[UCI]I804:24011-200000242063

2011년 8월

교육학석사(수학교육)학위논문

중학생들의 정수의 사칙연산 원리에 대한 이해도 분석

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 경 원

중학생들의 정수의 사칙연산 원리에 대한 이해도 조사

A study on the middle school students' conceptual understanding of meaning of operations with integers.

2011년 8월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 경 원

중학생들의 정수의 사칙연산 원리에 대한 이해도 분석

지도교수 김 남 길

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2011년 4월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 경 원

강경원의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 박 순 철 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 황 혜 정 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 김 남 길 인

2011년 8월

조선대학교 교육대학원

목 차

ABSTRACT

Ⅰ. 서 론 ····· 1
A. 연구의 필요성과 목적 ····· 1
B. 연구 내용 ····· 3
C. 연구 문제 ····· 3
D. 연구의 제한점 ····· 3

Ⅱ. 이론적 배경 ····· 4
A. 음수의 역사적 배경 ····· 4
B. 음수 지도 방안 ····· 7
C. 음수 지도에 관한 선행 연구 ····· 20

Ⅲ. 연구 방법 및 절차 ····· 24
A. 연구 대상 ····· 24
B. 검사 문항 구성 ····· 24
C. 검사 방법 ····· 25
D. 자료 수집 및 분석 방법 ····· 25

Ⅳ. 연구 결과 분석 ····· 27
A. 연구문제1 ····· 27
B. 연구문제2 ····· 30

Ⅴ. 요약 및 제언 ·····35

참고문헌 ·····37
<부록> 검사 문항지 ·····39
검사지 및 면담 결과 ·····42

ABSTRACT

A study on the middle school students' conceptual understanding of meaning of operations with integers.

Kyung Won Kang
Advisor : Prof. Nam Gil Kim
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

The purpose of following research is to get an idea how middle-school aged students understand and study about the operations with negative integers. Two questions have been set to achieve the purpose of this research.

1. Are students able to explain the operations with negative integers formulas in detail or through detailed models.
2. What types of difficulties do students experience when dealing with the operations with negative integers.

The research was conducted for 100 second and third year middle school students of 'S' middle school in Gwang-ju. First year students were excluded as they were not yet thought about positive numbers. The two types of examination papers were used to find out the level of understanding on the theory of the operations with negative integers. Interviews had been carried out individually in detail for what is hard to get from the examination.
Not many students could not explain the process even though most of them were able to calculate the formulas. The development on the negative integers needs to be investigated for students to understand.

Ⅰ. 서 론

A. 연구의 필요성과 목적

수학은 성공과 실패를 거듭해 온 인간의 활동이다. 학교 수학 교육은 수학적 사고의 산물인 수학적 지식을 단지 전달만 하는 것이 아니고, 학생들이 진정한 수학적 사고 활동을 촉진하는 교육을 하도록 노력해야 한다. 이를 위해서 학생들에게 수학적 지식을 강요하는 것이 아니라, 학생의 수학적 활동을 돕기 위한 수학화를 강조하고, 학생들에게 수학을 성공할 수도 있고 실패할 수도 있는 인간 활동으로 제시해야 한다. 많은 사람들이 싫어하는 과목을 수학이라고 한다. 이것은 수학을 가르치는 사람의 문제이거나 가르치고자 하는 내용을 어떻게 가르치느냐 하는 지도방법의 문제가 더 크다고 한다. 중학교 수학 교육의 목적은 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙들을 이해하게 하고, 여러 가지 현상에 대하여 수학적으로 관찰하고 사고하는 능력과 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력 등을 기르게 하려는 것이다(교육과학기술부, 2007). 이러한 수학 교육의 목적을 달성하기 위해서 학생들은 먼저 수학의 각 분야에서 기본적인 개념을 명확히 학습해야 한다. 음수 개념은 학생들이 중학교에 진학해서 처음 접하게 되는 수학적 개념이며 방정식과 함수와 같은 학습을 수행하는데 기초가 되는 수학적 개념이기도 하다. 만약 학생들이 이 단원에서 어려움을 겪고 실패한다면 학생들은 곧 이어 배우게 되는 방정식의 학습에도 어려움을 겪을 것이다. 이러한 현상 속에서 학생들의 음수의 개념 및 사칙 연산 과정에 대한 충분한 이해 없이 반복적인 연습 및 암기를 통한 교수-학습 활동이 이루어져서는 안 된다. 최병철과 우정호(2002)는 학생들이 음수 개념의 본질을 이해하지 못한 채 기계적으로 암기하고 있는 현상에 대해 문제점을 제기하며 음수 개념의 본질적인 형식성을 지도하기 위한 교수학적 방안을 모색하였다.

현재 일상생활에서 음수가 자연스럽게 사용되고 있지만 음수의 직관적 접근이 어려웠기 때문에 음수의 형식적인 체계가 완성되고 정당한 수로 인정받은 것은 음수가 출현한지 1500년 이상의 긴 시간이 지난 19세기였다. 음수를 그 유용성 때문에 사용하면서도 음수 사용 시 발생하는 몇 가지 모순들을 지적하면서 인정하지 않았던 것이다.

옛 수학자들이 겪었던 이러한 혼란들은 중학생이 되어서 음수를 처음 접하게

되는 학생들에게도 올수 있다. 그러므로 학생들에게 음수의 개념 및 연산을 지도하는 것은 아주 중요한 것이다. 한 자리 수의 덧셈과 곱셈, 뺄셈과 나눗셈과 같은 기초적인 수의 조합을 아는 것은 필수적이다. 동일하게 필수적인 것은 계산의 능숙함, 즉, 계산하기 위해서 효율적이고 정확한 방법을 활용하는 것이다. 어떤 방법을 활용하든지 간에, 학생들은 자신들의 해결 방법을 설명할 수 있어야 하며, 효율적이고 정확하며 일반적인 방법의 유용성을 알아야 한다. Hiebert et al 와 Thornton는 계산의 능숙함은 수 체계에서 산술 연산의 역할과 의미를 이해하는 것과 병행하여 함께 발달되어야 한다고 하였다. 연산의 계산을 능숙하게 하기 위해서는 개념적 이해와 계산적 숙달간의 균형과 연결이 필요하다. 학생들이 연산 원리를 이해하지 못한 채 과도한 반복 연습으로 계산 방법만을 익히게 된다면 학생들은 그 방법을 종종 잊어버리거나 부정확하게 기억한다(Hiebert, 1999; Kamii, Lewis & Livingston, 1993; Hiebert & Lindquist, 1990).

음수를 배우기 전까지 학생들에게 덧셈은 어떤 증가를 의미하였다. 0을 더해 아무런 변화가 없는 경우는 특별한 경우이다. 0보다 작은 것을 더하는 것, 더구나 덧셈의 결과가 더하기 전보다 작아진다는 사실은 학생들에게 혼란을 일으킨다. 그러므로 학생들은 여러 가지 방법으로 음수 연산을 모델화하기를 원한다(김정애, 1992). 여기서 제기되는 것은 학교 현장에서 어떤 방법으로 음수의 연산을 정의하고 가르쳐야 하는가라는 문제이다. 본 연구는 이러한 문제의식을 가지고, 현행 교육과정에서 제시하고 있는 음수의 연산 지도 방안이 학생들이 음수의 사칙 연산 원리에 대해서 절차적 이해를 넘어서 개념적 이해를 발달시키는데 어떤 영향을 미치는지 알아보는 것이다.

B. 연구 내용

첫째, 음수의 역사적 배경을 알아본다.
둘째, 음수의 사칙 연산 지도 모델에 대하여 알아본다.
셋째, 검사지 및 학생 면담을 통하여 음수의 사칙연산 원리에 대한 학생들의 이해도 및 학생들이 음수의 사칙연산 학습에서 겪는 어려움에 대해서 알아본다.

C. 연구 문제

첫째, 학생들은 음수의 사칙연산 원리를 구체적으로 또는 구체적 모델을 통해서 설명할 수 있는가?
둘째, 음수의 사칙연산에 대한 학습에서 학생들은 어떤 어려움을 갖고 있는가?

D. 연구의 제한점

본 연구는 다음과 같은 제한점이 있다.
첫째, 본 연구의 대상은 광주광역시의 한 중학교에 다니는 중학생들로 한정 되어있기 때문에 연구 결과를 일반화 하는데 한계가 있고, 연구 결과를 해석하는데 제한점이 있다.
둘째, 본 연구는 정수의 사칙연산에 대해 연구했기 때문에 연구결과를 유리수까지 확대 해석하는 대는 제한점이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. 음수의 역사적 배경

수학을 학교 선생님이 학생들에게 가르치는 것은 수학을 푸는 것만이 아니라 수학을 사고하는 과정을 가르치는 것이다. 오늘날 중학교 1학년 1학기 때부터 대학수학 및 수학전공 서적 까지 음수를 정당한 수로 인정하고 음수의 연산을 배우고 있다. 현 시점에 음수는 자연수와 같이 익숙한 수가 되어버렸다. 역사 속에서 음수가 도입되는 과정을 아는 것은 교육적으로 아주 큰 의미가 있다. 현재는 음수라는 개념을 당연하게 생각하고 있지만 역사적으로 살펴볼 때 음수 개념이 생성되고 인정받기까지 1500년 이상의 기나긴 시간이 필요하였다. 음수는 기원전 250년 경에 중국의 한나라의 수학책인『구장산술』의 8장 '방정'에는 연립방정식의 풀이에 대해서 쓰여있는데 해를 구하는데 음수를 사용하였는데, 양수(+)와 음수(-)를 반대되는 양을 표현하는걸로 나타 내고 있다. 책에서는 계산에 쓰이는 막대로 붉은 색을 음수로 나타내었다는 기록이 있다. 중국인들은 이 책에 쓰인 방법으로 방정식을 풀었지만 음수가 방정식의 해는 될 수 있다는 생각은 하지 못했다(양영오, 조윤동, 2000). 그 이후 3세기말 경 그리스의 수학자 Diophantus (AD 200-284?)는 음수의 계산 규칙에 대하여 그의 책에서 다루고 있다. 그러나 그는 $4x+20=4$의 해에서 양수가 아닌 해가 있음을 발견하지만 이를 엉터리 수라며 배제하였다(Burton, 허재성, 2010). 7세기 초 인도의 회계장부에서는 양수를 자산으로, 음수를 부채로 사용한 흔적이 발견되었고 지금도 예산이 마이너스가 되었다는 것을 "적자(赤字)"라는 말로 자주 나타내는데, 이 낱말의 유래는 여기서 비롯된 것이다(Jan, Gullberg, 1997). 그 당시의 인도의 수학자 Brahmagupta(598-665)는 음수의 부호에 관한 계산 법칙을 서술하였지만, 이도 역시 음수를 방정식의 해로는 인정 하지 않았다. 그 당시의 사람들은 방정식의 해를 구하면서 음수의 해가 나왔지만 수의 개념을 크기, 개수, 길이, 넓이 등의 양적인 개념에 종속하였기 때문에 음수 개념을 하나의 '수'로써 받아들이는데 많은 어려움을 가졌다. 음수는 대수방정식의 일반해를 구하려는 대수적 필요에 의하여 출현하였다. 즉, 일차방정식 $ax+b=0(a\neq 0)$의 해가 모든 경우에 존재하기 위해서는 새로운 수가 필요하였다. 따라서 방정식의 풀이의 완성을 위하여 수학자들이 '허구의 수'인 음수를 도입한 것이다. 이 당시 인도의 수학자 Bhaskara는 양수의 제곱근이 두 개 즉,

양의 근과 음의 근이 있다고 주장 하였다(Kline, 허재성, 2010). 이후 유럽에서는 16세기에 이러한 새로운 수에 이름을 붙인 수학자 중 대표적인 한사람이 바로 Girolamo Cardano(1501-1576)이다.

Cardano는 1545년에 출판한 Ars magna에서 음수를 상대적인 양의 개념으로서 방정식의 근으로 다루었다(Jan, Gullberg, 1997). 이렇게 음수는 필요성에 의하여 점점 알려지게 되었지만 그 당시 수학자중 Descartes(1596-1650)는 음의 근은 거짓 근이라 하였고 Pascal(1623-1662)은 0보다 작은 수는 존재하지 않는다고 하였다. 그럼에도 불구하고 음수는 계산 대상으로 계속 사용하였다. 당시의 수학자들이 음수를 받아들일 수 없다고 생각한 근거는 다음과 같은 것들인데 이는 현재 음수를 처음 학습하는 학생들에게도 거의 유사하게 나타나고 있다(김남희 외, 2006).

· 작은 수에서 큰 수를 빼는 것이 어떻게 가능한가?

· -3은 2보다 작은데 $(-3)^2$은 2^2보다 크다. 작은 수의 제곱이 어떻게 큰 수의 제곱보다 클 수 있는가?

· $(-4)\times(-5)=+20$임을 인정하면 $1:-4=-5:20$이 된다. 더 큰 수와 더 작은 수의 관계가 어떻게 더 작은 수와 더 큰 수의 관계가 같을 수 있는가?

· $(-4)\times3=(-4)+(-4)+(-4)$임은 직관적으로 인식할 수 있다. 예를 들면, 4달러를 세 번 빌린 것으로 생각하면 결국 12달러를 빌린 것이다. 그러나 $4\times(-3)$은 직관적으로 아무 의미가 없다.

이와 같이 음수 개념과 음수의 연산을 실제의 양과 관련시켜 정당화 하려고 하였으나, 만족 스러운 결과를 얻을 수 없었다. 그러나 음수를 받아들이게 되는 결정적인 새로운 계기가 마련되었다. 17세기 이전의 수학이 개인적으로 독립적으로 발전하였던 것에 반해 17세기에는 각 분야가 서로 보완하여 어떤 개념에 대해 다양한 해석을 시도한 해석 기하학, 대수적 위상수학 등이 탄생하면서 발전하기 시작하였다. 그와 더불어서 음수의 필요성이 강화되면서 음수를 '정당한 수'로 받아들인 것도 이러한 수학의 발달 경향 덕분이였다. 해석 기하학에서 직석 전체와 곡선 전체를 대수적으로 서술하려면 음의 값을 변수로써 인정할 수 밖에 없었으므로 더 이상 음수를 피할 수 없었기 때문이다. 음수의 개념이 형식적 대수의 필요보다 기하에서의 필요에서 더 본질적인 것이며 강제적인 것이 되었다. 이때, Descartes(1596-1650)에 의한 기하학의 좌표화는 음수에 대한 확신을 한층 강화시켜 음수를 정당한 수로 만들었다. 다시 표현하면 도형의 대수적 기술이 음수 존재성의 확립을 가능 하게 한 것이다(우정호, 1998). 그리

고 18세기 영국의 수학자 Maclaurin(1698-1746)은 음수를 소득과 손실 등의 구체적인 문맥과 연결시켰고, 동 시대의 독일 Kant(1724-1804)는 음의 양을 없는 것 보다 작은 양이 아니라 단지 반대의 의미를 갖는 것이라고 말했다. 음수의 체계를 확립시키기 위해서는 많은 시간이 필요하였다. 오랜 시간이 흘러 많은 노력 끝에 완전한 성공을 거둔 것은 19세기 독일의 수학자 Herman Hankel(1839-1873)이었다. 19세기 이르러 수체계의 확장이란 개념이 나타났는데 이것은 수를 다루는 관점의 기본적인 변화를 의미한다. 이 때, 관점의 변화란 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로의 이동을 말하는 것이다(신유신, 1995). Hankel은 음수를 받아들이기 위하여 더 이상 구체적인 모델을 찾지 않았고, 그에게 음수는 실제적인 것을 나타내는 개념의 수가 아니라 형식적인 구조를 나타내는 것에 불과했다. 결과적으로 음수의 개념을 양과 크기의 개념에 관련짓지 않고, 순수한 형식적 존재로 간주 할 수 있게 되었다. 따라서 음수의 양 개념과 시각적인 모델로부터 독립된 순수한 이론적 개념으로 인정받기 시작하였고, 자연수와 동등한 수로 취급받게 되었다. 그 이후 수 개념을 정당화 하기위하여 실제적인 모델을 군이 물리적 세계에서 찾고자 하지 않았다. 이렇게 형식적으로 확장된 음수 체계는 실제와 실제의 관계를 표현하는 자연수와 그 연산과 모순되지 않는다. 이것이 바로 형식 불역의 원리이다. Freudenthal은 자연수를 다루는 원리를 '대수의 원리'라고 한다면, 이 원리를 확장된 체계인 음수에 적용할 때, 이전과 똑같이 대수의 원리라고 부르기 보다는 '대수 불역의 원리'라고 부르기를 원한다. 그리고 그는 음수의 개념을 형식적인 본질에 입각하여 대수적인 형식불역의 원리에 따라 자연수 체계의 확장으로 지도할 것을 주장한다(Freudenthal, 박지영, 2008). 이러한 과정을 통하여 음수는 1세기부터 방정식의 일반해를 찾는 과정에서부터 등장하기 시작하지만, 19세기에 와서야 비로써 형식적인 존재로 인정 되었다. 이렇게 음수에 대한 개념은 형식화된 결과 뿐 아니라 형식화되는 과정이 이 반복되면서 지금의 음수의 존재성에 대한 결론을 얻기 까지 1500년 이상의 세월이 필요했던 것이다.

B. 음수 지도 방안

1. 구체적 모델을 이용한 방법

a. 수직선 모델

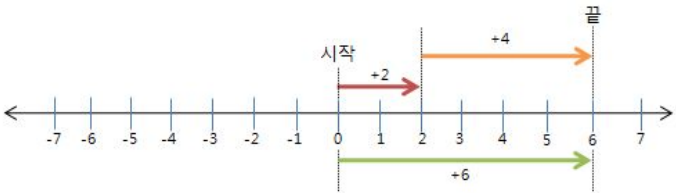
수직선 모델은 음수의 사칙계산중 지도 모델로 가장 많이 사용하는 모델이다. 중학교에서 진학한 학생들은 이미 수직선을 초등학교때 접해왔기 때문에 수직선을 그리는데 익숙하다. 그래서 대부분의 교과서에서 사용되고 있는 모델중 하나이다. 정수 지도에 주로 사용되는 수직선은 왼쪽, 오른쪽으로 쭉 늘어나 있는 수평의 수직선이다. 수평으로 직선을 그려서 기준이 되는 임의의 점 0을 잡고, 양의 정수를 일정한 방향에 일정한 간격만큼 나타내고, 음의 정수도 일정한 방향에 일정한 간격만큼 배열한다. 그러나 양의 정수와 음의정수의 순서는 편의적인 것이다. 수직선 모델에서 음수는 크기와 방향을 갖는 수이다. 정수는 자연수의 확장형이므로 결과적으로 자연수도 수직선 모델에서 크기와 방향을 갖는 수로 해석할 수 있다. 이러한 이유로 음수를 종종 '방향이 있는 수(directed number)'라고 부른다. 수직선 위에서의 수는 방향과 크기를 가지는 화살표로 나타내어 진다. +1은 오른쪽으로 향하는 1단위의 화살표이고, -1은 왼쪽으로 향하는 1단위의 화살표이다. 여기서 수직선에서 오른쪽으로 가는 방향을 양의 방향이라고 하는데 이것은 수학적 습관일 뿐이다.

(1) 덧 셈

수직선 모델에서 두 정수의 덧셈은 첫 번째 원소의 화살표 머리에 두 번째 원소인 더하는 수를 나타내는 화살표의 꼬리를 두고, 항상 원점인 0에서 시작한다. 수직선 모델을 이용하여 두 정수의 덧셈을 살펴보면 다음과 같다.

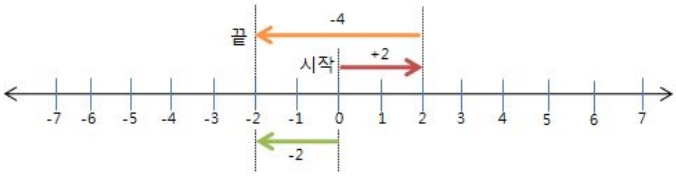
(양수)+(양수)

$(+2)+(+4)=(+6)$



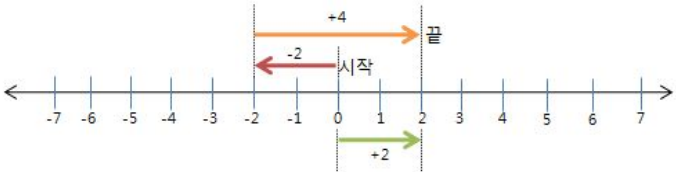
(양수)+(음수)

$(+2)+(-4)=(-2)$



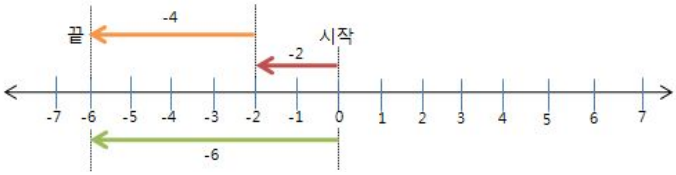
(음수)+(양수)

$(-2)+(+4)=(+2)$



(음수)+(음수)

$(-2)+(-4)=(-6)$



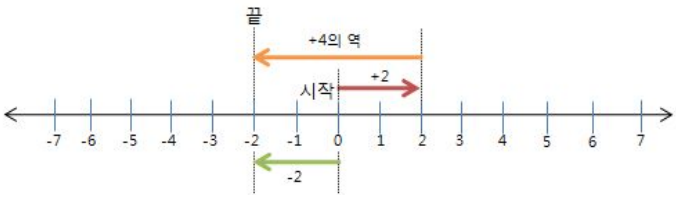
이 때, (첫 번째 이동)+(두 번째 이동)=(도착점의 위치)가 성립한다.

(2) 뺄 셈

정수에서 뺄셈은 자연수의 계산과 같이 덧셈의 역연산이다. 수직선 위에서는 반대 방향을 역이라고 생각하면 수직선에서는 방향이 좌, 우 둘뿐이므로 오른쪽의 반대 방향은 왼쪽이고, 왼쪽의 반대 방향은 오른쪽이다. 수직선 모델에서 뺄셈은 빼고자 하는 수의 화살표 반대 방향으로 놓는다. 수직선 모델의 예로서 두 정수의 뺄셈을 살펴보면 다음과 같다.

