대하여}, & \left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)+\frac{(-2)^i(\cos(\alpha)-1)^i}{1+\cos(\alpha)}\right)\Big/\binom{n}{i} \\ i=m+1,\ldots,n-2\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{n-i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)\binom{n-2j-2}{i-j}\Big/\binom{n}{i} \\ i=n-1,n\text{에 대하여}, & 0 \end{cases}$$

이고, $k_{i,2}=k_{n-i,0}$ 이므로

$$k_{i,2}=\begin{cases} i=0,1\text{에 대하여}, & 0 \\ i=2,\ldots,m\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\Big/\binom{n}{n-i} \\ i=m+1\text{에 대하여}, & \left(\left(\sum_{j=0}^{n-i-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)+\frac{(-2)^{n-i}(\cos(\alpha)-1)^{n-i}}{1+\cos(\alpha)}\right)\Big/\binom{n}{n-i} \\ i=m+2,\ldots,n\text{에 대하여}, & \sum_{j=0}^{n-i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\Big/\binom{n}{n-i} \end{cases}$$

그리고 $k_{i,1}=1-k_{i,0}-k_{i,2}$ 이므로 $k_{i,1}$은

$i=0,1$ 에 대하여, $\quad 1-\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}/\binom{n}{i}\right)$

$i=2,\ldots,m-1$ 에 대하여,

$$1-\left(\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)\right)/\binom{n}{i}-\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)\right)/\binom{n}{n-i}$$

$i=m$에 대하여,

$$1-\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)\right)/\binom{n}{n-i}-\left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)+\frac{(-2)^i(\cos(\alpha)-1)^i}{(\cos(\alpha)+1)}\right)/\binom{n}{i}$$

$i=m+1$에 대하여,

$$1-\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)\right)/\binom{n}{n-i}-\left(\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)+\frac{(-2)^i(\cos(\alpha)-1)^i}{(\cos(\alpha)+1)}\right)/\binom{n}{i}$$

$i=m+2,\ldots,n-2$에 대하여,

$$1-\left(\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)\right)/\binom{n}{i}-\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)\right)/\binom{n}{n-i}$$

$i=n-1,n$에 대하여, $\quad i=0,1$에 대하여, $\quad 1-\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}/\binom{n}{i}\right)$

정리한 $k_{i,0}$, $k_{i,1}$, $k_{k,2}$을 ㉠의 식에 대입하여 정리하여,
임의의 홀수차 n차의 i번째 제어점$\boldsymbol{b_i}$ 를 구하면,

$$\boldsymbol{b}_0=\left(\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}/\binom{n}{i}\right)(\cos(\alpha)-\sec(\alpha))+\sec(\alpha),\right.$$
$$\left.(-\sin(\alpha))\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}/\binom{n}{i}\right)\right)$$

$i=2,\ldots,m-1$일 경우,

$\boldsymbol{b}_i=$

$$\left(\sec(\alpha)+(\cos(\alpha)-\sec(\alpha))\left(\left(\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)+\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)\right)\right)/\binom{n}{i}\right),$$
$$(\sin(\alpha))\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)-\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)\right)\right)\Bigg)/\binom{n}{i}$$

$\boldsymbol{b}_m=$

$$\left(\sec(\alpha)+(\cos(\alpha)-\sec(\alpha))\left(\left(\left(\sum_{j=0}^{m-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-m-j}\right)+\left(\left(\sum_{j=0}^{m-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{m-j}\right)+\frac{(-2)^m(\cos(\alpha)-1)^m}{\cos(\alpha)+1}\right)\right)\right)/\binom{n}{m}\right),$$
$$\sin(\alpha)\left(\left(\left(\sum_{j=0}^{m-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-m-j}\right)\right)-\left(\left(\sum_{j=0}^{m-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{m-j}\right)+\frac{(-2)^m(\cos(\alpha)-1)^m}{1+\cos(\alpha)}\right)\right)\Bigg)/\binom{n}{m}\right)$$

그리고 $i=m+1,\ldots,n$의 제어점의 일반항은 $i=0,\ldots,m$의 제어점의 일반항과 x축 대칭이므로 $\boldsymbol{b_i}=(x_i,y_i)=(x_{n-i},-y_{n-i})$이다.

여기에서 $\binom{n}{i}$은 $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ 을 의미한다. 그러므로 $\binom{n}{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ 이므로 $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$ 이다.

위에 구한 임의의 홀수차 n차의 i번째 제어점 $\boldsymbol{b}_i$의 일반항을 조금 더 간단하게 정리하면

$\boldsymbol{b}_0=(\cos(\alpha),-\sin(\alpha))$

$\boldsymbol{b}_1=\left(\frac{1}{n}(2+n\cos(\alpha)-2\cos^2(\alpha)),\ \frac{1}{n}\sin(\alpha)(-n+\cos(\alpha))\right)$

$i=2,\ldots,m-1$일 경우,

$\boldsymbol{b}_i=$

$$\left(\sec(\alpha)+(\cos(\alpha)-\sec(\alpha))\left(\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)+\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)\right)\Big/\binom{n}{i}\right),$$
$$(\sin(\alpha))\left(\left(\sum_{j=0}^{i-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-i-j}\right)-\left(\sum_{j=0}^{i}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{i-j}\right)\right)\Big/\binom{n}{i}$$

$i=m$일 경우,

$\boldsymbol{b}_i=$

$$\left(\sec(\alpha)+(\cos(\alpha)-\sec(\alpha))\left(\left(\sum_{j=0}^{m-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-m-j}\right)+\left(\sum_{j=0}^{m-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{m-j}\right)+\frac{(-2)^m(\cos(\alpha)-1)^m}{\cos(\alpha)+1}\right)\right)\Big/\binom{n}{m},$$
$$\sin(\alpha)\left(\left(\sum_{j=0}^{m-2}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{n-m-j}\right)-\left(\sum_{j=0}^{m-1}(-2)^j(\cos(\alpha)-1)^j\binom{n-2j-2}{m-j}\right)+\frac{(-2)^m(\cos(\alpha)-1)^m}{1+\cos(\alpha)}\right)\right)\Big/\binom{n}{m}\Bigg)$$

그리고 $i=m+1,\ldots,n$의 제어점의 일반항은 $i=0,\ldots,m$의 제어점의 일반항과 x축 대칭이므로 $\boldsymbol{b_i}=(x_i,y_i)=(x_{n-i},-y_{n-i})$이다. □

참고로, 임의의 홀수차 n차의 i번째 제어점 $\boldsymbol{b}_i$의 한가지 특징으로는 x좌표의 계수의 합은 항상 1이다. 또한, 위의 보조정리에서 $i=0,1,2,\cdots,m$에 대한 제어점을 4가지의 경우로 나누어 제공하고 있는데, 만약 겹치게 되는 경우는 $i=0$, $i=m$, $i=1$, $i=2,\cdots,m-1$순으로 우선순위가 주어진다.

