creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000241016

2011년 2월

교육학석사(수학교육)학위논문

GSP를 활용한 도형 지도에 관한 연구

-중학교 2학년을 중심으로-

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 미 애

GSP를 활용한 도형 지도에 관한 연구

-중학교 2학년을 중심으로-

A study on the teaching of geometric shapes using GSP
-Focused on second grade middle school-

2011년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 미 애

GSP를 활용한 도형 지도에 관한 연구

지도교수 한 승 국

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2010년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 미 애

김미애의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 한 혜 숙 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 황 혜 정 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 한 승 국 인

2010년 12월

조선대학교 교육대학원

목 차

ABSTRACT ····· iv

Ⅰ. 서론 ····· 1

1. 연구의 필요성 및 목적 ····· 1
2. 연구문제 ····· 2
3. 연구의 제한점 ····· 2
4. 기대되는 효과 ····· 3

Ⅱ. 이론적 배경 ····· 4

1. 반힐(Van Hiele)의 기하 학습 이론 ····· 4
가. Van Hiele의 기하 학습 수준 이론 ····· 4
나. Van Hiele의 기하 학습 수준 이론의 특징 ····· 6
다. Van Hiele의 교수-학습 5단계 ····· 7
라. Van Hiele이론의 수학교육학적 의미 ····· 9
2. 수학교육에서 공학적 도구의 활용 ····· 10
가. 컴퓨터를 이용한 수학 교수·학습 양식 ····· 10
나. 수학교육에서 공학적 도구 활용 시 유의점 ····· 12
3. 기하수업에서의 GSP ····· 13
가. GSP의 특징 ····· 13
나. GSP를 통한 평면기하 지도의 의의 ····· 14
다. GSP 사용시 문제점 ····· 15

4. 선행연구 ····· 16

Ⅲ. 연구의 실제 ····· 18

1. 연구방법 및 절차 ····· 18
가. 연구방법 ····· 18
나. 연구대상 ····· 19
다. 연구절차 ····· 21
2. 사전 평가지 면담 내용 ····· 24
3. GSP를 이용한 도형 작도과정 분석 ····· 27
4. 연구결과 분석 ····· 36

Ⅳ. 결론 및 제언 ····· 39

참고문헌 ····· 42

부록 ····· 44
<부록1> 사전·후 설문지 ····· 44
<부록2> 사전·후 평가지 ····· 46
<부록3> 개인별 학습지 ····· 53
<부록4> 연구에 사용된 기본적인 작도 ····· 55

표 목 차

<표 Ⅱ-1> Van Hiele의 기하 학습 수준 ····· 4
<표 Ⅲ-1> 연구대상 학생들의 학업성취도 ····· 19
<표 Ⅲ-2> 연구대상 학생들의 개인적 특성 ····· 20
<표 Ⅲ-3> 연구절차 ····· 21
<표 Ⅲ-4> 제7차 중학교 개정 교육과정 중 '중2학년 사각형의 성질 단원' 내용분석 ····· 22
<표 Ⅲ-5> GSP를 활용한 수업 후 학생들의 소감내용 ····· 37

그 림 목 차

[그림 Ⅲ-1] 학생 A의 사전 평가지 답안 ····· 25
[그림 Ⅲ-2] 학생 B의 사전 평가지 답안 ····· 26
[그림 Ⅲ-3] 학생 D의 평행사변형 작도 ····· 28
[그림 Ⅲ-4] 학생 B의 직사각형 작도 ····· 30
[그림 Ⅲ-5] 학생 A의 마름모 작도 ····· 32
[그림 Ⅲ-6] 학생 C의 정사각형 작도 ····· 33
[그림 Ⅲ-7] 학생 A의 등변사다리꼴 작도 ····· 35
[그림 Ⅲ-8] 학생들의 사후 평가점수 ····· 38

ABSTRACT

A study on the teaching of geometric shapes using GSP

-Focused on second grade middle school-

Kim Mi-ae
Advisor : Prof. Han Seung-gook Ph.D
Major in Mathematics Education,
Graduate School of Education,
Chosun University

In the information oriented society the self-directed ability to collect and interpret information out of a large pool to extract portions and utilize them to one's need is important. Likewise, in mathematical education the ability to explore and discover new horizons, as opposed to accepting prior knowledge, is gaining emphasis. This trait enhances the learner's intelligence and is instrumental in solving problems mathematically in both everyday life and academic fields.

When utilized in class, computers can visualize abstract mathematical concepts and assist students in manually manipulating and deducing the concepts before they formally prove a proposition, to interest them in mathematics and alleviate any possible confusion. They can also

enhance mathematical thinking by systematically analyzing a problem solving methodology, the logic of solutions, and any further errors.

In current middle school geometry classes proving and deducing geometry are emphasized. However the reality is that deduction is required in an overly perfunctory fashion, causing students to simply memorize geometric figures' properties to use them in problem solving. One researcher observed that the conventional method of teaching on a chalkboard was inadequate in inducing self-directed studying methods and chose to use GSP, a type of investigative software, to observe what changes came to middle school students' understanding process of geometric figures' properties. Specifically, he collected data based on four students who hadn't learned the second semester curriculum that includes the "Geometric Figures' Properties" chapter. First he surveyed and evaluated them to isolate the difficulties they experienced in learning that specific chapter. Then, he taught the group based on his unique teaching plan, minutely observing and analyzing how the students constructed figures. Finally, he conducted a survey on the students' achievement and satisfaction levels on his instruction.

GSP-based instruction succesfully induced interest in the target students - they were amused when they tried out the GSP system themselves, eventually grew more confident with geometry and experienced an accelerated thinking process in approaching proofs. There should be continuous development in similar computer-aided learning material for geometry so that more meaningful learning is possible for students.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

정보화 사회에서는 수많은 정보를 수집, 분석하여 자신에게 필요한 정보를 습득하고 활용하는 자기 주도적인 능력이 강조되고 있다. 수학교육에서도 기존의 지식을 그대로 받아들이기 보다는 탐구활동을 통해 학습자 스스로 새로운 것을 발견하는 것을 중요시하고 있다. 이와 같은 탐구활동을 통한 자기 주도적 학습은 학습자의 사고력을 높여주고 실생활이나 다른 교과 영역에서 수학적 지식을 활용하여 문제를 해결할 때 매우 중요한 역할을 한다.

현재 중학교 기하수업에서 도형의 성질과 관련된 증명과 추론이 강조되고 있는데, 학생들의 수준에 비해 지나치게 엄밀하고 형식적인 추론을 요구하고 있어 결과적으로 학생들이 도형의 성질을 단순히 암기하여 문제풀이에 적용시키는 현상을 초래하고 있다. 학생들이 도형의 정의 및 성질을 배우고 이를 이용하여 문제풀이를 할 때 많은 어려움을 겪고 있는데 이는 교사의 사고수준과 학생들의 사고수준이 다르기 때문이다(김영선, 2007). 기존의 칠판 수업으로는 학생들의 자기 주도적 탐구학습을 이끌어 내는데 한계가 있으므로 이를 극복하기 위해 컴퓨터를 수학 수업에 적절히 활용할 필요성이 있는 것이다.

정현정(2008)은 컴퓨터를 수업에 적절히 활용할 경우 명제를 형식적으로 증명하기 전에 추상적인 수학 내용을 시각화하고 학생들이 직접 조작, 추론함으로써 수학에 대한 흥미를 이끌어 내어 수학 수업의 어려움을 완화시킬 수 있을 것이라고 하였다. 또한 문제 해결과정의 체계적인 분석, 해답의 타당성 분석, 오류 분석 등의 과정을 통하여 수학적 사고력을 보다 강화시킬 수 있다는 장점이 있다고 하였다. 그러므로 컴퓨터를 기하학습에 효과적으로 활용할 수 있는 교수·학습 자료를 끊임없이 개발하여 학생들에게 의미 있는 수업이 될 수 있도

록 해야 한다.

이에 본 연구는 구체적 조작물을 통한 학생 스스로 지식을 구성하게 할 수 있는 탐구형 소프트웨어 중의 하나인 GSP를 활용하여 수업할 경우 학생들에게 어떠한 영향을 미치는지 연구한다. 중학교 2학년 도형내용을 중심으로 수업을 진행하며 학생들이 도형의 성질을 학습하는 과정에서 어떠한 어려움을 겪고 있는지, 그리고 학생들이 GSP 프로그램을 이용하여 도형을 직접 조작해봄으로써 도형의 정의, 성질 등을 학습해 나가는 과정을 심층적으로 분석하고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 중학교 2학년 학생들이 도형을 학습하는데 있어서 GSP 프로그램을 이용하여 학습했을 경우 어떠한 영향을 미치는지 알아보고자 한다. 선행 연구를 살펴본 결과 연구단원에 대하여 GSP 프로그램을 이용한 수업 자료는 제작했으나 실제 수업에 적용시킨 논문들은 드문 편이었다. 이러한 선행논문을 참고·보완하여 수업 자료를 제작한 후, 수학성적이 중·상위권인 중학교 2학년 4명을 대상으로 수업하여 GSP 프로그램이 도형내용을 학습할 때 미치는 영향을 분석하고자 한다.

이와 같은 연구 목적을 달성하기 위해서 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

(1) 중학교 2학년 학생들이 도형의 성질 단원을 학습하는 과정에서 어떤 어려움을 겪는지 알아본다.

(2) GSP 프로그램을 활용한 수업이 도형의 성질을 이해하는 과정에서 어떠한 영향을 미치는지 분석한다.

3. 연구의 제한점

본 연구를 수행하는 과정에서 다음과 같은 제한점을 갖는다.