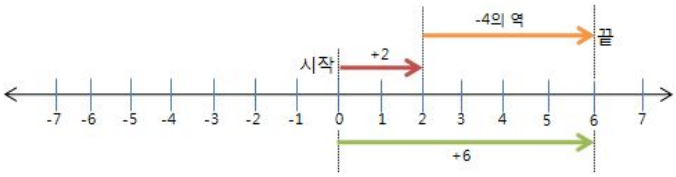
(양수)-(양수)

$(+2)-(+4)=(-2)$



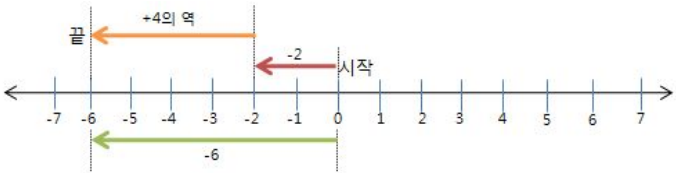
(양수)-(음수)

$(+2)-(-4)=(+6)$



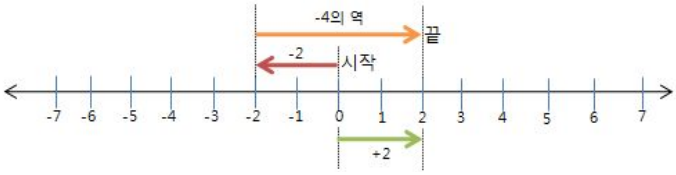
(음수)-(양수)

$(-2)-(+4)=(-6)$



(음수)-(음수)

$(-2)-(-4)=(+2)$

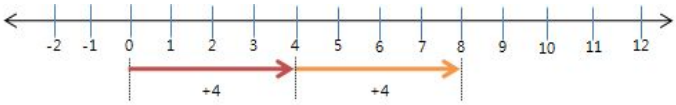


(3) 곱 셈

두 정수의 곱셈은 첫 번째 수를 승수(multiplier), 두 번째 수를 피승수(multiplicand)로 보는 방법으로 생각한다. 즉, 두 정수의 곱셈은 뒷부분의 수를 앞부분의 수만큼 더한 것이다. 예를 들어 $a \times b$라고 하면 b의 시점을 원점으로 하고 a의 부호가 양수이면 b의 방향으로 a번만큼 더하고 a의 부호가 음수이면 b의 반대 방향으로 a번만큼 더한다.

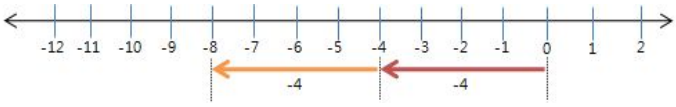
(양수)×(양수)

$(+2)\times(+4)=(+8)$



(양수)×(음수)

$(+2)\times(-4)=(-8)$



(음수)×(양수)

$(-2)\times(+4)=(-8)$

(음수)×(음수)

$(-2)\times(-4)=(+8)$

곱셈은 수직선 모델의 한계가 드러난다. 수직선 모델을 도입할 당시 양의 정수는 양의 방향 즉, 일반적으로 오른쪽을 향하는 화살표이고, 음의 정수는 왼쪽으로 향하는 화살표이다. 그러나 이러한 약속은 계속 지켜지지 않는다. 승수의 양의 부호는 피승수의 방향과 같은 방향으로 승수만큼 반복되는 것을 의미하고, 승수의 음의 부호는 피승수의 방향과 반대 방향으로 승수만큼 반복되는 것을 의미한다.

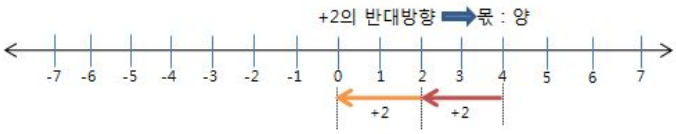
(4) 나눗셈

수직선 모델에서 나눗셈을 직관적으로 나타내려는 것은 가장 어렵기 때문에 설명하는 것도 가장 어렵다. 나눗셈은 곱셈의 역연산이다. 곱셈은 거듭해서 더하는 것으로 해석하였으므로 나눗셈은 피제수에서 제수만큼을 거듭하여 빼는 것으로 설명하는 것이 계산을 보다 쉽게 나타 낼 수 있다.

나눗셈은 피제수의 화살표의 종점에서 출발하여 원점 0을 향해 가는 수직선의 형태이다. 또한 원점 0에 도착하기 위해서는 제수의 방향과 반대 방향을 앞으로 생각하여 화살표가 앞으로 이동하면 몫이 양의 부호를 가지게 되고, 뒤로 이동하면 몫이 음의 부호를 가지게 된다.

(양수)÷(양수)

$(+4)\div(+2)=(+2)$

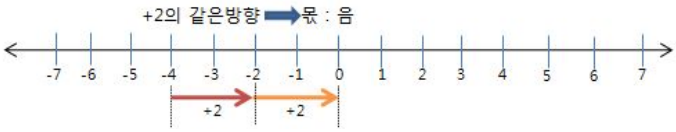


(양수)÷(음수)

$(+4)\div(-2)=(-2)$

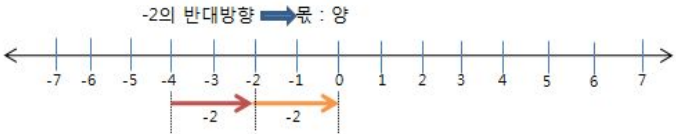
(음수)÷(양수)

$(-4)\div(+2)=(-2)$



(음수)÷(음수)

$(-4)\div(-2)=(+2)$



수직선 모델은 대부분의 교과서에 쓰일 정도로 음수의 연산 지도에 용이하다. 학교 또는 어떤 장소에서도 특별한 도구 없이 간단하게 교수 · 학습이 가능하다. 수직선에서 양수는 오른쪽을 향하는 화살표로 음수는 왼쪽을 향하는 화살표로 해석한다. 이러한 해석으로 덧셈과 뺄셈을 지도할 때는 효과적인데 곱셈과 나눗셈을 할 때에는 오른쪽 방향이 양수, 왼쪽 방향이 음수를 나타낸다는 것은 수직선상에서의 암묵적인 가정을 위반하므로 학생들에게 혼란은 준다.

즉, 덧셈과 뺄셈을 할 때 음수는 수직선 위에서 화살표로 해석하였다. 그러나 곱셈에서 피승수는 화살표로 해석하였지만 그 방향은 승수의 부호에 따라 달라졌으며 나눗셈에서 몫의 부호는 제수의 역방향을 고려하여 결정되므로 수에 관한 일관성이 없다.

수직선 모델에서 양수는 본질적이고 구체적으로 다루어지는 반면 음수는 연산의 결과로 유도되는 부수적인 것으로 다루어지고 있지 때문에 연산의 실제적인 의미를 갖기 어렵다. 또한 Freudenthal은 수직선 모델에서 수직선은 수평으로 그려지는데 음수를 도입할 때 이용했던 구체물들은, 예를 들어 온도계, 산의 고도 등은 실제로 수평보다 수직으로 된 것이 많으므로 수직의 수직선이 학습의 도구로써 유용하다고 주장하였다. 이러한 결점에도 불구하고 수직선은 음수지도에 있어 가장 유용한 도구로 평가되고 있다(안수미, 2010; 김유진, 2010; 박지영, 2008; 박영선, 2006; 최병철, 2002).

b. 셈돌 모델

가테노(Gattegno)가 제안한 셈 돌 모델은 두 가지 색의 돌을 이용하여 정수를 나타내고 연산의 개념을 정의하는 모델 중의 하나 이다. 이때 이 모델에서 일

반적으로 검은 돌은 양수로, 흰 돌은 음수로 나타낸다. 이 때 같은 개수의 흰 돌과 검은 돌을 동시에 제거 할 수도 있고 추가할 수 도 있다. 따라서 다음 예 같은 경우 셈 돌 모델에서는 동일시 하다고 할 수 있다.

이 셈 돌 모델은 정수가 자연수의 순서쌍으로 이루어진 동치류라는 대수적인 정의를 초등화한 것이다. 정수를 다음과 같이 (검은 돌의 개수, 흰 돌의 개수)를 이용하여 순서쌍으로 나타 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} -1 &= \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\cdots\} \\ 0 &= \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\cdots\} \\ +1 &= \{(2,1),\ (3,2),\ (4,3),\cdots\} \end{aligned}$$

(1) 덧 셈

셈 돌 모델에서 덧셈은 자연스럽게 지도가 가능하다. 부호가 같은 정수의 덧셈은 셈 돌을 합치고 부호가 서로 다른 정수의 덧셈은 같은 수의 검은 돌과 흰 돌을 제거 한다.(소멸법칙)

(양수)+(양수)
$(+4)+(+2)=(+6)$

●●●● + ●● = ●●●●●●

(양수)+(음수)
$(+4)+(-2)=(+2)$

●●●● + ○○ = ●●

(음수)+(양수)
$(-4)+(+2)=(-2)$

○○○○ + ●● = ○○

(음수)+(음수)
$(-4)+(-2)=(-6)$

○○○○ +○○ = ○○○○○○

(2) 뺄 셈

부호가 같은 수의 뺄셈은 셈 돌을 제거 하면 된다. 하지만 부호가 다른 주 정수의 뺄셈에서는 '없는 쌍을 만들어 내기(빼는 수만큼 검은 돌과 흰 돌을 첨가 한다)'가 필요하다.(첨가법칙)

(양수)-(양수) $(+4)-(+2)=(+2)$	●●●● - ●● = ●●
(양수)-(음수) $(+4)-(-2)=(+6)$	●●●●●●○○ + ○○ = ●●●●●●
(음수)-(양수) $(-4)-(+2)=(-6)$	○○○○○○●● + ●● = ○○○○○○
(음수)-(음수) $(-4)-(-2)=(-2)$	○○○○ -○○ = ○○

셈 돌 모델은 수 개념을 사물의 크기와 개념과 관련짓는데 익숙한 학생들에게 무리 없이 정수의 덧셈과 뺄셈을 가르칠 수 있다. 그러나 곱셈과 나눗셈은 셈 돌 모델로는 설명하는데 어려우며 부호의 계산 법칙을 규정해야만 설명이 가능하다. 그리고 뺄셈은 연산 기호와 음수 부호 사이에서의 규칙을 이해하는데 혼란을 줄 수 있다는 단점이 있다(안수미, 2010; 김유진, 2010; 박지영, 2008; 박영선, 2006; 최병철, 2002).

c. 우체부 모델

우체부 모델은 우편물을 배달하는 우체부와 우편물을 받는 사람의 이야기로 구성되어 진다. 여기서 우체부가 배달 하는 것은 어음과 고지서이다. 우체부는 배달만 하는 것이 아니라 때로는 배달을 잘못하여 어음과 고지서를 다시 되가져 가기도 한다. 여기서 어음은 양의 정수로 나타내고, 고지서는 음의 정수로 나타낸다. 그리고 우체부가 가지고 오는 것은 '덧셈', 가지고 가는 것은 '뺄셈'으로 나타낸다.

먼저, 우체부의 행동을 수학적 기호와 관련지어 생각해 보자.

[표 1] 우체부 이야기에서의 수학적 기호

우체부 이야기	수학적 기호
우체부가 5원짜리 어음을 가지고 왔다.	$+(+5)$

우체부가 5원짜리 어음을 가지고 갔다.	-(-5)
우체부가 5원짜리 고지서를 가지고 왔다.	+(-5)
우체부가 5원짜리 고지서를 가지고 갔다.	-(-5)

(1) 덧 셈

(양수)+(양수)
$(+400)+(+200)=(+600)$

우체부가 수신자에게 400원짜리 어음과 200원짜리 어음을 가지고 왔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 600원 늘었다.

(양수)+(음수)
$(+400)+(-200)=(+200)$

우체부가 수신자에게 400원짜리 어음과 200원짜리 고지서를 왔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 200원 늘었다.

(음수)+(양수)
$(-400)+(+200)=(-200)$

우체부가 수신자에게 400원짜리 고지서와 200원짜리 어음을 가지고 왔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 200원 줄었다.

(음수)+(음수)
$(-400)+(-200)=(-600)$

우체부가 수신자에게 400원짜리 고지서와 200원짜리 고지서를 가지고 왔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 600원 줄었다.

(2) 뺄 셈

(양수)-(양수)
$(+400)-(+200)=(+200)$

우체부가 수신자에게 400원짜리 어음을 가지고 와서 전에 배달했던 200원짜리 어음을 잘못 배달된 것이라며 가지고 갔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 200원 늘었다.

(양수)-(음수) $(+400)-(-200)=(+600)$	우체부가 수신자에게 400원짜리 어음을 가지고 와서 전에 배달했던 200원짜리 고지서를 잘못 배달된 것이라며 가지고 갔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 600원 늘었다.
(음수)-(양수) $(-400)-(+200)=(-600)$	우체부가 수신자에게 400원짜리 고지서를 가지고 와서 전에 배달했던 200원짜리 어음을 잘못 배달된 것이라며 가지고 갔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 600원 줄었다.
(음수)-(음수) $(-400)-(-200)=(-200)$	우체부가 수신자에게 400원짜리 고지서를 가지고 와서 전에 배달했던 200원짜리 고지서를 잘못 배달된 것이라며 가지고 갔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 200원 줄었다.

(3) 곱 셈

두 정수의 곱셈에서 곱해지는 수는 어음과 고지서의 액수로 곱하는 수는 '우체부가 몇 개를 가지고 왔거나 또는 가지고 간 것'으로 이해한다.

(양수)×(양수) $(+400)\times(+200)=(+80000)$	우체부가 수신자에게 200원짜리 어음을 400장 가지고 왔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 80000원 늘었다.
(양수)×(음수) $(+400)\times(-200)=(-80000)$	우체부가 수신자에게 200원짜리 고지서를 400장 가지고 왔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 80000원 줄었다.
(음수)×(양수) $(-400)\times(+200)=(-80000)$	우체부가 수신자에게 200원짜리 어음을 400장 가지고 갔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 80000원 줄었다.

(음수)×(음수) $(-400)\times(-200)=(+80000)$	우체부가 수신자에게 200원짜리 고지서를 400장 가지고 갔다. 우체부가 다녀간 후 돈이 80000원 늘었다.

우체부 모델은 음수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈은 자연스럽게 학습이 가능하고 이해하기가 어렵지 않으므로 연산이 가능하다. 그러나 나눗셈은 우체부 모델로 다루기는 부적합하며 처음 음수를 접하는 학생들에게 어음과 고지서 란 용어자체가 어렵게 느껴지기 때문에 역으로 혼란을 줄 수 있다(안수미, 2010; 김유진, 2010; 박지영, 2008; 박영선, 2006; 최병철, 2002).

d. 귀납적 외삽법

네덜란드의 수학교육학자 프로이덴탈(Freudenthal, H. ; 1905~1990)은 자연수의 성질을 그대로 정수로 확장하여 다음과 같은 방법으로 지도해야 한다고 주장한다. 귀납적 외삽법은 자연수 영역에서 더 큰 정수로의 유추적 확장이다. 그래서 학생들은 이 방법으로 음수의 연산을 학습하기 전에 자연수에 대한 학습이 제대로 이루어져 있어야 한다. 귀납은 한 단계에서 그 다음 단계를 구성해 나가는 예견을 포함한다. 이러한 예견은 연속적인 행동을 구성하는 것으로서 유한개의 구성 후 직관을 통하여 그 다음 단계의 구성을 계속 진행할 수 있도록 하는 것이다.
즉, 양수의 사칙연산의 결과로 음수의 결과를 예측하는 것이다.

(1) 덧 셈

일정한 수의 양의 정수를 순서대로 차례대로 더한 후, 이 결과를 가지고 그 일정한 수에 음수를 차례로 더한 결과를 예측하게 한다. 귀납적 외삽법은 대수방정식의 해가 유일함을 전제로 둔다. 또한 자연수에서 성립된 덧셈의 교환법칙이 확장된 영역인 정수체계에서 성립한다는 것을 가정한다.

$$
\begin{aligned}
4 + 2 &= 6 \\
4 + 1 &= 5 \\
4 + 0 &= 4 \\
4 + (-1) &= 3 \\
4 + (-2) &= 2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

부호가 다른 두 정수의 합은 두 수의 절댓값의 차에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙인다.

$$
\begin{aligned}
(-4) + 2 &= -2 \\
(-4) + 1 &= -3 \\
(-4) + 0 &= -4 \\
(-4) + (-1) &= -5 \\
(-4) + (-2) &= -6 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

음의 두 정수의 합은 두 수의 절댓값의 합에 음의 부호를 붙인다.

(2) 뺄 셈

뺄셈도 덧셈과 같은 형식으로 예측 할 수 있다.

(3) 곱 셈

귀납적 외삽법을 사용하면 곱셈의 부호 법칙을 쉽게 알아 낼 수 있다. 이 방법을 통하여 같은 부호끼리의 두 수의 곱셈은 결과는 양수이고, 다른 부호끼리의 두 수의 곱셈의 결과는 음수임을 쉽게 알아 낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
4 \times 2 &= 8 \\
4 \times 1 &= 4 \\
4 \times 0 &= 0 \\
4 \times (-1) &= -4 \\
4 \times (-2) &= -8 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2 \times (-2) &= (-4) \\
1 \times (-2) &= (-2) \\
0 \times (-2) &= 0 \\
(-1) \times (-2) &= 2 \\
(-2) \times (-2) &= 4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(4) 나눗셈

나눗셈도 곱셈과 같은 방법으로 구할 수 있다. 그러나 양수 나누기 음수에 대

하여 직관적으로 설명이 되어 있지 않기 때문에 음수 나누기 음수를 유도하는 것이 적합하지 않다. 따라서 나눗셈은 곱셈의 역연산으로 바꾸어 설명할 수 있다.

e. 형식 불역의 원리

프로이덴탈(Freudenthal, H. ; 1905~1990)은 음수는 물리적 세계의 구체적 대상으로부터 추상화된 것이 아니라 방정식과 그 해집합의 구조를 완전하게 하려는 형식적인 요구로부터 생겨난 것이기 때문에 음수의 형식적인 본질을 고려한다면 구체적인 모델을 통한 음수 지도에서 더 나아가서 자연수 체계에서 확장된 순수한 형식 체계로서 음수를 지도하는 것이 필요하다는 주장을 하였다.
자연수로부터 정수로의 확장하는 것과 같은 이러한 수 체계 확장에서 하나의 원칙이 되는 것이 '형식불역의 원리(principle of performance of equivalent forms)' 이다. 이는 대수적 또는 기하적 구조를 확장할 때에는 기존의 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 해야 한다는 것을 의미한다. 대수적 원리에 따라 음수의 정의로부터 그 계산방법을 이끌어 낼 수 있다. 예를 들어, 음수의 정의에 따라

$$(-2)+2=0 \cdots\cdots ㉠,\ (-4)+4=0 \cdots\cdots ㉡$$

㉠,㉡에 양변을 더하고 덧셈의 교환법칙과 결합법칙을 사용하면,

$$\{(-2)+(-4)\}+(2+4)=0 \text{ 따라서}$$

$$(-2)+(-4)=-(2+4)$$

그리고 ㉠에 4를, ㉡에 -2를 각각 곱하여 분배법칙을 적용시키면

$$4\times(-2)+4\times2=0,\ (-2)\times(-4)+(-2)\times(4)=0$$

따라서

$$-\{4\times(-2)\}=4\times2,\ -\{(-2)\times4\}=(-2)\times(-4)$$

곱셈의 교환법칙에 의해

$$-\{4\times(-2)\}=4\times2,\ -\{4\times(-2)\}=(-2)\times(-4)$$

곧,

$$(-2)\times(-4)=2\times4$$

음수의 연산 구조는 기하적인 의미에서도 자연수의 연산 구조를 유지하면서 확장된다. 예를 들면, $f(x)=x-2$을 생각할 때 음수가 도입되기 전의 상태에서는 피감수가 2보다 크거나 같을 때에만 이 연산이 의미를 가지므로 함수의 그

래프는 제1사분면에만 그려지는 반직선이 된다. 이 그래프를 반직선이 직선이 되도록 '자연스럽게' 확장하는 것은 결국 $x<2$ 일 때, $x-2$이 어떻게 정의되어야 하는가를 나타내는 것이고, 사실상 이는 '대수적 구조를 유지하는 방식'의 확장과 일치한다(우정호, 2009).

f. 기타 음수 지도 모델

음수의 개념을 도입하기 위하여 사용되는 모델로는 온도계 모델, 소득 · 손실(자산 · 부채)모델, 수심 모델, 층 · 승강기 모델, 시간 모델, 동서 방향 모델, 취업률 모델 등이 있다. 위와 같은 모델들은 일상생활에 일어나는 현상을 통하여 음수의 필요성을 각인 시켜주고 실제적인 문맥에서의 음수의 의미를 접하고 해석할 수 있는 상황을 보여준다(최병철, 2002).

B. 음수지도에 관한 선행 연구

음수지도에 관한 선행 연구는 음수의 형식적 특성, 직관적인 음수지도방법, 효과적인 음수 지도를 위한 학습지도 모델 개발, 효과적인 음수 지도 방안, 음수개념 지도 방법에 대한 연구, 드모르간의 음수 지도 방법 연구 등이 이루어지고 있다.

최병철과 우정호(2006)는 형식적 특성에 대한 연구를 수행 하였다. 그들은 학교수학의 음수 개념의 접근법은 일관성이 결여되어 있어 학생들에게 이해되기 어려운 측면이 있고 인지적 갈등요인이 내재되어 있다고 주장하였다. 음수는 학교수학에서 비형식적 접근의 위험성과 구체적 접근의 한계가 명백히 드러내고 있음에도 불구하고 발달심리학적 측면을 고려하지 않을 수 없는 초등수학의 특성상 그 형식적 본질을 명확히 드러내어 제시하지 못하고 있다고 하였다. 학교수학은 구체적 접근을 피할 수 없다고 하더라도 그 본질을 훼손해서는 안 된다는 점을 고려할 때 음수의 형식적 구조적 본질을 드러내어 지도할 수 있다고 하였다. Freudenthal(1983)은 처음부터 음수를 방정식의 해로 형식적으로 도입하고 음수의 연산을 대수적인 형식 불역의 원리를 이용하여 형식적으로 도입할 것을 주장 하였다. 연산의 예는 형식 불역의 원리에 따라 정수의 대수적 구조를 연산의 기본성질과 항등원, 역원의 성질을 가정하고 이용한 음수 연산 지도의 형식적 접근 방법이다. 그리고 정수의 사칙계산 방법은, 형식불역의 원리에 따라 초등학교 수학에서 학습한 자연수의 연산의 기본성질이 정수에서도 그대로 성립함을 가정하고, 음수의 형식적인 정의에 따라 전개된 형식적 접근 방법이다. 형식불역의 원리가 일관되게 정수의 계산 알고리즘을 합리화하는 반면에 여러 가지 구체적인 모델은 일관성이 결여되어 있고 항상 특별한 해석을 하지 않을 수 없게 한다는 점에서 이와 같은 형식적인 사고방식이 적절하고 놀라운 힘을 갖고 있음을 학생 스스로 발견하도록 해야 할 것 이라고 하였다.

