[UCI]I804:24011-200000241113

2011년 2월

교육학석사(수학교육)학위논문

기하 영역의 학습자 오류에 관한 고찰

-중학교 1학년을 중심으로-

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

전 민 정

기하 영역의 학습자 오류에 관한 고찰

-중학교 1학년을 중심으로-

The investigation on learners' misconception on the area of geometry
-In middle school-

2011년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

전 민 정

기하 영역의 학습자 오류에 관한 고찰

지도교수 한 승 국

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2010년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

전 민 정

전민정의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 황 혜 정 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 김 남 길 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 한 승 국 인

2010년 12월

조선대학교 교육대학원

목 차

ABSTRACT

Ⅰ. 서 론 1

A. 연구의 필요성 및 목적 1

B. 연구 문제 3

C. 연구의 제한점 3

Ⅱ. 이론적 배경 4

A. 기하 교육 4

B. 오류 9

Ⅲ. 연구 방법 및 절차 13

A. 연구 대상 13

B. 검사 문항 구성 13

C. 문항 검사 방법 15

Ⅳ. 연구 결과 및 분석 16

A. 설문 조사 및 문항 검사의 결과와 분석 16

B. 분야별 지도 방안 30

Ⅴ. 결론 및 제언 33

참고 문헌 35

<부록> 검사 문항지 37

ABSTRACT

The investigation on learners' misconception on the area of geometry -In middle school-

Jeon Min-jeong
Advisor : Prof. Han Seung-gook Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

The purpose of this study is to find the errors in geometry of students who have completed their second year in middle school
For this purpose, I established two research problems.

(1) What forms of errors exist in problem-solving in geometry?
(2) What is the adequate teaching methodology in response to these problem-solving errors?

For a closer analysis of the research I set as a research pool 65 students in two second grade classes of Yeo-do middle school, located in Yeo-su of the Chonnam province. The test material used to examine the students' errors in geometry and the survey sheets regarding students' interest in mathematics were created authentically by the researcher - I.

As a result of analyzing the results of the test material, the errors could be categorized into the following four categories: ①: Lack of core knowledge, ②: wrong application of operators, ③: unanticipated wrong answers, ④: ambivalent error.

The following results were sought from this study.
First, students tend to misunderstand or poorly understand the definitions, theorems and new symbols, consequently failing to use them properly
Secondly, they tend to absentmindedly confront word problems or fail to adequately understand them and consequently fail to produce the right answer
Thirdly, instead of thinking in many ways, they tend to attempt to solve problems quickly and easily with only their instincts and estimations.

Ⅰ. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

수학은 수천년을 이어오면서 인류 문명의 발달에 기초가 되었으며, 더욱이 정보화 시대로 접어들면서 더 많은 분야에 그 응용 범위를 넓혀가고 있다. 이에 따라 수학이 차지하는 위치는 더욱 중요해지고 능동적 삶을 살아가고자 하는 현대인에게는 갖추어야할 기본적 소양으로 여겨지고 있고 그 중요성 또한 점차 커지고 있다. 실제로 학생들은 수학의 중요성에 대해 높은 수준의 긍정적 신념을 보이고 있으며 학부모들도 자녀들의 수학 학력 향상을 위해 상당한 정도의 사교육비를 부담하고 있는 실정이다. 그 중에서도 기하 영역은 가장 오래된 역사를 가지고 있을 뿐만 아니라, 그 중요성 또한 커다란 비중을 차지하고 있다고 볼 수 있다. 기하 교육에 대한 연구가 더욱 강화되고 그 관심이 날로 높아가고 있는 세계적 추이에 발맞추어 우리나라는 중학교 1학년에서는 작도, 삼각형의 합동, 기본 도형과 입체 도형을 2학년에서는 삼각형, 사각형의 성질을 통해서 기하 교육을 도입 하고 있다.

알렌도퍼(Allendofor)는 초·중등학교에서 기하의 목표를 다음과 같이 다섯 가지로 제시하고 있다.

(1) 평면이나 공간에서의 기하적인 도형에 관한 기본적 사실에 대한 이해
(2) 평행이동·대칭이동·회전이동과 같은 기하적인 변환에 관한 기본적인 사항의 이해
(3) 연역적 방법에 대한 이해
(4) 공간 상상력을 신장시키기 위한 입문으로서의 기하 교육
(5) 기하적인 개념과 수학의 다른 분야의 개념과의 결합

즉, 기하교육은 기본적인 소양을 갖추는데 필수적이며 기하 도형을 통하여 논리적 사고력과 창의력을 신장시키고 수학적 활동을 활발하게 하는데 중요한 역할을 하고 있다는 것이다(배경민, 1996, 재인용).

현재 중등학교 수학 교육의 목표도 수학의 기초적인 지식을 이해하고 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하며, 이를 활용하여 합리적으로 문제를 해결할 수 있게 하는 것이라고 밝히고 있다.

성공적인 수학교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학의 구조를 잘 알아야 할 뿐만 아니라, 학생들의 오류를 진단하기 위한 전략에 대한 지식을 갖추어야 할 것이다. 따라서 교사들은 학생들의 오류를 파악할 필요가 있다. 한 가지 예로 교통사고가 자주 일어나는 지점에서 교통 경찰관이나 안전지도 요원이 사고 예방을 위한 안전 조치를 취하고 있다면 사고는 훨씬 줄일 수 있을 것이다. 이와 같이 수학 공부를 하는데 있어서도 학생들이 자주 오류에 접하는 부분을 분석하여 교사가 대비하고 있다면 같은 오류에 빠지는 학생들을 구제할 수 있을 뿐 아니라 교사 자신에게도 도움이 되리라 믿는다.

오류는 그 특성상 한번 오류에 빠지면 후속 학습을 불가능하게 하여 학습자로 하여금 자신감과 학습 의욕을 상실케 하며 수학을 포기하게 하는 중요한 요인으로 작용하게 된다. 또한 오류는 스스로 생각하고 탐구하는 자발적이고 자주적인 학습에 저해 요인이 되며 개인차가 심해지는 원인이 되기도 한다.

현 우리 기하 교육의 실 상황을 보면, 중학교 때 배우는 평면 논증기하는 재발견의 과정 없이 추상화되고 형식화된 증명 자체를 암기하도록 지도되고 있어 학생들에게 기하학에 대한 거부감을 심어주게 되며(우정호, 2007), 이후 고등학교에 올라가서 접하게 되는 해석기하는 도형의 방정식에 대한 개념 이해와 그와 관련된 문제를 대수적으로 해결하도록 지도 하고 있어 기하적인 부분이 대수적인 부분에 가려 학생들로 하여금 도형의 성질에 관한 개념 이해를 어렵게 하고 기하는 기하대로, 대수는 대수대로만 생각하는 단절된 사고를 일으켜 어려운 학문이라는 생각을 강하게 심어주게 된다(이수진, 2005). 이와 같은 문제를 어떻게 해결해야 하는가에 대한 많은 연구를 찾아보았지만 본격적으로 학생들이 기하 단원을 학습하면서 거치는 사고과정이나 개념 이해의 정도, 장애 요인 등에 관해 인지적 과정을 상세히 조사한 연구는 찾기 어려웠다. 이는 기하 단원이 다른 영역과의 연관성이 깊고 복잡한 인지과정이 작용하는 고등 수학적 사고이기 때문에 깊이 있게 연구함에 있어서 여러 가지 어려움을 수반하기 때문일 것이라 생각되어 진다. 하지만 학생들이 기하 학습에 있어 실제로 많은 어려움을 느끼고 있다. 따라서 교사는 모든 학생들에게 만족할 만한 효과적인 수업을 전개하여 그들이 지닌 잠재적 능력을 최대한 발휘하게 함으로써 자율학습이 가능케 하며 수학 공부를 하는 데 희열과 만족을 경험하게 하여 훌륭한 사회인으로 성장할 수 있도록 도움을 주어야 하기 때문에 연구의 필요성은 충분하다.

이제 수학 교육은 통찰에 의한 사고를 논리적인 사고 방법으로 전환시켜, 연

역적으로 사고하고 확인하도록 하는 힘을 키워 주도록 하여야 한다. 이러한 연역적 사고를 기르는데 기하 영역은 매우 중요한 역할을 한다. 따라서 본 연구에서는 논리적 사고력과 창의력 신장을 위하여 중학교 학생들이 기하영역에서 범하는 수학적 오류들을 분석·연구함으로써 교수 학습시 참고 자료에 도움이 되도록 하고자 한다.

B. 연구 문제

본 연구는 간단한 Test를 통하여 문제 풀이 과정에서 보이는 오류를 분석해 보고 원인을 찾아 그 치료방법 및 예방법을 모색해 보는 데 그 목적이 있으므로 본 연구자는 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

(1) 기하 영역의 문제 풀이 과정에서 발생하는 오류에는 어떤 유형이 있는가?
(2) 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 발생하는 오류에 대해서 교사의 적절한 지도 방안은 무엇인가?

C. 연구의 제한점

본 연구의 결과를 일반화하여 적용하는 데에는 다음과 같은 제한점이 있다.