첫째, 본 자료 연구가 제 7차 수정 교육과정의 교과서 중 특정 교과서(두산)를 선택하여 분석하였으므로 다른 교과서의 수준과 다소 차이가 있을 수 있고, Van Hiele의 기하 사고 수준을 바탕으로 분석하였으나 연구자의 주관이 많이 개입되어 객관성의 문제에 영향을 줄 수 있다.

둘째, 연구에 참여한 학생들의 사고과정을 기술하고 비교, 분석하는 것을 목적으로 하는 질적 연구를 하였기 때문에 연구 대상이 제한적이고 그 결과가 전체 학생들에게 일반화 되지 않을 수 있다.

셋째, 본 연구는 중학교 2학년 도형단원 중 사각형의 성질의 내용에 국한하여 실시하였으므로 2학년 전 과정으로 일반화하는데 제한점을 갖는다.

넷째, 본 연구에서 사용된 설문지와 평가지는 연구자에 의해 제작된 것이므로 일반화하기에 한계가 있고, 그 결과 역시 다른 연구자가 수행했을 때와 같은 결과를 얻기에 제한점을 갖는다.

4. 기대되는 효과

첫째, 전통적인 학습 방법보다 GSP 프로그램을 이용해 흥미로운 수업을 할 수 있게 함으로써 학생들의 관심과 흥미를 이끌어 낼 수 있다. 또한 적극적인 참여를 유도함으로써 이를 통해 학습 효과의 향상을 기대할 수 있을 것이다.

둘째, GSP 프로그램을 활용하여 학생들 스스로 도형을 직접 조작해보고 사고할 수 있게 함으로써 학생들의 창의 사고력 향상을 기대할 수 있다.

셋째, 도형의 성질을 이해하거나 측정하는데 있어 용이함을 느끼면서 수학 학습에 대한 긍정적인 사고 전환의 기회를 제공할 것이다.

넷째, GSP 프로그램을 활용한 수업을 연구하고 수정 보완하여 학교 현장에서도 효과적으로 활용될 수 있도록 함으로써 GSP 프로그램을 활용한 수업을 확대 시킬 수 있을 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 반힐(Van Hiele)의 기하 학습 이론

가. Van Hiele의 기하 학습 수준 이론

Van Hiele(1986)의 이론에 따르면 수학적 사고활동이란 경험의 세계를 조직화 하는 활동 즉, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 인식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 사고의 비약 과정을 반복하는 것을 말한다. Van Hiele은 수학적 사고가 '시각적 인식 수준→ 기술적/분석적 인식 수준→ 관계적/추상적 인식 수준→ 형식적 연역 수준→ 엄밀한 수학적 수준' 으로 발달 된다고 하였고 수, 함수 등의 모든 수학 영역에서 자신의 이론이 적용된다고 주장하였다. Van Hiele이 제시한 기하 학습 이론을 도식화하면 다음<표 Ⅱ-1>과 같다(이창연, 2010).

<표 Ⅱ-1> Van Hiele의 기하 학습 수준

	제 1수준	제 2수준	제 3수준	제 4수준	제 5수준
대상	주변의 사물	도형	성질	명제	논리
수단	도형	성질	명제	논리	추상화

Van Hiele의 학습수준 이론은 특히 기하 학습 수준에 대한 것으로 사고 수준을 다섯 단계로 구분하였으며 각 수준의 특징은 다음과 같다(이창연, 2010).

(1) 제 1수준 (시각적 인식 수준)

제 1수준의 학생들은 전체적인 형태만 보고 도형을 인식한다. 즉, 도형의 성

질이나 도형 사이의 관계는 알지 못한다. 예를 들어 '이 도형이 왜 마름모일까요?' 라는 질문에 이 수준의 학생들은 '마름모처럼 생겼으니까요.'라고 대답한다. 이렇듯 이 수준의 학생들은 주변의 대상을 단지 모양으로만 판단하기 때문에 정사각형, 직사각형을 인지하더라도 두 도형의 관계는 알지 못하는 것이다.

(2) 제 2수준 (기술적/분석적 인식 수준)

제 2수준의 학생들은 시각적으로 지각되는 모양을 분석하여 도형의 성질을 알게 되고, 이렇게 얻어진 성질들을 수단으로 도형을 파악하게 된다. 그러나 이 단계의 학생들은 도형사이의 포함관계를 모호하게 인식하고, 다른 성질과의 연관성을 찾지 못하는 수준이다. 예를 들어 직사각형과 평행사변형이 마주 보는 변의 길이가 같은 도형이라는 것은 알지만 직사각형도 평행사변형이라는 연관성을 찾지 못한다.

(3) 제 3수준 (관계적/추상적 인식 수준)

제 3수준은 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다. 도형의 성질을 추론하고 도형 사이의 관계를 파악하며 수학적 정의를 이해한다. 다만 이 단계의 학생들은 간단한 형식의 증명은 가능하나 연역의 완전한 의미를 알지 못하며 도형의 성질을 논리적으로 증명하지 못한다. 예컨대, '정사각형은 마름모이며 직사각형이다'라는 도형 간의 관계를 이해하는 수준이다.

(4) 제 4수준 (형식적 연역 수준)

제 4수준의 학생들은 연역적 추론의 의미를 이해하며 형식적인 증명을 구성할 수 있다. 명제가 연구의 대상이 되며 명제들 사이의 논리적 관계를 통하여 공리, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체 기하의 연역체계를 파악한다. 예를 들어 '삼각형의 내각의 합은 180°' 라는 명제를 증명할 수 있고 '두 쌍의

대변이 서로 평행인 사각형은 평행사변형이다.' 라는 정의에 의해 평행사변형의 성질을 추론할 수 있다. 그러나 이 수준의 학생들은 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못한다.

(5) 제 5수준 (엄밀한 수학적 수준)

제 5수준은 엄밀한 수학적 수준으로 전문적인 수학자 수준이라고도 할 수 있다. 이 수준에서는 구체적인 대상 없이도 이론을 연구할 수 있고 다양한 수학 체계 안에서 가장 엄밀한 방법으로 형식적인 추론을 할 수 있다.

나. Van Hiele의 기하 학습 수준 이론의 특징

Van Hiele의 기하 학습 수준 이론의 특징이 크게 다섯 가지로 나누어 지는데 그 내용은 다음과 같다고 하였다(우정호, 1998).

(1) 학생들은 수학학습에서 n-1수준을 통과하지 않고 n수준에 도달할 수 없으며, 수학적 사고는 모든 수준을 차례로 거쳐 발달한다.

(2) 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지는 않으며, 수준의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적적한 지도 때문에 지연될 수도 있다.

(3) 앞의 수준의 사고에서 내재적이었던 것이 그 다음 수준에서 의식화 되어 명확히 인식되게 된다. 각 수준의 수학적 사고는 그 전 수준의 수학적 사고의 내적 질서를 대상으로 하여 연구하는 것이다.

(4) 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 그를 연결하는 관계망을 갖고 있다. 수준의 이행은 언어의 확장과 관계된다.

(5) 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다.

다. Van Hiele의 교수-학습 5단계

Van Hiele(1986)의 학습 수준 이론의 가치는 학생의 사고가 어떤 수준에 있는가 하는 학생 사고의 층별화 보다는 교수를 위한 처방에 있다. Van Hiele에 따르면, 한 수준에서 다음 수준으로의 발전은 생물학적 성숙이나 발달에는 거의 의존하지 않으며, 교수·학습 과정에서의 교육 내용과 방법에 더 많이 의존하는바, 교사는 학생들의 수준의 발전을 촉진할 수 있다. 그렇다면, 교사는 한 수준에서 다음 수준으로의 이행을 어떻게 촉진시킬 수 있는가? Van Hiele은 이에 대해 각 수준 안에서 교수를 계열화하기 위한 교수학적 수단을 처방하였다. Van Hiele은 학생들이 한 수준에서 다음 수준으로 발전하도록 교사가 어떻게 지도할 것인가에 대해 질의/안내 단계, 안내된 탐구 단계, 발전/명료화 단계, 자유 탐구 단계, 통합 단계의 다섯 단계로 이루어진 교수·학습 과정을 제시하고 있다. 다음은 Van Hiele의 교수·학습 5단계에 대해 서술한 내용이다(황혜정 외, 2007).

(1) 1단계 : 질의/안내 단계

질의/안내 단계에서는 교사와 학생 사이의 대화를 통해서 새로운 학습 주제를 소개한다. 학생은 제시된 자료와 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 앞으로 공부할 과제의 방향이 무엇인지 배운다. 교사는 학습할 주제에 관한 학생의 선행 지식이 무엇인지를 파악하여 학생이 새로운 주제를 이해하도록 도움을 주고 질문을 하며 관찰을 수행한다.

(2) 2단계 : 안내된 탐구 단계

안내된 탐구 단계에서 학생은 신중하게 계열화된 활동을 통해 새로운 학습 주제의 특징에 익숙해진다. 학생은 교사가 제공하는 자료를 통해 학습 주제를 탐구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구 분야의 구조를 점진적으로 파악한

다. 교사는 학습 주제를 탐구하는 활동에 학생이 능동적으로 참여하도록 하기 위하여 조심스럽게 설명해 나간다. 이때 교사의 역할은 학생의 행동을 적절한 탐구로 이끌면서 학생 활동을 지시하는 것이다. 여기에서의 대부분의 활동은 특별한 반응을 유도하는 단일 단계의 과제이다.