윤성재(1992)는 직관적인 음수 지도에 대한 연구를 수행하였고, 그는 음수와 그 연산을 지도함에 있어서 직관적 지도방법과 분석적 지도방법의 교수학적 전략이 어떻게 시도해 왔으며, 직관적인 지도방법의 유용성과 한계를 고찰해 봄으로써 학교수학에서 직관적 지도와 형식적 지도의 적절한 절충방안을 모색해 보았고, 그는 수학교육은 완성된 수학을 전달하는 것이 아니라 수학을 하는 과정을 통해서 이루어져야 한다는 면에서 볼 때 아동의 직관적 사고를 개발하고, 개념정리 증명을 직관적으로 알아내도록 하는 것이 유익할 것이라고 하였다.

김남예(2007)는 효과적인 음수 지도에 대한 연구를 수행하였고, 그는 효과적인 음수 지도에 관하여 몇 가지 방법을 제안 하였다.

첫째로는 음수 지도의 도입 시기 이다. 음수의 지도의 도입 시기를 중학교 1학년이 아닌 그전에 배워야 한다고 주장하고 있다. 새로운 개념을 배우는 것은 학생들에게 심리적 난이도를 증가시키고, 수를 크기의 개념으로 학습한 상태에서 갑자기 음수를 학습하게 된다면 이전의 수학자들이 그러한 것처럼 학생들도 역시 인지적인 장애를 겪을 것이라고 하였고, 이 내용을 먼저 초등학교 6학년에서 비형식적인 방법의 구체적인 모델과 문맥적인 학습 후, 중학교 1학년에서 좀 더 심화시켜 형식적으로 학습을 한다면 더 효과적으로 학생들에게 음수를 지도할 수 있을 것이다 라고 주장하였다. 둘째로는 수학사를 이용한 음수 지도이다. 초기 음수이해의 어려움을 공감하게 하는 것 또한 음수를 학습할 때 학생들의 동기유발을 가능하게 하고 그 필요성을 알게 함으로써 좀 더 적극적인 자세로 학습에 임할 수 있게 할 것이라도 하였다. 셋째로는 직관적 지도 방법과 형식적 지도 방법의 병행 지도 이다. 음수의 덧셈, 뺄샘 지도는 직관적 지도 방법을 사용하고, 음수의 곱셈, 나눗셈 지도는 형식적 지도 방법을 사용 한다라고 하였고, 넷째로는 교사들의 음수에 대한 인식 변화 이다. 효과적인 음수지도를 위해서 학교 내의 교과연구회, 시 · 도 교육청교사 연수, 그리고 교사 재교육에 적극적으로 참여해 교사 스스로 열정을 갖고 공부해야 할 것이라고 제안하였다.

김흥기, 김응석(2006)은 수학에서 양·음수의 지도에 관한 연구를 수행하였고, 그들은 현행 중학교 교과서에서 처음 도입되는 양수, 음수의 도입 방법과 그에 따른 사칙연산의 지도에 관하여 알아 보았고, 그리고 바람직한 방법으로 특정한 화살표를 사용한 양수와 음수의 가시적 표현을 이해하게 하고, 이들을 사용하여 초등학교에서 활용한 가시적 표현을 양수, 음수의 계산 과정에도 사용한 지도 방법을 제시 하였다.

박지영(2008)은 효과적인 음수지도를 위한 학습 지도 모델 개발에 대한 연구를 수행하였고, 그는 기존의 음수 지도 모델과 집단 찾기 모델을 비교 하여 서로의 장단점을 비교하였다. 연산을 이용한 집단 찾기 모델은 남학생을 양수로, 여학생을 음수로 정의한 직관적 모델로써 음수의 개념 학습이 알고리즘 획득에만 치우친 수업 방식으로 인해 학습의 흥미도가 떨어진 것을 보완한 것이다. 따라서 수학학습에 대한 학생들의 흥미와 동기를 유발시키기 위해 교과서에 제시된 내용을 탈피하여 실생활과 접목시킨 모델이므로 수학 학습부진아에게도

적합한 모델이다 라고 하였고, 집단 찾기 모델은 학생들의 활동을 중요시 여기므로 학습에 대한 흥미를 유발하여 수학 학습에 자심감이 생기면서 높은 학습 참여도를 얻을 수 있고, 음수 연산 지도 시 최소한 정수 소개는 피하고 처음부터 수학적으로 덧셈과 뺄셈, 곱셈연산을 할 수 있다는 것을 보여주었다. 비록 기존의 직관적 모델과 같이 나눗셈을 연장할 수 없고, 곱셈에서 수에 대한 일관성은 없지만 집단 찾기 모델로 통해 토의식 수업을 할 수 있으므로 학생들 간의 멘토식 수업으로 의사소통을 통한 효과적인 능동학습이 될 수 있고 하였다. 집단 찾기 모델은 수학하는 과정을 중시하는 여러 수학자들의 주장에 알맞은 모델이다. 예를 들어 Bruner의 EIS이론에 맞게 수업 상황 제시할 수 있으므로 학생들의 이해 능력을 신장 시킬 수 있고, 심도 깊은 이해를 할 수 있으므로 학습한 내용이 내적구조에 오래 남을 수 있다고 하였다.

우정호와 최병철(2007)은 음수의 개념의 이해에 관한 교수학적 분석을 연구하였는데 그들은 음수의 개념의 본질인 형식성을 지도하기 위한 구체적인 방안을 구축 하려고 하였고, 이를 위하여 먼저 음수 개념의 본질적인 형식성의 이해 과정에 대한 역사적 현상학적 고찰과 음수 개념 이해의 심리학적 분석을 토대로 음수 개념의 발달 수준을 설정하고, 이러한 분석을 기초로 우리나라 교육과정에서의 음수 지도 내용과 우리나라 중등학교 학생들의 음수의 이해 상태를 조사 분석 하였다, 그리고 음수 개념의 기호화 과정에 대한 분석을 기초로 음수 개념의 형식성을 지도 하기 위한 지도 방안을 제시 하였다.

박은혜(2009)는 음수개념 지도방법의 고찰에 대한 연구를 수행 하였다. 그는 중학교 1학년 수학의 음수지도에 있어 효과적인 방법을 모색하고자 음수지도를 크게 다섯 가지로 나누고 분석을 하였다.

첫째로는 수직선 모델은 덧셈연산에 적합하다 라고 하였고 온도계의 예와 일기예보를 이용한 현실생활에 쓰이는 직적접인 예를 들 수 있다. 직관적으로 중학교 1학년 학생들이 이해하기 쉽고 흥미를 유도할 수 있다.

둘째로는 셈돌 모델은 덧셈연산, 뺄셈연산 그리고 곱셈연산에는 적합한데, 소수의 교과서에서 적용을 하고 있다. 처음 도입에서 설명은 가능하지만 연산기호와 음수 부호사이의 규칙을 이해하는데 혼란을 주기에 덧셈과 뺄셈이 각각의 반대연산이라는 것을 명확히 보여주는데 도움이 될 것이다 라고 하였다.

셋째로는 우체부 모델은 학생들의 흥미를 위하여 눈높이에 맞추어서 설명을 하였는데 실생활과 관련되어서 현실적이긴 하나 부가적인 제시로는 적합하지 않다고 하였다. 넷째로는 귀납-외삽법은 초등학교 때 배운 대응관계를 통하여

뺄셈연산과 곱셈연산에서 많이 사용 되고 있다고 하였다. 곱셈표를 만들어 규칙성을 찾는 활동을 통하여 학생이 직접 활동함으로 과정을 경험해 볼 수 있고 단순암기와 계산숙달에서 벗어나 현실에서 음수개념을 이끌어 내는 것이다 고 하였다. 다섯 번째로 형식 불역의 원리는 덧셈, 곱셈의 역연산으로 뺄셈연산과 나눗셈연산의 지도 시 적합하다고 하였다. 부호법칙과 대수적 성질을 명확하게 지도가 가능하다는 장점이 있다고 설명 하고 있다.

권석일외 4名(2008)은 드로르간의 음수 지도 방법 연구를 수행하였고, 그들은 드모르간이 산술과 대수의 교수·학습을 위해 집필한 세 권의 저서 즉, <On the study and difficulties of mathematics(1831/1910)>, <Elements of algebra(1835/1837)>, <Trigonometry and Double Algebra(1849)>를 중심으로, 그가 제시하고 있는 음수 지도 방법에 관하여 논의 하였다. 그리고 이 세 저서를 통하여 상호적 조화라는 관점에서 음수 지도 방법을 제시하고 있다. 드모르간의 음수 지도 방안에서 서로 다른 대상을 상대로 서로 다른 관점에서 음수를 지도하려고 시도하고 있다는 것에 주목할 필요가 있다고 하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

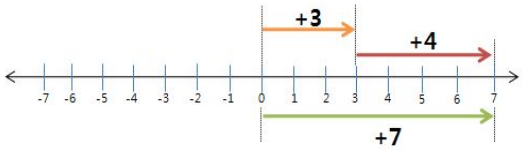
A. 연구 대상

광주광역시에 소재한 S중학교의 2, 3학년 100명의 학생들이 본 연구에 참여하였다. 중학교 1학년의 경우 아직 학교에서 정수 단원을 배우지 않은 상태였으므로 연구 대상에서 제외시켰다.

B. 검사 문항 구성

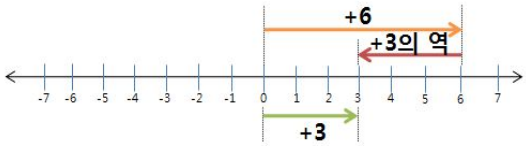
본 연구에서는 정수의 사칙연산 원리를 학생들이 이해하고 설명할 수 있는지 알아보기 위해서 각 12문항으로 구성된 2종류의 검사지를 사용하였다. 검사지는 부록에 수록되어 있다. 검사의 목적이 사칙연산 원리 또는 과정에 대한 학생들의 개념적 이해 정도를 파악하는 것이므로 가장 기본적인 사칙연산 문제들로 구성하였다. 학생들의 정수의 사칙연산 과정에 대한 이해를 확인하기 위한 방법으로 연산 과정을 구체적인 모델을 통해서 설명하도록 하였다. 연구자는 본 검사를 실시하기에 앞서 연구 참여자들이 사용하고 있는 교과서를 분석해 보았는데 대부분의 학생들은 수직선 모델을 통해서 정수의 연산 과정에 대한 이해를 하고 있는 것으로 파악되었다. 따라서 1번 검사지는 주어진 수식을 보고 답을 구한 후, 그 연산 과정을 설명하기 위한 방법으로 수직선 모델을 활용하여 설명하도록 요청하였다. 2번 검사지는 주어진 수직선 모델을 수식으로 나타내도록 하는 문항들로 구성되었다.

각각의 검사지에서 문제1번부터 4번까지는 $(+4)+(+2)=$,



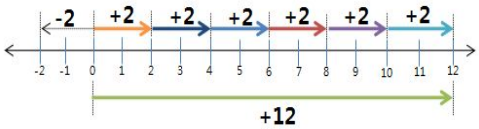
, 덧셈의 관한 문항를 나타내었고,

문제 5번부터 8번 까지는 $(+7)-(+3)=$,



, 뺄셈에 관한 문항를 나타냈고,

문제 9번부터 12번까지는 (+2)×(+3)=,



, 곱셈의 연산에 대한 문항으로 구성하였다. 나눗셈의 경우 대부분의 중학교 교과서에서 구체적인 모델을 통해서 설명하고 있지 않으므로 본 연구에서도 나눗셈의 연산은 제외하였다.

C. 검사 방법

정수의 사칙연산의 과정에 대해서 학생들이 어떻게 이해하고 있는지 파악하기 위해서 100명의 학생을 대상으로 각 학급의 수학 교사의 도움으로 수학 수업 시간을 통해서 검사를 수행하였다. 총 45분의 시간을 주어서 피검사자들이 검사문항지를 풀도록 하였다.

D. 자료 수집 및 분석 방법

(a) 1번 검사지에 대한 분석 방법

1번 검사지의 각 문항에 대한 학생들의 응답을 분석하기 위해서 다음과 같은 코딩 시스템을 사용하여 학생들의 응답을 분류하였다.

적절한 수직선 모델 또는 적절한 방법을 사용하여 완벽하게 설명했을 경우(4), 답과 수직선 모델 또는 다른 모델을 사용하여 설명하였으나 부분적인 실수를 범할 경우(3), 답을 제시하였으나 수직선 모델 또는 다른 모델을 사용해서 설명하는 부분에 중대한 실수를 범한 경우(2), 답만 제시하고 그 과정을(수직선 모델 또는 다른 모델) 전혀 설명하지 못 했을 경우(1), 오답 제시 및 과정 생략 했을 경우(0), 위의 조건에 만족 하지 못했을 경우(기타) 로 구분 하여 실시하였다.

[표] 1번 검사지의 응답 분류

응답의 분류	구분
정답 및 적절한 수직선 모델 또는 적절한 방법을 사용하여 연산 원리(과정)를 완벽하게 설명했을 경우	4

정답 및 수직선 모델 또는 다른 모델을 사용하여 연산 원리(과정)를 설명하였으나 부분적인 실수를 범할 경우	3
정답을 제시하였으나 수직선 모델 또는 다른 모델을 사용해서 연산 원리(과정)를 설명하는 부분에 중대한 실수를 범한 경우	2
정답만 제시하고 연산 원리(과정)를 전혀 설명하지 못했을 경우	1
오답 제시 및 연산 원리(과정)에 대한 설명을 생략했을 경우	0
위의 조건에 만족하지 못했을 경우	기타

(b) 2번 검사지에 대한 분석 방법

2번 검사지 역시 각 문항에 대한 학생들의 응답을 분석하기 위해서 다음과 같은 코딩 시스템을 사용하여 학생들의 응답을 분류하였다.

수식을 정확하게 표현 했을 경우(2), 수식에서의 부분적인 실수를 했을 경우(1), 오답 및 전혀 제시 하지 못하는 경우(0), 위의 조건에 만족 하지 못했을 경우(기타)로 구분 하여 실시하였다.

[표] 2번 검사지의 응답 분류

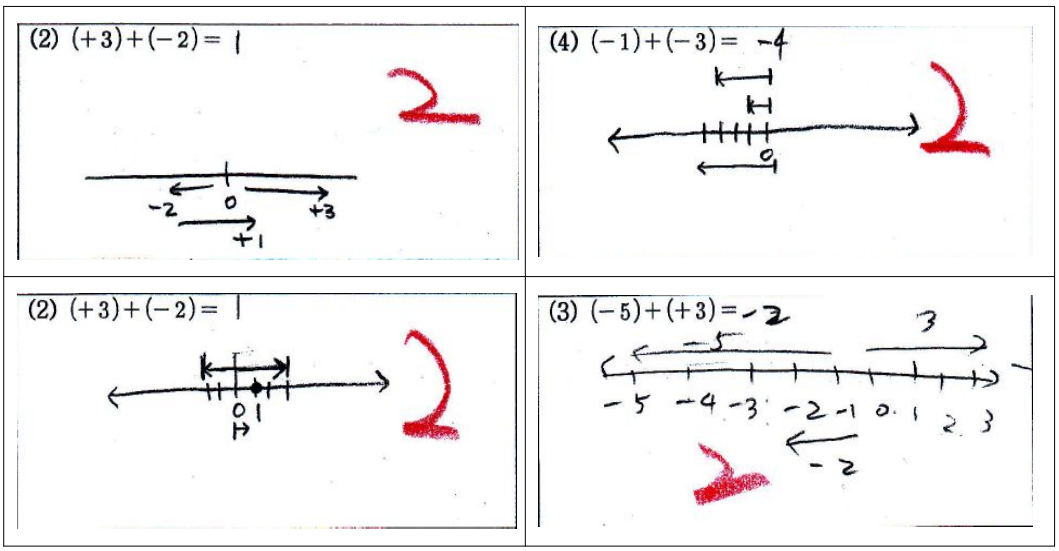
응답의 분류	구분
수식을 정확하게 표현 했을 경우	2
수식에서의 부분적인 실수를 했을 경우	1
오답 및 전혀 제시 하지 못하는 경우	0
위의 조건에 만족 하지 못했을 경우	기타

Ⅳ. 연구 결과 분석

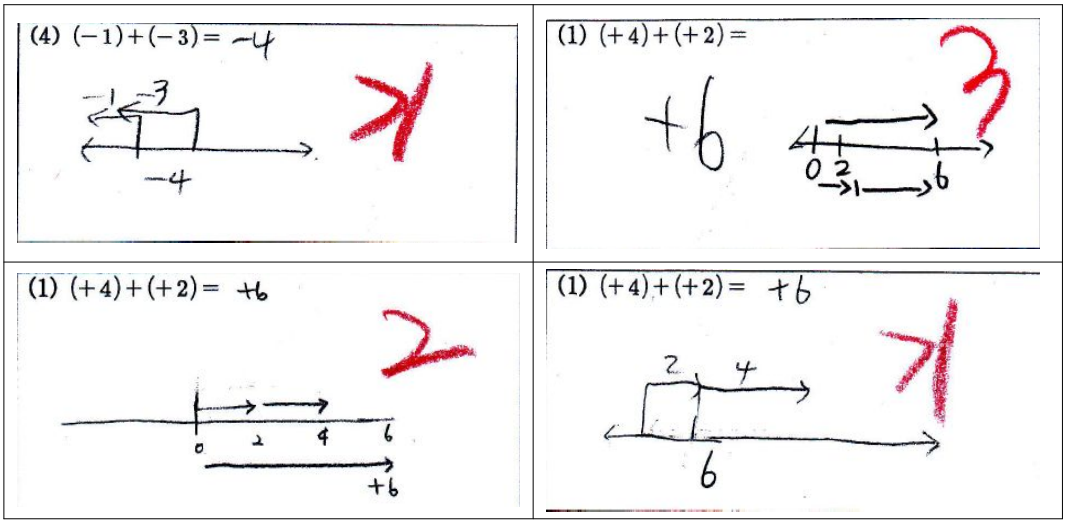
A. 연구 문제 1

수식의 답을 구하고 그 계산 과정을 적당한 모델로 나타내는 과정 중 덧셈의 연산에서 공통적으로 나타나는 오류는 다음과 같았다.

두 정수의 덧셈의 계산과정을 수직선 모델로 표현할 때 첫 번째 원소의 화살표 머리 방향에 두 번째 원소에서 더하는 수를 나타내는 화살표의 꼬리를 두고, 항상 원점 0에서 출발해야 하는데 두 번째 원소를 더하는 과정에서 또 다시 원점 0에서 출발하는 학생들이 있었다.

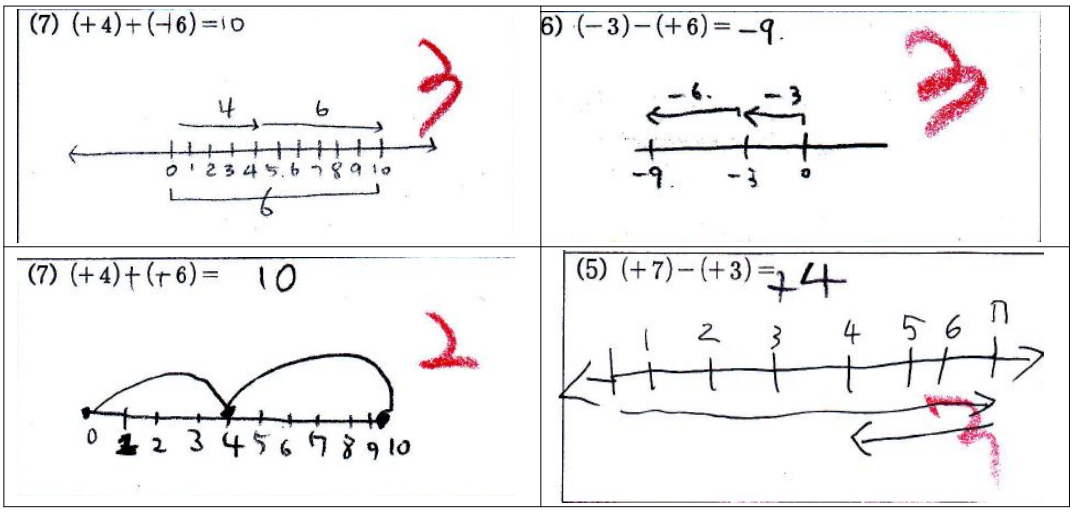


덧셈의 수식 중 (+4)+(+2)의 경우에 수직선모델로 그 계산 과정을 나타낼 때, 먼저 (+4)를 수직선에 그려야 하는데 (+2)를 먼저 그리는 경우가 많이 있었다.



수식의 답을 구하고 그 계산 과정을 적당한 모델로 나타내는 과정 중 뺄셈의 연산에서 공통적으로 나타나는 오류는 다음과 같았다.

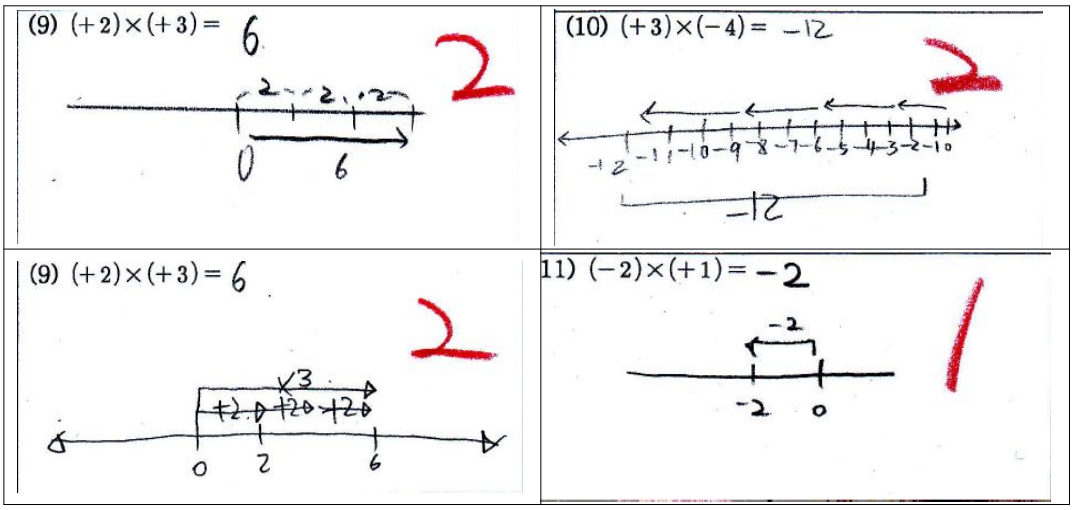
뺄셈에서는 수식 자체로 계산 과정을 수직선 모델로 나타내지 않고 먼저 연산 부호를 −에서 +로 바꾼 다음 수직선 모델로 계산 과정을 설명한 경우가 많았다.