(1) 본 연구의 대상은 전남 Y시에 소재한 Y중학교 2학년 2개 학급으로 한정 되어 있다.
(2) 본 연구의 범위는 중학교 1학년 과정의 기하 영역으로 한정 되어있다.
(3) 본 연구는 평가지에 나타난 오류만을 분석 연구하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. 기하교육

1. 기하 개념의 발달

기하는 19세기에 Pestalozzi에 의해 도형 지도의 도야적 가치가 강조되고 20세기초에 Treutlein에 의해서 직관 기하의 교육적 가치가 주장된 이래 오늘날 도형의 개념과 그 성질에 대한 비형식적인 지도는 초등학교와 중학교 수학의 주요 내용이 되고 있다.

현행 학교 수학에서는 초등학교와 중학교 1학년에서 직관기하, 중학교 2,3학년에서 평면 논증기하, 고등학교 수학에서 공간기하를 지도하고 있다. 특히, 중학교에서 증명의 의의와 방법을 이해시키기 위한 적절한 소재로 평면 기하를 택하고 삼각형의 합동 조건과 닮음 조건을 이용한 증명은 도형의 성질을 연구하는 주된 방법으로 간주되고 있다. 이러한 입장에서 중학교 수학에서는 대칭이나 회전은 직관기하의 영역에 포함되어 시각적 보조 수단으로 간주되고 있으며 유클리드 방법의 접근만이 유일한 증명법으로 간주되고 있다. 수학 교육에서 도형 영역은 실제 수업에서 다루는 양을 보아도 매우 중요한 영역이며 오랫동안 수학은 도형을 다루는 '기하'와 동의어로 간주되었다

최근 기하의 위치는 타 영역에 비해 낮아지고 있으나 평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 이해는 여전히 중요하며, 연역적 추론 방법은 다른 어떤 영역보다도 기하 영역에서 다루는 것이 효과적이다. 또 기하학적 개념은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접한 관련이 있어서 기하학적 개념에 대한 이해 없이는 그러한 개념을 이해하기가 어려운 실정이다. 한편, 대수 문제는 주로 알고리즘에 의해 해결되는데 반해 기하문제는 그 해결 방법이 다양하기 때문에 학생들로 하여금 창조적으로 사고하게 하는데 효과적일 수 있다.

2. 기하 교육의 필요성

기하 교육은 다음의 네 가지 이유로 필요하다고 말할 수 있겠다(하동수, 2006, 재인용).
첫째, 우리 실제 생활과의 연계성 뿐만 아니라 다른 학문과도 연결된다.
평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 사실에 대해 이해함으로써 실용적 의미뿐만 아니라 기본적인 소양을 갖추기 위한 교육이 될 것이다. 또, 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등과 같은 기하학적 변환에 관한 기본적인 사항을 인식하여 과학, 예술, 건축, 도안 등의 분야에서도 응용될 수 있다. 기하학은 우리 삶의 많은 부분들에 적용되어지기 때문에 많은 문화 개발에 도움을 줄 수 있다.

둘째, 기하학은 논리적 사고력 증진에 중요한 역할을 한다. 기하학은 연역적 추론의 방법을 가르치는 풍부한 기회를 제공해 준다. 사실, 서양의 수학교육에 있어서는 거의 2000년 이상을 연역적 방법을 가르치기 위한 적절한 수단으로써 유클리드 원본을 소중하게 여겨 왔다. 오늘 날에 있어서도 연역적 추론 과정이 소중하게 여겨지는데 이것은
① 종합적 사고- 가정으로부터 어떤 결론이 가능한가?
② 해석적 사고 - 결론이 성립하기 위해 어떤 조건이 충족되어야 하는가?
③ 반례에 대한 반증 - 어떤 명제가 거짓임을 보이기 위한 예가 존재하는가?
등으로 중등이상의 수학과정에서 쓰이는 방법이다. 또, 유클리드 기하학에서 소홀하게 여겨진 귀납적 추론 사고 방법도 향상시킬 수 있다. 이 방법은 어떤 문제를 해결하고자 하나 그 해결 방법이 어려울 때 우선 일반적인 규칙이나 성질을 알아내어 이것을 바탕으로 문제를 해결하려는 것이다.

셋째, 공간적 추론(Spatial reasoning)을 증가시킬 수 있다. 기하학과 공간적 추론은 상호관련성이 높고 대개의 수학자들은 기하교육과정의 일부에 공간적 추론을 포함시키고 있다. 예를 들어, Usiskin(1982)은 기하학의 과정을 다음과 같이 4단계로 설명하고 있다.
① 시각화(Visualization), 그림, 도형의 구성(construstion)
② 물리적 세계 (Physical world)의 공간적인면 연구
③ 비 시각적 수학의 개념과 관계를 표현하는 수단으로서의 사용

④ 형식적 수학 체계로서의 표현

여기에서, 앞의 세 단계가 모두 기하학에서 공간적 추론의 사용이 필요함을 보여주고 있다. 공간적 추론은 과학적 사고에 필수적이며, 문제해결과 학습에 정보를 표현하고 다룰 수 있도록 도와준다. Gardner(1983)는 공간적 능력은 인간의 지성적 능력 중의 필수라고 했고 다양한 영역을 통하여 유사점을 발견하는 능력은 공간적 지성의 표현으로부터 많은 예증을 유발한다고 했다.

예를 들면, 과학자들이 인간 사회와 미생물이나 두뇌 기능 사이에 유사점을 그려보는 것이다. Harris(1981)에 의하면 가장 기술적이고 과학적인 영역- 항공디자이너, 건축가, 화학자, 기술자, 물리학자, 수학자-에서 90%이상이나 공간적 능력을 가진 사람이 필요하다고 주장했다. 수많은 수학자와 수학교육자들은 공간적 능력과 시각적 상상이 수학적 사고에 중요한 역할을 한다고 제안했다. 학생들로 하여금 창조적으로 사고하고, 그들 스스로 생각하도록 하는 일은 기계의 구조를 단순하게 익히는 것보다 훨씬 중요한 일이다. 이 점에 있어서 기하문제는 해결방법이 다양하기 때문에 통상적인 대수적 알고리즘의 까다로움에 비해 더 유리한 학습 요소가 될 수 있다.

넷째, 다른 수학의 분야, 즉 대수, 해석학, Metric geometry, 삼각법 등과 깊은 관련을 가진다.

기하학적 개념은 대수학이나 해석학 등의 개념과 비교할 때 그 방법이나 내용에 있어서 결코 고립될 수 없는 것이다. 예를 들면 실수에 대한 성질이 기하학의 표현에 영향을 미치는 대수적이고 기하학적인 개념사이에 강한 연관성이 있는 것이다. 또 평면도형의 넓이, 입체도형의 넓이와 부피 등의 계산은 직각삼각형과 예각삼각형에 대한 tangent, sine, cosine 비 등이 기하 과정에서 자연스럽게 통합될 수 있다. 수학의 다양한 분야 속에서 기하학이 상호 작용한다는 것은 학생들이 그것을 더 깊이 이해할 수 있고 그들의 문제해결 능력을 향상시킬 수 있을 것이다.

3. 기하교육의 목표

수학 교과는 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 하고 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 사고하는 능력을 기르게 하여, 여러 가지 문제를 논리

적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 한다. 수학 교과의 목표는 기본적인 수학적 지식과 기능을 바탕으로 수학적 사고력을 길러 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 데에 있다. 중학교 도형에서 학습자는 자연 현상이 실생활의 상황을 통해 평면과 공간의 개념을 직관적으로 이해하고, 이를 그림으로 나타내거나 계량화하는 활동이 기초적인 학습 활동이며, 후반에는 연역적 추론을 통해 문제 해결의 경험을 얻게 된다.

중학교 1학년 교육 과정 중 기하부분의 교육 목표를 살펴보면 다음과 같다.

㈎ 기본도형의 위치 관계를 직관적으로 고찰하여, 기본도형의 성질을 이해하게 한다.

㈏ 작도를 통하여 두 삼각형의 합동 조건을 알아보게 하고, 간단한 도형의 성질을 알 수 있게 한다.

㈐ 도형의 계량에 관하여 이해하게 한다.

㈑ 점, 선, 면의 연결 상태에 의하여 생기는 도형의 간단한 성질을 관찰하게 한다.

제 7차 수정안 교육과정에서 기하 영역을 살펴보면 다음과 같다(교육부, 2007).

기본 도형 ① 점, 선, 면, 각의 성질을 이해한다. ② 점, 직선, 평면의 위치 관계를 이해한다. ③ 평행선의 성질을 이해한다. 작도와 합동 ① 간단한 도형을 작도할 수 있다. ② 합동인 도형의 성질을 이해한다. ③ 삼각형의 결정조건과 합동조건을 이해한다. 평면도형의 성질 ① 다각형의 성질을 이해한다. ② 다각형의 내각과 외각의 크기를 구할 수 있다. ③ 부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해한다. ④ 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있다.

⑤ 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. ⑥ 두 원의 위치 관계를 이해한다. 입체도형의 성질 ① 다면체의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. ② 회전체의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. ③ 입체도형의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.

NCTM에서 밝힌 6~8학년 (초등학교 6학년~중학교 2학년)의 기하교육의 목표는(NCTM, 2007) 다음과 같다.