(3) 3단계 : 발전/명료화 단계

발전/명료화 단계에서 학생은 교사의 개입이 최소인 상태에서 자신의 개념화와 어휘를 정련시킨다. 이 단계에서는 안내된 탐구 단계에서 익숙해진 새로운 과제를 표현하는 활동을 통하여 그것을 명확히 하며 전문적인 용어를 학습한다. 학생은 예전의 경험과 교사로부터 얻은 최소한의 힌트를 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며, 관계 체계를 형성하기 시작한다.

(4) 4단계 : 자유 탐구 단계

자유 탐구 단계에서 학생은 문제해결적 성격을 갖는 보다 복잡한 과제에 도전하게 된다. 학생은 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 되며, 그 과제를 완성한 후에 공부한 그 영역 안에서 스스로 자신의 나아갈 바를 정해서 새로운 관련성을 찾는다. 학생은 다중 단계의 과제나 여러 가지 방식으로 완수될 수 있는 과제와 접하면서 자신만의 방식을 찾는 경험을 하게 되며, 그럼으로써 탐구 대상 사이의 많은 관계들이 학생들에게 더욱 명확해진다.

(5) 5단계 : 통합 단계

통합 단계에서 학생은 자신의 관찰을 재검토하고 요약하며, 대상과 관계의 새로운 그물망을 형성하기 위해 그동안 배운 새로운 개념과 관련성을 통합한다. 결국 학생은 탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다. 교사는 전혀 새롭거나 자연스럽지 못한 아이디어를 내놓

지 않도록 주의해야 하며, 학생이 이전의 활동을 반성하고 관찰한 것을 명료하게 정리할 수 있도록 전체적인 개관을 제시하면서 돕는다.

이와 같은 교수·학습 단계를 통해 수준의 비약이 가능하도록 하기 위해서는 교사의 일방적인 설명이 아니라 학습자 스스로의 탐구 활동이 가장 중요한 요인이라고 할 수 있다. Van Hiele의 교수·학습의 다섯 단계를 직접 교수에 적용하는데 있어서, 교사는 학생들의 필요에 따라 몇 시간 동안을 계속해서 특별한 단계에 머무를 수도 있고, 또한 여러 단계를 몇 번이고 되풀이할 수 있다.

라. Van Hiele이론의 수학교육학적 의미

현대 수학교육의 주된 관심은 수학적 사고력 신장에 있다. Dewey(1933)는 "지식을 모으고 발견하고 창안하는 능동적인 과정은 단순한 지적 활동의 산물인 지식의 기록을 수용하는 것과 구별되어야 한다."고 하였고, Bruner(1966) 또한 "어떤 교과를 가르치는 것은 그 교과에 대해 살아있는 도서관을 만들어 내는 것이 아니라 스스로 수학적으로 사고하고 역사가처럼 사건을 다루며 지식을 획득하는 과정에 참여하도록 하려는 것이다. 안다는 것은 과정이지 산물이 아니다."고 하여 사고력 신장의 중요성을 강조하였다(박은정, 2001, 재인용). 현대의 수학교육의 목표이자 주된 흐름은 수학이 기존에 존재했던 지식 체계로서가 아닌 학습자의 구성적 활동 및 재발견 과정이 되어야 한다는 것이다.

이러한 목표를 실현시키기 위해서 주목해야 할 이론으로 Van Hiele의 이론을 예로 들 수 있는데, Van Hiele의 학습 수준 이론에서 수학적 사고활동이란 경험의 세계를 조직화 하는 활동이다. 즉, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 인식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 사고의 비약 과정을 반복하는 것이다. 이는 Piaget의 조작적 구성주의 및 활동주의 수학과 밀접한 관련이 있다. Piaget는 수학적 사

고 활동의 본질은 조작적 schemes이며 이것은 행동이나 보다 낮은 차원의 조작에서 반영적 추상화를 통해 질적인 수준의 비약을 반복하면서 재구성 된다고 하였다. 따라서 Van Hiele은 이러한 수학적 사고 활동의 사이클을 재발명해 가도록 지도함으로써 수학적 사고 교육이 이루어 질 수 있다고 하였다(박은정, 2001).

2. 수학학습에서 공학적 도구의 활용

프로이덴탈(1981)은 “수학적 이해를 유발하고 증진시키기 위해 계산기와 컴퓨터를 어떻게 이용할 것인가?”라는 문제를 수학교육의 주요 문제 중의 하나로 설정하였다(황혜정 외, 2007). 또한 프로이덴탈은 수학적 사고력 증진이라는 수학교육의 목적을 추구하기 위한 강력한 수단으로서 공학적 도구를 이용할 것을 주장하였다.

가. 컴퓨터를 이용한 수학 교수·학습양식

컴퓨터를 활용한 수학 교수·학습의 양식은 개인 교사형, 학생 주도형, 보조 도구형의 세 가지로 분류되어 왔는데, 최근에는 학생 주도형과 보조 도구형이 결합된 탐구 학습형 소프트웨어가 널리 사용되고 있다. 다음은 네 가지 교수·학습양식의 특징을 정리한 내용이다(황혜정 외, 2007).

(1) 개인 교사형

개인 교사형은 전통적인 교사의 역할을 컴퓨터가 대신하는 양식으로 컴퓨터 보조학습(CAI: Computer Assistant Instruction)용 소프트웨어가 여기에 속한다. 이것은 컴퓨터를 이용한 보조교육으로 학습 목표에 따라 논리적이고 체계적으로 구성된 학습 과정이 컴퓨터에 의해 제공되는 개별화된 교수 체계를 말한다.

개인 교사형 시스템에서의 학생과 시스템 사이의 상호 작용이 행동적으로는 학생들의 학습을 보장할 수 있겠지만, 학생들이 지식의 이면에 들어 있는 의미의 본질을 이해하는 것은 보장해주지 못한다. 왜냐하면 개인 교사형 시스템에서는 학생들의 견해를 표현할 수 없고 선택할 수 있는 조작의 수가 한정되어 있어 수학개념에 대한 명확한 이해 없이도 학습이 진행될 수 있기 때문이다.

(2) 학생 주도형

학생 주도형에서는 학생이 컴퓨터를 직접 조작하는 역할을 한다. 즉, 학생은 자신이 구성하여 입력하는 일련의 논리적인 단계를 통해 컴퓨터가 행동을 수행하도록 프로그램하고 결과를 내오도록 명령하여, 그 결과를 살펴봄으로써 자신의 사고 과정을 반성하고 오류를 수정하는 등 수학 학습에 도움을 얻을 수 있다.

(3) 보조 도구형

컴퓨터를 보조도구로서 사용하는 양식은 그래프나 함수, 도형을 그리는 그래픽 패키지 등의 수학적인 유틸리티와 수학적 개념 또는 문제들을 예시 및 실현하는 소프트웨어들을 이용하여 수학 학습을 하는 등 그 이용 범위가 가장 넓고 현재 연구와 개발이 가장 활발한 분야라고 할 수 있다. 이 양식은 그래프를 그릴 수 있고 기호조작이 가능하며 데이터를 분석하고 수학적인 절차를 수행하는 소프트웨어를 사용하여 수학을 학습하는 상황을 일컫는다.

Maple이나 Mathematica와 같은 기호조작 소프트웨어뿐만 아니라 스프레드시트, 워드프로세서, 데이터베이스, 그래픽 패키지 등과 같은 일반적인 소프트웨어도 교수·학습에 이용할 수 있다.

(4) 탐구 학습형

탐구 학습형은 학생주도형과 보조 도구형이 결합된 양식으로 학생들이 스스

로의 통제 하에 대상들 간의 관계를 탐구할 수 있도록 도와준다. 대표적인 탐구 학습 환경으로는 LOGO, Cabri-Geometry, GSP가 있는데 이런 탐구 학습형 환경에서의 자유로운 탐구가 학습자에게 풍부한 경험을 제공하지만 교사가 원하는 학습이 일어난다고 보장하기는 어렵다. 따라서 탐구 학습형 환경은 교사에 의해 조직된 환경으로 통합되어야 한다.

나. 수학교육에서 공학적 도구 활용 시의 유의점

수학교육에서 공학적 도구를 활용할 때 유의해야 할 점을 정리해 보면 다음과 같다(황혜정 외, 2007).

첫째, 공학적 도구를 수학 교수·학습에 도입함에 있어서 그 목적을 명확하게 할 필요가 있다. 수학교육의 방법을 개선하기 위해 공학적 도구를 도입한다면 방법론적인 면에서 시도되는 공학적 도구 활용 방안이 가르치고자 하는 내용, 즉 수학 지식의 성격을 변형하거나 왜곡할 위험성은 없는지에 대해 끊임없이 감독하고 통제해야 한다.

둘째, 수학 교수·학습의 어느 단계에서 어떤 공학적 도구를 어떻게 사용할 것인가의 문제가 중요하게 부각된다. 여기에서 교사의 역할이 더욱 중요하게 부각되는데, 이는 공학적 도구를 수학 교수·학습의 어느 단계에서 어떤 방식으로 활용할 것인가 하는 문제를 가장 구체적으로 고민하고 판단해야 할 책임이 교사에게 주어지기 때문이다. 즉, 수학 개념의 도입 단계에서 공학적 도구를 활용할 것인가, 아니면 학습한 수학적 원리나 사실을 확인하고 적용하는 단계에서 공학적 도구를 활용할 것인가 등을 분명하게 인식해야 한다.

셋째, 공학적 도구의 교육적 한계를 분명하게 인식해야 한다. 그 적용이 타당하지 않는 영역에까지 공학적 도구를 무리하게 활용하려는 시도는 교육적으로 바람직하지 못하다. 또한 이러한 시도는 학교수학의 내용 자체를 공학적 도구에 맞게 재조직하자는 극단적인 주장으로까지 연결될 수 있다.