수식의 답을 구하고 그 계산 과정을 적당한 모델로 나타내는 과정 중 곱셈의 연산에서 공통적으로 나타나는 오류는 다음과 같았다.

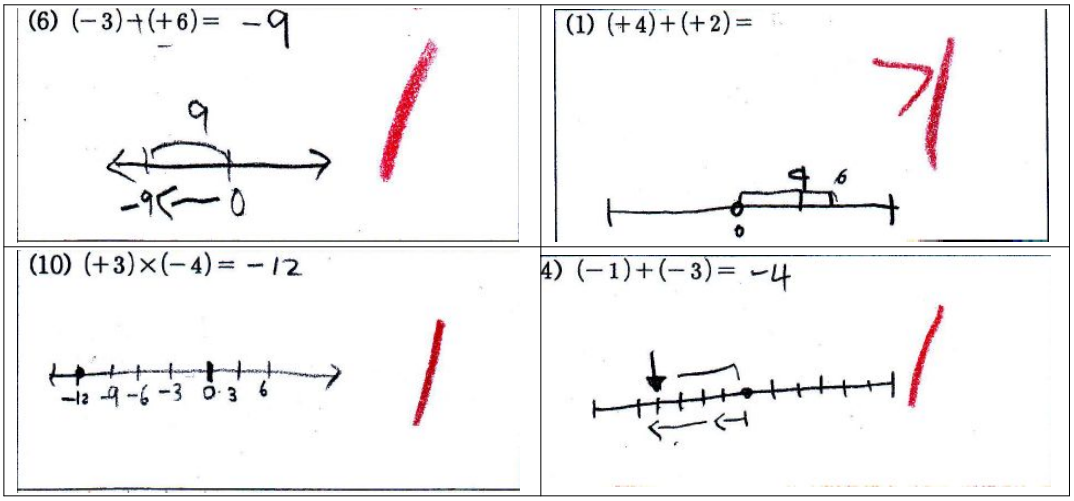
곱셈의 연산의 계산 과정을 나타내는 중 많은 학생들이 피승수와 승수와의 관

계를 반대로 나타낸 학생들이 많았다.

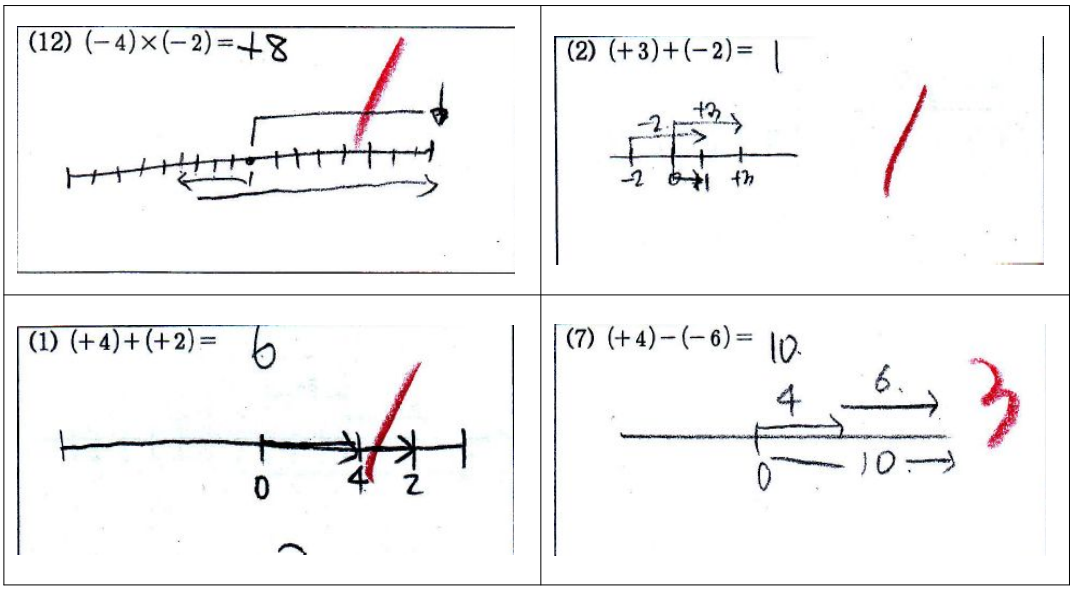


덧셈, 뺄셈, 곱셈의 연산에서 그 계산 과정을 수직선 모델로 표현할 때 공통적으로 관찰 되는 오류는 다음과 같다.

계산 과정을 수직선 모델로 나타내는 과정에서 학생들은 각 원소들을 수직선 모델에 표현할 때 화살표로 그려야 하지만 다음과 같이 그린 학생들도 있었다.

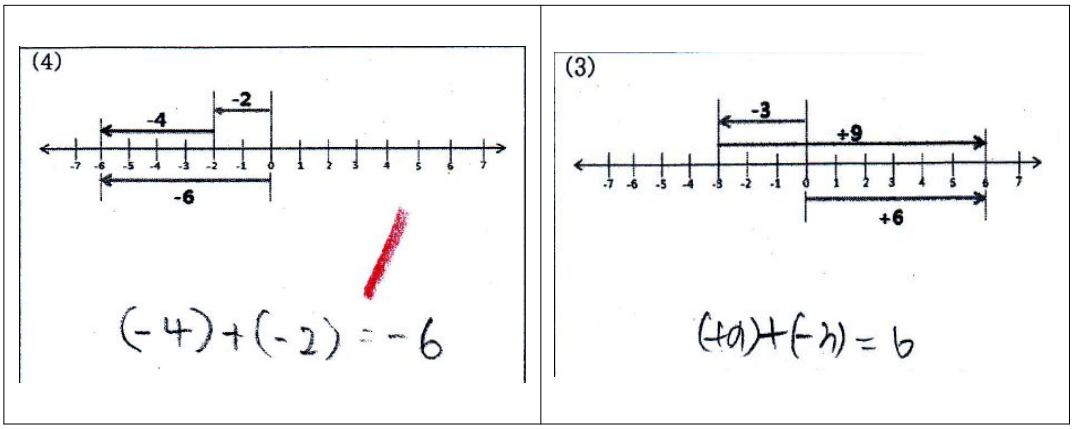


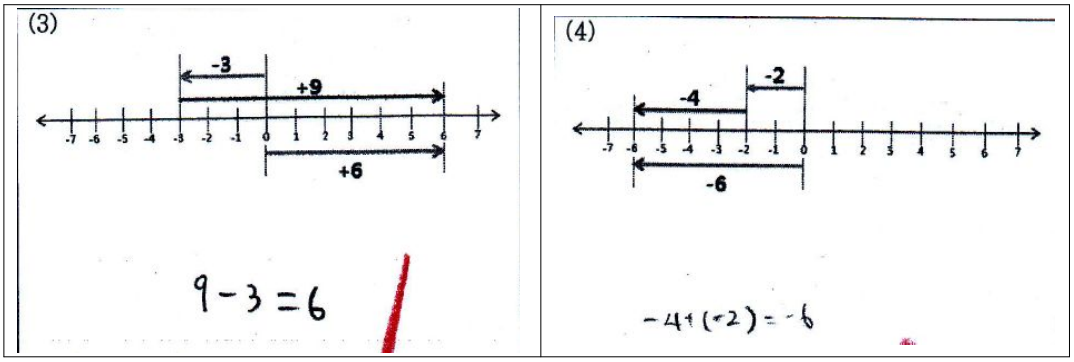
그리고 계산 과정을 수직선 모델로 표현할 때 수직선의 양끝을 화살표로 표시해야 하는데 생략하는 학생들이 많이 있었다.



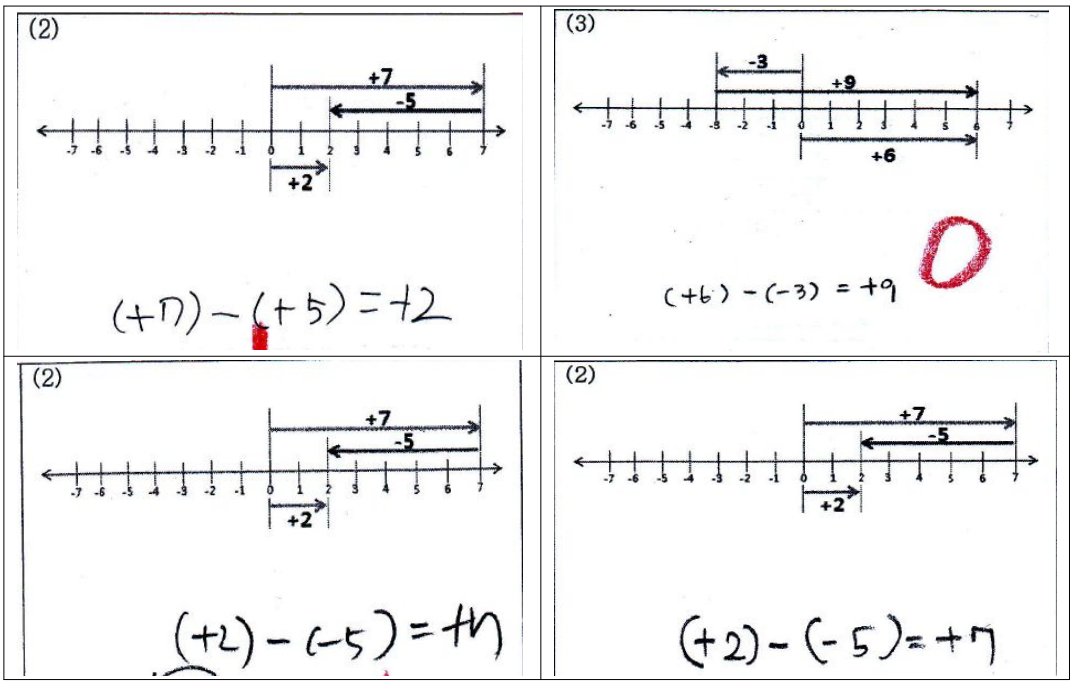
B. 연구문제2

덧셈에서는 수직선 모델을 보고 수식을 표현하는 데에는 별 어려움을 느끼지 못하는 것 같았다. 하지만 수식으로 나타낼 때, 원소의 순서를 바꿔서 수식으로 나타내는 학생들이 많이 있었다.

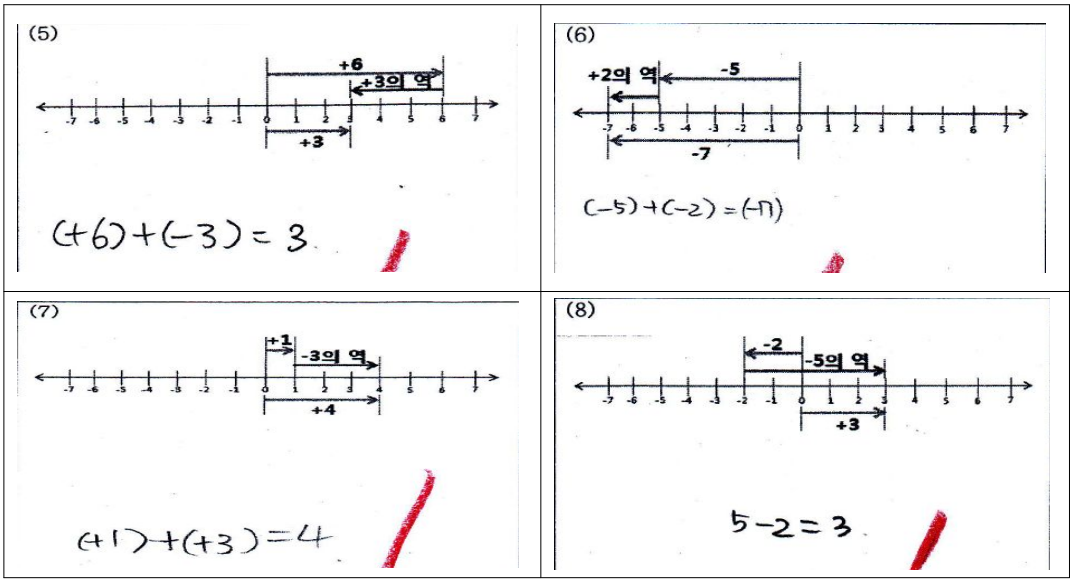




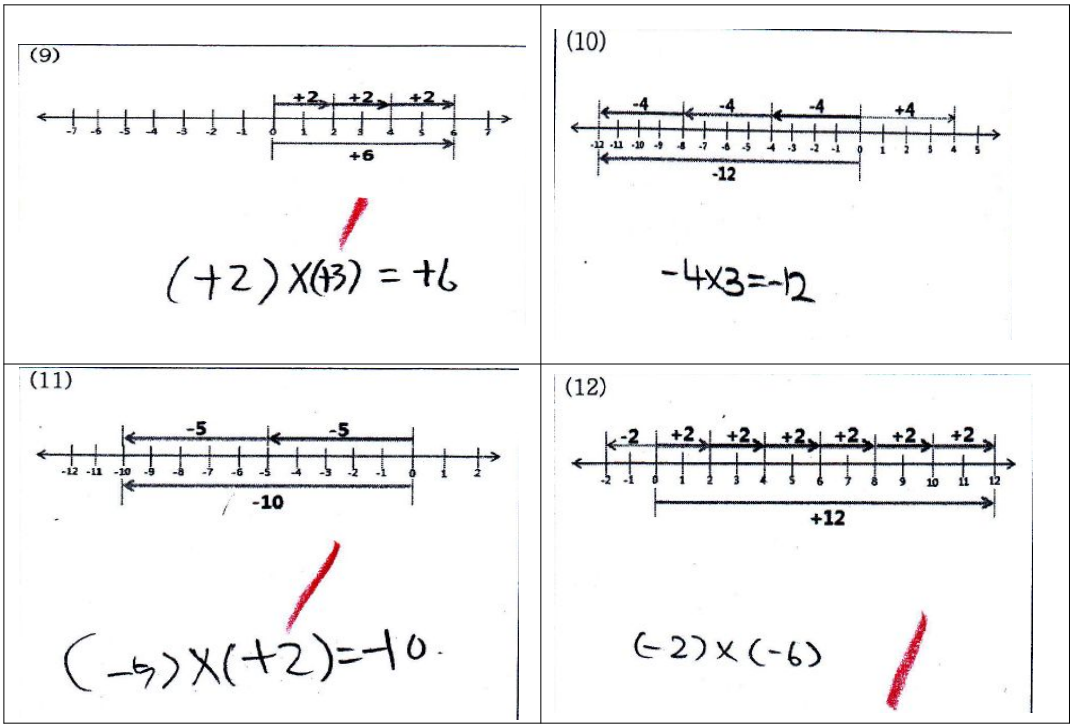
주어진 수직선 모델에서 화살표의 머리가 왼쪽으로 향하는 것을 보고, 연산을 음수로 표현해서 수식을 나타낸 학생들이 있었다.



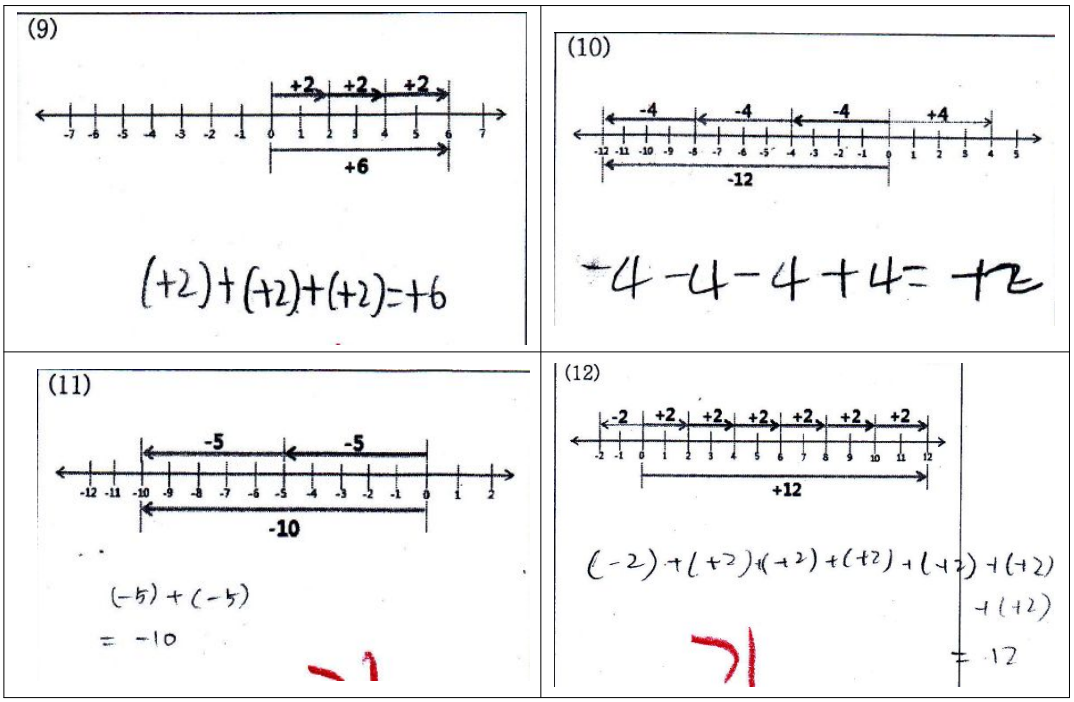
뻘셈의 경우에는 '역'을 잘 이해하지 못하고 수직선 모델상에 표현된 상태로 수직선 모델만 보고 수식을 표현하였다.



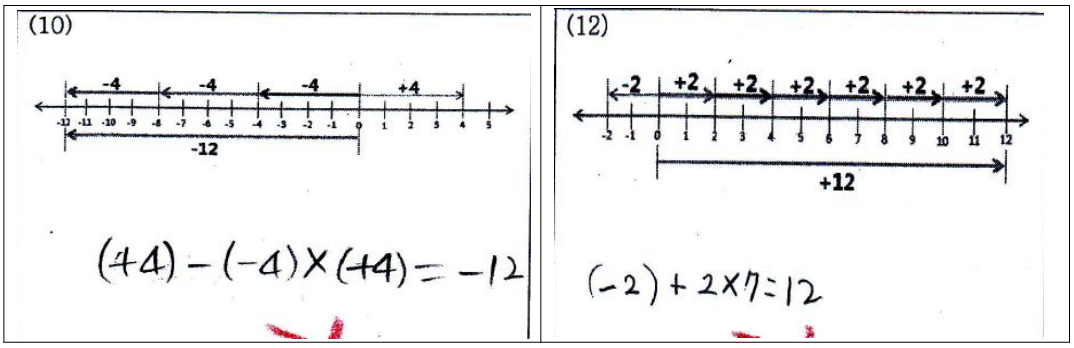
곱셈에서는 피승수와 승수와의 관계를 수직선 모델에서 파악하지 못하고 원소의 위치를 바꾸어 적은 학생들이 많았다.



곱셈의 수직선 모델을 보고 곱셈으로 표현하지 않고 덧셈으로만 수식을 표현한 학생들도 있었다.



마지막으로는 수직선 모델에서 '역'을 보여주기 위하여 나타낸 원소를 수식에 넣어서 표현하는 경우도 있었다.



주어진 수식을 보고 적당한 모델을 이용해서 계산 과정을 표현하는 것과 수직선 모델을 수식으로 나타내기에서의 차이점으로는 덧셈과 뺄셈의 수식 문제 풀이는 대부분 틀리지 않고 정확하게 답을 구하였지만, 그 수식을 적당한 모델로 계산 과정을 나타내는 과정에서 많은 어려움이 있었던 것 같다.

그와 반대로 수직선 모델을 보고 덧셈을 수식으로 나타낸 것은 많은 학생들이 정확하게 맞추었다. 하지만 수직선 모델을 보고 뺄셈의 연산을 수식으로 나타내는 것은 예를 들어 (+4)-(+2)의 수식을 표현할 때 (+4)+(-2)로 표현을 많이 하였다. 그리고 곱셈의 연산으로 나타낸 수식을 보고 수직선 모델로 표현하는 문제에서는 수식의 답을 잘 구하였으나 적당한 모델로 계산 과정을 나타내는 과정에서 포기를 하거나 정확하게 나타낸 학생은 많지 않았다.

덧셈과 뺄셈으로 이루어진 연산은 적당한 모델로 그 계산 과정을 가시화 하는데는 어려움이 없다는 것을 알 수 있었고, 곱셈의 연산으로 이루어진 수식의 계산 과정을 적당한 모델로 표현하기에는 어려움이 많은 것 같다.

Ⅴ. 요약 및 제언

본 연구의 목적은 중학생들의 음수의 사칙연산에 대한 이해도를 분석하는 것이다. 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같이 연구 문제를 설정 하였다.

첫째, 학생들은 음수의 사칙 연산 원리를 구체적으로 또는 구체적 모델을 통해서 설명할 수 있는가?
둘째, 음수의 사칙 연산의 학습에서 학생들은 어떤 어려움을 갖고 있는가?

설정한 연구 문제에 대하여 학생들이 풀어본 검사 문항지에 확인하고 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 학생들은 대부분 주어진 수식에 대한 정답을 제시하였지만, 수직선 모델과 같은 구체적인 모델을 사용해서 그 연산의 원리 또는 과정에 대해서 정확하게 설명하는데 어려움을 겪고 있었다.

둘째, 많은 학생들이 교과서에서 제시된 수직선 모델의 원리에 대해서 정확하게 이해하지 못하는 것 같다.

셋째, 특히 곱셈의 연산 과정에 대해서는 대부분의 학생들의 그 연산 원리 또는 과정에 대해서 설명하지 못하였다.