(1) 3차 베지에 곡선

위의 보조정리 3.1의 제어점 일반항 $\boldsymbol{b}_i(i=0,\ldots,n)$을 이용하여 n이 3차일 때 베지에 곡선의 일반항을 구하면, 이때, 위의 제어점의 일반항에서 $i=0,1$일 때와 $i=m$

일 때 식이 다르지만 3차 베지에 곡선은 $m=1$이므로 범위가 겹치게 된다. $i=1$일 경우에 제어점을 구할 때 우선 순위를 $i=m$일때의 식을 이용하여 구하도록 한다.

정리 3.2) 각 $2\alpha<2\pi$를 갖는 원호에 대한 3차 베지에 곡선은

$$\boldsymbol{b}(t)=\sum_{i=0}^{3}B_i^3(t)\boldsymbol{b}_i$$

이고, 여기서 제어점은 $\boldsymbol{b}_i=(x_i\,,y_i)\,(i=0,\ldots,3)$은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}_0=(\cos(\alpha),-\sin(\alpha))$$

$$\boldsymbol{b}_1=\left(\frac{1}{3}(4-\cos(\alpha)),\ \frac{1}{3}\frac{\sin(\alpha)(-3+\cos(\alpha))}{1+\cos(\alpha)}\right)$$

$$\boldsymbol{b}_2=\left(\frac{1}{3}(4-\cos(\alpha)),\ -\frac{1}{3}\frac{\sin(\alpha)(-3+\cos(\alpha))}{1+\cos(\alpha)}\right)$$

$$\boldsymbol{b}_3=(\cos(\alpha),\ \sin(\alpha)).$$

증명.
보조정리 3.1에서 $H(3,0)=1$을 대입하여 결과가 유도되며, $\sec(\alpha)$ 항은 소거되어 각이 π보다 큰 원호에도 근사가 가능하다.

제어점 $\boldsymbol{b}_i(i=0,\ldots,3)$는 $\boldsymbol{b}_i=(x_i,\,y_i)$ 이므로, 3차 베지에 곡선의 식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}(t)=\sum_{i=0}^{3}B_i^3(t)\boldsymbol{b}_i=\left(\sum_{i=0}^{3}x_iB_i^3(t),\ \ \sum_{i=0}^{3}y_iB_i^3(t)\right)\ ,\ t\in[0,1]$$

그리고 위에서 구한 3차 베지에 곡선의 제어점과 3차 베지에 곡선의 식을 이용하여 α가 π이상일 경우에 3차 베지에 곡선을 다음과 같이 그릴 수 있다. : 그림 3.1.1 참조

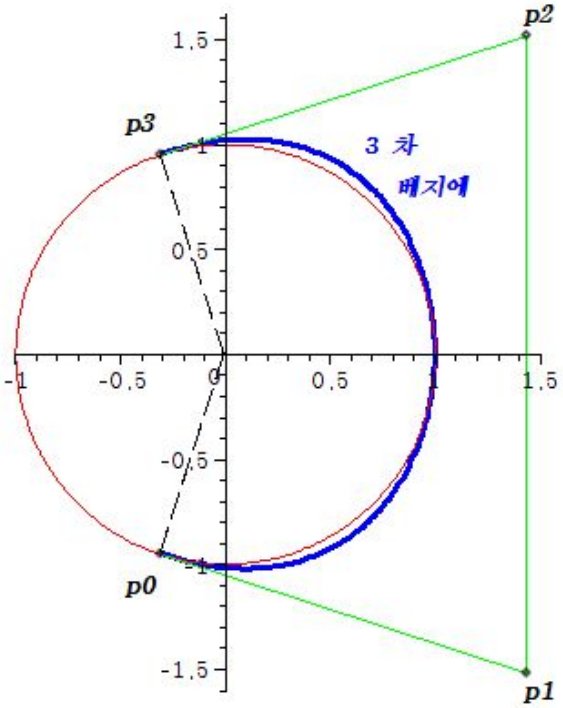


그림 3.1.1. $\alpha = \frac{6}{5}\pi$일 때 3차 베지에 곡선

그리고 반경이 1인 원호와 3차 베지에 곡선은 t가 0에서 1까지 변할 때에 다른 점과는 만나지 않지만 $t = 0, \frac{1}{2}, 1$ 세 점에서 만나야 한다. 3차 베지에 곡선이 잘 그려졌는지 확인하기 위해서는 $b(t) = (bx(t),\ by(t))$ 일 경우에, 오차분석 식

$$\psi(t) = (bx(t))^2 + (by(t))^2 - 1$$

을 이용하여 그래프를 다음과 같이 그려볼 수 있다. (그림 3.1.2참조) 오차함수 그래프를 그려봄으로써 반경이 1인 원호와 근사하는 3차 베지에 곡선이 $t = 0, \frac{1}{2}, 1$일 때 만난다는 것을 확인 할 수 있다.

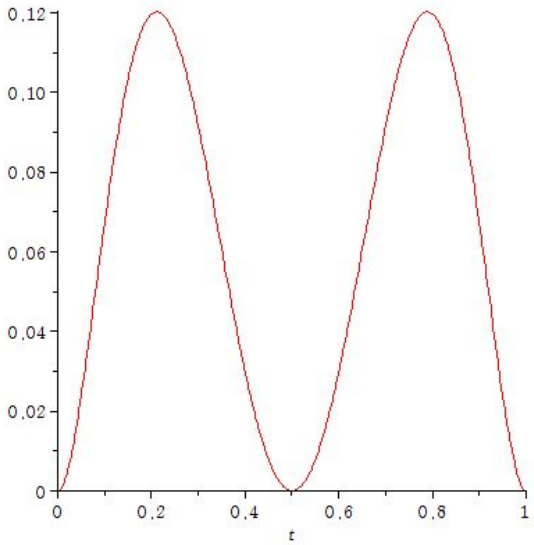


그림 3.1.2. 3차 베지에 곡선의 오차분석 그래프

(2) 5차 베지에 곡선

3차 베지에 곡선의 제어점과 마찬가지로 위의 정리 3.1의 제어점 일반항 $\boldsymbol{b}_i$ $(i=0,\ldots,n)$을 이용하여 n이 5차일 때 베지에 곡선의 일반항을 구하면, 이때, 위의 제어점의 일반항에서 $i=2,\ldots,m-1$일 때와 $i=m$일 때 식이 다르지만 5차 베지에 곡선은 $m=2$이므로 범위가 겹치게 된다. 그러므로 $i=2$일 경우에 제어점을 구할 때 우선 순위를 $i=m$일때의 식을 이용하여 구하도록 한다.