넷째, 공학적 도구를 더욱 적극적으로 활용할 수 있는 제도적이고 현실적인 여건이 시급히 마련되어야 한다. 공학적 도구로 인하여 수학교육은 새로운 단계로 진입하고 있지만 국내의 현실은 수학 전용 실험실의 부재, 과다한 학급당 인원 수, 국산 소프트웨어의 부재 등 매우 열악한 상황인 바, 이러한 상황은 시급히 개선되어야 한다. 특히 탐구 학습형 소프트웨어를 수학교육에 도입하기 위해서는 이러한 소프트웨어들에 대한 기술적 분석을 토대로 수학교육 현장에서의 올바른 활용 방법에 대한 제안이 선행되어야 한다.

3. 기하수업에서의 GSP

가. GSP의 특징

GSP는 기본적으로 점, 직선, 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽고 명확하게 구현할 수 있으며, 그림을 빠르고 엄밀하게 그려 도형들의 본질적인 관련성을 쉽고 명백하게 나타낼 수 있다. GSP의 특징은 다음과 같다(손인수 외, 1999).

첫째, 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하여 도형을 작도하는 경우에 생생한 기하학적 원리를 담는데 여러 가지 한계가 있다. GSP는 점, 선, 원을 그리는 것에서 출발하여 선분의 중점, 평행선, 주어진 선분의 길이와 같은 반지름의 원, 기하학적 관계를 나타낸 그래프 등을 그릴 수 있다. GSP를 이용하면 도형의 본질적인 관련성을 나타내는 그림을 빠르고 정확하게 그릴 수 있다.

둘째, GSP를 사용하여 그린 도형에서는 도형의 한 부분을 끌면 서로 연관된 부분의 도형이 변하게 된다. 종이 위에 연필을 사용해서 그린 도형이 기하학적 관계를 나타내는 어떤 특정한 경우를 표현한 것인데 비해, GSP를 사용하여 그린 도형은 여러 가지 비슷한 경우를 표현하게 된다.

셋째, 도형을 스크립트(Script)로 기록하면 특정한 도형 자체가 아닌 도형 사이의 추상적 관계만이 추구되어 기록된다. 스크립트를 실행하면 도형 사이의

관계와 특정한 도형자체 모두를 관찰할 수 있으므로 설정한 가설이 옳은지 옳지 않은지 동적으로 확인할 수 있다.

넷째, 스크립트는 작도 단계를 기록하는 것이다. 스크립트를 단계별로 직접 기록할 수도 있고 이미 작도된 도형들로부터 만들어질 수도 있다. 스크립트를 도구와 같이 사용하여 도형이나 도형들을 반복적으로 그릴 수 있다. 작은 스크립트를 사용하여 큰 스크립트를 만들어 아주 복잡한 도형을 그릴 수도 있다.

다섯째, GSP는 도형의 모양을 여러 가지로 바꾸고 설정할 수 있으므로 동적이며 아름답게 자기의 발견을 표현할 수 있다. 도형에 색을 줄 수 있고 이름을 붙일 수 있고 설명을 써넣을 수도 있다. 스크립트에도 설명을 달 수 있고 출력을 할 수 있으며 저장할 수도 있다. GSP는 사용자와 상호작용하는 동적인 칠판으로 사용될 수 있다.

나. GSP를 통한 평면기하 지도의 의의

김양희(2005)는 GSP를 통한 평면기하 지도의 의의를 다음과 같이 제시하고 있다.

첫째, 동적인 평면기하의 성질을 정적인 상태의 인쇄매체, 칠판에서의 강의 등을 통하여 지도할 때 보다 쉽게 이해시킬 수 있다.

둘째, GSP는 일반적인 그림 프로그램과 달리 자와 컴퍼스만을 사용하는 작도와 측정을 통하여 학생들의 흥미를 자극할 수 있고 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 더욱 학습 욕구를 유발할 수 있을 뿐만 아니라 학습 내용을 직접 확인할 수 있어서 매우 효과적이다.

셋째, 평면 기하의 성질을 발견적으로 찾아낼 수 있도록 자극할 때 GSP를 마치 실험도구로 사용하여 실제로 작도하고, 측정하여 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와 줄 수 있다.

넷째, 평면기하의 성질이 충분히 이해된 다음에는 연역적인 증명이 필요한데

이때에도 GSP는 정확한 그림을 제공하여 증명이나 문제풀이에 필요한 정보를 제공하게 한다.

다섯째, Animation과 Drag를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적으로 관찰할 수 있다. 특히 Animation으로 만들어지는 Trace는 도형의 자취를 생생하게 보여주고, Locus에 의하여 자취를 한 번에 제공하기도 한다. 따라서 많은 도형을 그 정의에 의하여 구현해 봄으로써 확실한 개념을 파악하고 그 도형의 관련된 성질들을 이해하는데 도움이 된다.

여섯째, Script의 Loop 기능을 사용하면 같은 작업을 계속적으로 반복할 수 있어서 Fractal과 같은 그림도 한 번에 구현할 수 있다.

일곱째, GSP에서 제공되는 직교 좌표계와 극 좌표계를 써서 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하학적 접근이 가능하다.

다. GSP 사용시 문제점

GSP를 사용하여 빠른 시간 내에 기하학적인 도형을 얼마든지 정확하게 그릴 수 있지만 교수학적인 적절한 전략이 따르지 않았을 때 몇 가지 문제점이 나타날 수 있다. 학생은 GSP를 활용한 기하 학습 과정에서 계산적 기술, 연습식과 절차를 사용, 개념간의 관계성을 파악할 수 있는 충분한 기회 등을 제공받을 수 있어야 한다. 그러나 GSP의 측정메뉴에서 선분의 길이, 각의 크기, 넓이 등이 바로 계산되어지기 때문에 도형의 넓이 등을 구하는 기초적인 계산능력이 저하될 우려가 있다. 그리고 선분의 수직 이등분선, 각의 이등분선, 평행선, 수선 등은 기하학습에서 기초적이고 중요한 개념들이다. 그러나 이러한 것들은 GSP에서 바로 작도가 가능하므로 학생들은 용어의 정의나 정확한 성질을 이해하지 못한 채 기계적으로 도형을 작도하는 오류가 생길 수 있다. 예를 들어, 삼각형의 내심을 작도할 때 각의 이등분선은 작도하는 이유인 이등분선상의 임의의 점에서 두 변에 이르는 거리가 같다는 성질을 이해하지 못한 채 삼각형의

내심을 기계적으로 작도하는 것이 그러하다. 따라서 GSP를 통하여 확인하기 전에 여러 가지 도형의 정의와 성질들을 충분히 학습 하는 과정이 필요하다(노영순, 1999). 또한 학생들이 GSP를 활용하여 도형의 정의 및 성질을 확인함으로써 증명학습의 필요성을 깨닫지 못할 수 있다. 예를 들어, GSP를 활용해 다양한 모양의 삼각형을 수없이 반복하여 작도하고 각의 크기를 측정해봄으로써 어떤 삼각형이든지 내각의 크기의 합이 180°라는 사실을 확인함으로써 이 성질을 증명할 필요가 없다고 생각하는 경우가 그러하다.

4. 선행연구

수학교과의 기하학습에 있어서 GSP프로그램을 활용한 수업을 통해 그 효율성이나 학생들의 학업성취도에 미치는 영향을 분석한 선행연구들을 고찰해 보았다.

안연희(2001)는 「GSP를 활용한 학생중심수업의 학습효과에 관한 연구」에서 중학교 2학년을 대상으로 GSP활용 수업을 한 결과 인지적 영역에 있어서 효과적인 학업 성취결과를 가져온다고 하였다. 학생들의 흥미와 지적 호기심을 유발시키는 GSP를 활용한 수업은 추상적인 수학적 개념을 시각적으로 구체화시켜서 학생들의 이해와 직관력을 높여줌으로써 문제 해결력의 신장에 긍정적인 효과를 보인다는 것을 확인하였다.

이상혁(2003)은 「고등학교 기하영역에서의 구체적 학습자료 개발」에서 GSP를 이용한 시각화되고 구체화된 학습 자료를 개발하여 실제 수업에 구현시켜보고 이러한 활동이 특히 기하학습에 어떤 영향을 가져오는지 알아보고자 하였다. 그 결과 상위 단계의 학생들에게는 시각화를 통한 기하 수업이 큰 영향을 미치지 못하였으나 하위 단계의 학생들에게는 시각화를 통한 GSP수업이 효과가 있다는 것을 알 수 있었다. 또한 학생 설문지를 통해서 학생들의 수학학습태도와 컴퓨터 활용 능력, 실험 수업후의 학생들의 반응을 조사한 결과 학생

들은 수학학습에 있어 컴퓨터가 제시해주는 그림이나 계산을 상당히 신뢰하고 있었고 수학학습에서 특히 기하교육에서 컴퓨터 등의 새로운 교구를 도입한 수업이 필요하다고 생각하였으며 정확한 도형을 통한 시각화가 학습효과에 긍정적인 영향을 미칠 것이라고 답하였다. 따라서 새로운 학습 도구들을 활용할 수 있는 수학 실험실 등의 학교환경의 개선이 필요하며 미리 짜여진 정보를 TV등을 통해 제공하는 것보다 학생 스스로 사고하고 탐구하는 과정을 거칠 수 있는 탐구형 소프트웨어의 지속적인 개발과 보급이 필요하다고 제언하였다.