이에 연구자는 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 정수의 사칙연산에 관한 지도에 있어서 교사들은 학생들이 정수의 사칙연산에 대한 계산 방법을 숙달시키는데 앞서 그 연산 원리에 대해서 이해하도록 하는데 좀 더 시간을 투자하길 제안한다. 수학 학습의 경우 능숙한 계산의 숙달도 중요한 요소이지만 이에 앞서 수학적 개념 및 절차에 대한 개념적 이해를 발달시키는 것이 보다 중요하다.

둘째, 곱셈의 연산의 경우 수직선 모델의 여러 가지 문제점 또는 한계점으로 인하여 대부분의 교과서에서 귀납적 외삽법을 통해서 그 원리를 설명하고

있는데 본 실험에 참여한 학생들 중에서 귀납적 외삽법을 사용해서 곱셈의 연산 과정에 대해서 설명한 학생이 없었다. 수직선 모델을 이용해서 연산 과정에 대해서 정확하게 설명한 학생도 소수에 불과했다. 따라서 교사들은 곱셈의 지도시에도 학생들이 연산 원리를 이해할 수 있도록 귀납적 외삽법을 보다 적극적으로 이용하거나 그 외의 구체적인 모델을 활용하여 학생들이 곱셈의 원리에 대해서 이해할 수 있는 기회를 제공하기를 제안한다.

셋째, 본 연구는 한 지역의 소수의 학생으로만 대상으로 하여 실험 하였으나 다른 지역을 포함 하여 더 많은 학생을 대상으로 정수의 사칙연산의 계산 과정을 설명 할 수 있는지에 대한 분석이 있어야겠다.

넷째, 정수의 사칙연산뿐만 아니라 유리수의 사칙연산에 대해서도 계산 과정을 설명 할 수 있는지에 대한 연구도 필요 하겠다.

참 고 문 헌

양영오, 조윤동 (2000). 수학의 역사. 경문사.

교육과학기술부 (2007). 중학교 교육과정 해설.

김남희 외 (2006). 예비교사와 현직교사를 위한 수학 교육과정과 교재연구. 경문사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판부.

신유신 (1995). 음수 지도 모델에 관한 고찰. 서울대학교 석사학위논문.

최병철 (2002). 음수지도의 교수현상학적 고찰. 서울대학교 석사학위논문, pp60-66.

박영선 (2006). 음수 지도 모델에 관한 연구. 울산대학교 석사학위논문, pp10-25.

박지영 (2008). 효과적인 음수지도를 위한 학습 지도 모델 방안. 경성대학교 석사학위논문, pp3-6.

김유진 (2010). 효과적인 음수 지도를 위한 중학교 수학교과서 비교 · 분석. 아주대학교 석사학위논문, pp5-17.

안수미 (2010). 형식적 모델을 통한 음수지도방안. 한양대학교 석사학위논문.

윤성재 (1992). 직관적인 음수지도방법에 관한 고찰. 대한수학교육학회 논문집, 2(1), pp.65-71.

우정호, 최병철 (2003). 음수의 교수 현황학적 연구. 학교수학, 13(1), pp34-48.

김흥기, 김응석 (2006). 제 7-단계 수학에서 양· 음수의 지도에 관한 연구. 학교수학, 8(1), pp1-19.

최병철, 우정호 (2006). 음수의 본질과 형식적 접근에 의한 음수지도에 관한 고찰. 학교수학, 4(2), pp212-217.

우정호, 최병철 (2007). 음수 개념의 이해에 관한 교수학적 분석. 학교수학, 17(1), pp15-21

권석일, 김재홍, 최지선, 박선용, 박교식 (2008). 드모르간의 음수 지도 방법 연구. 학교수학, 10(4), pp558-567.

Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford University Press.

H. Freudenthal. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht ; D. Reidel Publishing

Burton, D. M. (1991). The history of mathematics. Wm. C. Brown Publishers.

Jan, Gullberg. (1997). Mathematics: from the birth of numbers. W. W. Norton & Company, Inc.

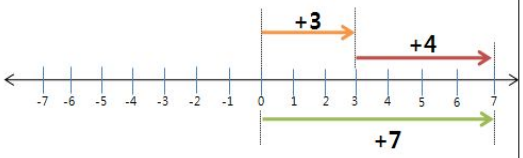
Bourbaki, N. (1999). Elements of the history of mathematics. Springer-Verlag.

<부록>

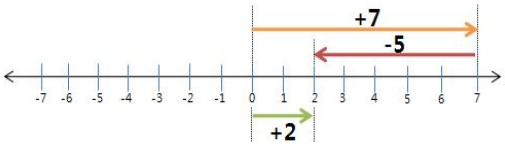
[검사 문항지]

(1) $(+4)+(+2)=$	(2) $(+3)+(-2)=$
(3) $(-5)+(+3)=$	(4) $(-1)+(-3)=$
(5) $(+7)-(+3)=$	(6) $(-3)-(+6)=$
(7) $(+4)-(-6)=$	(8) $(-1)-(-3)=$
(9) $(+2)\times(+3)=$	(10) $(+3)\times(-4)=$
(11) $(-2)\times(+1)=$	(12) $(-4)\times(-2)=$

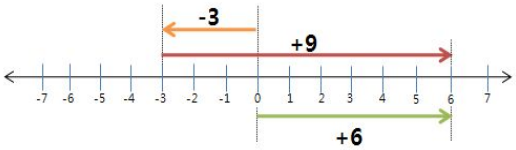
(1)


+3
+4
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
+7

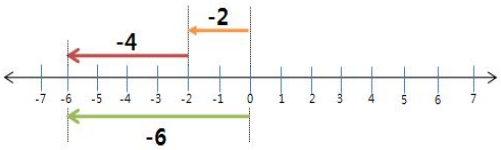
(2)


+7
-5
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
+2

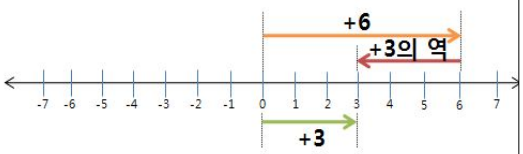
(3)


-3
+9
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
+6

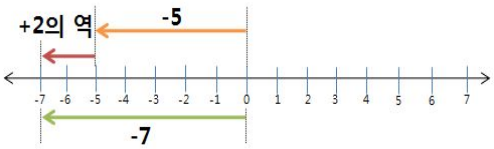
(4)


-2
-4
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
-6

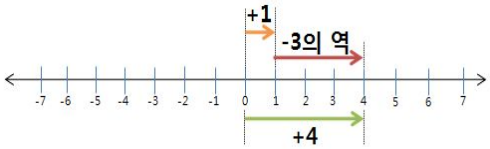
(5)


+6
+3의 역
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
+3

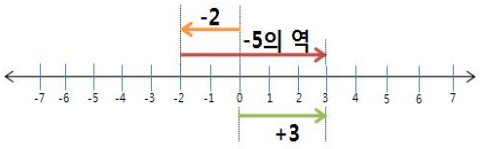
(6)


+2의 역
-5
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
-7

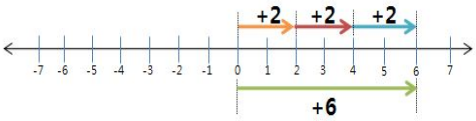
(7)


+1
-3의 역
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
+4

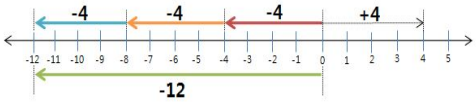
(8)


-2
-5의 역
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
+3

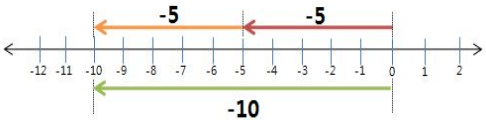
(9)


+2 +2 +2
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
+6

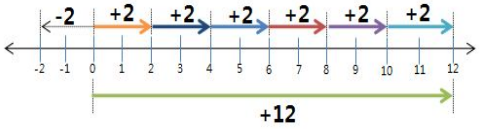
(10)


-4 -4 -4 +4
-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-12

(11)


-5 -5
-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2
-10

(12)

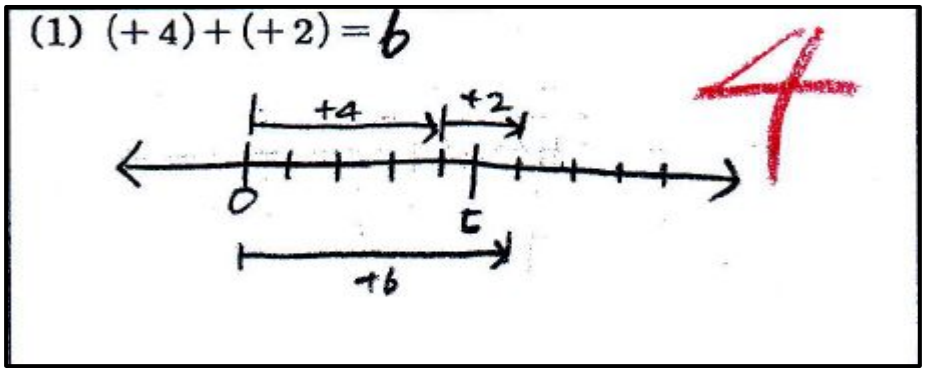

-2 +2 +2 +2 +2 +2 +2
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
+12

1. 1번 검사지 결과

a. 덧셈

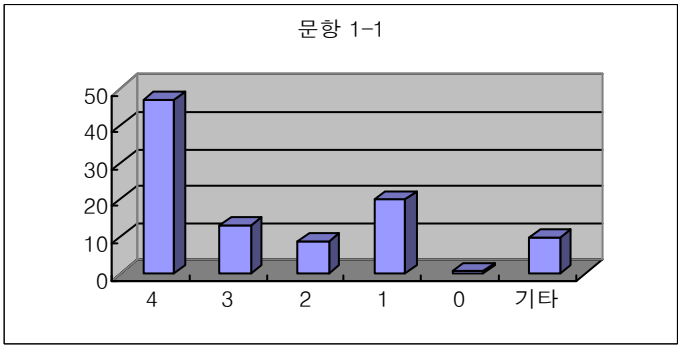
문항 1-1) (+4)+(+2)=

1-1번의 경우 89%의 학생들이 수식의 정답을 정확하게 제시하였지만, 그 중 수직선 모델을 정확히 제시한 학생은 44%, 수직선 모델을 제시할 때 작거나 중대한 실수를 한 학생은 각각 13%, 9%로 나타났고, 수직선 모델을 전혀 제시하지 못한 학생은 23%로 나타났다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 1%가 있었으며, 기타의 코딩에 분류된 학생은 10%가 있었다. 다음의 경우는



수식의 답을 정확하게 적고 그 과정도 완벽하게 나타낸 한 학생의 예이다.

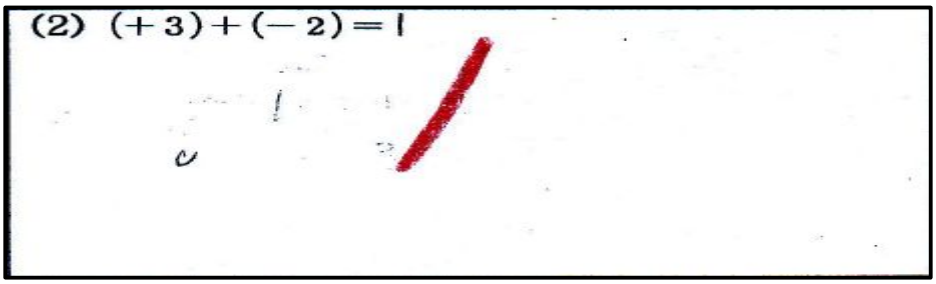
	빈도수	퍼센트
4	44	44%
3	13	13%
2	9	9%
1	23	23%
0	1	1%
기타	10	10%



문항 1-2) (+3)+(−2)=

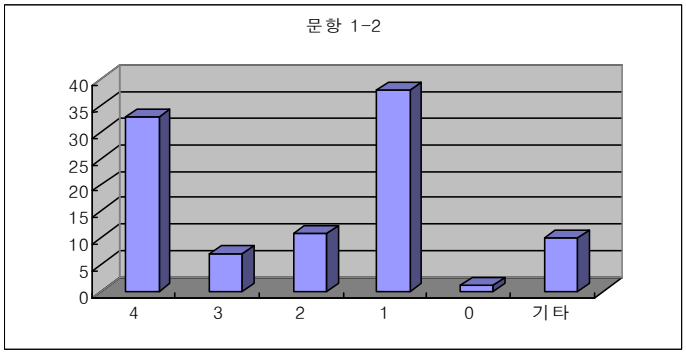
1-2번의 경우 89%의 학생들이 수식의 정답을 정확하게 제시하였지만, 원소 중에 음수가 들어가면서 수직선 모델을 정확히 제시한 학생은 33%, 수직선 모

델을 제시할 때 작거나 중대한 실수를 한 학생은 각각 7%, 11%로 나타났고, 수직선 모델을 전혀 제시하지 못한 학생은 38%로 나타났다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 1%가 있었으며, 기타의 코딩에 분류된 학생은 10%가 있었다. 다음의 경우는



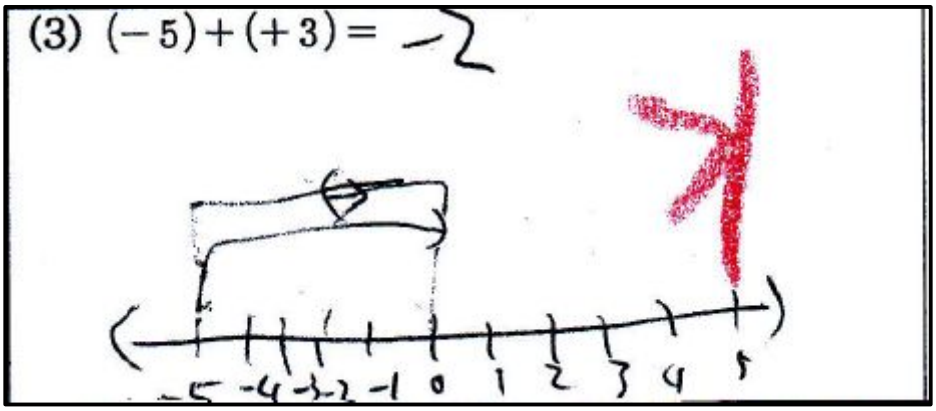
수식의 답을 정확히 제시하였지만 그 과정을 설명하지 않았으므로 1번 코딩에 분류 한 예이다.

	빈도수	퍼센트
4	33	33%
3	7	7%
2	11	11%
1	38	38%
0	1	1%
기타	10	10%



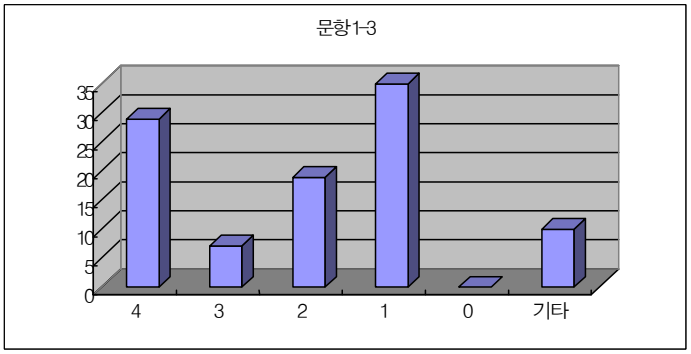
문항 1-3) (−5)+(+3)=

1-3번의 경우 90%의 학생들이 수식의 정답을 정확하게 제시하였지만, 1-2번의 경우와 마찬가지로 원소 중에 음수가 포함되어 수직선 모델을 표현하는데 많은 어려움을 느낀 것 같다. 그래서 정답자 중 수직선 모델을 정확히 제시한 학생은 29%, 수직선 모델을 제시할 때 작거나 중대한 실수를 한 학생은 각각 7%, 19%로 나타났고, 수직선 모델을 전혀 제시하지 못한 학생은 35%로 나타났다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 없었지만, 기타의 코딩에 분류된 학생은 10%가 있었다. 다음은 기타의 답을 적은 학생의 한 예이다.



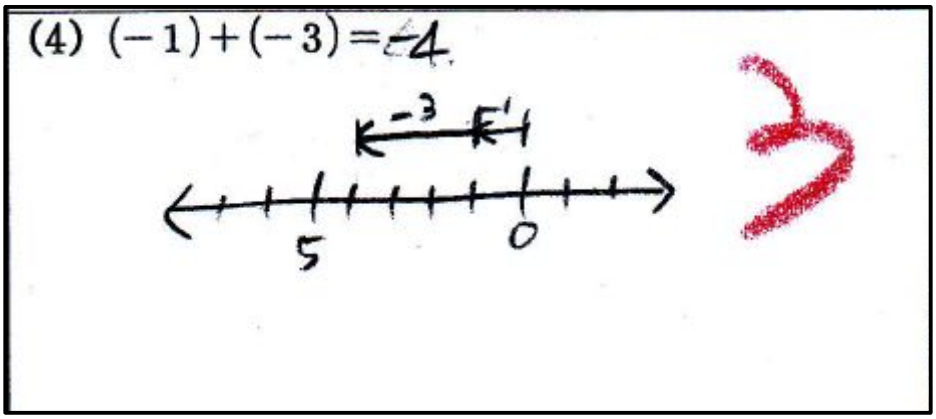
수식의 정답은 제시하였지만 수직선 모델로 표현 할 때, 이해할 수 없게 설명하고 있어서 기타의 코딩에 분류되었다.

	빈도수	퍼센트
4	29	29%
3	7	7%
2	19	19%
1	35	35%
0	0	0%
기타	10	10%



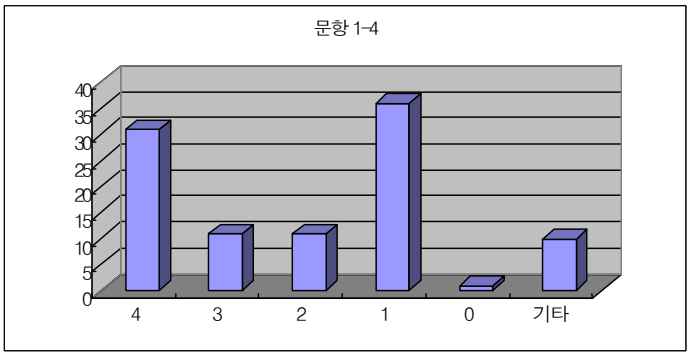
문항 1-4) (−1)+(−3)=

1-4번의 경우는 두 원소가 음수로 만들어진 수식이다. 수식의 정답률은 89%였고, 그 중 수직선 모델도 정확하게 제시한 학생은 31%로 두 개의 원소 중에 음수가 하나만 들어간 경우 보다는 좀 더 많은 학생들이 정확한 설명을 했다. 그리고 정답은 제시하였으나 수직선 모델을 제시할 때 중대한 실수를 한 학생이 11%, 부분적인 실수를 한 학생이 11%로 나타났고, 36%의 학생은 수직선 모델을 전혀 제시하지 못하였다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 1%가 있었으며, 기타의 코딩에 분류된 학생은 10%가 있었다. 다음은 수식의 답은 맞았지만 그 과정을 설명하는 도중 부분적인 실수를 한 학생의 예이다.



수직선 모델에서 첫 번째 원소와 두 번째 원소는 잘 표현 했지만, 수식의 결과값이 가시화 되어 있지 않으므로 3번 코딩에 분류 되었다.

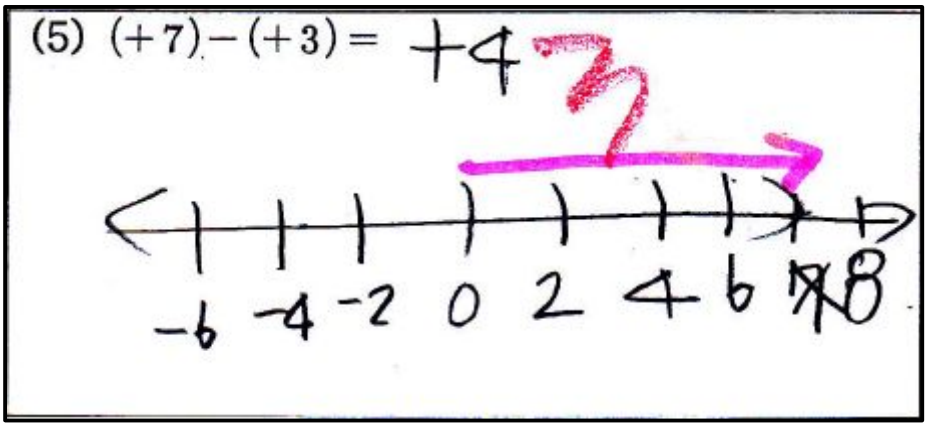
	빈도수	퍼센트
4	31	31%
3	11	11%
2	11	11%
1	36	36%
0	1	1%
기타	10	10%



b. 뺄셈

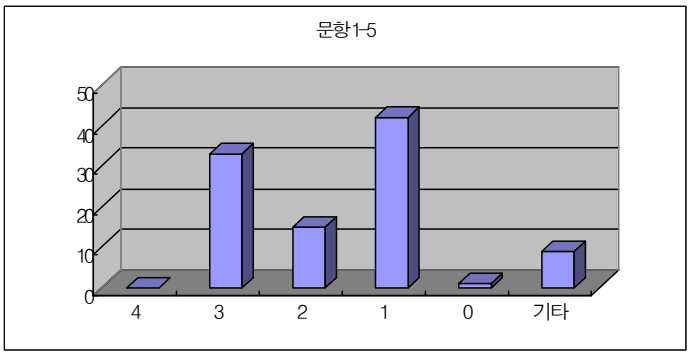
문항 1-5) (+7)−(+3)=

1-5번의 경우는 뺄셈의 연산으로 만들어진 문제로써 수식을 풀 때 대부분의 학생들이 뺄셈을 덧셈으로 부호를 바꾸어서 수식을 풀었다. 그 결과 90%의 학생들이 수식의 정답을 제시하였지만 수직선 모델을 제시할 때 뺄셈의 연산으로 모델을 그리는 것이 아니라 덧셈으로 바꾼 상태로 수직선 모델을 그려 완벽하게 수직선 모델을 나타낸 학생은 단 한 명도 없었고 33%의 학생이 중대한 실수를, 15%의 학생은 부분적인 실수를 하였으며 42%의 학생은 정답만 제시하였다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 1%가 있었으며, 기타의 코딩에 분류된 학생은 9%가 있었다. 다음은



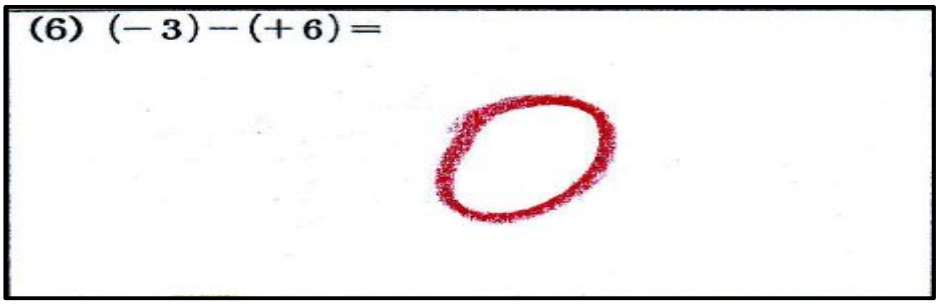
수식의 답은 정확하게 제시하였지만 연산 부호를 바꾸어서 수직선 모델로 설명한 학생의 답이다.