① 기하적 도형을 인식하고, 묘사하고, 비교하고, 분류할 수 있어야 한다.
② 공간 감각의 개발에 유의하면서 기하적 형상을 시각화하고 표상할 수 있어야 한다.
③ 기하적 도형의 변화를 탐구할 수 있어야 한다.
④ 기하적 모델을 사용하여 문제를 표상하고 해결할 수 있어야 한다.
⑤ 기하적 특성과 관계를 이해하고 적용할 수 있어야 한다.
⑥ 물리적 세계를 표현하는 도구로서 기하를 음미할 수 있어야 한다.

이상에서 살펴볼 때 기하 교육의 목표는 다음과 같다.

첫째, 평면 도형과 입체 도형의 개념과 그 기본적인 성질의 이해
둘째, 평행 이동, 대칭 이동, 회전 이동 등의 기하학적 변환에 대한 기본적인 사항의 이해
셋째, 증명의 의의와 방법 곧, 연역적 방법에 대한 이해
넷째, 증명 능력의 개발, 공간적인 상상력의 신장
다섯째, 기하의 대수적 접근법과 벡터에 의한 접근법 등의 습득
여섯째, 기하학적 개념과 다른 수학적 개념과의 통합
이라고 볼 수 있겠다.

B. 오류

1. 오류의 정의 및 선행연구

오류(error)의 사전적 의미는 '생각이나 지식 등의 그릇된 일, 잘못되어 이치에 어긋남' 등으로 기술되어 있고 교육학 용어 사전에서는 '논리학에 있어서 바르지 못한 논리적 과정, 특히 의견상 바르게 보이면서 틀린 추리, 통속적 의미로는 참이 아닌 것으로 쓰이기도 하며 착각, 관측상의 오차 등으로 인한 지각상의 착오를 가리키기도 함' 으로 풀이하고 있다. 그러나 오류에 대한 개념과 정의는 일정하게 정의된 것이 없고 학술적으로 정착된 개념이라기 보다는 일반적인 용어로 널리 쓰여지고 있으나 본 연구에서는 수학적 오류의 정의를 수학 문제 해결 과정에서 발생하는 잘못된 근거, 잘못된 추론, 논점의 일탈, 성급한 일반화, 계산의 잘못 등으로 한다.

학생들이 체계적인 실수나 오류를 범하는 이유는 그들이 가지고 있는 지식이 불완전하거나 부정확하기 때문이라고 볼 수 있다. 교사가 수업을 할 때 설명식으로 너무 빨리 진행하거나 추상적이고 경직된 방법으로 진행한다면 학생들은 기계적으로 수학을 암기하게 된다. 그 결과 학습 내용이 무의미한 정보처럼 보일 수도 있으며, 학습 내용을 정확하게 이해하지 못하여 결과적으로 정확한 지식을 소유하지 못하거나 잘못된 개념을 갖게 되고 그로 인해 잘못된 절차를 적용하여 문제를 풀이하게 되는 오류를 범하게 된다는 것이다.

Brousseau(1986)은 오류를 다음 네 가지로 분석하였다(오은균, 1998, 재인용).

첫째, 오류는 종종 수학의 기본적인 개념에 관한 오개념의 결과이다.

둘째, 오류는 때로는 교사에 의한 체계적인 지도 과정의 결과로서 일어난다.

셋째, 오류는 학생들이 결함이 있는 절차를 사용하고 교사에 의해 잘못 인식된 오개념을 가짐으로써 발생하기 쉽다.

넷째, 학생들은 종종 문제해결을 위해 자신의 독창적이고 비형식적인 방법을 창안하는데, 이것들은 더욱 일반적인 문제 형태의 특별한 경우에 기초한 귀납적 추론 과정의 결과이며, 그런 방법들이 때로는 심각한 오류를 일으킨다.

Radatz(1979)는 정보처리 이론을 기초로 해 수학의 영역에 걸쳐서 오류를 발생시키는 절차에 의하여 오류의 원인에 대한 분류 모델을 다음과 같이 제시했다(오세경, 1995, 재인용).

(1) 언어의 난이성
(2) 공간 정보 획득의 어려움
(3) 사전 지식의 습득 부족
(4) 사고의 경직성 또는 부정확한 연합
(5) 관련이 없는 법칙이나 전략의 적용

Radatz(1979)는 오류의 원인은 서로 상호 작용이 있기 때문에 같은 문제에서도 서로 다른 오류가 일어날 수도 있고, 서로 다른 문제에서도 같은 오류가 일어날 수 있다고 하였고, 오류의 원인에 대한 명확한 분류와 위계를 달성하는 것은 어렵다고 하였다. 또 이것이 그의 초등학교 과정의 수학의 예에서 발생하였다면, 중등 수학의 오류에서도 발생할 것이라고 하였다.

Babbit(1990)은 '산술에 관한 문제 해결에서의 오류의 형태에 대한 연구' 중에서, 4차 NAEP에서 나온 오류의 빈도수 자료와 남부캘리포니아의 초등학교 5학년과 6학년 학생 431명의 문제해결 수행 연구에서는 오류의 형태를 크게 다음의 네 가지 범주로 나누었다(이승행, 1999, 재인용).

(1) 계산 오류 (computational errors)
(2) 연산 오류 (operational errors)
(3) 시도하지 않은 오류 (non-attempt errors)
(4) 복합적인 오류 (miscellaneous errors)

이스라엘의 Hadar & Zaslavsky(1987)는 고등학교 학생들이 수학 졸업시험에서 반복적으로 보이고 있는 높은 비율의 공통된 오류에 관하여 체계적인 실험을 실시하였다. 이 연구는 연속적으로 두 해에 걸쳐서 18개의 주관식 문제에 대한 학생들의 풀이 결과에서 보인 오류들을 분석하여 다음과 같이 6개의 범주로 분류하였다(우정호, 2007, 재인용).

(1) 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류(Misused data) : 문항에 주어진 자료와 학생들이 사용한 자료사이의 불일치로 인한 오류
(2) 문제 내용을 잘못 해석하는 오류(Misinterpreted language) : 수학적 사실

들을 하나의 수학적인 기호 언어에서 다른 언어로 옮기는 과정의 부정확에서 오는 오류 즉, 문제 내용을 잘못 해석하는데서 오는 오류

(3) 논리적으로 부적절한 추론(Logically invalid inference) : 주어진 정보로부터 혹은 전에 잘 못 된 것으로부터 새로운 정보가 부적절하게 이끌어지는데서 오는 오류

(4) 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류(Distorted theorem or definition) : 특수한 원리, 법칙, 정리 또는 정의를 부적절하게 사용하는데서 오는 오류

(5) 논증되지 않은 해답(Unverified solution) : 학생들이 밝힌 각 단계들이 그 자체로는 옳지만, 제시된 최종 결과가 문제에 대한 해답이 아닌 경우

(6) 기술적인 오류(Technical error) : 계산상의 오류, 표로부터 자료를 끌어내는 오류, 기초적인 대수 기호를 다루는데 있어서의 오류, 초등학교 또는 중학교 수학에서 습득된 알고리즘을 시행하는데 있어서의 오류 등이 여기에 포함된다.

이 6개의 범주들에 의해 첫해에는 130개의 오류들을, 둘째 해에는 150개의 오류들을 분류한 구체적인 빈도수는 다음과 같다.

<표 1> 오류 범주별 빈도수

범주	첫 해 (%)	두 번째 해 (%)
문제를 잘못 사용하는 오류	22	20
문제 내용을 잘못 해석하는 오류	17	18
논리적으로 부적절한 추론	2	1
정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류	34	32
논증되지 않은 해답	0	2
기술적인 오류	25	27

위의 <표 1>에 의하면 고등학생의 경우에는 기술적인 오류도 흔히 범하지만 정리나 정의를 적절하게 사용하지 못하는 데서 오는 오류가 상당한 부분임을 알 수 있다.

류성림(1993)의 연구에서는 중학교 2학년 학생 210명을 대상으로 기하 증명 문제 풀이 과정에서 발생하는 총 647개의 오류를 뽑아 다음과 같이 9가지로 분류하여 오류모델을 제시하였다.

(1) 가정을 잘 이용하지 못하는 오류
(2) 도형에 집착하여 생기는 오류
(3) 연산자의 잘못된 적용
(4) 연산자의 잘못된 실행
(5) 증명 과정의 일부 생략
(6) 결론을 바르게 내리지 못함
(7) 기술적인 오류
(8) 논리적 추론의 결여
(9) 오류의 애매 모호함

우현철(2000)은 고등학교 1학년 학생을 대상으로 실시한 연구에서 오류의 분류모델을 제시하였다.