김미아(2009)는 「GSP 프로그램을 활용한 수업이 7단계 도형단원 학습에 미치는 영향 분석」에서 GSP를 활용한 수업이 도형의 성질을 직접 눈으로 확인하고 조작하면서 역동적인 수업 공간을 마련하였으며 학습자의 동기 유발에 일조하였다고 하였다. 또한 정의적인 측면으로 볼 때 도형 단원에서 흥미를 유발하였고 기하가 어렵고 귀찮은 과목이라는 인식을 감소시킬 수 있었다. 다만 개인이 컴퓨터를 직접 조작하기 때문에 학습 내용과는 관계없는 게임이나 인터넷 또는 프로그램 자체의 기능 익히기 등에 빠져 교사의 교수·학습 의도와는 다른 방향으로 흘러갈 수도 있기 때문에 주의해야 한다고 하였다.

Ⅲ. 연구의 실제

1. 연구방법 및 절차

가. 연구방법

본 연구에서는 학습자들이 도형의 성질을 학습하는데 있어 어떤 어려움을 겪고 있는지 알아보고, GSP 프로그램을 활용하여 수업 자료를 제작하고 학생들에게 학습시킨 결과 도형을 학습하는 과정에서 학생들에게 어떠한 영향을 미치는지 알아보고자 한다. 본 연구자는 양적 연구 보다는 질적 연구가 학습자들의 언어나 표정, 행동 등을 세밀하게 파악할 수 있어 연구문제에 대한 결과를 얻기 위해 효과적이라 판단되어 질적 연구 방법을 이용하였다.

먼저, 연구문제의 해결을 위해 사전·후 설문지, 사전·후 평가지 및 면담방법을 활용하였다. 그리고 연구 참여자들에게 기본적인 GSP 사용방법 및 수업에 필요한 기본적인 작도 방법(부록 4참조)을 설명한 후 GSP를 활용한 수업을 함으로써 학습자들이 어렵게 느끼는 부분들과 학습태도나 흥미도 등을 세밀히 관찰하였다. 면담을 통한 자료 수집에서는 보다 세밀한 관찰을 위해서 녹음기를 사용하였다.

기초조사를 위한 사전 설문지는 연구 참여자의 수학적 태도, 수학에 대한 호감도, 습관, 생각, 활동 및 특이사항 등을 알아보기 위한 자료이고, 사후 설문지는 GSP를 활용한 수업이 종료된 후 수업에 대한 소감이나 인식, 태도 변화 등을 알아보기 위한 자료로서 연구자가 다른 자료를 참고하여 직접 제작하였다(부록1참조).

사전 평가지는 기하영역 15문항으로 구성하였으며 연구 참여자의 수학적 지식이나 점수 등을 알아보기 위한 자료이고, 사후 평가지는 20문항으로 구성하

였으며 GSP를 활용한 수업 종료 후 연구 참여자들이 얼마나 도형에 대한 학습이 이루어졌는지 확인하기 위한 자료로서 연구자가 직접 제작하였다(부록2참조). 사전 평가지의 기하영역 문제에서 연구 참여자들이 어렵게 생각하는 부분들은 심층 면담 기법을 활용할 것이다.

나. 연구대상

본 연구를 수행하기 위해서 연구의 내용인 중학교 2학년 도형의 성질단원을 아직 학습하지 않은 학생 4명을 선정하였다. 연구에 참가할 학생들을 찾기 위해서 K광역시 T학원에 다니고 있는 중학교 2학년 학생 16명 중 연구에 참여할 의지가 강하고 1학기 학업 성취 수준이 중·상위권인 학생 4명을 대상으로 사전 설문 및 사전 평가를 실시하였다. 선정된 4명 학생의 부모님께도 연구에 대해 간단히 설명 드린 후 연구 참여에 대한 동의를 얻었다. 4명의 학생 중 2명의 학생은 K광역시 S중학교 2학년에 재학 중이며 나머지 2명의 학생은 인근의 D중학교에 재학 중이다. 연구에 참여한 학생들의 2학년 1학기 학업성취수준은 <표 Ⅲ-1>와 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구대상 학생들의 학업성취도

구분	학생	1학기 중간고사	1학기 기말고사	평균
상위권	A	100	92	96
	B	94	84	89
중위권	C	80	74	77
	D	76	72	74

연구에 참여한 학생들의 수업태도 및 수학적 성향 등 개인적인 특성은 사전 설문, 면담을 토대로 아래 <표 Ⅲ-2>와 같이 정리하였다.

<표 Ⅲ-2> 연구대상 학생들의 개인적 특성

구분	학생	개인적 특성
상위권	A	수학시간이 기다려질 만큼 수학에 흥미가 많고 자신이 수학에 소질이 있다고 생각한다. 수학이 사고력을 기르는데 도움이 된다고 생각되어 더 열심히 하기위해 수업시간에 발표도 많이 하고 계획을 세워 공부하는 편이다. 스스로 해결되지 않는 어려운 문제가 있더라도 포기하기 않고 다양한 방법으로 풀어보려고 노력한다. 도형단원을 좋아하고 잘하는 편이다.
	B	다른 과목에 비해 수학에 흥미가 높은 편이나 수학에 소질이 있다고 생각되거나 수업시간이 기다려질 정도로 수학과목을 좋아하지는 않는다. 하지만 수학이 사고력을 기르는데 도움이 된다고 생각되어 더 열심히 하기위해 수업시간에 발표도 많이 하고 계획을 세워 공부하려고 노력하는 편이다. 스스로 해결되지 않은 어려운 문제는 포기하지 않고 풀려고 노력하나 자신의 실력이 아직은 많이 부족하다고 생각한다. 다른 단원에 비해 도형단원을 좋아하는 편이다.
중위권	C	다른 과목에 비해 수학을 어려워하는 편이다. 수학에 소질이 있다고 생각되거나 수업시간이 기다려질 정도로 수학과목을 좋아하지 않는다. 하지만 수학이 사고력을 기르는데 도움이 된다고 생각되어 더 열심히 하기위해 수업시간에 발표도 많이 집중하려고 노력한다. 스스로 해결되지 않은 어려운 문제는 쉽게 포기하는 편이고 수학문제를 풀 때는 어려가지 방법으로 풀기보다 가장 쉬운 방법으로만 푼다. 도형단원이 어렵다고 생각한다.
	D	다른 과목에 비해 수학이 재미가 없다고 생각하고 자신은 수학에 소질이 없다고 생각한다. 수학시간도 지루하고 발표도 거의 하지 않는다. 수학이 사고력을 기르는데 도움이 된다고는 생각하지만 계획을 세워 더 열심히 하려고 노력하는 모습은 보이지 않는다. 스스로 해결되지 않은 어려운 문제는 쉽게 포기하는 편이고 수학문제를 풀 때 어려가지 방법으로 풀어보려고 노력하기 보다는 쉬운 방법으로 빨리 풀려고 한다. 도형단원이 어렵다고 생각한다.

다. 연구절차

본 연구의 절차는 아래 <표 Ⅲ-3>과 같다.

GSP 프로그램을 활용한 수업자료 제작

⇩

사전 평가지 면담

⇩

GSP 프로그램을 활용한 수업실시

⇩

사후 평가 및 설문 조사

⇩

결과 분석

<표 Ⅲ-3> 연구절차

(1) GSP 프로그램을 활용한 수업자료 제작

본 연구자는 학생들의 학습내용에 대한 이해를 돕고자 Van Hiele의 교수 학습 이론을 바탕으로 GSP 프로그램을 활용하여 중학교 2학년의 사각형 단원 중 평행사변형과 여러 가지 사각형 단원을 선택하여 총 8차시 분량의 학습 자료를 제작하여 수업을 실시하였다.

<표 Ⅲ-4> 제7차 중학교 개정 교육과정 중
'중2학년 사각형의 성질 단원' 내용분석

소단원	지도내용	지도의 중점
평행사변형	평행사변형의 성질	1. 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다. 2. 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다. 3. 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
	평행사변형이 될 조건	1. 두 쌍의 대변이 각각 평행하다. 2. 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다. 3. 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다. 4. 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다. 5. 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
여러 가지 사각형	직사각형의 성질	1. 평행사변형의 모든 성질을 만족한다. 2. 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.
	마름모의 성질	1. 평행사변형의 모든 성질을 만족한다. 2. 두 대각선은 서로 다른 것을 수직 이등분한다.
	정사각형의 성질	1. 직사각형의 모든 성질을 만족한다. 2. 마름모의 모든 성질을 만족한다. 3. 두 대각선은 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직 이등분한다.
	사다리꼴의 성질	1. 한 쌍의 대변이 평행하고, 평행한 두변 중 하나의 양끝각의 크기가 같은 사다리꼴을 등변사다리꼴이라 한다. 2. 등변사다리꼴은 평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이가 같고, 두 대각선의 길이가 서로 같다.
	여러 가지 사각형 사이의 관계	정사각형 ⊂ 직사각형, 마름모 ⊂ 평행사변형 ⊂ 사다리꼴 ⊂ 사각형

(2) 사전 평가지 면담

연구 참여자를 선정하고 사전 설문 및 평가를 하였다. 사전 평가의 목적은 연구 참여자의 수학적 성향이나 태도 및 점수 등을 알아보기 위한 것이기도 하지만 궁극적인 목적은 기하 영역에서 학생들이 어떤 어려움들을 겪고 있는지를 알아보기 위한 것이라고도 할 수 있다.