	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	33	33%
2	15	15%
1	42	42%
0	1	1%
기타	9	9%



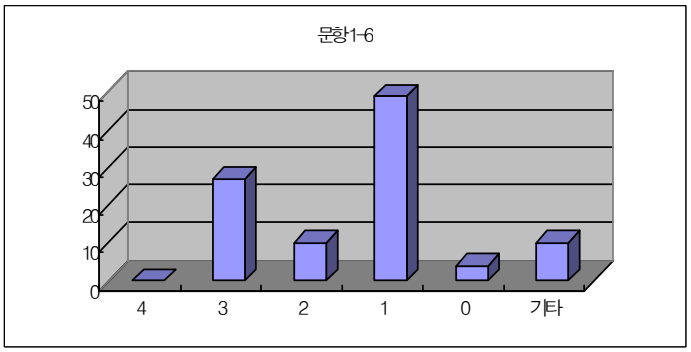
문항 1-6) (−3)−(+6)=

1-6번의 경우는 86%의 학생들이 수식의 정답은 제시하였으나 1-5번 경우와 같이 수직선 모델을 정확하게 제시하는 학생은 한명도 없었고 연산 부호를 바꾸어 수직선 모델로 표현하는 과정에서 부분적인 실수를 한 학생이 27%, 중대한 실수를 한 학생이 10%가 있었으며, 49%의 학생은 정답만 제시하였다. 4%의 학생은 수식의 정답과 모델을 전혀 제시하지 못했고 10%의 학생은 기타의 코딩에 분류되었다. 다음은



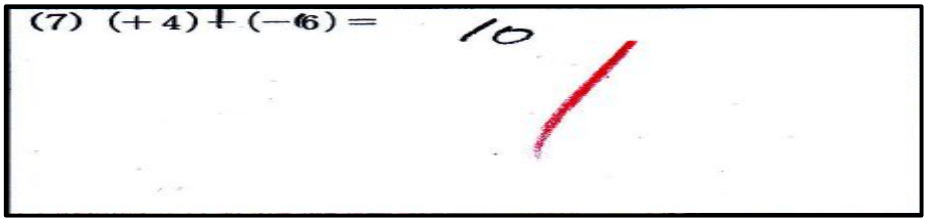
수식의 정답과 과정을 전혀 설명하지 못한 학생의 예이다.

	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	27	27%
2	10	10%
1	49	49%
0	4	4%
기타	10	10%



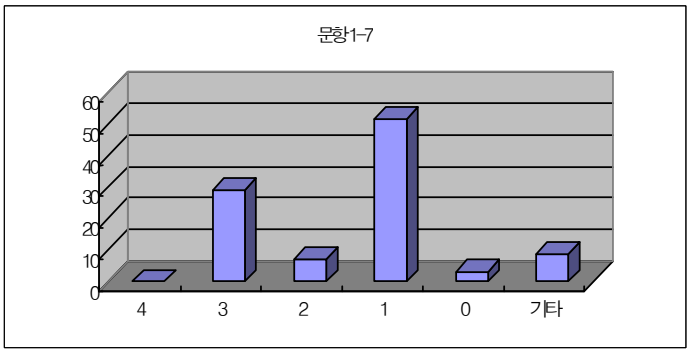
문항 1-7) (+4)−(−6)=

1-7번의 경우도 수식의 정답은 88%의 학생들이 제시하였다. 하지만 위와 마찬가지로 수식의 정답을 구한 다음 수직선 모델로 설명하는 과정에서 부분적인 실수를 범하는 학생이 29%, 중대한 실수를 범하는 학생이 7%가 있었고, 수식의 정답만 제시하고 그 과정을 전혀 설명하지 못하는 학생이 전체의 절반이 넘는 52%나 되었다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 3%가 있었으며, 기타의 코딩에 분류된 학생은 9%가 있었다. 다음은



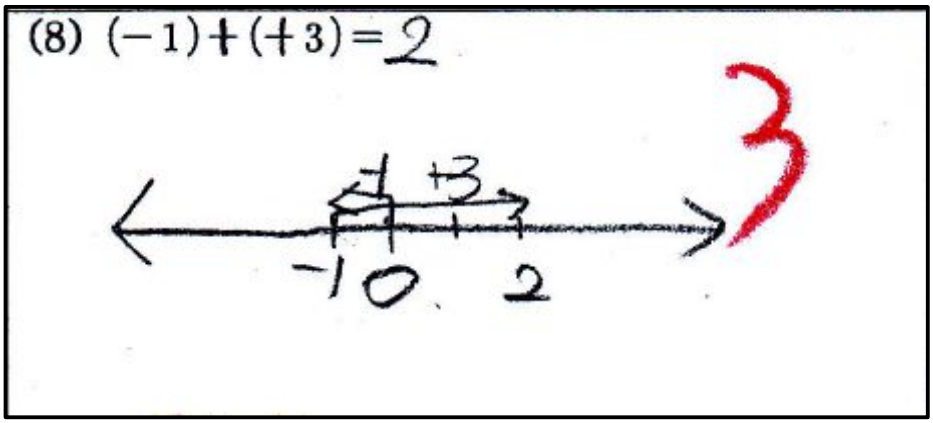
수식의 정답만 제시하고 그 과정을 설명하지 못한 학생의 예이다.

	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	29	29%
2	7	7%
1	52	52%
0	3	3%
기타	9	9%



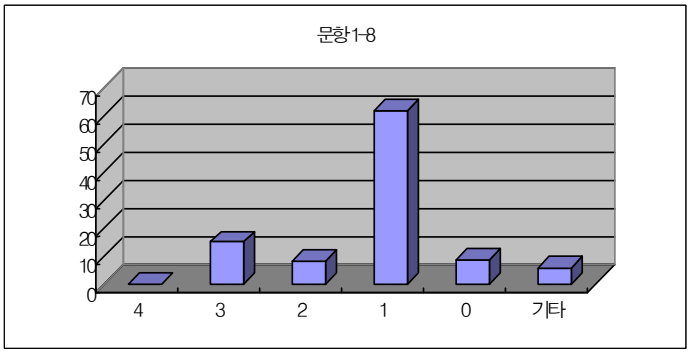
문항 1-8) $(-1)-(-3)=$

1-8번은 두 원소가 모두 음수로 구성된 수식이다. 이 경우도 수식의 정답은 85%의 학생들이 제시하였지만 수직선 모델로 그 과정을 정확히 설명한 학생은 한 명도 없었고 수직선 모델로 설명하는 과정에서 부분적인 실수를 범하는 학생이 15%, 중대한 실수를 범하는 학생이 8%가 있었으며. 수식의 정답만 제시하고 그 과정을 전혀 설명하지 못하는 학생이 전체의 절반이 넘는 62%나 되었다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 9%가 있었으며, 기타의 코딩에 분류된 학생은 6%가 있었다. 다음은



수식의 정답은 제시하였으나 그 과정을 설명 할 때 부분적인 실수를 한 학생의 예이다.

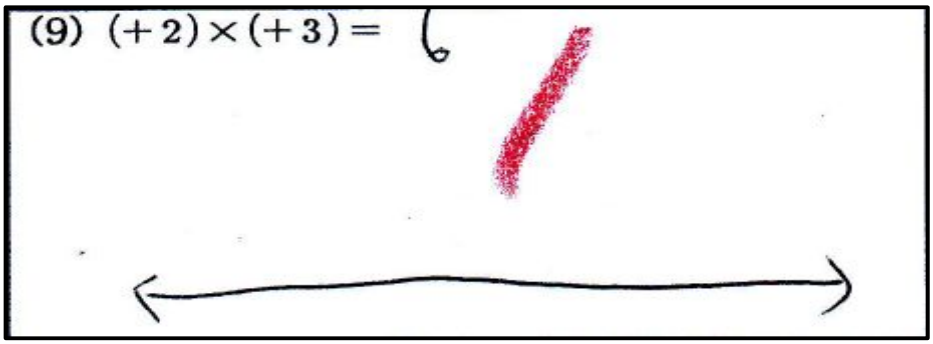
	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	15	15%
2	8	8%
1	62	62%
0	9	9%
기타	6	6%



c. 곱셈

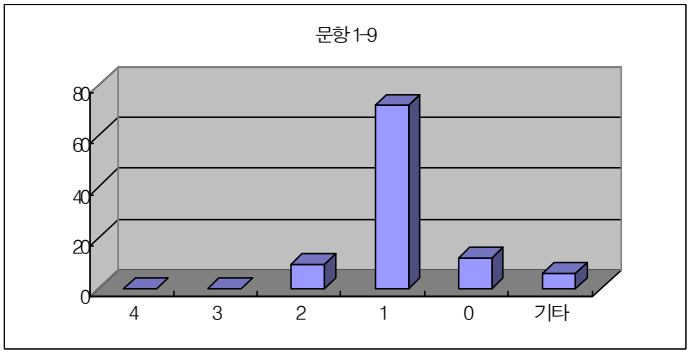
문항 1-9) (+2)×(+3)=

1-9번은 곱셈의 연산에 관한 수식이다. 82%의 학생들이 수식의 정답을 제시하였으나 덧셈, 뺄셈의 경우보다 수직선 모델로 연산 과정을 설명할 수 있는 학생이 감소하여 정확한 수직선 모델을 제시하는 학생은 한 명도 없었고 10%의 학생이 수직선모델을 제시하는데 중대한 실수를 하였으며, 72%의 학생은 정답만 제시하였다. 정답과 수직선 모델을 모두 제시하지 못한 학생은 12%가 있었으며, 기타의 코딩에 분류된 학생은 6%가 있었다. 다음은



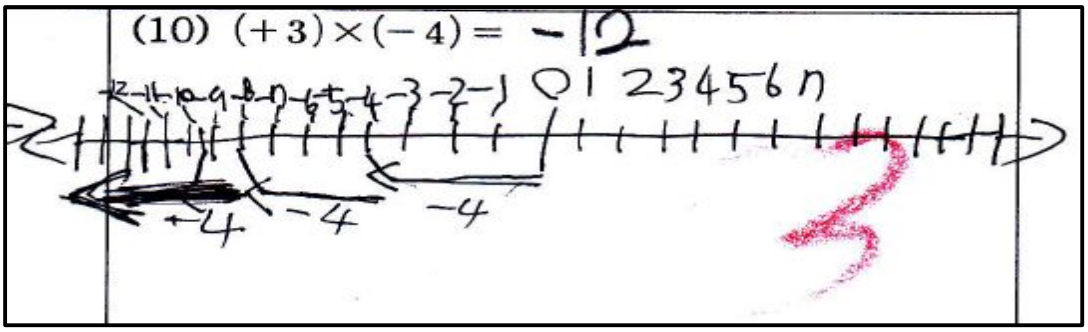
수식의 정답만 제시하고 그 과정을 전혀 설명하지 못한 학생의 예이다.

	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	0	0%
2	10	10%
1	72	72%
0	12	12%
기타	6	6%



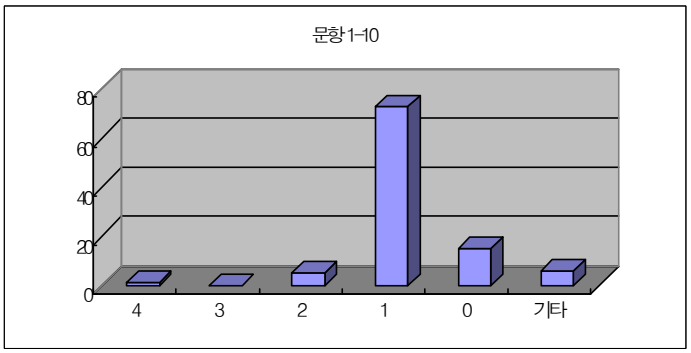
문항 1-10) $(+3)\times(-4)=$

1-10번의 경우도 위와 비슷한 결과가 나왔다. 수식의 정답률은 79%였으나 그 과정을 정확히 설명한 학생은 한 명도 없었고, 연산 과정을 설명하면서 중대한 실수를 한 학생이 6%가 있었으며, 과정을 전혀 설명하지 못한 학생이 73%나 되었다. 15%의 학생은 정답조차 제시하지 못하였고 6%의 학생이 기타의 코딩에 분류되었다. 다음은



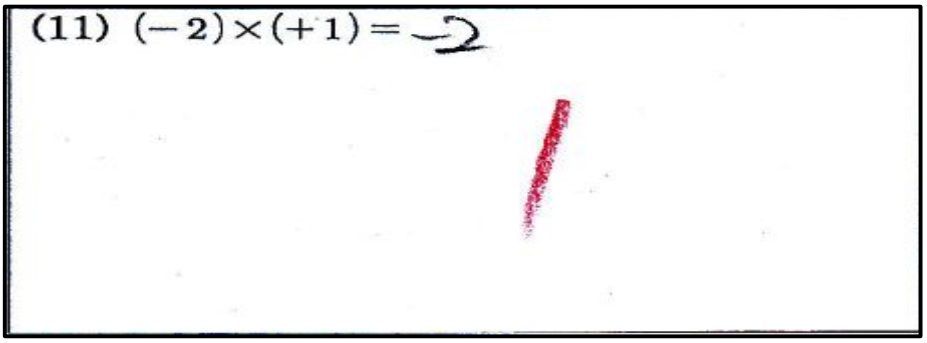
수식의 정답을 제시하였으나 중대한 실수를 한 학생의 예이다.

	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	0	0%
2	5	5%
1	73	73%
0	15	15%
기타	6	6%



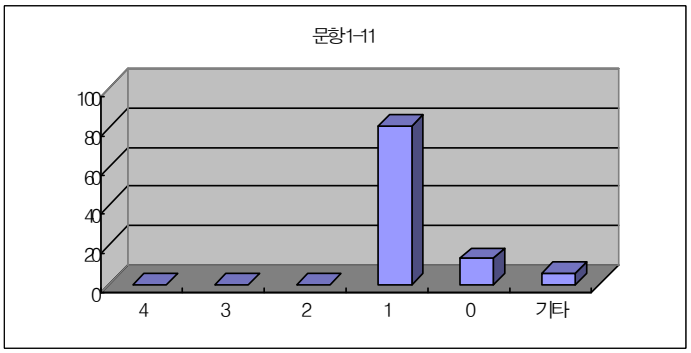
문항 1-11) $(-2)\times(+1)=$

1-11번은 수식의 승수가 음수가 되면서 연산 과정을 정확히 설명할 수 있는 학생이 단 한명도 없었다. 81%의 학생들이 수식의 정답만 구하고 구체적인 모델로 설명하지 못했고, 13%의 학생들은 정답조차 구하지 못했으며, 6%의 학생들은 기타의 코딩에 분류되었다. 다음은



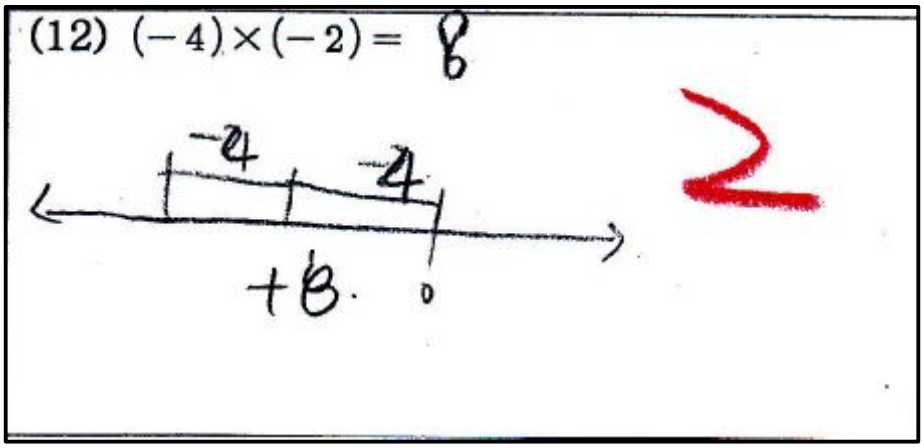
수식의 정답만 제시하고 구체적인 모델로는 설명하지 못한 학생의 예이다.

	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	0	0%
2	0	0%
1	81	81%
0	13	13%
기타	6	6%



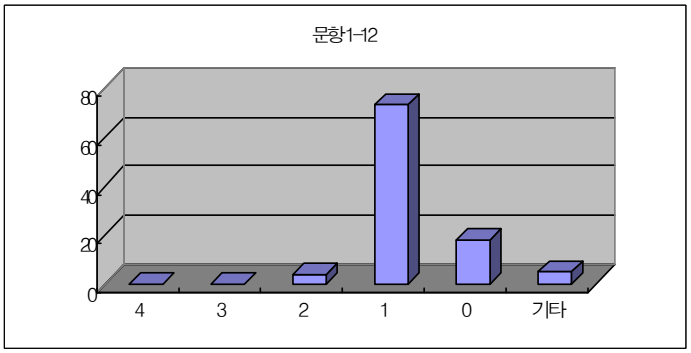
문항 1-12) $(-4)\times(-2)=$

1-12번의 경우도 77%의 학생들이 정답을 제시한 반면 정확하게 수직선 모델로 설명할 수 학생은 단 한명도 없었고. 4%의 학생은 수직선 모델을 제시할 때 중대한 실수를 하였으며, 73%의 학생은 모델을 표현조차 하지 못했다. 18%의 학생들은 정답을 제시하지 못했으며 5%의 학생들은 기타의 코딩에 분류되었다. 이 수식의 경우 피승수와 승수가 모두 음수로 구성되어 그 과정을 설명하는데 더욱 어려움을 느꼈던 것 같다. 다음은



수식의 정답은 제시하였으나 수직선 모델로 그 과정을 설명하는 과정 중 중대한 실수를 범한 학생의 예이다.

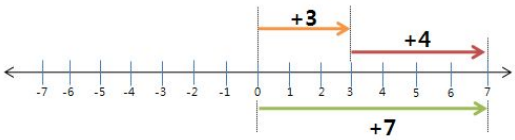
	빈도수	퍼센트
4	0	0%
3	0	0%
2	4	4%
1	73	73%
0	18	18%
기타	5	5%



2. 2번 검사지 결과

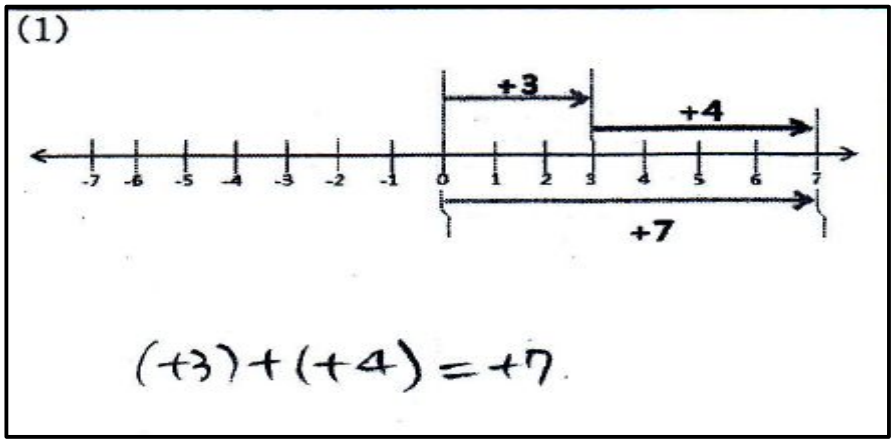
a. 덧셈

문항 2-1)



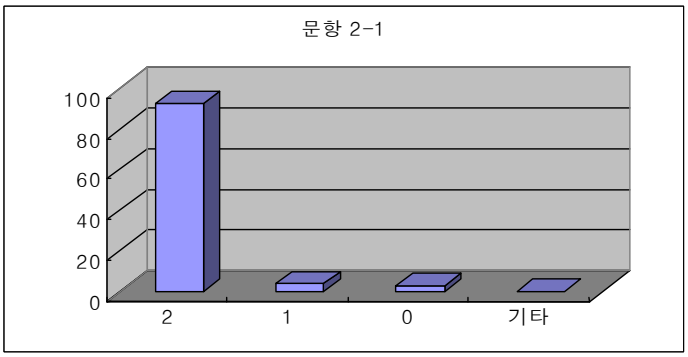
2-1번 문항의 경우 93%의 학생들이 정확하게 수식으로 나타내었고, 수식에서 부분적인 실수를 한 학생은 4%, 오답 및 전혀 제시 하지 못한 학생은 3%

가 있었다. 다음은 정확하게 수식으로 나타낸 학생의 예이다.

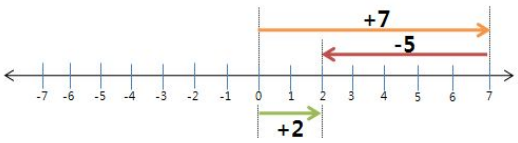


수직선 모델을 보고 수식으로 완벽하게 제시 하였으므로 2번의 코딩에 분류가 되었다.