우현철의 오류분류에 따르면 이해오류와 전략선택에 의한 오류의 빈도수가 가장 높았고, 이것으로 보아 학생들이 수학적 조건을 이해하는데 문제가 있는 것으로 나타났으며, 또한 학생들이 문제풀이의 경험이 없다는 것으로 밝혀졌다. <표 2 참조>

<표 2> 오류 범주별 빈도수

오류의 종류	빈도수 (%)
① 이해의 오류	23.93
② 전략선택의 오류	23.93
③ 처리기술의 오류	19.96
④ 반성의 미 실행에 의한 오류	6.24
⑤ 오류의 애매모호함	8.41

이상에서 살펴본 것처럼 수학에서 발생하는 오류에 대한 연구가 많은 수학교육자들에 의해 다양한 측면에서 이루어지고 있음을 알 수 있다. 이상을 종합해 본 결과 본 연구에서는 6가지 오류 모델을 참고하고자 한다.

(1) 필수적인 지식 부족
(2) 연산자의 잘못 적용
(3) 논리적 추론 결여
(4) 요구되지 않은 해답
(5) 과정의 생략
(6) 오류의 애매 모호함

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

A. 연구 대상

본 연구의 대상은 전남 Y시에 소재한 Y중학교 2학년 학생들로, 기하 영역의 문제 풀이 과정에서 학생들이 범하는 오류 유형을 분석하기 위해서 2개 학급 65명의 학생들을 대상으로 기본도형과 원의 위치관계의 성질의 풀이에 관한 검사를 실시하였다. 검사에 참여한 학생들 모두 이미 1학년 때 검사지에 있는 내용을 모두 배운 상태였고, 2학년에서는 아직 기하 단원에 대해 배우지 않은 상태에서 검사가 이루어졌다.

B. 검사 문항 구성

검사 문항은 수학의 흥미도를 알아보기 위한 간단한 설문조사와 학업 성취 능력을 알아보기 위한 검사 문항지로 구성 되어 있다. 설문조사는 전(前)학년 때 배운 수학 단원에 대한 학생들의 심리적, 경험적 태도를 알아보기 위한 것으로 아래 <표 3>과 같다.

또한 본 연구에서 사용한 검사 문항지는 기본 도형, 작도와 합동, 평면 도형의 성질의 개념을 묻는 문제들로 구성 되었고, 검사의 타당도를 높이기 위하여 학생들이 배웠던 교과서에 나왔던 문제들로 구성하였다. 학생들이 기하 영역에서 범하는 오류의 유형을 알아보기 위함이므로 주관식으로 구성하였고 단원의 특성상 문장제로 이루어진 문제는 제시하지 않았다. 총 15문제로 이루어진 검사 문항지는 1번부터 7번까지는 기본 도형과 작도와 합동에 관련된 문제이고, 8번부터 15번까지는 평면도형의 성질을 묻는 문제들로 구성되어 있다. <표 4 참조>

1. 설문 내용

<표 3> 설문 조사

a. 수학을 공부하는 것은?

① 매우 흥미 있다. ② 약간 흥미 있다. ③ 보통이다.
④ 별로 흥미 없다. ⑤ 싫다.

b. 다음은 1학년 때 배웠던 단원명입니다. 가장 어려웠던 단원에는 1, 두 번째로 어려웠던 단원에는 2를 써 주세요.

집합 ( )
자연수 ( )
정수와 유리수 ( )
문자와 식 ( )
방정식 ( )
함수 ( )
통계 ( )
도형의 기초 ( )
작도와 합동 ( )
평면 도형 ( )
입체 도형 ( )

c. 기하 영역에 대하여 공부하는 것은?

① 매우 흥미 있다. ② 약간 흥미 있다. ③ 보통이다.
④ 별로 흥미 없다. ⑤ 싫다.

2. 검사 문항지

<표 4> 검사 문항지

문항 번호	구분	교육과정 내용
1	기본도형	점, 선, 면, 각의 성질을 이해한다.
2		
3		점, 직선, 평면의 위치 관계를 이해한다.
4		평행선의 성질을 이해한다.
5	작도와 합동	삼각형의 결정 조건과 합동조건을 이해한다.
6		
7		
8	평면 도형의 성질	다각형의 내각과 외각의 크기를 구할 수 있다.
9		원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
10		두 원의 위치 관계를 이해한다.
11		
12		원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
13		두 원의 위치 관계를 이해한다.
14		원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
15		두 원의 위치 관계를 이해한다.

C. 문항 검사 방법

기하영역에서 학생들이 범하는 오류 유형을 파악하기 위해 2개 학급 총 학생 65명을 대상으로 오전 자율학습 시간에 검사문제지를 이용하여 검사를 실시하였다. 총 소요 시간은 40분으로 충분한 시간을 제공하여 피검사자로 하여금 편안하고 자유로운 분위기에서 풀이할 수 있도록 하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

A. 설문 조사 및 문항검사의 결과와 분석

1. 설문 조사

설문 조사 결과 <표 5>에서 볼 수 있듯이 수학 과목의 흥미도는 보통 이상이라고 답변한 학생이 76.9%로 전체의 $\frac{2}{3}$가 넘는 학생이 수학이라는 과목에 흥미를 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 기하 영역에 대해 '매우 흥미 있다' 라고 응답한 학생은 전체의 18.5% , '약간 흥미 있다' 라고 응답한 학생은 전체의 21.5% , '보통이다' 라고 응답한 학생은 전체의 33.8%로 보통이상의 흥미를 가진 학생이 총 73.8%를 차지해 절반 이상의 학생들이 기하 영역에 대하여 흥미를 가지고 있다 라는 것을 알 수 있다. <표 7 참조>

또한, 어려운 단원을 묻는 설문에서 함수(58.5%), 방정식(12.3%) 순 이였고 도형의 기초부터 입체도형까지의 기하영역부분에서도 1순위에 9.2%의 학생이 어려운 단원이라고 응답하였다. 2순위 역시 기하영역부분에서 33.9%에 해당하는 학생이 어려운 단원이라고 꼽은 것으로 미루어 보아서 기하 영역이 1학년 과정 중에 그리 쉽지 않은 과정이라는 것을 <표 6>을 통해서 알 수 있다.

<표 5> 수학과목에 대한 흥미도

구분	매우 흥미있다	약간 흥미있다	보통이다	별로 흥미없다	싫다	계
비율(%)	13.8	35.4	27.7	7.7	15.4	100

(위의 표의 비율은 소수점 둘째자리에서 반올림한 결과이다.)

다음 표는 1학년 때 배웠던 단원 중에서 어려웠던 단원들의 1순위와 2순위 단원에 응답한 내용이다.

<표 6> 어려웠던 단원의 1, 2 순위 (%)

단 원	1학년 과정	
	1순위	2순위
집합	7.7	18.5
자연수		
정수와 유리수	4.6	1.5
문자와 식	6.2	3.1
방정식	12.3	13.8
함수	58.5	21.5
통계	1.5	7.7
작도와 합동		
평면도형	1.5	10.8
입체도형	7.7	23.1

(위의 표의 비율은 소수점 둘째자리에서 반올림한 결과이다.)

<표 7> 기하 단원에 대한 흥미도

구분	매 우 흥미있다	약 간 흥미있다	보통이다	별 로 흥미없다	싫다	계
비율(%)	18.5	21.5	33.8	7.7	18.5	100

(위의 표의 비율은 소수점 둘째자리에서 반올림한 결과이다.)

2. 문항검사

학생들을 대상으로 한 문항검사의 결과는 다음과 같다.

■ 1번 문항

문항1. 다음 그림과 같이 직선 AB 위에 세 점 A, B, C 가 있다. 다음 중 서로 같은 것을 찾아라.

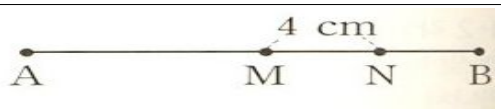
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{BA}$

정답	$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{BA}$

이 문항은 직선, 반직선, 선분의 의미를 묻는 문제로 기본 도형에서 기초적인 내용 임에도 불구하고 오답률이 87.7%에 달하였다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BA}$ 를 같다고 한 경우와 $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{CA}$ 를 같다고 한 경우를 들 수 있는데 이것은 반직선의 의미를 정확히 알지 못하여 오류가 발생하였다. 이러한 학생들에게 직선, 반직선, 선분의 의미를 비교하여 정확히 알게 하고, 특히 반직선은 시작하는 점의 방향을 잘 보도록 지도하며 많은 예를 들어 확실히 이해하도록 지도해야 할 것이다.

■ 2번 문항

문항2. 다음 그림에서 점 M은 $\overline{AB}$의 중점이고 점 N은 $\overline{MB}$의 중점이다. $\overline{MN} = 4\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{AN}$ 의 길이를 구하여라.

	
정답	12cm

이 문항은 A, B 두 점 사이의 거리와 양 끝점에서 같은 거리에 있는 중점의 의미를 묻는 문제로서 난이도가 그리 높지 않았음에도 불구하고 49.2%에 해당하는 높은 오답률을 보였다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 16cm라고 답한 학생들이 많았는데 이는 중점의 의미를 알지 못하여 발생하는 오류로 판단된다. 이런 학생들에게는 서로 다른 두 점을 잇는 무수히 많은 선 중 길이가 가장 짧은 선이 선분이 되며 그 양쪽 끝 점을 두 점 사이의 거리라 설명하고 양 끝점에서 같은 거리에 있는 한 점이 그 선분의 중점이라고 지도 한다. 특히 한 점에서 중점까지의 거리는 선분의 길이의 $\frac{1}{2}$이라는 점도 알게 한다.