(3) GSP 프로그램을 활용한 수업실시

연구 참여 학생 1인당 1대의 컴퓨터를 사용하게 하고 일주일에 2일정도 방과 후를 이용하여 수업을 하였다. 모든 컴퓨터에 GSP 프로그램을 설치하였고 연구자가 제작한 학습 자료를 바탕으로 매 차시별로 수업 내용에 맞춰 학생들이 직접 조작하는 활동을 통해 수업을 전개하였다. 구체적으로 연구자의 간단한 설명이 끝난 후에 학생들이 직접 도형을 작도하고 성질을 이해한 후 연구자와 4명의 학생들이 함께 도형의 성질에 대해 이야기하는 방식으로 수업을 진행하였다. 개별적인 설명이 필요한 경우에는 1대1 수업을 진행하였다. 그리고 수업내용 중에 학습자들이 어렵게 느끼는 부분들과 학습태도 및 흥미도 등을 알아보기 위해 학생들을 세밀히 관찰하였다.

(4) 사후 평가 및 설문 조사

GSP를 활용한 수업이 종료된 후 수업에 대한 소감이나 인식, 태도 변화, 그리고 학습 내용에 대한 이해도를 알아보기 위해 실시하였다.

(5) 결과 분석

사후 설문지와 평가지, 학생들의 작도과정에 대한 분석을 통해 수학교과에 대한 생각, 컴퓨터를 활용한 수업에 대한 생각 및 GSP 프로그램을 이용한 수업에 대한 흥미 및 호응도, 학습 내용의 이해도를 검사하여 결과를 분석한다.

2. 사전 평가지 면담 내용

사전 평가지는 기하 영역 15문항으로 구성되어 있고 15문항 모두 주관식이었는데 답은 맞았으나 풀이과정을 제대로 쓰지 못한 학생들이 있었다. 학생들이 문제를 정확하게 알고 있는지 그리고 어떤 부분에 대해서 어렵게 느끼고 있는지 알아보기 위해서 1대 1 면담을 실시하였다. 아래 내용은 면담내용 중 5문항을 중심으로 서술하였다.

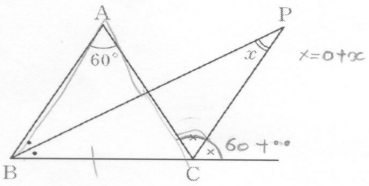
대부분의 학생들이 증명문제의 필요성을 느끼지 못하고 증명의 의미를 이해하는데 많은 어려움을 겪고 있었다. 또한 도형의 성질을 설명하는데 필요한 기초지식이 부족하고, 증명문제에 대한 접근 방식이나 정리를 분석하는 과정에서 많은 어려움을 토로하였다. 11번 문항에서 학생들은 평행선 및 동위각과 엇각의 성질을 이해하고는 있었으나 문제에 적용하는 능력이 부족하였다. 그리고 12번 문항에서 거의 대부분의 학생들이 풀이과정은 쓰지 못하고 기존에 암기했던 방법을 이용해 정답만 구했다. 13번 문항에서는 $\triangle AEC$와 $\triangle CDB$가 합동이라는 것은 이해하고 있었으나, 그 이후 과정을 이어나가지 못하였다. 구하고자 하는 각의 크기와 두 삼각형이 합동이라는 조건에서 나오는 성질을 찾아낼 수 없었던 것이다. 연구자의 힌트에 의해 학생들이 $\triangle AEC$에서 $\angle BEC = 60^\circ + \angle ACE$ $\angle ABD = 60^\circ - \angle ACE$라는 사실을 알게 되었다. 14번 문항은 모든 학생들이 정확하게 알고 있었고, 15-(1)번 문항에서는 대부분의 학생들이 $\triangle ACD$와 $\triangle BCE$가 합동이라는 사실을 삼각형의 합동조건 (SAS합동)으로 설명하였다. 하지만, 15-(2)번 문항에서는 모든 학생들이 두 각이 같은 이유를 설명하지 못하였다. 연구자가 삼각형의 합동으로부터 알 수 있는 대응각들을 서로 구분되게 표시해보라는 제시에 따라 학생들은 다음과 같이 설명할 수 있었다. $\triangle ACD$와 $\triangle BCE$가 합동이라는 사실에서부터 $\angle EBC = \angle DAC$, $\angle DAC + \angle ADB = 60^\circ$, $\angle EBC + \angle ABE = 60^\circ$ 이므로 $\angle ABE = \angle ADB$ 이다.

다음은 연구 참여자들 중 학생 A와 학생 B의 사전 평가지 풀이 내용이며 학생 C와 D의 풀이 내용은 생략한다.

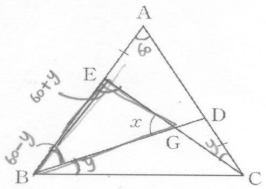
11. 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이다. 그 이유를 설명하여라.

○+△+× = 180°

12. 다음 그림에서 점 P는 ∠B의 이등분선과 ∠ACB의 외각의 이등분선과의 교점이다. 이때, ∠x의 크기를 구하시오. ∠x = 30°



13. 다음 그림과 같은 정삼각형 ABC에서 $\overline{AE} = \overline{CD}$ 일 때, ∠x의 크기를 구하여라.



60+~~y~~+60-~~y~~+x = 180

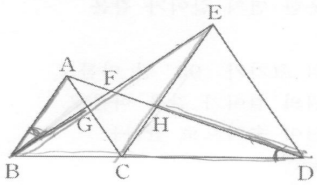
120+x = 180

x = 60°

14. 삼각형의 합동조건 3가지를 써라. (간단히 기호로 나타내어라.)

SSS, SAS, ASA 합동

15. 선분 BD위에 점 C를 잡고, 선분 AC, EC를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 ABC, ECD를 다음 그림과 같이 만든다.



(1) △ACD ≡ △BCE 이 되는 이유를 설명하여라.

$\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$, ∠BCE = ∠ACD

SAS

(2) $\angle ABE = \angle ADB$ 인 이유를 설명하여라.

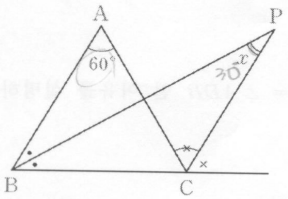
[그림 Ⅲ-1] 학생 A의 사전 평가지 답안

11. 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이다. 그 이유를 설명하여라.

삼각형 세각을 x/x 이렇게 모으면 일직선이 되므로 180° 이다.

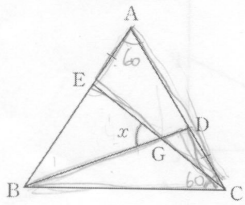
12. 다음 그림에서 점 P는 ∠B의 이등분선과 ∠ACB의 외각의 이등분선과의 교점이다. 이때, ∠x의 크기를 구하시오.

30°



13. 다음 그림과 같은 정삼각형 ABC에서 $\overline{AE} = \overline{CD}$일 때, ∠$x$의 크기를 구하여라.

45° (?)

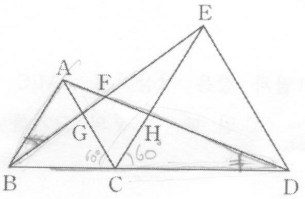


△AEC ≡ △CDB (SAS).

14. 삼각형의 합동조건 3가지를 써라. (간단히 기호로 나타내어라.)

SAS 합동. ASA 합동, SSS 합동

15. 선분 BD위에 점 C를 잡고, 선분 AC, EC를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 ABC, ECD를 다음 그림과 같이 만든다.



(1) △ACD ≡ △BCE이 되는 이유를 설명하여라.

두변과 끼인각이 같으므로 합동이다.

(2) $\angle ABE = \angle ADB$ 인 이유를 설명하여라.

[그림 Ⅲ-2] 학생 B의 사전 평가지 답안

3. GSP를 이용한 도형 작도과정 분석

연구 참여자들이 GSP를 활용하여 평행사변형, 여러 가지 사각형을 스스로 작도해 보게 하였다. 연구 참여자들이 GSP에 익숙해지기 위해 GSP의 기본적인 사용법들을 가르쳐 주고 몇 가지 예를 들어 설명해준 후 스스로 GSP를 이용하여 작도하면서 도형의 성질들을 학습하는 과정을 살펴보았다. 그리고 연구 참여자들은 작도 과정마다 사전에 준비한 학습지(부록3)를 이용하여 연구자와 대화를 나누면서 학습하였다.

가. GSP를 이용한 평행사변형 작도

연구 참여 학생들이 GSP 기본 수업을 토대로 평행사변형을 스스로 작도하였다. [그림Ⅲ-3]를 작도한 후 평행사변형의 성질을 알아보기 위해서 각 변의 길이와 각의 크기를 측정하고, 대각선을 그어 교점을 O라고 하여 각 꼭짓점에서 교점 O까지의 거리를 측정하였다. 그 결과 “두 쌍의 대변의 길이가 같고 두 쌍의 대각의 크기가 같다.” 라는 성질을 확인할 수 있었다. 그리고 $\triangle ABO \equiv \triangle CDO$ 이므로 $\overline{AO} = \overline{CO}$이고 $\triangle BCO \equiv \triangle DAO$ 이므로 $\overline{BO} = \overline{DO}$ 이다. 즉, 수학적 증명에 의해 “두 대각선은 서로 다른 것을 이등분 한다.” 라는 성질을 알 수 있었다. 다음은 학생들과 연구자의 대화 내용 중 일부이다.

연구자: 평행사변형의 정의를 말해볼까요?

학생A: 두 쌍의 대변이 평행한 사각형 이예요.

연구자: 잘 말했어요. 여러분이 초등학교 때 이미 배운 내용이죠? 그럼 성질에는 어떤 것들이 있는지 작도한 그림을 보면서 말해볼까요?

학생C: 두 쌍의 대변의 길이가 같고 대각의 크기가 같아요.