정리 3.3) 각 $2\alpha<2\pi$를 갖는 원호에 대한 5차 베지에 곡선은

$$\boldsymbol{b}(t)=\sum_{i=0}^{5}B_i^5(t)\boldsymbol{b}_i$$

이고, 여기서 제어점은 $\boldsymbol{b}_i=(x_i,y_i)\,(i=0,\ldots,5)$은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}_0=(\cos(\alpha),-\sin(\alpha))$$

$$\boldsymbol{b}_1=\left(\frac{1}{5}\left(2+5\cos(\alpha)-2\cos^2(\alpha)\right),\ \frac{1}{5}\sin(\alpha)(-5+2\cos(\alpha))\right)$$

$$\boldsymbol{b}_2=\left(\frac{1}{5}\left(7-3\cos(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right),\ -\frac{1}{5}\frac{\sin(\alpha)\left(4-3\cos(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)}{1+\cos(\alpha)}\right)$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \left(\frac{1}{5}\left(7 - 3\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right),\ \frac{1}{5}\frac{\sin(\alpha)\left(4 - 3\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right)}{1 + \cos(\alpha)} \right)$$

$$\boldsymbol{b}_4 = \left(\frac{1}{5}\left(2 + 5\cos(\alpha) - 2\cos^2(\alpha)\right),\ -\frac{1}{5}\sin(\alpha)(-5 + 2\cos(\alpha)) \right)$$

$$\boldsymbol{b}_5 = (\cos(\alpha),\ \sin(\alpha))$$

증명.

보조정리 3.1에서

$$H(5,0) = 1$$
$$H(5,1) = 5 - 2\cos(\alpha)$$

을 대입하여 결과가 유도되며, $\sec(\alpha)$ 항은 소거되어 각이 π보다 큰 원호에도 근사가 가능하다.

제어점 $\boldsymbol{b}_i (i = 0, \ldots, 5)$는 $\boldsymbol{b}_i = (x_i, y_i)$ 이므로, 5차 베지에 곡선의 식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}(t) = \sum_{i=0}^{5} B_i^5(t)\boldsymbol{b}_i = \left(\sum_{i=0}^{5} x_i B_i^5(t),\ \sum_{i=0}^{5} y_i B_i^5(t) \right),\ t \in [0,1]$$

그리고 위에서 구한 5차 베지에 곡선의 제어점과 5차 베지에 곡선의 식을 이용하여 α가 π이상일 경우에 5차 베지에 곡선을 다음과 같이 그릴 수 있다. : 그림 3.1.3 참조

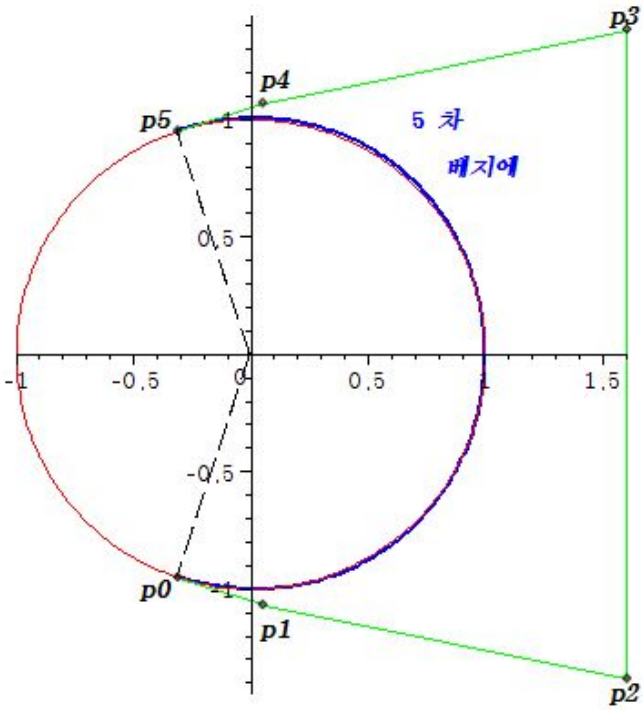


그림 3.1.3. $\alpha = \frac{6}{5}\pi$일 때 5차 베지에 곡선

그리고 반경이 1인 원호와 5차 베지에 곡선도 t가 0에서 1까지 변할 때에 다른 점과는 만나지 않지만 $t = 0, \frac{1}{2}, 1$ 세 점에서 만나야 한다. 5차 베지에 곡선이 잘 그려졌는지 확인하기 위해서는 3차 베지에 곡선과 마찬가지로 $b(t) = (bx(t),\ by(t))$일 경우에, 오차분석 식

$$\psi(t) = (bx(t))^2 + (by(t))^2 - 1$$

을 이용하여 그래프를 다음과 같이 그려볼 수 있다. (그림 3.1.4 참조) 그러면 3차 베지에 곡선과 마찬가지로 오차함수 그래프를 그려봄으로써 반경이 1인 원호와 근사하는 5차 베지에 곡선도 $t = 0, \frac{1}{2}, 1$일 때 만난다는 것을 확인 할 수 있다.

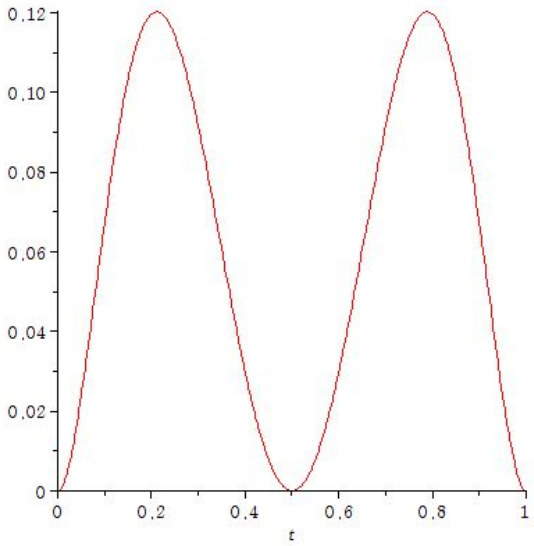


그림 3.1.4. 5차 베지에 곡선의 오차분석 그래프

(3) 7차 베지에 곡선

3차, 5차 베지에 곡선의 제어점과 마찬가지로 위의 정리 3.1의 제어점 일반항 $\boldsymbol{b}_i$ $(i=0,\ldots,n)$을 이용하여 n이 7차일 때 베지에 곡선의 일반항을 구하면 다음과 같다.

정리 3.4) 각 $2\alpha<2\pi$를 갖는 원호에 대한 7차 베지에 곡선은

$$\boldsymbol{b}(t)=\sum_{i=0}^{7}B_i^7(t)\boldsymbol{b}_i$$

이고, 여기서 제어점은 $\boldsymbol{b}_i=\left(x_i,y_i\right)(i=0,\ldots,3)$은 다음과 같다.