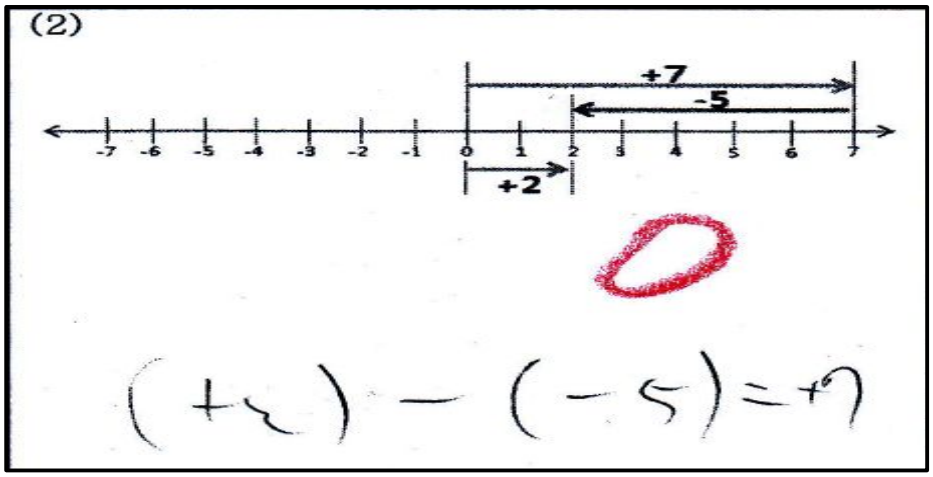
	빈도수	퍼센트
2	93	93%
1	4	4%
0	3	3%
기타	0	0%



문항 2-2)

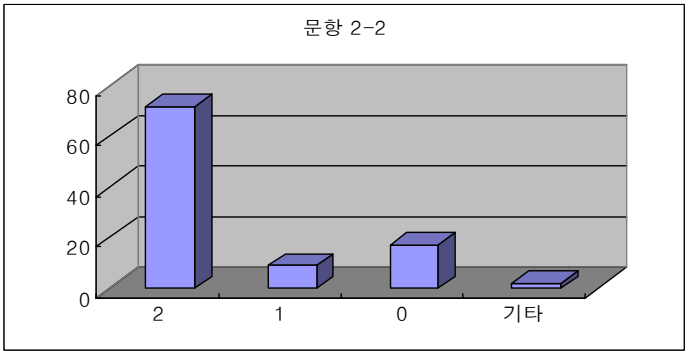


2-2번 문항의 경우는 72%의 학생들은 정확하게 수식으로 나타내는 반면 9%의 학생들은 수식을 나타낼 때 연산의 부호를 덧셈에서 음수로 바꿔 나타내었고 17%의 학생들은 수식으로 나타내지 못하였다. 기타의 코딩에 분류된 학생들도 2%가 있었다. 다음은 수식으로 나타내지 못하는 한 학생의 예이다.

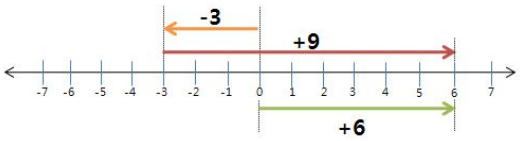


위의 수직선 모델에서는 수식이 $(+7)+(-5)=+2$로 제시 되어야 하는데 $(+2)-(-5)=+7$로 수식을 제시 하였으므로 0번 코딩으로 분류 되었다.

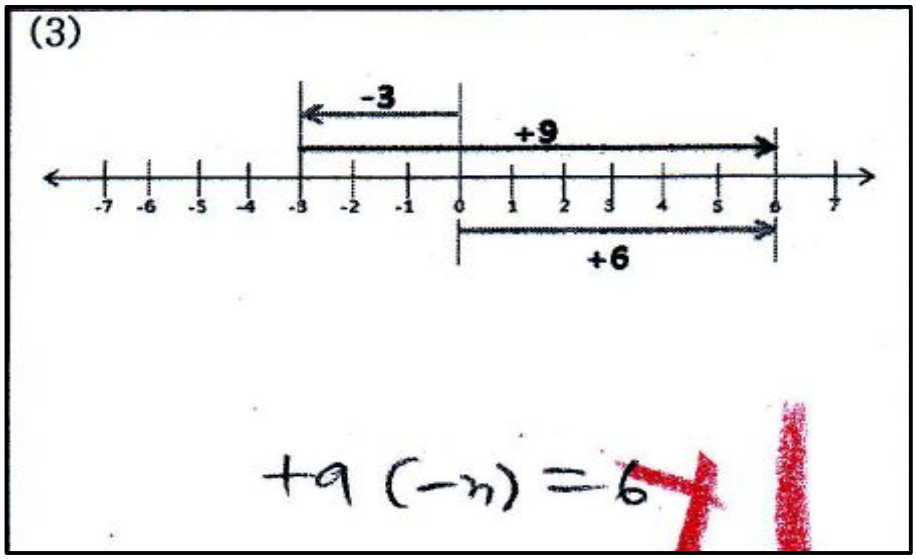
	빈도수	퍼센트
2	72	72%
1	9	9%
0	17	17%
기타	2	2%



문항 2-3)

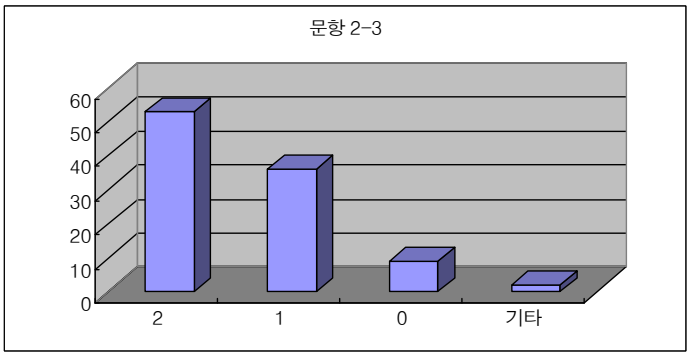


2-3번 문항의 경우 53%의 학생들이 정확하게 수식으로 나타내었고, 36%의 학생들은 수식으로 나타낼 때 약간의 부분적인 실수가 나타났다. 9%의 학생들은 오답을 제시 하였고, 기타의 코딩에 분류된 학생도 2%가 있었다. 다음은 기타로 분류된 한 학생의 예이다.

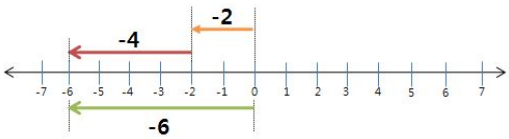


$(-3)+(+9)=+6$라고 수식을 제시해야 하는데 위 학생의 경우는 수식의 연산을 생략하고 $+9(-3)=6$라고 제시하여 기타의 코딩에 분류 하였다.

	빈도수	퍼센트
2	53	53%
1	36	36%
0	9	9%
기타	2	2%

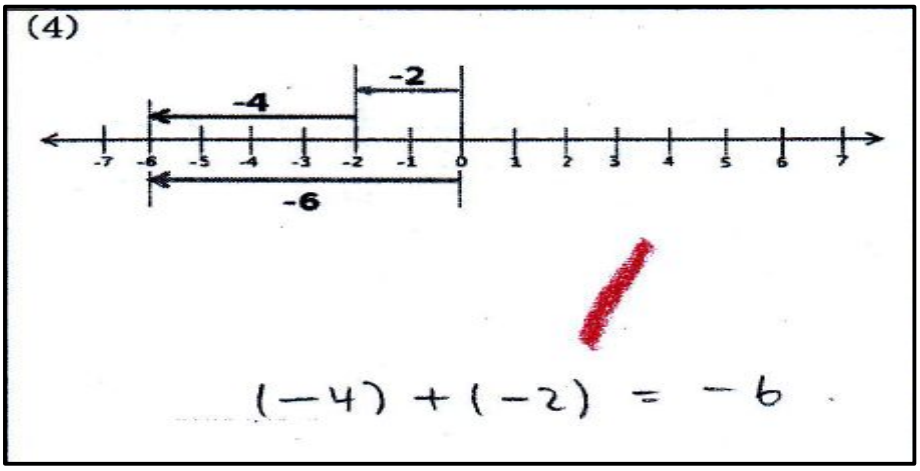


문항 2-4)



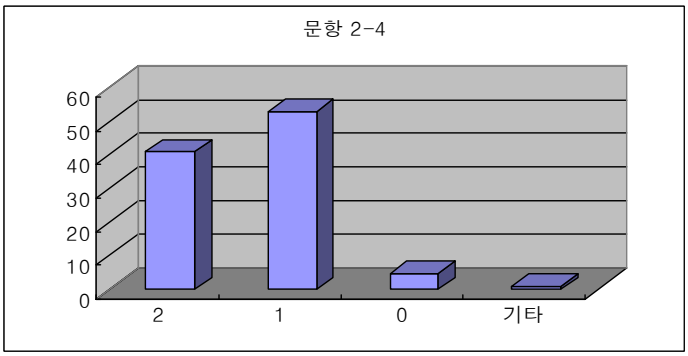
2-4번 문항의 경우 41%의 학생들이 정확하게 수식으로 나타내었고, 반이 넘는 53%의 학생들은 수식으로 나타낼 때 부분적인 실수가 나타났다. 수식으로 표현하지 못한 학생도 5%가 있었다. 기타의 코딩에 분류된 학생도 1%가 있었

다. 다음은 부분적인 실수를 한 학생의 예이다.



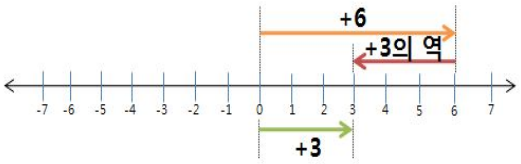
위 수직선 모델에서 정확한 수식의 답은 $(-2)+(-4)=-6$이지만, 위 학생은 원소의 위치를 서로 바꿔서 수식을 작성 하였으므로 1번 코딩으로 분류 하였다.

	빈도수	퍼센트
2	41	41%
1	53	53%
0	5	5%
기타	1	1%

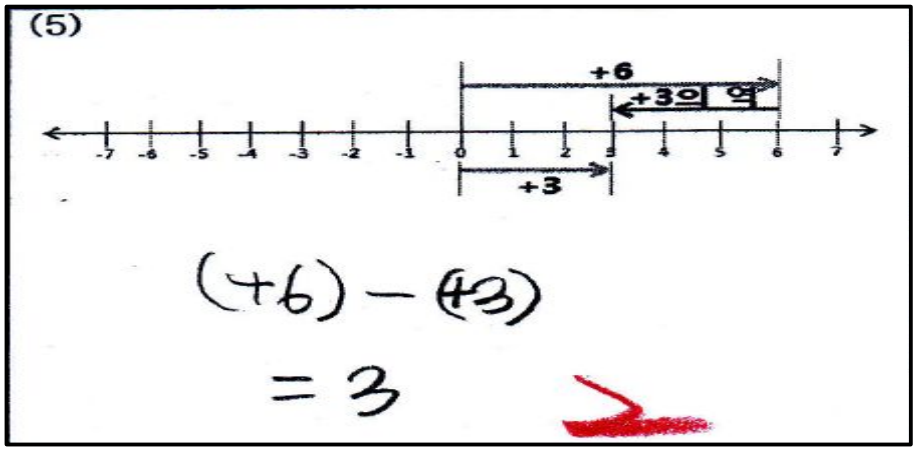


b. 뺄셈

문항 2-5)

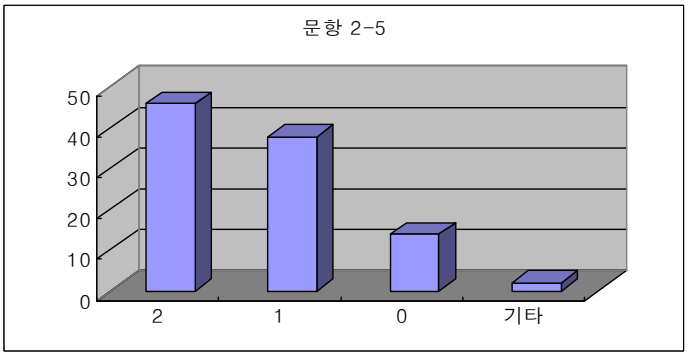


2-5번 문항의 경우 46%의 학생들이 정확하게 수식으로 표현하였고, 38%의 학생들은 수식으로 나타낼 때 부분적인 실수를 범하였다. 전혀 수식으로 나타내지 않은 학생도 14%였다. 기타의 코딩에 분류된 학생도 2%가 있었다. 다음은 수식을 정확하게 표현한 한 학생의 예이다.

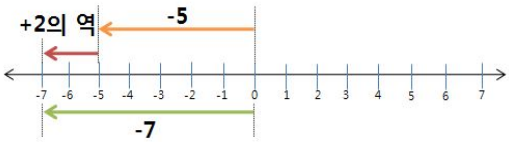


수직선 모델을 보고 수식을 완벽하게 나타내어서 2번 코딩으로 분류 하였다.

	빈도수	퍼센트
2	46	46%
1	38	38%
0	14	14%
기타	2	2%

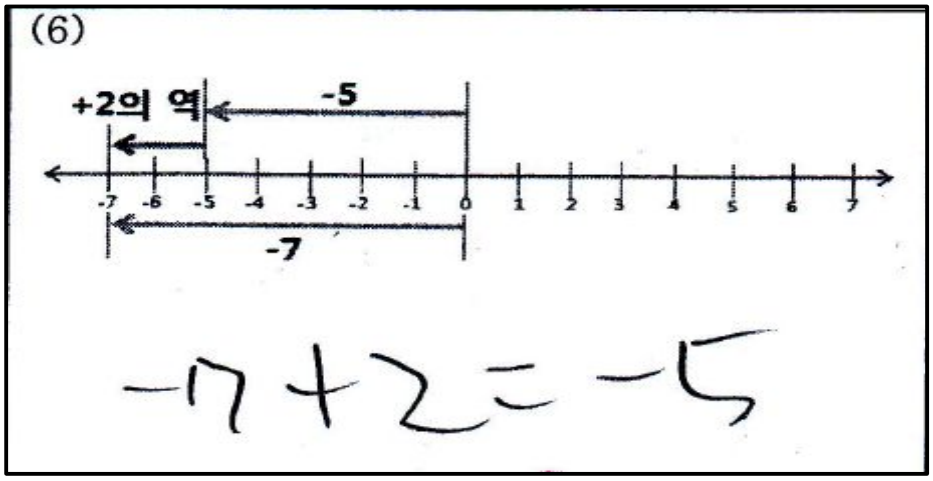


문항 2-6)



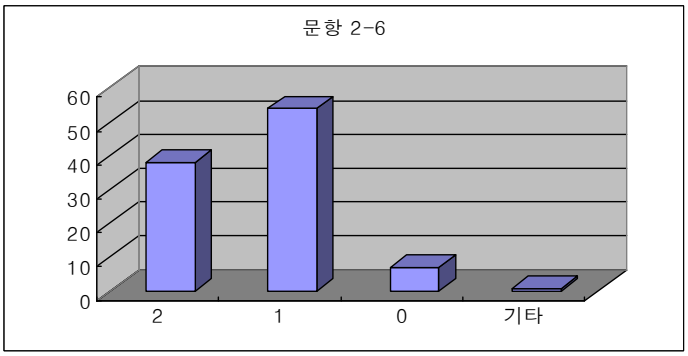
2-6번 문항의 경우 뺄셈의 문제 중 정답률이 가장 낮은 38%로 나왔다. 수식

의 결과 값이 음수가 나와서 수식으로 표현할 때 실수를 한 학생은 반이 넘는 54%가 나왔고, 오답 및 전혀 제시 못하는 학생도 7%가 되었다. 기타의 코딩에 분류된 학생도 1%가 있었다. 다음은 오답을 적은 한 학생의 예이다.

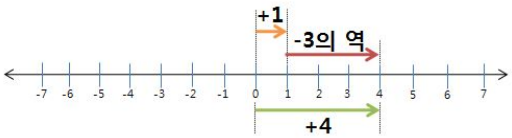


$(-5)-(+2)=-7$로 수식을 나타내어야 하는데 $-7+2=-5$로 나타내어 0번 코딩으로 분류 하였다.

	빈도수	퍼센트
2	38	38%
1	54	54%
0	7	7%
기타	1	1%

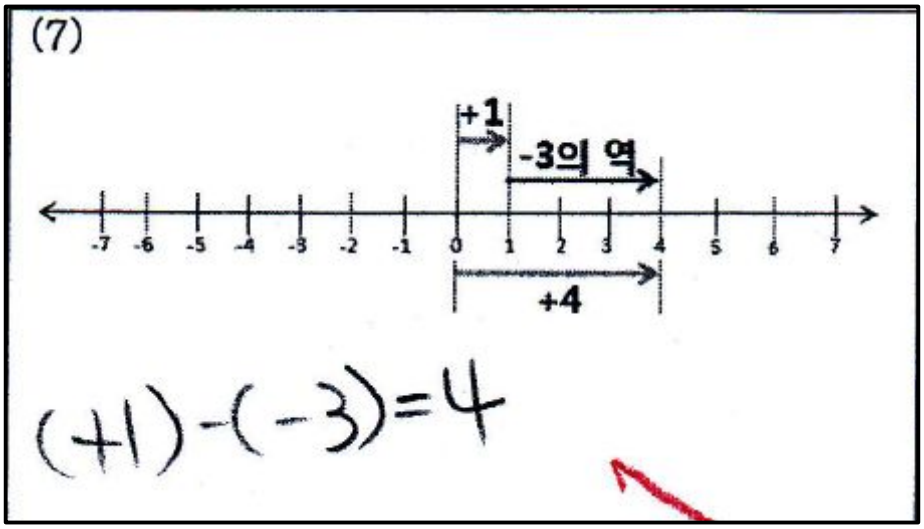


문항 2-7)



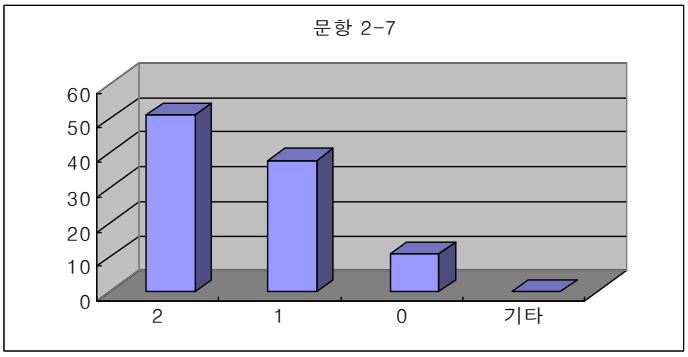
2-7번 문항의 경우 51%의 학생들이 수식을 정확하게 나타내었다. 수식으로

나타낼 때 부분적인 실수를 한 학생은 38%였고, 오답 및 수식을 전혀 제시 못하는 학생도 11%가 있었다. 다음은 수식을 정확하게 표현한 한 학생의 예이다.

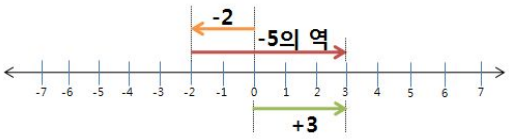


수직선 모델을 보고 수식을 완벽하게 나타내어서 2번 코딩으로 분류 하였다.

	빈도수	퍼센트
2	51	51%
1	38	38%
0	11	11%
기타	0	0%

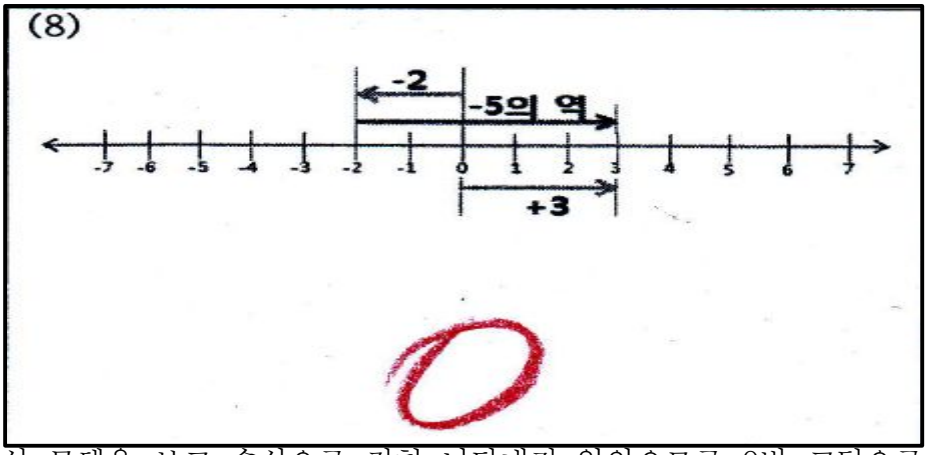


문항 2-8)



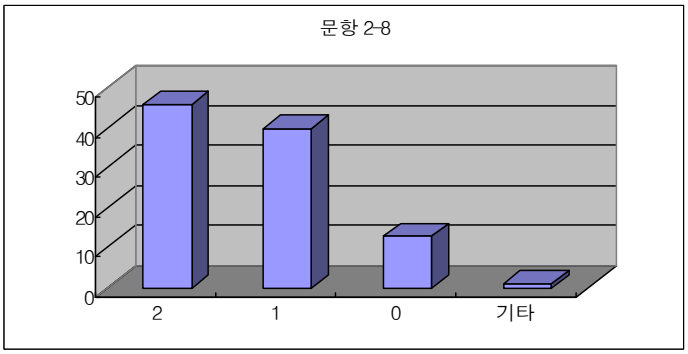
2-8번 문항의 경우 46%의 학생들이 수직선 모델을 보고 수식으로 정확하게 표현 하였고, 40%의 학생들은 수식으로 나타낼 때 약간의 부분적인 실수를 하

였다. 오답 및 수식을 전혀 제시 하지 않은 학생도 13%가 되었다. 기타의 코딩에 분류된 학생도 1%가 있었다. 다음은 오답 및 수식을 전혀 제시 하지 않은 한 학생의 예이다.



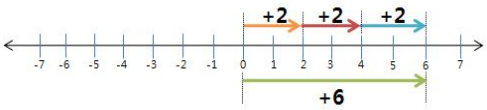
수직선 모델을 보고 수식으로 전혀 나타내지 않았으므로 0번 코딩으로 분류하였다.