연구자: 맞아요. 자 그럼 이유도 설명할 수 있나요?

학생B: $\triangle ABO$와 $\triangle CDO$, $\triangle BCO$와 $\triangle DAO$가 합동이기 때문입니다.

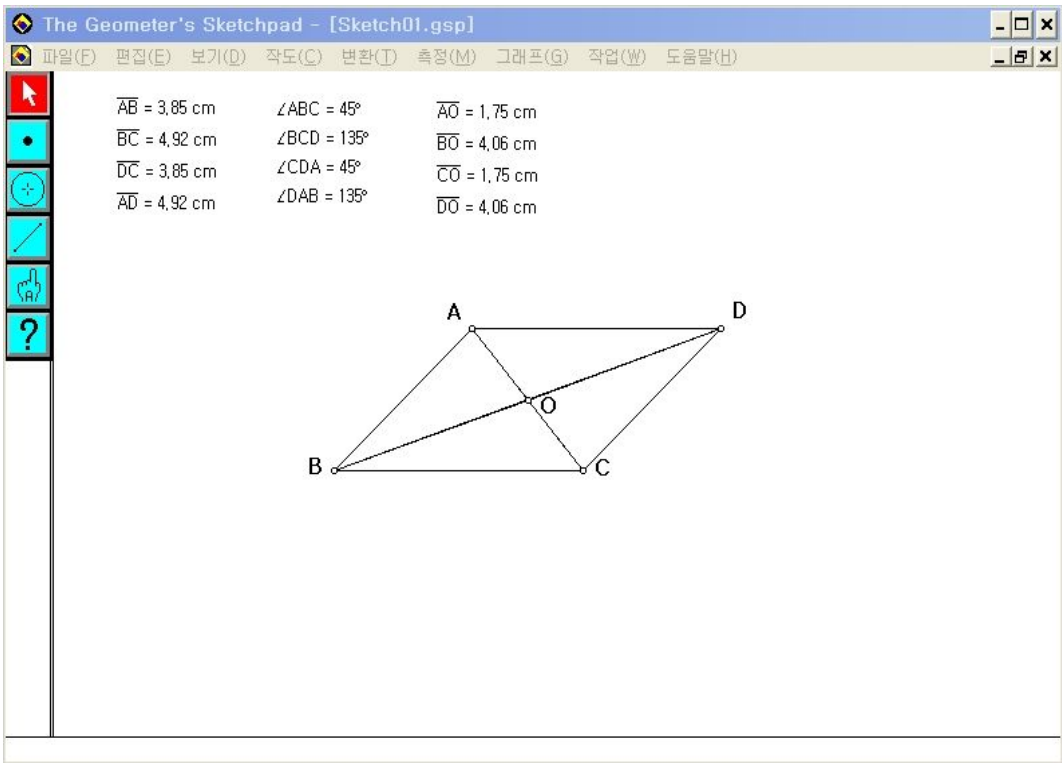
연구자: 또 다른 성질은 없을까요?

학생C: 대각선이 이등분되는 것 같은데요.

연구자: 네. 맞아요. 정확히 말하자면 “두 대각선은 서로 다른 것을 이등분 한다.”입니다.

학생A: △ABO 와 △CDO, △BCO 와 △DAO 가 합동이니깐 그러겠네요.

연구자: 맞아요. 여러분들이 어떤 길이가 같다는 것을 증명할 때는 합동인 도형을 찾는 것이 매우 중요합니다.



[그림 Ⅲ-3] 학생 D의 평행사변형 작도

GSP 화면에 측정된 값들은 평행사변형의 성질을 모두 말해주고 있다. 연구 참여 학생들은 GSP 화면에 작도한 그림을 보면서 삼각형의 합동조건을 이용하

여 수학적 증명도 할 수 있었다. 그리고 자신들이 작도한 평행사변형을 보면서 다양한 방법으로 생각하고 행동하는 모습이 매우 보기 좋았다. 기존에 칠판수업으로 도형을 배울 때는 무조건 성질 자체를 외우려고 하는 모습이었는데 GSP를 활용하여 작도하면서는 자신 스스로 논리적으로 생각하고 이해하려는 모습이었다.

나. GSP를 이용한 여러 가지 사각형 작도

(1) 직사각형

직사각형은 작도하는 방법이 여러 가지 있는데 학생 B가 아주 간단한 방법으로 직사각형을 작도하였다. 두 쌍의 대변이 평행하고 길이가 같고 한 내각의 크기가 90°를 만족하는 사각형을 그리면 되므로 임의의 선분을 긋고 수선과 평행선을 이용하여 [그림Ⅲ-4]을 작도하였다. 작도한 후에는 각 변의 길이와 각의 크기, 대각선의 길이를 측정하고 끌기 기능을 이용하여 임의의 꼭짓점을 잡아 끌어보았는데도 직사각형의 모양이 변함이 없었다. 그리고 직사각형이 평행사변형의 모든 성질을 만족한다는 것을 알았다. 또한, $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ 이므로 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 즉 "두 대각선의 길이가 같다."라는 것과 $\triangle ABO \equiv \triangle CDO$ 이므로 $\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$ "두 대각선은 서로 다른 것을 이등분 한다."는 것을 확인할 수 있었다. 다음은 학생들과 연구자의 대화 내용 중 일부이다.

연구자: 직사각형 작도가 거의 끝난 것 같은데, 여러분들이 작도한 직사각형의 성질을 설명할 수 있을까요?

학생B: 대각선의 길이가 같은데요.

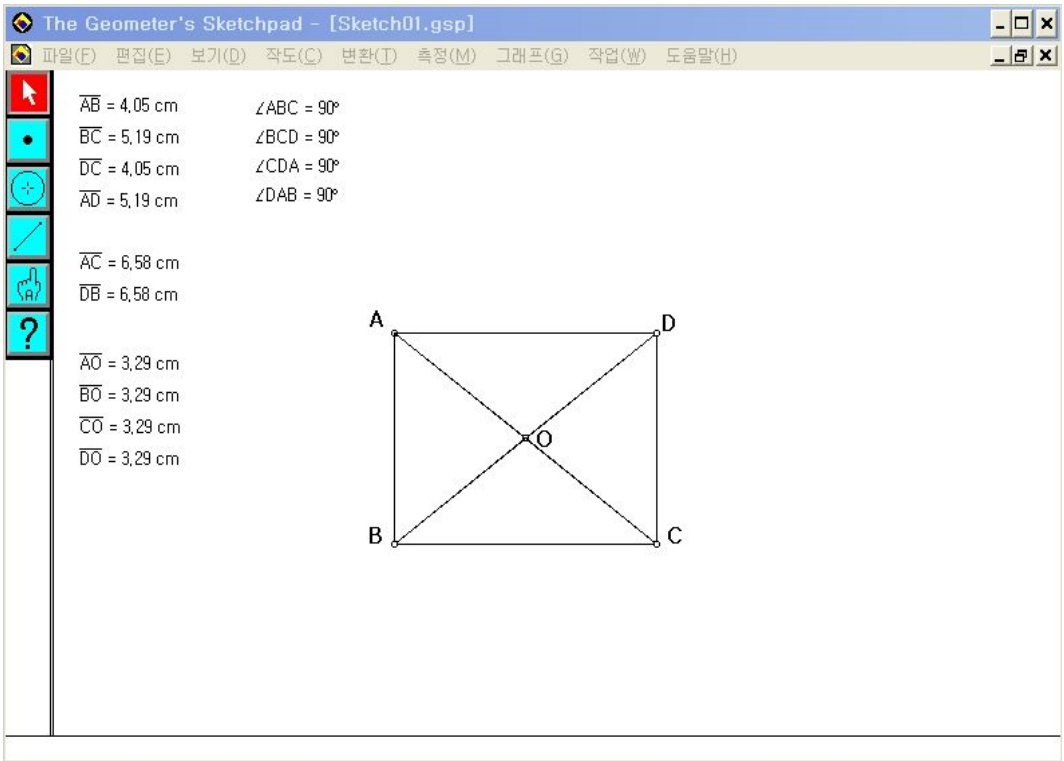
학생D: 아까 작도한 평행사변형하고 비슷한 것 같아요. 각이 직각이라는 것만 틀리구요.

연구자: 네 맞아요. 직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 포함하고 있어요. 그럼 아까 B학생이 대각선 길이가 같다고 했는데 이유가 멀까요?

학생A: △ABC 와 △DCB 이 합동이여서 $\overline{AC}$와 $\overline{DB}$의 길이가 같아요.

연구자: 또 다른 성질은 없나요?

학생B: 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하고 있어요. 왜냐하면, △ABO와 △CDO가 합동이여서 $\overline{AO}$와 $\overline{CO}$, $\overline{BO}$ 와 $\overline{DO}$ 의 길이가 같아요.



[그림 Ⅲ-4] 학생 B의 직사각형 작도

연구 참여 학생들은 GSP를 이용해 직사각형을 작도하고 각 변의 길이와 각의 크기, 대각선의 길이를 측정한 후 직사각형의 성질을 이해할 수 있었다.

(2) 마름모

연구 참여 학생들이 초등학교에서 배운 마름모의 정의를 바탕으로 반지름의

길이가 같은 두 원을 이용하여 네 변이 원의 반지름으로 같다는 원리에 입각하여 마름모를 작도하였다. [그림Ⅲ-5]의 □ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$ 이므로 □ABCD는 두 쌍의 대변의 길이가 같으므로 평행사변형이라 할 수 있다. 따라서 마름모는 평행사변형의 모든 성질을 만족한다. △ADO ≡ △ABO 이므로 ∠AOD = ∠AOB = 90° 즉, "두 대각선은 서로 다른 것을 수직 이등분 한다."는 성질을 알 수 있었다. 다음은 학생들과 연구자의 대화 내용 중 일부이다.