$\boldsymbol{b}_0=(\cos(\alpha),-\sin(\alpha))$

$\boldsymbol{b}_1=\left(\frac{1}{7}(2+7\cos(\alpha)-2\cos^2(\alpha)),\ \frac{1}{7}\sin(\alpha)(-7+2\cos(\alpha))\right)$

$\boldsymbol{b}_2=\left(\frac{1}{21}(14+17\cos(\alpha)-14\cos^2(\alpha)+4\cos^3(\alpha)),\ -\frac{1}{21}\sin(\alpha)(19-14\cos(\alpha)+4\cos^2(\alpha))\right)$

$\boldsymbol{b}_3=\left(\frac{1}{35}(48-25\cos(\alpha)+16\cos^2(\alpha)-4\cos^3(\alpha)),\right.$

$$\left.\frac{1}{35}\frac{\sin(\alpha)(-21+23\cos(\alpha)-16\cos^2(\alpha)+4\cos^3(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}\right)$$

$$\boldsymbol{b}_4 = \left(\frac{1}{35}\left(48-25\cos(\alpha)+16\cos^2(\alpha)-4\cos^3(\alpha)\right),\right.$$
$$\left. -\frac{1}{35}\frac{\sin(\alpha)(-21+23\cos(\alpha)-16\cos^2(\alpha)+4\cos^3(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}\right)$$
$$\boldsymbol{b}_5 = \left(\frac{1}{21}\left(14+17\cos(\alpha)-14\cos^2(\alpha)+4\cos^3(\alpha)\right),\ \frac{1}{21}\sin(\alpha)\left(19-14\cos(\alpha)+4\cos^2(\alpha)\right)\right)$$
$$\boldsymbol{b}_6 = \left(\frac{1}{7}\left(2+7\cos(\alpha)-2\cos^2(\alpha)\right),\ -\frac{1}{7}\sin(\alpha)(-7+2\cos(\alpha))\right)$$
$$\boldsymbol{b}_7 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

증명.
보조정리 3.1에서

$$H(7,0) = 1$$
$$H(7,1) = 7-2\cos(\alpha)$$
$$H(7,2) = 4\cos(\alpha)^2 - 14\cos(\alpha) + 20$$

을 대입하여 결과가 유도되며, $\sec(\alpha)$ 항은 소거되어 각이 π보다 큰 원호에도 근사가 가능하다.

제어점 $\boldsymbol{b}_i(i=0,\ldots,7)$는 $\boldsymbol{b}_i = (x_i, y_i)$ 이므로, 7차 베지에 곡선의 식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{b}(t) = \sum_{i=0}^{5}\boldsymbol{b}_i B_i^7(t) = \left(\sum_{i=0}^{5}x_i B_i^7(t),\quad \sum_{i=0}^{5}y_i B_i^7(t)\right),\ t\in[0,1]$$

그리고 위에서 구한 3차, 5차 베지에 곡선과 마찬가지로 제어점과 7차 베지에 곡선의 식을 이용하여 α가 π이상일 경우에 7차 베지에 곡선을 다음과 같이 그릴 수 있다. : 그림 3.1.5 참조
그리고 반경이 1인 원호와 7차 베지에 곡선도 t가 0에서 1까지 변할 때에 다른 점과는 만나지 않지만 $t=0,\frac{1}{2},1$ 세 점에서 만나야 한다.
7차 베지에 곡선이 잘 그려졌는지 확인하기 위해서는 5차 베지에 곡선과 마찬가지로 $\boldsymbol{b}(t) = (bx(t),\ by(t))$ 일 경우에, 오차분석 식

$$\psi(t) = (bx(t))^2 + (by(t))^2 - 1$$

을 이용하여 그래프를 다음과 같이 그려볼 수 있다. : 그림 3.1.6 참조

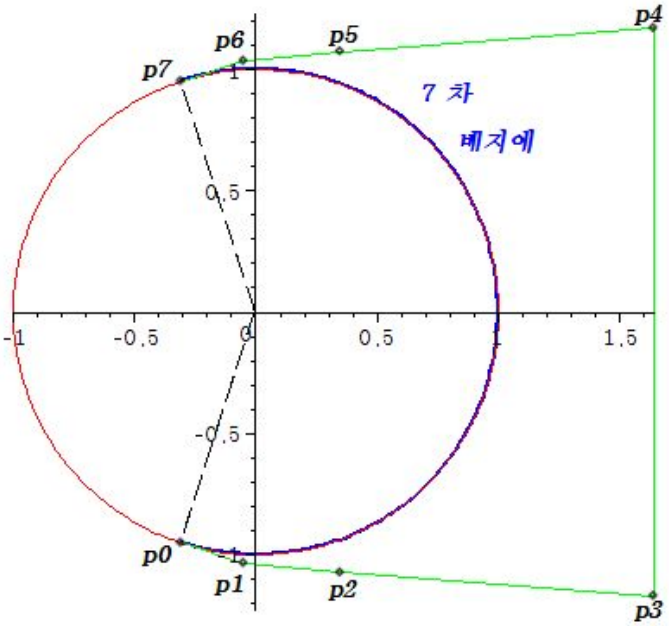


그림 3.1.5. $\alpha = \frac{6}{5}\pi$일 때 7차 베지에 곡선

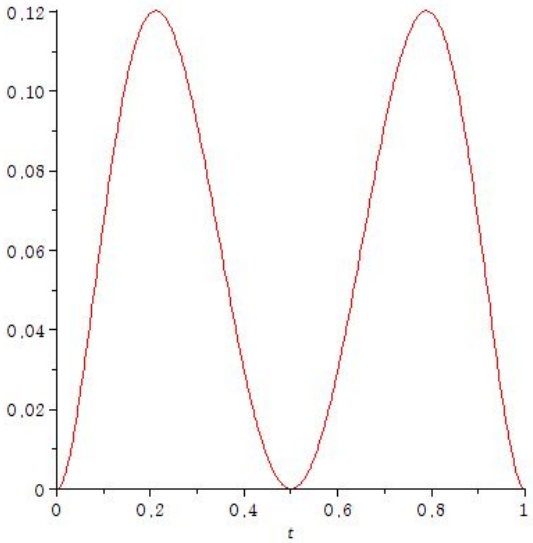


그림 3.1.6. 7차 베지에 곡선의 오차분석 그래프

3차, 5차 베지에 곡선과 마찬가지로 위와 같이 오차함수 그래프를 그려봄으로써 반경이 1인 원호와 근사하는 7차 베지에 곡선이 $t=0, \frac{1}{2}, 1$일 때 만난다는 것을 확인 할 수 있다. 예제를 통해서 그림으로 차수 n이 $3, 5, 7$일 때의 베지에 곡선을 그려봤다. 그림을 통해서 홀수차수 $n(\geq 3)$가 커질수록 육안으로는 반경이 1인 원호와 거의 비슷해지는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 2.1절의 베지에 곡선의 성질을 만족하고 있다는 것을 그림을 통해서 확인 할 수 있다.