	빈도수	퍼센트
2	46	46%
1	40	40%
0	13	13%
기타	1	1%

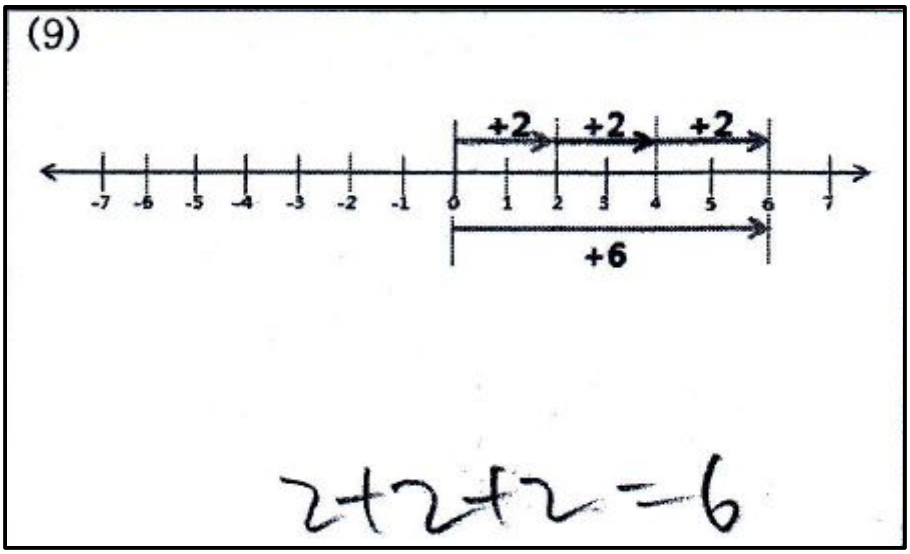


c. 곱셈

문항 2-9)

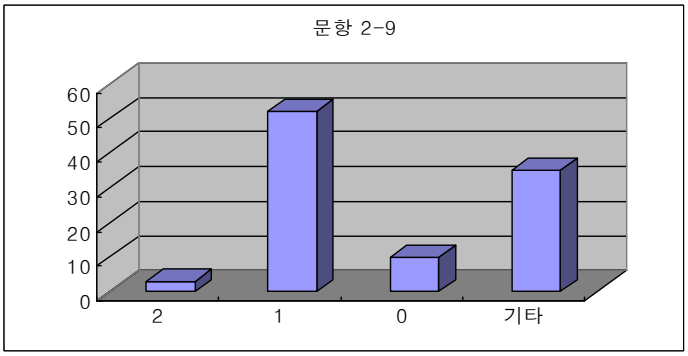


2-9번 문항의 경우 수직선 모델을 보고 정확하게 수식을 나타낸 학생은 3%였고, 수식에서 부분적인 실수를 한 학생은 반이 넘는 52%였다. 오답 및 수식을 전혀 제시 하지 못하는 학생은 10%였고, 기타의 코딩에 분류된 학생도 35%가 있었다. 다음은 기타의 답을 작성한 한 학생의 예이다.

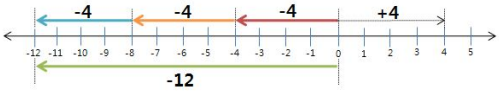


위 수직선 모델에서는 곱셈의 연산으로 수식을 $(+3)\times(+2)=+6$로 표현하여야 하는데 위 학생 같은 경우는 $2+2+2=6$으로 표현 하여 기타의 코딩으로 분류하였다.

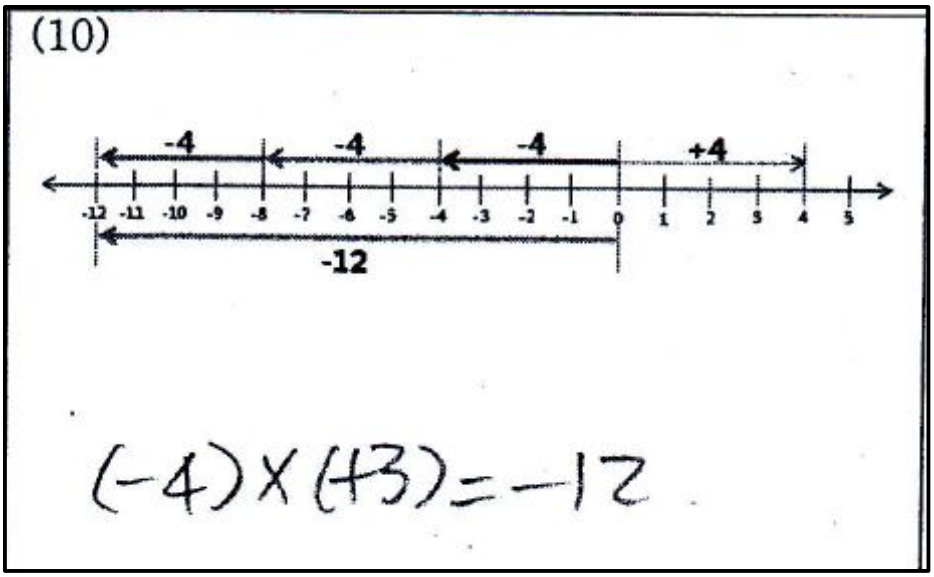
	빈도수	퍼센트
2	3	3%
1	52	52%
0	10	10%
기타	35	35%



문항 2-10)

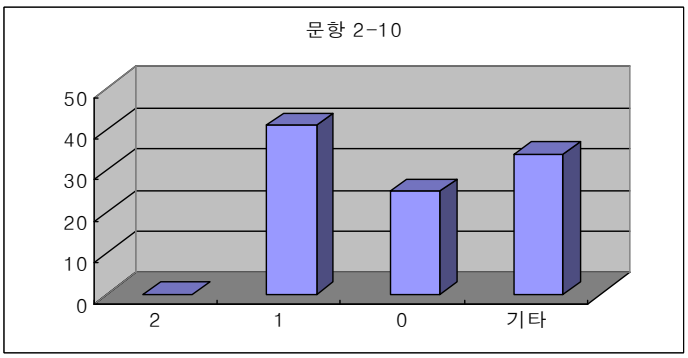


2-10번 문항의 경우는 수식을 정확히 표현한 학생은 한 명도 없었다. $+4$를 수직선에 그려줌으로써 많은 학생들이 수식을 표현하는데 어려움이 많았던 것 같다. 오답 및 수식을 전혀 제시를 하지 못하는 학생은 25%였고, 수식에서 부분적인 실수를 한 학생은 41%였다. 기타의 코딩에 분류된 학생도 34%가 있었다. 다음은 수식에서 부분적인 실수를 한 학생의 예이다.

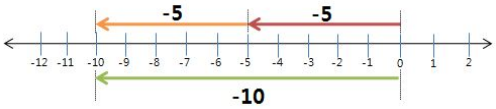


위 수직선 모델에서 정확한 수식은 $(-3)\times(+4)=-12$이다. 즉, $+4$를 왼쪽으로 3배만큼 팽창시키는 수직선 모델이다. 위 학생 답안지 수식의 경우는 수직선 모델의 화살표 모양을 보고 $(-4)\times(+3)=-12$로 수식을 표현하여 1번 코딩으로 분류 하였다.

	빈도수	퍼센트
2	0	0%
1	41	41%
0	25	25%
기타	34	34%

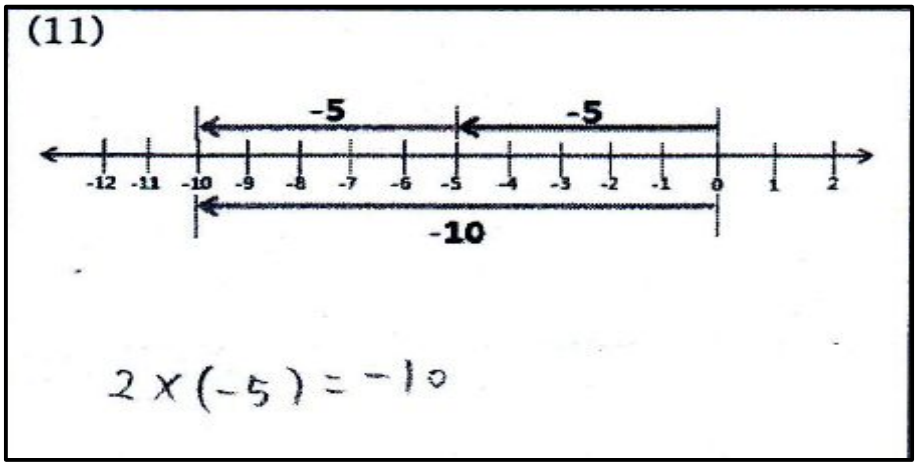


문항 2-11)



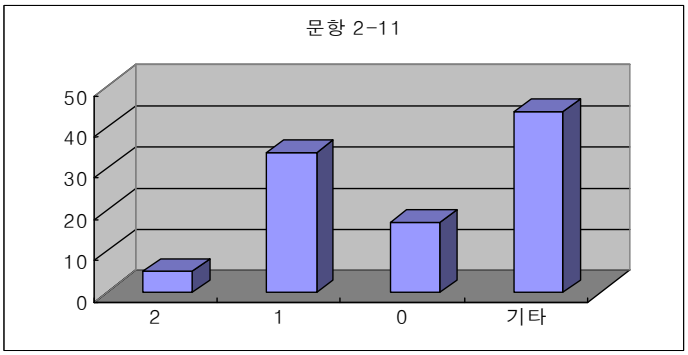
2-11번 문항의 경우 수식을 정확히 나타낸 학생들은 5%이고, 수식에서 부분적인 실수를 한 학생은 34%였다. 오답 및 수식을 전혀 제시 하지 못하는 학생은 17%였고, 기타의 코딩에 분류된 학생도 44%가 있었다. 다음은 수식을 정

확히 표현한 학생의 예이다.

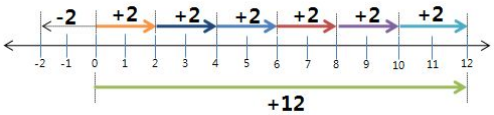


수직선 모델을 보고 수식을 완벽하게 나타내어서 2번 코딩으로 분류 하였다.

	빈도수	퍼센트
2	5	5%
1	34	34%
0	17	17%
기타	44	44%

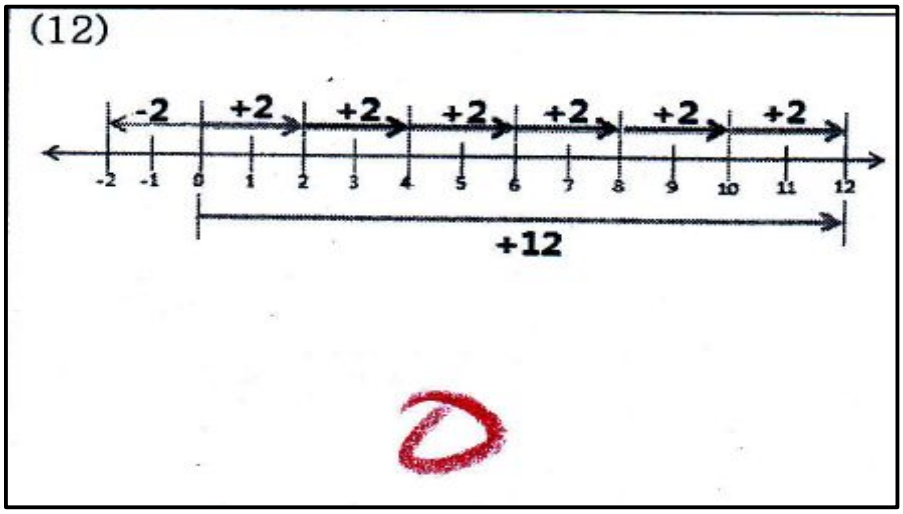


문항 2-12)



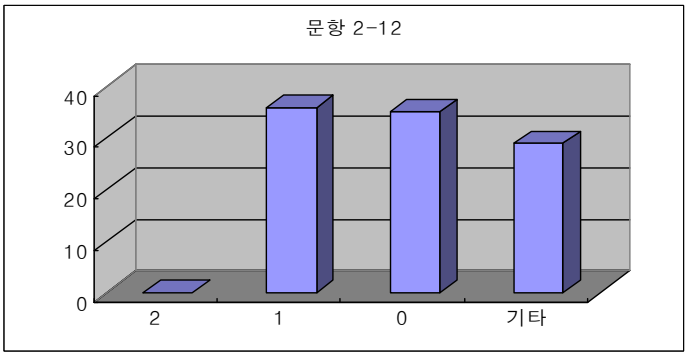
2-12번 문항의 경우 2-10번 문항과 같은 이유로 수직선 모델을 보고 수식으로 나타내는데 어려움이 많았던 것 같다. 이 문제 경우 수식을 정확하게 적은 학생은 단 한명도 없는 0%였고, 수식에서 부분적인 실수를 한 학생은 36%였다. 오답 및 수식을 전혀 제시 못하는 학생은 35%였고, 기타의 코딩에 분류된 학생도 29%가 있었다. 다음은 오답 및 수식을 전혀 제시 하지 못한 한 학생의

예이다.



수직선 모델을 보고 수식으로 전혀 나타내지 않았으므로 0번 코딩으로 분류하였다.

	빈도수	퍼센트
2	0	0%
1	36	36%
0	35	35%
기타	29	29%



3. 면담 결과

지필검사 결과에 대한 분석 결과 수식의 답을 찾는 능력은 높은 것으로 나타났으나, 계산 결과를 설명하는 과정에서는 많은 학생들이 어려워하는 것으로 나타났다.

지필 검사 후에 12명의 학생(성적上 A, B, C, D ; 성적中 E, F, G, H ; 성적下 I, J, K, L)을 임의로 선택하여 정수의 사칙연산 이해도를 보다 정확하게 확인하기 위하여 면담조사를 실시하였다.

수식에서 답을 구하고, 그 계산과정을 설명하는 문제에서 대부분의 학생들은 덧셈의 연산을 정확하게 이해하고 설명했다. 하지만 뺄셈은 달랐다 연산의 부

호를 먼저 뺄셈에서 덧셈으로 바꾸어서 계산하였으며 뺄셈 자체로는 계산과정을 표현하는 데는 어려움이 관찰 되었다.

Q) $(+6)-(+3)=+3$ 라고 했는데 어떻게 나왔어?
학생 A) 마이너스랑 플러스랑 바꿔서 계산 했는데요.
Q) 계산과정을 설명할 수 있겠어?
학생 A) 원점에서 오른쪽으로 6칸 가고 왼쪽으로 3칸 가서 3이 나왔습니다.
Q) 수식 그대로 표현해서 수직선 모델로 설명 해줄 수 있어?
학생 A) 그건 잘 모르겠는데요...

특히, 대부분의 학생들이 부호를 먼저 바꾼 후 수식의 답을 구하고 계산과정도 부호를 바꾼 후 나타내었고, 음수의 수식 자체를 적당한 모델로 표현하는 데는 어려움이 많았던 것 같다.
곱셈의 경우에는 많은 학생들이 수식의 정답을 맞췄으나 계산 과정을 나타내는 경우에는 대부분의 학생들이 표현하지 못하였다. 이는 학교에서 귀납적 외삽법으로 곱셈의 계산과정을 가르쳤으나 학생들은 기억하고 있지 못하고 또한 표현하기에도 많은 어려움을 느끼는 것 같았다.

Q) $4 \times 2 = 8$ $\quad$ $2 \times (-2) = (-4)$
$4 \times 1 = 4$ $\quad$ $1 \times (-2) = (-2)$
$4 \times 0 = 0$ $\quad$ $0 \times (-2) = 0$
$4 \times (-1) = -4$ $\quad$ $(-1) \times (-2) = 2$
$4 \times (-2) = -8$ $\quad$ $(-2) \times (-2) = 4$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$
혹시 이런 방법으로 배우지 않았어?
학생 A) 네 이렇게 배웠습니다.
Q) 설문지에 곱셈과정 설명할 때 왜 이 방법을 쓰지 않았어?
학생 A) 표현 하기가 너무 어려운 것 같습니다.

Q) $4 \times 2 = 8$ $\quad$ $2 \times (-2) = (-4)$
$4 \times 1 = 4$ $\quad$ $1 \times (-2) = (-2)$
$4 \times 0 = 0$ $\quad$ $0 \times (-2) = 0$

$4 \times (-1) = -4$ $\quad$ $(-1) \times (-2) = 2$
$4 \times (-2) = -8$ $\quad$ $(-2) \times (-2) = 4$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

혹시 이런 방법으로 배우지 않았어?

학생 D) 그런거 같습니다.

Q) 설문지에 곱셈과정 설명할 때 이 방법을 쓰지 않았어?

학생 D) 보긴 했는데 막상 쓸 생각을 하지 못했습니다.

Q) $4 \times 2 = 8$ $\quad$ $2 \times (-2) = (-4)$
$4 \times 1 = 4$ $\quad$ $1 \times (-2) = (-2)$
$4 \times 0 = 0$ $\quad$ $0 \times (-2) = 0$
$4 \times (-1) = -4$ $\quad$ $(-1) \times (-2) = 2$
$4 \times (-2) = -8$ $\quad$ $(-2) \times (-2) = 4$
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

혹시 이런 방법으로 배우지 않았어?

학생E) 처음 보는 것 같은데요.

곱셈의 경우 계산과정을 나타내는 것은 모든 학생들이 어려워하는 것 같았다. 학교에서 배운 귀납적 외삽법으로 설명한 학생은 단 한명도 없었고 귀납적 외삽법을 기억하지 못하거나 배우지도 않았다는 학생도 4명이나 있었다. 많은 학생들은 음수 곱하기 음수는 양수, 양수 곱하기 양수는 양수, 음수 곱하기 양수는 음수, 양수 곱하기 음수는 음수를 곱셈의 원리로 알고 있었다.

이러한 오류를 없애기 위해서는 학교에서 곱셈의 연산 지도시 귀납적 외삽법을 보다 적극적으로 활용하거나 더 구체적인 모델을 활용하여 학생들이 곱셈의 원리에 대해서 더 쉽게 이해할 수 있는 방법을 생각 해봐야 한다.

그리고 음수의 사칙연산의 이해도 조사를 위하여 학생에게 음수의 사칙연산을 배우면서 가장 어려웠다고 생각하는 점은 무엇인지에 대하여 알아 보았다.

Q) 음수의 사칙연산에 대해서 배우면서 가장 어려웠다고 생각 하는 점은 뭔지 구체적으로 기술해보세요?

학생H) 음수와 음수가 곱하거나 나누기로 이루어질 경우 수의 부호가 + 로 바뀌는 것이 이해가 되지 않고 어려웠습니다.

학생I) -3곱하기-7 같은 경우에 숫자 앞에 -가 있으니깐 -21이 나올것 같은데 실제 계산 하면 +21이 나오니깐 뭔지 햇갈리고 또 덧셈의

경우는 음수가 똑같은게 2개 있다고 해도 숫자만 더하지 부호는 바뀌지 않는데 곱셈과 나눗셈은 부호가 바뀌니깐 이해가 안되고 어려웠습니다.

음수의 사칙연산중 가장 어려워하는 점은 9명의 학생들이 부호 처리에 관하여 가장 어려워했고, 나머지 학생들은 음수라는 수를 이해하는 것 그리고 계산중 실수를 하지 않는 것이라고 하였다.

학생들은 연산과정에서 부호가 바뀌는 과정을 가장 어려워했고, 음수의 사칙연산에서 가장 중요하다고 생각 하는 것 같다.

정수의 사칙연산의 원리에 대하여 이해하는 것이 필요 하다고 생각 합니까? 라는 질문에 '네'라고 대답한 학생은 9명, '아니요'라고 대답한 학생은 3명이 있었다.

다음은 '아니오'라고 대답한 한 학생의 예이다.

Q) 음수의 사칙연산의 원리에 대해서 이해하는 것이 필요하다고 생각해?

학생K) 아니요.

Q) 이유는?

학생K) 그냥 문제들을 풀 수 있는 정도로만 알면 되고, 더 알면 복잡해지니깐 알지 않아도 된다.

Q) 그럼 다른 수학의 개념 및 원리를 알 필요가 있을까?

학생K) 꼭 알아야 할까요? 위랑 똑같이 문제 풀 수 있는 정도만 알면 될 것 같은데요.

Q) 그럼 사칙연산을 이해하는 것 같아?

학생K) 문제 풀 정도는요.

그리고 다음은 '예'라고 대답한 한 학생의 예이다.

Q) 음수의 사칙연산의 원리에 대해서 이해하는 것이 필요하다고 생각해?

학생H) 예

Q) 이유는?

학생H) 음수의 사칙연산의 원리는 제일 중요한 것이 이해인것 같다 계산을 잘한다고 하여도 부호가 변하는 것에 대해 이해하지 않으면 안된다.

Q) 그럼 다른 수학의 개념 및 원리를 알 필요가 있을까?

학생H) 네.
Q) 그럼 사칙연산을 이해하는 것 같아?
학생H) 계산은 다 할 수 있을 것 같은데 계산과정 설명은…
또 다른 학생의 답변이다.
Q) 음수의 사칙연산의 원리에 대해서 이해하는 것이 필요하다고 생각해?
학생B) 네. 당연히 필요하죠.
Q) 이유는?
학생B) 학년이 올라갈수록 기초적인 개념이라고 생각해서…음수의 사칙연산을 모르면…앞으로 문제 푸는데 힘이 들것 같다.
Q) 그럼 다른 수학의 개념 및 원리를 알 필요가 있을까?
학생B) 네. 원리를 알아야지 기억에도 오래남고 그러지 않을까요?
Q) 그럼 사칙연산을 이해하는 것 같아?
학생B) 네.

학생 대부분이 사칙연산의 원리에 대해서는 대부분 이해하는 것이 필요하다고 하였고, 그 이유로는 문제 풀이를 할 때 많이 사용된다고 하였다.
이는 많은 학생들이 기계적인 문제 풀이에만 관심을 두고 있기 때문에 원리에 대한 이해를 문제 풀이를 할 때 필요하다고 말하는 것 같다.
그러나 질문을 다르게 각 학생들에게 사칙연산 과정을 확실하게 이해하는 것 같습니까? 라는 질문에는 확실하게 이해하는 학생은 단 2명에 불과하였고, 나머지 학생들은 확실하게 이해하지 못하고 있다고 답하였다.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20088070	과 정	석사
성 명	한글: 강 경 원	한문: 姜 景 元	영문: Kang Kyung-Won		
주 소	광주광역시 서구 화정4동 태영아파트 3동 610호				
연락처	010-8832-9981	E-MAIL: jonk07@hanmail.net			
논문제목	한글 : 중학생들의 음수의 사칙연산에 대한 이해도 분석 영문 : A study on the middle school students' conceptual understanding of meaning of operations with integers.				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2011년 4월 22일

저작자: 강 경 원 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하