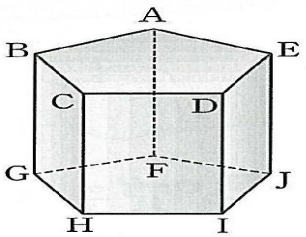
■ 3번 문항

문항3. 다음 그림과 같은 오각기둥에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 AB와 평행한 모서리

(2) 모서리 AB와 만나는 모서리

(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리



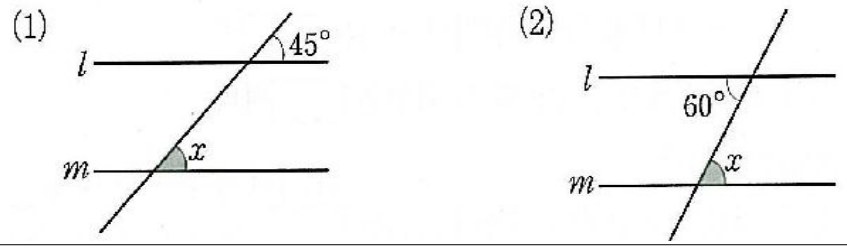
정답	$\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JF}$, $\overline{CH}$, $\overline{DI}$, $\overline{EJ}$

이 문항은 두 직선 사이의 위치 관계를 묻는 문제로서 기본 도형에서 빼놓지

말아야 할 부분임에도 불구하고 72.3%에 해당하는 오답률이 발생하였다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 9개의 모서리 중 일부만 쓴 경우가 거의 대부분을 차지하여 가장 많은 오답 빈도수를 나타내었고 이는 꼬인 위치에 대한 정확한 지식이 부족하여 모든 모서리를 다 찾아내지 못한 것으로 판단된다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는 꼬인 위치의 정확한 정의 숙지 지도와 여러 유형의 예를 들어 설명하여 익히게 하여야 할 것이다.

■ 4번 문항

문항4. 다음 그림에서 $l /\!/ m$ 일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



정답	(1) 45°, (2) 60°

이 문항은 기본 도형에서 동위각과 엇각의 위치를 알고 있는지 묻는 문제이다. 이 문제의 오답률은 9.2%로 다소 비중은 낮지만 그 학생들의 오답을 보니 (1) 135°,(2) 120°이라고 적은 학생들이 다수였다. 이는 가장 기본 적인 동위각과 엇각의 위치를 파악하지 못하고 있는 것이라 파악되어 이러한 학생들에게 있어서 교사는 동위각과 엇각의 정확한 정의를 알수 있도록 지도해야 할 것이다. 더불어 평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때 동위각과 엇각의 크기가 같은 성질이 있음도 지도 한다.

■ 5번 문항

문항5. 다음 중 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있는 것은 어느 것인가?

(1) 5cm, 10cm, 15cm (2) 4cm, 5cm, 6cm

(3) 3cm, 3cm, 1cm (4) 2cm, 5cm, 8cm	
정답	(2), (3)

이 문항은 삼각형의 작도를 통해 삼각형이 만들어지는 조건을 알고 있는지 묻는 문제로서 작도와 합동의 삼각형의 결정 조건의 가장 기본적인 문제임에도 불구하고 55.4%라는 오답률이 나왔다. 이 문제에서 보이는 대표적인 오류로는 두 개의 답 중 하나의 답 만 적은 경우가 많은 것으로 보아 문제의 보기를 끝까지 보지 않고 적은 것으로 판단되어 진다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는 문제를 끝까지 읽고 침착하게 답을 적는 것을 지도하고 또한 정확히 이해하지 못하고 답을 적은 학생들에게는 삼각형에서 '한 변의 길이는 다른 두 변의 길이의 합보다 항상 짧다' 라는 삼각형의 성질을 지도하고 가장 긴 변을 제외한 나머지 두 변의 길이의 합이 긴 변 보다 길면 삼각형이 결정된다는 내용도 지도해야 할 것 이다.

■ 6번 문항

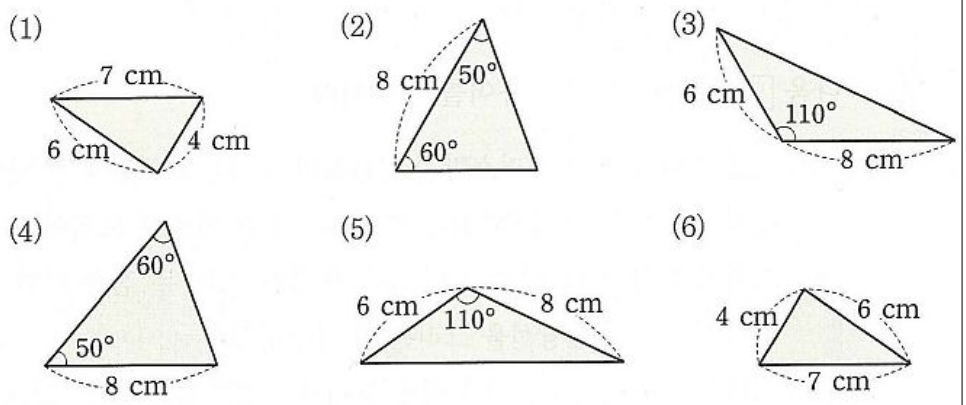
문항6. 다음 중 삼각형이 하나로 결정되는 경우는 어느 것인가? (1) $\overline{AB}=6cm$, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=70^\circ$ (2) $\overline{AB}=7cm$, $\angle B=30^\circ$, $\overline{AC}=5cm$ (3) $\overline{AB}=3cm$, $\overline{BC}=8cm$, $\overline{CA}=6cm$ (4) $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=90^\circ$ (5) $\overline{AB}=6cm$, $\angle A=40^\circ$, $\angle B=75^\circ$	
정답	(1), (3), (5)

이 문항은 삼각형의 모양과 크기를 하나로 결정할 수 있는 삼각형의 결정조건에 대한 문제로서 46.2%의 오답률이 나왔다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 위의 문항5번과 마찬가지로 세 개의 답을 모두 쓰지 않고 한 개나 두 개만을 쓴 경우가 많았다. 이 문제도 역시 문제의 보기를 끝까지 읽지 않고 답을 적은 것으로 판단되어진다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는

문제를 끝까지 보고 침착하게 답을 적을 것을 지도함과 동시에 삼각형의 결정조건을 잘 알지 못하는 학생들에게는 다음의 삼각형의 결정조건 세 가지를 기억하도록 지도해야 할 것 이다. 첫째, 세 변의 길이가 주어 졌을 때, 둘째, 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어졌을 때, 셋째, 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어졌을 때 를 지도하며 찾아내기 어렵다면 조금 시간이 소요되더라도 각각의 보기들 마다 삼각형을 직접 그려 각과 변의 길이를 써보도록 하고 위의 세 가지 경우 중 만족하는 것이 있는지를 찾아보도록 지도한다.

■ 7번 문항

문항7. 다음 삼각형 중 서로 합동인 것끼리 짝지어 보고 합동조건을 말하여라.



정답	(1)(6) SSS합동 , (3)(5) SAS합동

이 문항은 삼각형의 합동 조건에 대해 묻는 문제로 난이도가 높지 않음에도 불구하고 61.5%에 해당하는 오답률이 나왔다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 합동인 삼각형이 두 쌍 이지만 세 쌍 모두 합동이라 답을 쓴 학생들이 대부분 이었다. 오류를 범한 학생들의 대부분이 위치를 정확히 생각하지 않고 각의 크기와 변의 길이의 숫자만을 생각하기 때문에 발생한 오류로 보여 진다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는 SSS합동, SAS합동, AAA합동을 비교 설명 한 후 각의 크기와 변의 길이의 숫자뿐만 아니라 그 위치까지 정확히 파악할 수 있도록 지도 해야겠다.

■ 8번 문항

문항8. 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.	
	
정답	(1) 130 ° (2) 53 °

이 문항은 평면도형의 성질 중 다각형의 내각과 외각의 성질을 묻는 문제로서 56.9%에 해당하는 학생들이 오류를 범하였다. 이 문제에서 보이는 대표적인 오류로는 (1) 140°, (2) 40°이라고 답을 적은 학생들이 다수였다. 이는 외각과 내각의 성질을 이용하지 않고 단지 눈짐작으로 각의 크기를 추측으로 답을 적은 경우로 보여 진다. 이러한 학생들에게 교사는 '삼각형에서 한 외각의 크기는 그것과 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다' 라는 성질을 지도해야겠다.