3.2절 오차분석

CAGD(Computer Aided Geometric Design) 또는 기하모델링(Geometric Modeling)에서 주어진 곡선과 근사 곡선의 오차 분석은 주로 하우스도르프(Hausdorff) 거리로 계산한다.[6, 7] 일반적인 두 곡선의 하우스도르프 거리를 계산하기는 매우 어려우나, 두 곡선 중 한 곡선이 원호일 경우엔 보다 수월하게 이루어질 수 있다. 이 경우엔 다른 곡선 위의 점들 중에 원호로부터의 거리가 가장 먼 점까지의 거리가 바로 하우스도르프 거리가 된다.
따라서 원호 $p(\theta)=(\cos(\theta), \sin(\theta))$, $\theta \in [-\alpha, \alpha]$를 다항함수곡선 $b(t)$로 근사할 경우 원호와 다항함수곡선 사이의 하우스도르프 거리 $d_H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b})$의 식은 다음과 같다.

$$d_H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}) = \max\{\left|\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}-1\right| : t \in [0,1]\}$$

여기에서 $\boldsymbol{b}(t)=(x(t), y(t))=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{b}_i$이다. 다항함수 $x(t)^2+y(t)^2$를 미분하여 얻은 영점을 대입함으로서 하우스도르프 거리를 얻을 수 있다.

$$d_H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}) = \left|\sqrt{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \sec^2\frac{\alpha}{2} \sin^{2n}\frac{\alpha}{2}+1}-1\right|.$$

이 식의 유도과정에 대한 자세한 내용은 논문 [1]에 자세히 나와 있다. 위의 식을 이용하여 우리는 반원에 대하여 3차, 5차, 7차 하우스도르프 거리를 다음과 같이 제공한다. (표 3.2.1 참고)

차수 n	$d_H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$
$n=3$	2.72×10^{-4}
$n=5$	3.23×10^{-6}
$n=7$	4.80×10^{-8}

표 3.2.1. 3차, 5차, 7차 하우스도르프 거리

위에서 식을 이용하여 3,5,7차의 하우스르프 거리를 구한 것을 하나의 표로 확인하여 차수가 변함에 따라서 하우스도르프거리가 어떻게 변해가는지 알 수 있다.
차수가 커지면 하우스도르프 거리는 작아지는 것을 확인 할 수 있다.

4장. 다항곡면을 이용한 반구의 근사

4.1절 다항곡면을 이용한 반구근사와 제어망

임의의 홀수차 $n(\geq 3)$차 베지에 곡선의 i번째 제어점 $\boldsymbol{b}_i(i=0,\ldots,n)$가

$$\boldsymbol{b}_i = (x_i,\ y_i)$$

일 때, 우리는 임의의 홀수차 $n(\geq 3)$차 단위 반구 근사 다항곡면

$$\boldsymbol{b}(t,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} B_i^n(t)B_j^n(s)\boldsymbol{b}_{i,j}$$

의 i,j번째 제어점 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i,j=0,\ldots,n)$ 을

$$\boldsymbol{b}_{i,j} = (x_{i,j},\ y_{i,j},\ z_{i,j}) = (\ x_i x_j\ ,\ x_i y_j\ ,\ y_i\ )$$

으로 놓을 것이다. 이 곡면은 다음 참고 4.1.1의 성질을 만족하도록 구성한 것이며, 일반적으로 많이 쓰이는 방법이다.[3,6,7]

참고 4.1.1.

(a) 모든 $j=0,1,\cdots,n$에 대하여 제어점 $\boldsymbol{b}_{0,j}=(0,0,-1)$이고, $\boldsymbol{b}_{n,j}=(0,0,1)$이다. 따라서, 모든 $s\in[0,1]$에 대하여 등매개곡선(isoparametric curve) $\boldsymbol{b}(0,s)$은 하나의 점 $(0,0,-1)$이고, $\boldsymbol{b}(1,s)$은 하나의 점 $(0,0,1)$이다.

(b) 두 등매개 곡선 $\boldsymbol{b}(t,0)$, $\boldsymbol{b}(t,1)$은 서로 대칭이며, 단위원 $y^2+z^2=1$을 직선 $x=0$으로 분리하여 절반씩(반원)을 각각 근사하는 다항곡선이다.

(c) 수평곡선 $\boldsymbol{b}(t_0,s)$은 중심이 $\left(0,0,\sum_{i=0}^{n} y_i B_i^n(t_0)\right)$, 반경이 $\sum_{i=0}^{n} x_i B_i^n(t_0)$, x,y축에 평행인 반원을 근사하는 다항 곡선이다.

위의 (c)를 다시 설명하면, 위와 같이 반구 근사 다항곡면의 i,j번째 제어점이 쓰여질 수 있는 이유는 다음과 같다. 베지에 곡면 식은 위의 임의의 홀수차 $n(\geq 3)$ 반구 근사 다항곡면의 i,j번째 제어점의 일반항을 이용해서 구하면 다음과 같다. 각각의 고정된 $t_0\in(0,1)$에 대하여

$$b(t,s) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t_0)B_j^n(s)\boldsymbol{b}_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i\cdot x_j,\ x_i\cdot y_j\ ,y_i)B_i^n(t_0)B_j^n(s)$$

$$= (x(t), y(t), z(t))$$

그러면

$$z(t) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} B_j^n(s) \right) y_i B_i^n(t_0)$$

이고, $\sum_{j=0}^{n} B_j^n(s) \equiv 1$이므로 위의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i B_i^n(t_0)$$

그러면 $B_i^n(t_0)$은 고정된 값이 나오게 되고 위의 $z(t)$은 곡선의 높이에 대한 식이다. 또한,

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} (x_i \cdot x_j, x_i \cdot y_j) B_i^n(t_0) B_j^n(s) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} (x_j, y_j) B_j^n(s) \right) \left(\sum_{i=0}^{n} x_i B_i^n(t_0) \right)\end{aligned}$$

이므로 마찬가지로 $B_i^n(t_0)$은 고정된 값이며, $\sum_{i=0}^{n} x_i B_i^n(t_0)$의 값은 상수로 나오게 되어 반경을 나타내게 되며, $\sum_{j=0}^{n} (x_j, y_j) B_j^n(s)$은 반원 근사의 식으로써 i, j가 $0, \ldots, n$까지 변해갈 때 반구 근사 다항곡면이 만들어 진다.
즉, 위의 임의의 홀수차 $n(\geq 3)$차 반구 근사 다항곡면의 i, j번째 제어점 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i, j = 0, \ldots, n)$을 $\boldsymbol{b}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) = (x_i \cdot x_j, x_i \cdot y_j, y_i)$으로 제시되어 이 제어점들을 이용하여 결국 홀수차 $n(\geq 3)$차 반구 근사 다항곡면이 만들어 질 수 있다.