■ 9번 문항

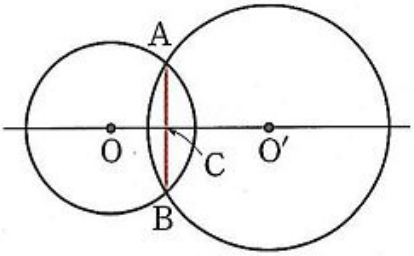
문항9. 반지름의 길이가 $6cm$인 원O의 중심과 직선 m사이의 거리가 다음과 같을 때, 원 O와 직선 m사이의 위치 관계를 말하여라. (1) 5cm (2) 6cm (3) 7cm	
정답	(1) 두 점에서 만난다. (2) 한점에서 만난다. (3) 만나지 않는다

이 문항은 원과 직선의 위치 관계를 이해하는 지에 관한 문제로서 평면 도형의 원의 위치 관계를 묻는 문제 중 기본적인 문제임에도 불구하고 18.5%에 해당하는 오답률이 나왔다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 (1) 내부에 있다, 포함한다, (2) 외접한다, 접선, (3) 떨어짐 이라고 답을 적은 경우

가 많았는데 이는 문제에서 정확히 요구하는 답이 무엇인지 모르고 또한 용어 자체도 잘 알지 못하는 경우가 많은 것으로 판단되어 진다. 이러한 학생들에게 원과 직선의 위치관계를 말하는 용어부터 교사가 지도해야 할 것 이다.

■ 10번 문항

문항10. 다음 그림과 같이 두 원 O, O′이 두 점 A, B에서 만나고 있다. 선분 AB의 길이가 16cm일 때, 다음을 구하여라.



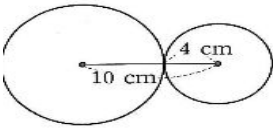
(1) $\overline{AC}$의 길이　　(2) ∠ACO의 크기

정답	(1) 8cm , (2) 90 °

이 문항은 두 원의 위치 관계를 이해하고 있는지 알아보는 문제로서 두 원이 두 점에서 만날 때, 중심선은 공통현을 수직이등분한다라는 성질을 이용한 문제이다. 6.2%에 해당하는 다소 낮은 오답률을 보였지만 이 문제에서 보여 지는 대표적인 오답의 형태 (1) 6cm, (2) 60°로 미루어 보아 연산의 잘못과 각의 크기나 위치를 정확히 파악하지 않고 단순히 감각으로 추측하여 발생한 것으로 보여 진다. 이러한 학생들에게 교사는 문제를 좀 더 꼼꼼히 보도록 지도하는 것과 동시에 '두 원이 접할 때, 즉, 두 원의 교점이 1개 일 때 중심거리는 두 원의 반지름의 합과 같다' 라고 지도하여야 한다.

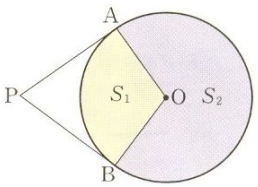
■ 11번 문항

문항11. 다음 그림과 같이 두 원이 밖에서 접하고 있다. 두 원의 중심거리

가 $10cm$이고 한 원의 반지름의 길이가 $4cm$일 때, 나머지 원의 반지름의 길이를 구하여라.  	
정답	6cm

이 문항은 두 원이 접하는 경우 중심 거리를 묻는 문제로 난이도가 높지 않음에도 불구하고 15.4%에 해당하는 학생들이 오류를 범하였다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 7cm 라고 답한 경우가 많았다. 이는 중심거리 라는 용어와 두 원의 각각의 반지름을 정확히 확인하지 않고 단순 감각추측으로 답을 기술하였기 때문이라고 판단된다. 이러한 학생들에게 교사는 중심거리의 의미를 다시 한번 숙지 할 수 있게 지도하고 더불어 두 원이 접하는 경우 중심거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같음을 지도한다.

■ 12번 문항

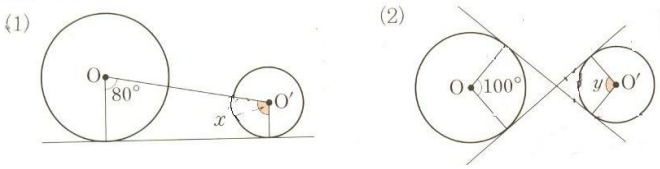
문항12. 다음 그림에서 점 A,B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. 작은 부채꼴의 넓이를 S_1, 큰 부채꼴의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 : S_2 = 3 : 7$일 때, ∠APB의 크기를 구하여라.  	
정답	72 °

이 문항은 원과 접선의 위치관계의 성질을 묻는 문제로서 50.8%에 해당하는 오답률이 나온 것으로 보아 절반 정도의 학생들이 응용된 문제를 힘들어 하는

것으로 보여 진다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 60°, 90°라고 답을 한 학생들이 다수 인 것으로 미루어 보아 원의 중심과 접선이 이루는 각이 90°임을 알지 못하는 경우와 정확히 계산해보지 않고 눈짐작으로 답을 적었을 것이라 생각된다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는 '한 원에서 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례한다' 라는 성질과 '원과 한 점에서 만나는 접선, 그 때의 만나는 점을 접점이라 하며 접점에서 접선과 반지름을 수직으로 만난다'는 성질을 지도해야 할 것이다.

■ 13번 문항

문항13. 다음 그림에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 구하여라.

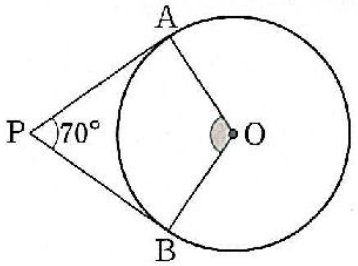


정답	(1) 100°, (2) 100°

이 문항은 두 원에서 중심선과 공통현의 관계를 묻는 문제로서 32.3%의 오답률이 나왔다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 80°라고 답한 학생들이 대부분의 오답을 차지하는 것으로 미루어 보아 공통접선의 성질을 알지 못한 채 눈짐작으로 답을 기술하였다고 생각된다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는 한 직선이 두 원에 동시에 접할 때 그 직선을 두 원에 대한 공통접선이라고 하며 그 때의 관계를 잘 이해하도록 지도해야 할 것이다.

■ 14번 문항

문항14. 다음 그림의 원O에서 두 직선 PA, PB는 원O의 접선이다. $\angle APB = 70°$일 때, $\angle AOB$의 크기를 구하여라.



정답	110°

이 문항은 원과 접선의 성질에 대해 묻는 문제로 1.5%의 낮은 오답률을 보였다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 100°라고 답을 기술한 경우가 많은 것으로 미루어 보아 수학적 성질을 이용하지 않고 눈짐작으로 답을 적은 것으로 판단된다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는 많은 예를 들어 수학적 성질을 잘 이용하도록 지도 하도록 하고 더불어 원과 한 점에서 만나는 접선, 그 때의 만나는 점을 접점이라 하며 접점에서 접선과 반지름은 수직으로 만난다는 성질도 함께 지도하도록 한다.

■ 15번 문항

문항15. 반지름의 길이가 각각 7cm , 4cm인 두 원의 중심거리가 8cm일 때, 두 원의 위치 관계를 말하고 공통접선의 개수를 구하여라.	
정답	두 점에서 만난다 , 2개

이 문항은 두 원의 위치관계에 따라 그을 수 있는 공통 접선의 수의 성질을 묻는 문제로서 56.9%에 해당하는 오류가 발생하였다. 이 문제에서 학생들이 보이는 대표적인 오류로는 '내부에 있다 , 2개 / 겹침, 2개' 이고 거의 대부분의 오답 중 공통 접선의 개수는 맞았지만 문제를 정확히 보지 않아 문제에서 요구한 2개의 답을 쓰지 않고 거의 한 개의 답만 쓴 경우가 많았다. 이러한 학생들에게 있어서 교사는 문제를 정확히 읽고 문제에서 무엇을 요구하는지 잘 파악

할 수 있도록 지도함과 동시에 '두 원의 반지름의 길이의 합이 중심 거리보다 크고 두 원의 반지름의 길이의 차가 중심 거리보다 짧으면 두 원이 두 점에서 만날 때' 라는 것을 인지시키고 '두 점에서 만날 때 공통 접선의 수는 2개' 라는 것을 자세히 지도 해야겠다.

3. 오류 유형 분석

오류 유형 분석은 연구 대상자들이 검사지에 직접 기록한 풀이 과정을 보고 분석하였다. 그리고 아무 내용도 기술하지 않은 경우에는 오류 분석의 대상에서 제외시키고, 무응답으로 처리하여 배제하였다. 또한, 같은 문제에서 여러 개의 오류 유형을 보이는 경우 모두 분석의 대상으로 삼았으며 여러 문제에서 같은 유형의 오류를 보일 경우에는 한 가지로 분류 시켰다. Ⅱ장에 2절에서 언급했던 6가지 오류 모델 중 학생들의 오답을 분석해 본 결과 아래와 같이 4가지의 오류 모델을 제시하였다.

a. 필수적인 지식 부족
(1) 필수적인 내용, 지각의 결함에서 오는 내용
(2) 기본적인 정의나 정리를 잘 알지 못하는 경우

b. 연산자의 잘못 적용
(1) 도형의 각도, 길이 등의 크기나 위치를 정확히 파악하지 않거나 단순히 감각에 의해 추측하는 경우
(2) 필요한 정리나 정의를 잘못 선택하여 적용하는 경우

c. 요구되지 않은 해답
(1) 풀이과정 각 단계는 옳지만 제시한 마지막 결과는 문제에서 요구하는 해답이 아니거나 결론을 진술하지 않은 경우
(2) 문제에서 요구한 답 이외에 다른 답을 추가한 경우

d. 오류의 애매 모호함

(1) 학생들이 문제를 푸는 과정에서 애매 모호하거나 글자를 알아볼 수 없어 학생들의 의도를 파악할 수 없는 경우

위의 분류모델을 토대로 하여 학생들의 오류 빈도수를 문항별로 살펴보면 다음과 같다.