예제) 3차, 5차, 7차 다항곡면을 이용한 반구 근사

(1) 3차 다항곡면 이용한 반구 근사

위의 내용을 이용하여 3차 반구 근사 다항곡면의 i, j번째 제어점 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i, j = 0, \ldots, 3)$ 을 구하여

3차 베지에 곡면의 식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}(t,s) &= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i^3(t)B_j^3(s)\boldsymbol{b}_{i,j} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} x_{i,j}B_i^3(t)B_j^3(s), \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} y_{i,j}B_i^3(t)B_j^3(s), \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} z_{i,j}B_i^3(t)B_j^3(s)\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} x_i x_j B_i^3(t)B_j^3(s), \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} x_i y_j B_i^3(t)B_j^3(s), \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} y_i B_i^3(t)B_j^3(s)\right)
\end{aligned}
$$

이 식을 이용하여 $t, s \in [0,1]$에서 다음과 같은 3차 베지에 곡면을 이용하여 반구 근사 그림을 그릴 수 있다. 그리고 그림에서 파란색 선으로 이루어진 다각형이 3차 베지에 곡면을 이용해서 근사하여 그린 반구의 제어망이다. 그리고 베지에 곡선과 마찬가지로 베지에 곡면도 볼록껍질의 성질을 갖는다는 것을 그림으로 확인할 수 있다. : 그림 4.1.1 참조

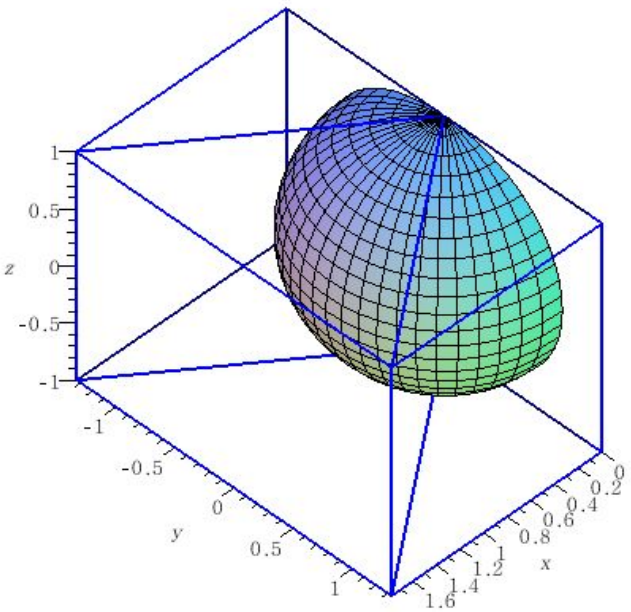


그림 4.1.1. 3차 베지에 곡면을 이용한 반구 근사 그림

(2) 5차 다항곡면 이용한 반구 근사

3차 베지에 곡면을 이용하여 반구 근사 그림을 그렸듯이 위의 내용을 이용하여 5차 반구 근사 다항곡면의 i,j번째 제어점 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i,j=0,\ldots,5)$ 을 구하여 5차 베지에

곡면의 식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{b}(t,s)=\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}B_i^5(t)B_j^5(s)\boldsymbol{b}_{i,j}$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}x_{i,j}B_i^5(t)B_j^5(s),\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}y_{i,j}B_i^5(t)B_j^5(s),\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}z_{i,j}B_i^5(t)B_j^5(s)\right)$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}x_ix_jB_i^5(t)B_j^5(s),\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}x_iy_jB_i^5(t)B_j^5(s),\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}y_iB_i^5(t)B_j^5(s)\right)$$

이 식을 이용하여 $t,s\in[0,1]$에서 다음과 같은 5차 베지에 곡면을 이용하여 반구 근사 그림을 그릴 수 있다. 그리고 그림에서 파란색 선으로 이루어진 다각형이 5차 베지에 곡면을 이용해서 근사하여 그린 반구의 제어망이다. : 그림 4.1.2 참조

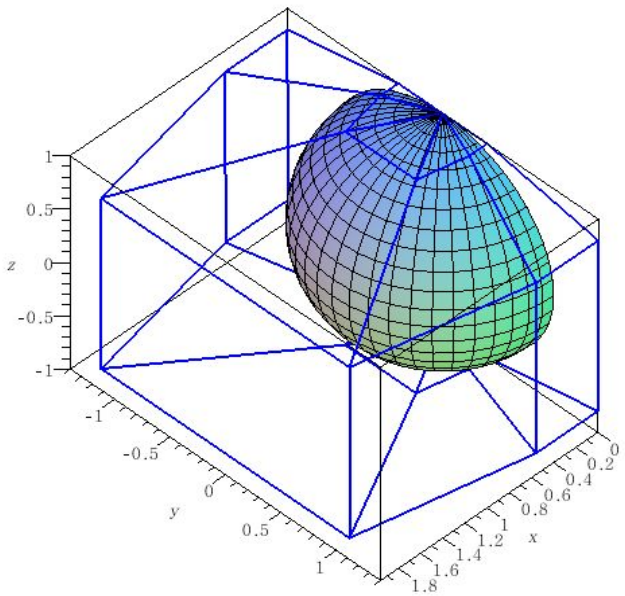


그림 4.1.2. 5차 베지에 곡면을 이용한 반구 근사 그림

(3) 7차 다항곡면 이용한 반구 근사

5차 베지에 곡면을 이용하여 반구 근사 그림을 그렸듯이 위의 내용을 이용하여 7차 반구 근사 다항곡면의 i,j번째 제어점 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i,j=0,\ldots,7)$ 을 구하여 7차 베지에 곡면의 식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{b}(t,s)=\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}B_i^7(t)B_j^7(s)\boldsymbol{b}_{i,j}$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}x_{i,j}B_i^7(t)B_j^7(s),\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}y_{i,j}B_i^7(t)B_j^7(s),\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}z_{i,j}B_i^7(t)B_j^7(s)\right)$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}x_ix_jB_i^7(t)B_j^7(s),\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}x_iy_jB_i^7(t)B_j^7(s),\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}y_iB_i^7(t)B_j^7(s)\right)$$

이 식을 이용하여 $t,s\in[0,1]$에서 다음과 같은 7차 베지에 곡면을 이용하여 반구 근사 그림을 그릴 수 있다. 그리고 그림에서 파란색 선으로 이루어진 다각형이 7차 베지에 곡면을 이용하여 그린 근사하여 그린 반구의 제어망이다. : 그림 4.1.3 참조

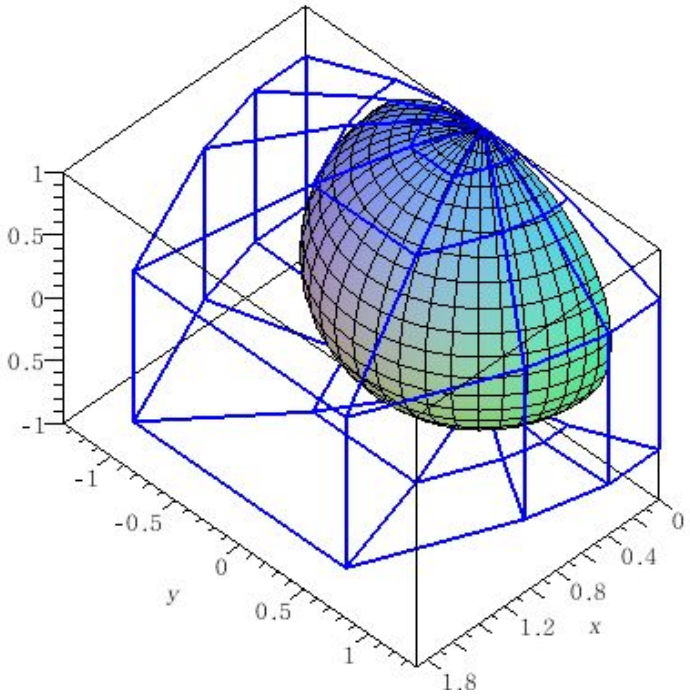


그림 4.1.3. 7차 베지에 곡면을 이용한 반구 근사 그림

4.2절 오차분석

반구 $\boldsymbol{r}(t,s)$와 근사다항곡면 $\boldsymbol{b}(t,s)$ 사이의 오차분석은 하우스도르프 거리(Hausdorff distance)로 하고자 한다. 반구의 특성상, 하우스도르프 거리는

$$d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{r}) = \max\{||\boldsymbol{b}(s,t)|-1| : (t,s)\in[0,1]^2\}$$

으로 계산이 가능하다. 한편, 모든 $(t,s)\in[0,1]^2$에 대하여 $|\boldsymbol{b}(s,t)| \geqq 1$이므로

$$|\boldsymbol{b}(s,t)|-1 = \sqrt{x(t,s)^2+y(t,s)^2}-1$$

가 성립하고, 이 거리함수가 내부에서 최댓값을 갖는 점의 위치를 $(t_0,s_0)\in(0,1)^2$라 하자. 또한 오차함수는 $s=1/2$에 대하여 대칭성을 가지고 있다.

정리 4.2)
반구에 대한 n차$(n\geq 3)$ 다항곡면근사에 대해, $d_H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{b}(t_0,s_0)|-1$일 때, $s_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{(2\sqrt{n})}$이다.

증명) 오차함수는 다음과 같다.

$$\psi(t,s) = x(t,s)^2 + y(t,s)^2 + z(t,s)^2 - 1$$

이때,

$$x(t,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x_{i,j}\cdot B_i^n(t)\cdot B_j^n(s)$$

$$y(t,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} y_{i,j}\cdot B_i^n(t)\cdot B_j^n(s)$$

$$z(t,s) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} z_{i,j}\cdot B_i^n(t)\cdot B_j^n(s)$$

이고, $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$는 임의의 홀수차 $n(\geq 3)$차 반구 근사 다항곡면의 i,j번째 제어점이다. 즉, $\boldsymbol{b}_{i,j} = (x_{i,j},\ y_{i,j},\ z_{i,j}) = (\ x_j\cdot y_{n-i}\ ,\ x_i\cdot x_j\ ,\ y_{n-j}\ )$.

이 오차함수를 s에 관해 편미분 하여 0이 되게 하는 s의 영점을 찾으면

$s_0 = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 이다. 이중에서 $s = 1/2$에서는 항상 오차가 0이 되므로, 우리가 찾는 $\frac{\partial \psi}{\partial s}$의 영점의 일반적인 해는

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{(2\sqrt{n})}$$

이다. □

또한 t_0의 경우에는 일반적인 해를 구할 수 없으므로 영점이 되는 t를 구하기 위해서는 오차분석 식

$$\psi(t,s) = x(t,s)^2 + y(t,s)^2 + z(t,s)^2 - 1$$

을 t에 관하여 편미분한 식에 s에 관해 편미분 하여 0이 되게 했던 s의 영점 $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2\sqrt{n})}$ 를 s에 대입하여 수치적으로 영점을 찾을 수 있다.

예제) 3차, 5차, 7차 다항곡면 이용한 반구 근사의 오차분석

(1) 3차 오차분석

3차 반구 다항곡면의 오차함수

$$x(t,s)^2 + y(t,s)^2 + z(t,s)^2 - 1$$

를 구하여 t에 관해 편미분한 식을 구하고, 위의 정리 4.2를 이용하여 3차 근사에 대해 하우스도르프 거리를 갖게 하는 s의 점의 위치는 $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$ 이라는 것을 구할 수 있다. 이때, t에 대해서 편미분한 식에 s 대신 s의 영점 $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$을 대입하면 다음과 같의 식을 구할 수 있다.

$$\frac{8}{27} t(t-1)(2t-1)(162t^2 - 162t + 31)$$

그리고 수치적으로 0과 $\frac{1}{2}$사이의 t의 영점 $t_0 = 0.258$을 얻을 수 있다.

즉, 3차 반구 다항곡면의 오차함수식이 0이 나오게 하는 0과 $\frac{1}{2}$사이의 t_0, s_0의 수치적인 값을 구하면

$$(t_0, s_0) = \left(0.2578389475, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$$

이다.

또한 3차 반구 다항곡면의 하우스도르프 거리의 식은 다음과 같다.

$$d_H(p,b) = \left| \, |b(t_0, s_0)| - 1 \, \right| = \left| \left| \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(t_0) B_j^3(s_0) \boldsymbol{b}_{i,j} \right| - 1 \right|$$

이 식에 3차 반구 다항곡면의 오차함수식이 0이 나오게 하는 점 $(t_0, s_0) = \left(0.2578389475, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$을 대입하면

$$d_H(p,b) = 0.025820185$$

이다.

(2) 5차 오차분석

5차 반구 다항곡면의 오차함수

$$x(t,s)^2 + y(t,s)^2 + z(t,s)^2 - 1$$

를 구하여 t에 관해 편미분한 식을 구하고, 위의 정리 4.2를 이용하여 5차 근사에 대해 하우스도르프 거리를 갖게 하는 s의 점의 위치는 $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}$이라는 것을 구할 수 있다. 이때, t에 대해서 편미분한 식에 s대신 s의 영점 $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}$을 대입하면 다음과 같의 식을 구할 수 있다.

$$\frac{64}{3125} t(t-1)(2t-1)(15625t^6 - 46875t^5 + 50064t^4 - 22003t^3 + 3165t^2 + 24t + 2)$$

그리고 수치적으로 0과 $\frac{1}{2}$사이의 t의 영점 $t_0 = 0.3104339548$을 얻을 수 있다.

즉, 5차 반구 다항곡면의 오차함수식이 0이 나오게 하는 0과 $\frac{1}{2}$사이의 t_0, s_0의 수치적인 값을 구하면

$$(t_0,\, s_0) = \left(0.3104339548,\, \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}\right)$$

이다.

또한 5차 반구 다항곡면의 하우스도르프 거리의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_H(p,b) &= |\,|b(t_0,\, s_0)| - 1\,| \\ &= \left|\left|\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} B_i^5(t_0) B_j^5(s_0)\boldsymbol{b}_{i,j}\right| - 1\right| \end{aligned}$$

이 식에 5차 반구 다항곡면의 오차함수식이 0이 나오게 하는 점 $(t_0,\, s_0) = \left(0.3104339548,\, \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}\right)$을 대입하면 하우스도르프 거리를 구하면,

$$d_H(p,b) = 0.003804509$$

이다.