<표 8> 문항별 오류 빈도

	1	2	3			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			(1)	(2)	(3)												
필수적 지식의 부족	35	4	5	8	46	3	19	16	2	13	6	1	2	7	6		9
연산자의 잘못된 적용	20	25				2	15	4	33	21		2	5	23	7	1	
요구되지 않은 해답	2	3	1	2	1	1	2		2	3	6	1	3	3	8		22
오류의 애매모호함				2					3								6
합계	57	32	6	12	47	6	36	20	40	37	12	4	10	33	21	1	37

4. 오류의 특징

<표 6> 에 나타난 문항별 오류 빈도수 및 분포도와 오류 모델에 따른 오류 유형 제시를 토대로 학생들이 기하 영역에서 범하는 오류의 내용상 특징을 나열하면 다음과 같다.

· 반직선의 의미를 정확히 알지 못함.
· 두 점 사이의 거리와 그 중점의 의미를 정확히 알지 못함.
· 동위각과 엇각의 위치, 꼬인 위치 등의 위치 감각을 자세히 알지 못함.
· 합동인 두 삼각형을 찾을 때 대응각, 대응변을 정확히 확인하지 않고 각의 크기와 변의 길이만을 보고 판단함.
· 세 가지의 합동 조건을 정확히 알지 못함.
· ASA 합동에서 각의 위치와 변의 길이를 확인하지 않음.

· 다각형의 내각과 외각사이의 성질을 알지 못함.
· 한 원에서 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례 한다는 성질을 알지 못하고 단순 감각으로 추측함.
· 원의 반지름과 접선과 이루는 각이 90° 라는 성질을 이용하지 못함.
· 두 원이 두 점에서 만날 때, 중심선은 공통현을 수직이등분한다라는 성질을 알지 못하고 단순 감각으로 추측함.
· 두 원위 위치 관계를 공통점의 개수로 분류할 때와 중심 거리와 반지름의 합, 차로 분류할 때의 용어를 제대로 이용하지 못함.
· 두 원이 접할 때에 중심 거리가 2개의 반지름의 합이라는 사실을 인지하지 못하고 단순히 추측으로만 답을 기술.
· 두 원의 위치 관계와 접선의 개수를 정확히 이해하지 못함.
· 두 원의 위치 관계와 중심 거리 사이의 관계를 정확히 알지 못함.

B. 분야별 지도 방안

1. 기본 도형

(1) 용어의 정의를 정확히 파악하도록 한다.

① 각 점과 직선의 위치 관계, 평행선의 성질에 대한 정리를 정확히 알도록 한다.
② 동위각과 엇각의 정의를 정확히 인지시키고 여러 예를 들어 설명하여 두 직선이 반드시 평행할 때에만 동위각과 엇각의 크기가 같다고 지도 한다.
③ 꼬인위치에 대한 정의를 정확히 알게하고 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계부터 설명한 뒤 입체도 형의 위치 관계도 쉽고 정확히 깨우치도록 주변에서 쉽게 찾아 볼 수 있는 사물이나 수학교구를 이용하여 지도 한다.
④ 직선, 반직선, 선분의 의미를 정확히 파악하도록 한다.

2. 작도와 합동

(1) 작도를 통하여 삼각형의 결정 조건을 이해하도록 지도 한다.

① 교구를 이용하여 직접 삼각형을 그려볼 수 있도록 지도 한다.
② 세 변의 길이가 주어졌을 때 삼각형이 결정 될 수 있는 조건을 이해하도록 지도 한다.

(2) 합동인 도형의 성질을 이해하고 삼각형의 합동 조건을 이해하도록 지도 한다.

① 여러 가지 위치에 있는 합동인 두 삼각형에서 대응변, 대응점, 대응각을 잘 찾을 수 있도록 지도 한다.
② 두 삼각형이 합동임을 찾아내는 여러 가지 예를 활용함으로써 대응변의 길이와 대응각의 크기가 같음을 알수 있도록 지도 한다.

3. 평면 도형의 성질

(1) 다각형의 성질을 이해하도록 지도 한다.

① 다각형의 내각과 외각의 크기를 구할 수 있고 삼각형의 한 외각의 크기는 그것과 이웃하지 않은 두 내각의 크기의 합과 같은 성질이 있음을 알게 한다.

(2) 원과 직선의 위치 관계를 이해할 수 있도록 지도 한다.

① 평면 위에서 원과 직선의 위치 관계는 반지름의 길이와 중심에서 그 직선에 이르는 거리의 대소 관계에 따라 정해짐을 알 수 있도록 지도 한다.
② 특히, 한 점에서 만날 때 어떠한 성질이 있는지 기억하도록 그림을 통해 지도 한다.

(3) 두 원의 위치 관계를 알도록 하고 내접, 외접, 중심선, 중심거리, 공통현 등의 의미를 정확히 파악하도록 지도 한다.

① 두 원의 교점의 개수에 따른 두 원의 위치 관계를 정확히 알도록 지도 한다.
② 두 원의 위치관계를 공통점의 개수로 분류했을 때는 3가지 이지만 중심거리와 반지름의 합, 차로 더 자세히 분류하면 6가지임을 이해하도록 그림을 통해 정확히 지도 한다.

(4) 두 원의 공통 접선을 이해하고 공통 접선의 길이를 구할 수 있도록 지도 한다.

① 두 원이 만날 때, 중심선은 두 원의 공통현을 수직 이등분 한다는 성질은 두 원이 중심선에 대하여 대칭이라는 사실을 이용하여 직관적으로 이해시키고 논리적으로 지도 한다.
② 두 원의 위치에 다른 공통 접선의 수를 알기 쉽게 표를 통하여 지도 한다.
③ 공통접선은 두 원의 위치 관계에 따라 여러 가지가 있음을 이해하도록 지도 한다.

V. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 중학교 1학년의 기하 영역 부분에서 발생하는 오류를 조사하여 유형별로 분석하고 그에 따른 교사의 적절한 지도 방안을 제시하는 것이다. 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 두 가지 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 중학교 1학년 수준의 기하 영역의 문제 풀이 과정에서 발생하는 오류에는 어떤 유형이 있는지 분석하고 유형별로 제시한다.

둘째, 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 발생하는 오류에 대해서 교사의 적절한 지도 방안이 무엇인지 제시한다.

설정한 연구 문제에 대해 분석한 결과 다음과 같은 오류 모델을 제시 하였고 그 모델에 따른 문항별 오류 빈도수를 <표 8>에 나타내었다.

(1) 필수적인 지식 부족
(2) 연산자의 잘못 적용
(3) 요구되지 않은 해답
(4) 오류의 애매 모호함

이러한 오류 모델에 의하여 검사 문항지에 나타난 학생들의 풀이 과정을 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 학생들은 그들이 배운 정의나 정리 그리고 새로운 기호를 이해하지 못하거나 잘못알고 있는 상태로 넘어가기 때문에 이를 잘 활용하지 못한다.

둘째, 언어로 표현된 문장을 건성으로 보거나 잘 이해하지 못하여 문제에서 요구하는 답을 쓰지 못한 경우가 많다.

셋째, 많은 생각을 하기 보다는 쉽고 빠르게 해결하기 위해 단순히 감각이나 추측으로만 문제를 해결하려고 한다.

이에 연구자는 학생을 지도함에 있어 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 교사는 항상 오류 발견에 신경을 써야 하며 원리 법칙에 충실한 교정 지도를 하여야 한다.

둘째, 학생들의 활동을 최대화하여 동기를 부여하고 스스로 학습할 수 있는 기회를 주고, 학생들의 오류를 지적하고 교정해 줌으로써 오류의 반복을 최소화해야 한다.

셋째, 기본적인 것부터 자세히 알 수 있게끔 정의와 정리부터 확실히 이해할 수 있도록 지도하고 충분한 예를 들어 활용 능력을 길러 주어야 한다.

넷째, 본 연구에서는 국한된 지역의 소수의 학생만을 대상으로 하였으나 전국의 다른 지역을 포함하고 더 많은 표본을 대상으로 하는 오류 분석이 있어야 겠다.

다섯째, 기하 영역 뿐만 아니라 다른 영역에서도 학생들의 오류 유형에 대한 연구가 있어야 겠다.

참 고 문 헌

[1] 김수미(2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. 학교수학, 5(2), 209-221.

[2] 김수하(2009). 수학적 오류분석 및 효과적인 지도 방법 연구. 국민대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

[3] 김수현(2009). 기하 단원의 효율적인 지도방안 연구. 한양대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

[4] 김윤영(2003). 일차방정식 풀이 과정에서 보이는 오류의 유형 분석 및 교정 지도. 이화여자대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

[5] 류성림(1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사 학위 논문.

[6] 배경민(1996). 중학교 수학에서 기하와 대수영역의 오류 유형별 원인 분석. 석사 학위 논문.