(3) 7차 오차분석

7차 반구 다항곡면의 오차함수

$$x(t,s)^2 + y(t,s)^2 + z(t,s)^2 - 1$$

를 구하 t에 관해 편미분한 식을 구하고, 위의 정리 4.2를 이용하여 7차 근사에 대해 하우스도르프 거리를 갖게 하는 s의 점의 위치는 $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\sqrt{7}$ 이라는 것을 구할 수 있다. 이때, t에 대해서 편미분한 식에 s 대신 s의 영점 $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\sqrt{7}$을 대입하면 다음과 같의 식을 구할 수 있다.

$$\frac{8}{823543}t(t-1)(2t-1)(184473632t^{10}-922368160t^{9}+1884406352t^{8}-2003416448t^{7}$$
$$+1160330032t^{6}-342978800t^{5}+39524232t^{4}+24786t^{2}+4374t+729)$$

그리고 수치적으로 0과 $\frac{1}{2}$사이의 t의 영점 $t_0 = 0.336736816816419 t_0$을 얻을 수 있다. 즉, 7차 반구 다항곡면의 오차함수식이 0이 나오게 하는 0과 $\frac{1}{2}$사이의 t_0, s_0의 수치적인 값을 구하면

$$(t_0, s_0) = \left(0.336736816816419, \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\sqrt{7}\right)$$

이다.

또한 7차 반구 다항곡면의 하우스도르프 거리의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_H(p,b) &= \left| \, |b(t_0, s_0)| - 1 \, \right| \\ &= \left| \left| \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} B_i^7(t_0) B_j^7(s_0) \boldsymbol{b}_{i,j} \right| - 1 \right| \end{aligned}$$

이 식에 7차 반구 다항곡면의 오차함수식이 0이 나오게 하는 점 $(t_0, s_0) = \left(0.336736816816419, \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\sqrt{7}\right)$을 대입하면 하우스도르프 거리를 구하면,

$$d_H(p,b) = 0.000693239$$

이다.

그리고 위의 예제의 내용을 하나의 표로 확인하여 하우스도르프 거리가 어떻게 변하는지 한눈에 할 수 있다. : 표 4.2.1 참조
비록 표 4.2.1의 오차는 오차함수의 내부 $(0,1)^2$에서의 최댓값을 계산한 것이지만, 경계곡선에서의 오차는 표 3.2.1에 나와 있듯이, 내부에서의 최댓값보다 작음을 확인할 수 있다. 따라서 정의역 전체 $[0,1]^2$에서의 오차도 바로 표 4.2.1에 나와있는 값과 동일하다.

차수 n	s의 영점	t_0의 영점	$d_H(b,s)$
$n=3$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}$	0.258	2.58×10^{-2}
$n=5$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\sqrt{5}$	0.310	3.80×10^{-3}
$n=7$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{14}\sqrt{7}$	0.337	6.93×10^{-4}

표 4.2.1. $3,5,7$차 일 경우 s,t의 s_0,t_0과 하우스도르프 거리

위의 표에서 확인할 수 있듯이 차수가 높아질수록 하우스도르프 거리는 작아지는 것을 확인할 수 있다.

5장. 결론

Floater의 논문([6])에서 임의의 유리 2차 베지에 곡선의 형태에서 원뿔곡선으로 어떻게 근사할 수 있는지 설명하고 있다. 여기에서 근사 방법으로는 에르미트 보간법을 이용하였고, 그 근사방법을 확장하여 Fang의 논문([3])에서는 임의의 홀수차 n차에 대한 원호의 근사 방법을 제시하였다. 두 논문에서는 각이 $0<\theta<\pi$인 원호의 근사방법에 적용 가능한 것이고, 본 논문에서는 이것을 확장하여 각이 π 이상인 대한 원호에 대한 근사 방법을 제시한 것이다.
그로인해 임의의 홀수차 $n(\geq 3)$차의 $i(i=0,\ldots,n)$번째 제어점 $\boldsymbol{b}_i$의 일반항을 α $(0<\alpha<2\pi)$에 관한 식으로 쓸 수 있었다. 실제로 $\alpha=\frac{6}{5}\pi$일 때의 3,5,7차의 제어점을 구하여 베지에 곡선으로 원호 근사 그림을 그려봄으로써 각이 π이상일 경우의 원호 근사에 대해 그림으로 확인해 볼 수 있었다.
또한 임의의 홀수차 $n(\geq 3)$차의 i번째 제어점의 일반항을 이용하여 우리는 홀수차 $n(\geq 3)$차 반구 근사 다항곡면의 i,j번째 제어점 $\boldsymbol{b}_{i,j}$ $(i,j=0,\ldots,n)$을 구할 수 있었다. 다항 매개 곡선과 마찬가지로 예제로 $3,5,7$차 베지에 곡면으로 반구 근사 그림을 예시로 제시하였다.
본 논문에서 제시한 반구근사방법의 가장 중요한 의미는, 기존의 구의 근사에서는 최소한 8개의 조각으로 분해한 후 각각 근사해야했지만, 우리의 방법은 최소 2개의 반구 근사를 통해 구면 전체를 근사할 수 있다는 것이다.
마지막으로, 우리는 구면근사에 따른 오차분석을 제시하였고 차수 n이 증가함에 따라 오차가 감소함을 예제로 보일 수 있었다.

참고문헌

[1] Y.J Ahn, Y.S Kim, Y.S Shin, "*Approximation of circular arcs and offset curves by Bezier curves of high degree,*" Journal of computational and applied mathematics, 2004, p.405-416.

[2] T. Dokken, Lyche M. Daehlen, T. and K. Mϕrken, *"Good approximation of circles by curvature-continuous Bezier curves,"* Computer aided geometric design, 1990, p. 33-41.

[3] L. Fang, *"Circular arc approximation by quintic polynomial curves,"* Computer aided geometric design, 1998, p.843-861.

[4] L. Fang, *" G^3 approximation of conic sections by quintic polynomial curves,"* Computer aided geometric design, 1999, p. 755-766.

[5] G. Farin, "*Computer Graphics and Geometric Modeling,* " Fifth Edition, University of California, Morgan Kaufmann, 2002, p.205-225.

[6] M. Floater, "*High order approximation of conic sections by quadratic splines,*" Computer aided geometric design, 1995, p. 617-637.

[7] M. Floater, "*An $O(h^{2n})$ Hermiter approximation for conic sections,"* Computer aided geometric design, 1997, p. 135-151.

[8] Q. Hu, "*Approximation of conic sections by constrained Bezier curves of arbitrary degree,"* Journal of computational and applied mathematics, 2012, p.2813-2821.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20108064	과 정	석사
성 명	한글: 서혜미	한문: 徐 惠 美		영문: Seo Hye-Mi	
주 소	광주 광역시 서구 상무1동 현대아파트 106동 504호				
연락처	010-3074-9235	E-MAIL: bhappyh@naver.com			
논문제목	한글 : 다항곡면을 이용한 반구 근사 영문 : Approximation of half sphere by polynomial surfaces				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집·형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포·전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송·출력을 허락함.

2012 년 12 월 일

저작자: 서혜미 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하