[7] 오세경(1995). 수학 학습지도에 있어서의 오류유형의 분류 및 그 지도방안에 대한 연구. 충북대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

[8] 오은균(1998). 중학교 수학의 기하영역에 있어서의 오류 유형별 원인 분석 및 지도 방안. 충북대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

[9] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

[10] 우정호(2007). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

[11] 우현철(2000). 이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인 분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대 교육대학원 석사 학위 논문.

[12]이수진(2005). 해석기하 문제해결 과정에서의 오류 유형과 학생들이 겪는 어려움에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사 학위 논문.

[13] 이승행(1999). 중학교 기하교육방법의 비교연구. 순천향대학교 산업정보대학원 석사 학위 논문.

[14] 이준열 외 6인 (2009). 중학 수학 1 교과서, 서울: 천재교육.

[15] 이준열 외 6인 (2009). 중학 수학 1 익힘책, 서울: 천재교육.

[16] 하동수(2006). 도형에서 활용 가능한 교수-학습자료 개발(7-나 단계를 중심 으로). 조선대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

[17] 황혜정, 외 5명 (2001). 수학교육학신론 . 문음사.

[18] 수학과 교육과정 교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]

[19] NCTM(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 경문사.

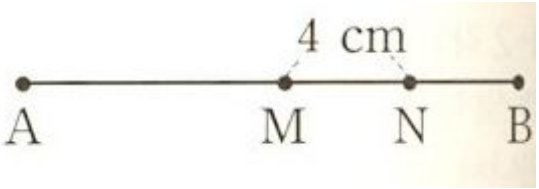
<부록>

[검사 문항지]

문항1. 다음 그림과 같이 직선 AB 위에 세 점 A, B, C 가 있다. 다음 중 서로 같은 것을 찾아라.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{BA}$

문항2. 다음 그림에서 점 M은 $\overline{AB}$의 중점이고 점 N은 $\overline{MB}$의 중점이다. $\overline{MN} = 4\text{cm}$ 일 때, $\overline{AN}$ 의 길이를 구하여라.

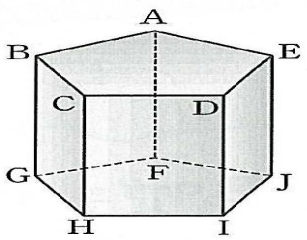


문항3. 다음 그림과 같은 오각기둥에서 다음을 구하여라.

(1) 모서리 AB 와 평행한 모서리

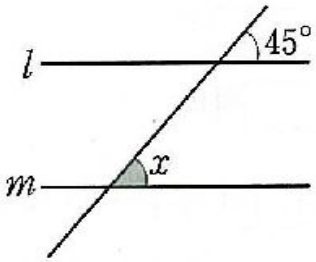
(2) 모서리 AB 와 만나는 모서리

(3) 모서리 AB 와 꼬인 위치에 있는 모서리

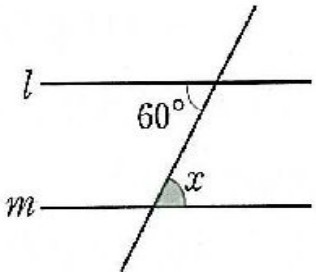


문항4. 다음 그림에서 $l /\!/ m$ 일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.

(1)



(2)



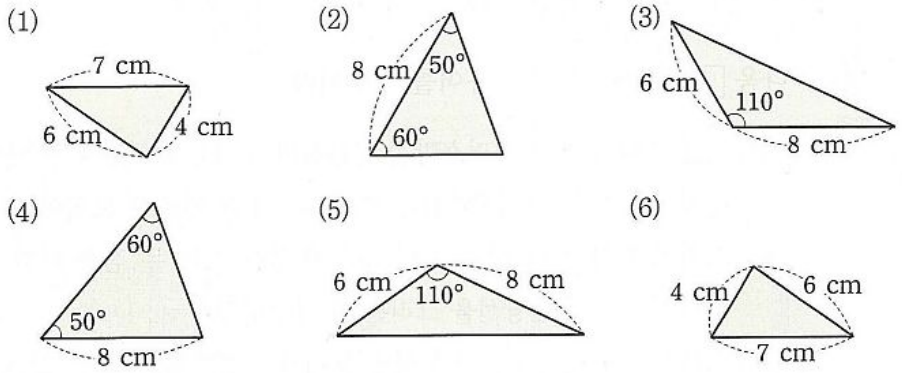
문항5. 다음 중 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있는 것은 어느 것인가?

(1) 5cm, 10cm, 15cm
(2) 4cm, 5cm, 6cm
(3) 3cm, 3cm, 1cm
(4) 2cm, 5cm, 8cm

문항6. 다음 중 삼각형이 하나로 결정되는 경우는 어느 것인가?

(1) $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 70^\circ$
(2) $\overline{AB} = 7\text{cm}$, $\angle B = 30^\circ$, $\overline{AC} = 5\text{cm}$
(3) $\overline{AB} = 3\text{cm}$, $\overline{BC} = 8\text{cm}$, $\overline{CA} = 6\text{cm}$
(4) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$
(5) $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 75^\circ$

문항7. 다음 삼각형 중 서로 합동인 것끼리 짝지어 보고 합동조건을 말하여라.

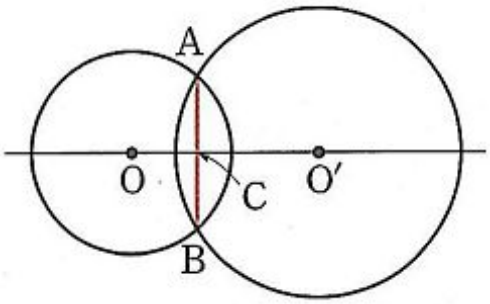


문항8. 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하여라.

문항9. 반지름의 길이가 6cm인 원O의 중심과 직선 m사이의 거리가 다음과 같을 때, 원 O와 직선 m사이의 위치 관계를 말하여라.

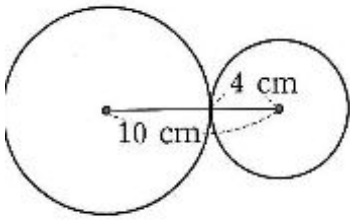
(1) 5cm　　(2) 6cm　　(3) 7cm

문항10. 다음 그림과 같이 두 원 O, O′이 두 점 A, B에서 만나고 있다. 선분 AB의 길이가 16cm일 때, 다음을 구하여라.

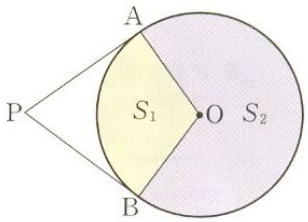


(1) $\overline{AC}$의 길이　　(2) ∠ACO의 크기

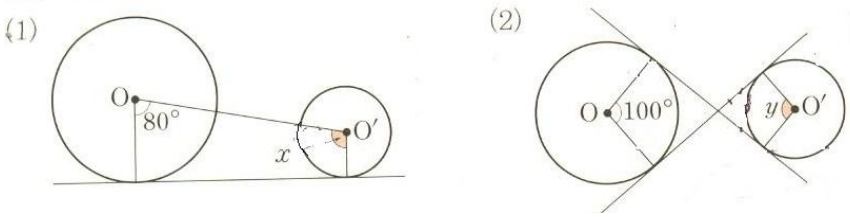
문항11. 다음 그림과 같이 두 원이 밖에서 접하고 있다. 두 원의 중심거리가 10cm이고 한 원의 반지름의 길이가 4cm일 때, 나머지 원의 반지름의 길이를 구하여라.



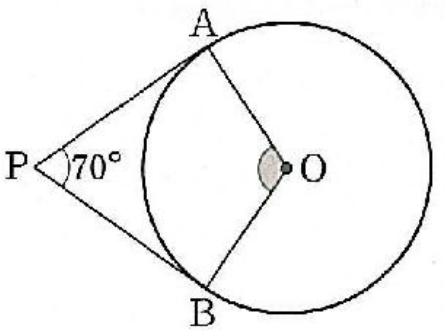
문항12. 다음 그림에서 점 A,B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. 작은 부채꼴의 넓이를 S_1, 큰 부채꼴의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 : S_2 = 3 : 7$일 때, ∠APB의 크기를 구하여라.



문항13. 다음 그림에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 구하여라.



문항14. 다음 그림의 원O에서 두 직선 PA, PB는 원O의 접선이다. $\angle APB = 70^\circ$일 때, $\angle AOB$의 크기를 구하여라.



문항15. 반지름의 길이가 각각 7cm, 4cm인 두 원의 중심거리가 8cm일 때, 두 원의 위치 관계를 말하고 공통접선의 개수를 구하여라.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20078209	과 정	석사
성 명	한글: 전 민 정 한문: 全 珉 情 영문: Jeon Min-jeong				
주 소	광주광역시 광산구 월곡2동 영천마을10단지 1015동 1206호				
연락처	010-5183-6334 E-MAIL: alstm0918@naver.com				
논문제목	한글 : 기하영역의 학습자 오류에 관한 고찰 영문 : The investigation on learners' misconception on the area of geometry				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2010년 12월 15일

저작자: 전 민 정 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하