연구자: 작도한 결과를 가지고 마름모의 성질을 이야기 해볼까요?

학생A: 마름모는 평행사변형의 모든 성질을 만족합니다.

학생B: 대각선이 서로 수직 이등분 되는데요.

연구자: 네 두 학생 모두 맞았어요. 그럼 왜 평행사변형이 마름모의 모든 성질을 만족한다고 할 수 있죠?

학생A: 마름모는 네 변의 길이가 같으니깐 두 쌍의 대변의 길이가 같아요. 그래서 평행사변형이라고 할 수 있습니다.

연구자: 그럼 대각선이 수직 이등분 되는 이유는 무엇일까요?

학생C: 혹시 합동을 이용하면 되지 않나요?

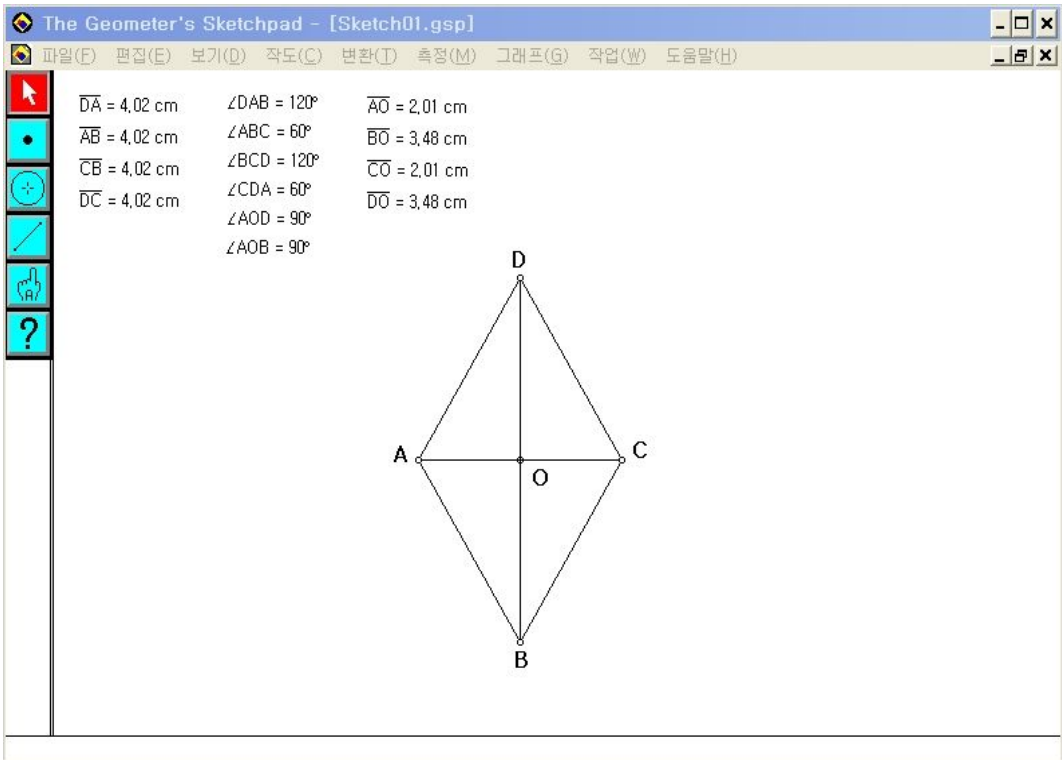
연구자: 네. 하지만 더 자세한 설명이 필요할 것 같은데, 설명해 줄 수 있는 사람 있나요?

학생B: △ADO와 △ABO가 합동으로 대응하는 각인 ∠AOD 와 ∠AOB가 90°로 같아요.

연구자: 맞아요. 여러분들에게 조금 어려울 수도 있는데 작도했던 과정을 잘 생각해 보면 이해하기 더 쉬울 거예요.

학생D: 결국 GSP로 도형 작도를 많이 해보라는 말씀이시죠?

연구자: 역시 눈치가 빠르네요. 도형들을 많이 작도해보면서 도형간의 성질과 연관성을 생각해본다면 억지고 외우지 않아도 자연스럽게 알 수 있을 거예요.



[그림 Ⅲ-5] 학생 A의 마름모 작도

연구 참여 학생들은 GSP를 이용해 직사각형을 작도하고 각 변의 길이와 각의 크기, 대각선의 길이를 측정한 후 직사각형의 성질을 이해할 수 있었다.

(3) 정사각형

연구 참여 학생들은 초등학교에서 배운 정사각형의 정의를 바탕으로 반지름의 길이가 같은 두 원을 이용하여 네 변이 반지름으로 같고 네 각이 모두 90°로 같은 원리에 입각해 정사각형을 작도하였다. 그리고 [그림Ⅲ-6]에서 대각선을 그어 그 길이를 측정해 봄으로써 정사각형이 직사각형이고 마름모이므로 두 도형의 모든 성질을 만족한다는 사실을 알았다. 또한 “두 대각선은 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직 이등분 한다.”는 사실도 확인하였다. 다음은 학생들과

연구자의 대화 내용 중 일부이다.

연구자: 정사각형 작도 후 알 수 있는 성질에 대해 말해볼까요?

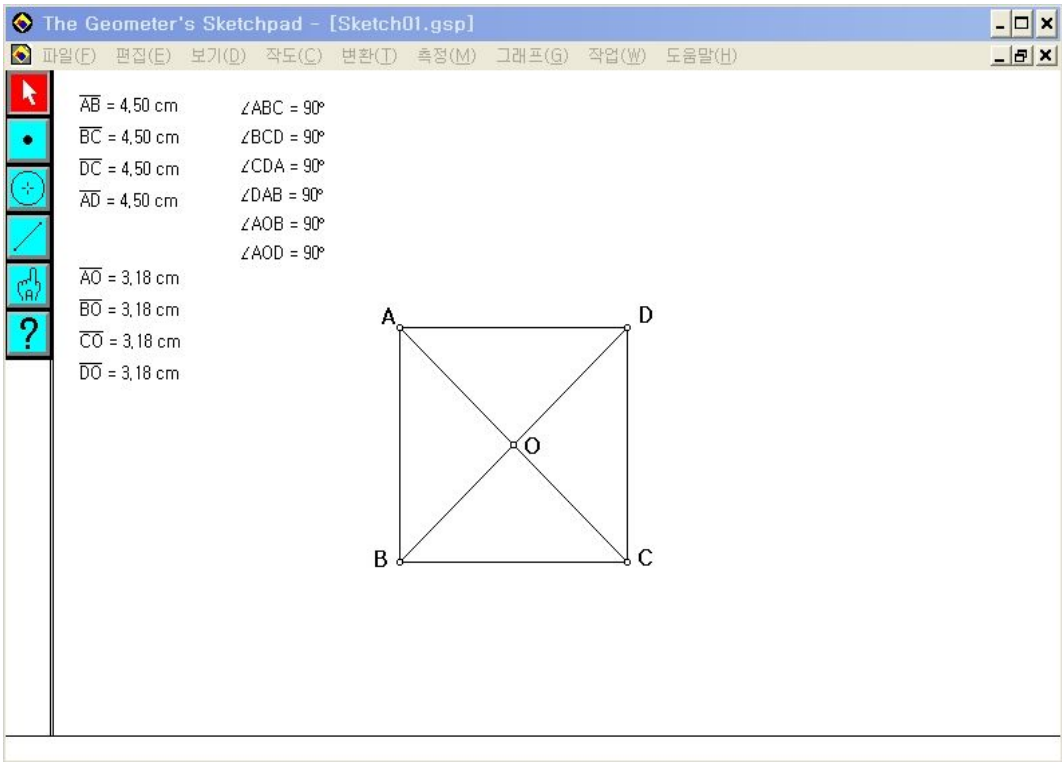
학생D: 선생님, 혹시 정사각형도 평행사변형의 모든 성질을 만족하지 않나요?

연구자: 네 맞아요.

학생C: 네 각이 모두 직각이니깐 직사각형의 성질을 만족하는 것 같은데...

연구자: 그것도 맞아요. 여러분들이 잘 알고 있는 것 같네요. 정사각형은 조건이 가장 많이 붙어 있어서 어떤 사각형에도 포함되는 도형이예요. 그럼 다른 성질은 없나요?

학생A: 정사각형은 직사각형이기도하고 마름모이기도 하니깐 "두 대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 수직 이등분해요."



[그림 Ⅲ-6] 학생 C의 정사각형 작도

연구 참여 학생들은 GSP를 이용해 정사각형을 작도하고 각 변의 길이와 각의 크기, 대각선의 길이를 측정한 후 정사각형의 성질을 이해할 수 있었다.

(4) 등변사다리꼴

연구 참여 학생들은 초등학교에서 배운 사다리꼴의 정의를 바탕으로 등변사다리꼴을 작도하였다. 사다리꼴 중에서 평행한 두변 중 하나의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴이 등변사다리꼴 이라는 것을 알려주고 GSP를 이용해 작도하도록 했다. [그림Ⅲ-7]을 작도한 후 각 변의 길이와 각의 크기, 대각선의 길이를 측정하여 "평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이가 같고, 두 대각선의 길이가 서로 같다" 는 것을 확인하였다. 다음은 학생들과 연구자의 대화 내용 중 일부이다.

연구자: 등변사다리꼴의 성질에 대해 말해볼까요?

학생D: 평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이가 같아요.

학생B: 대각선의 길이가 같아요.

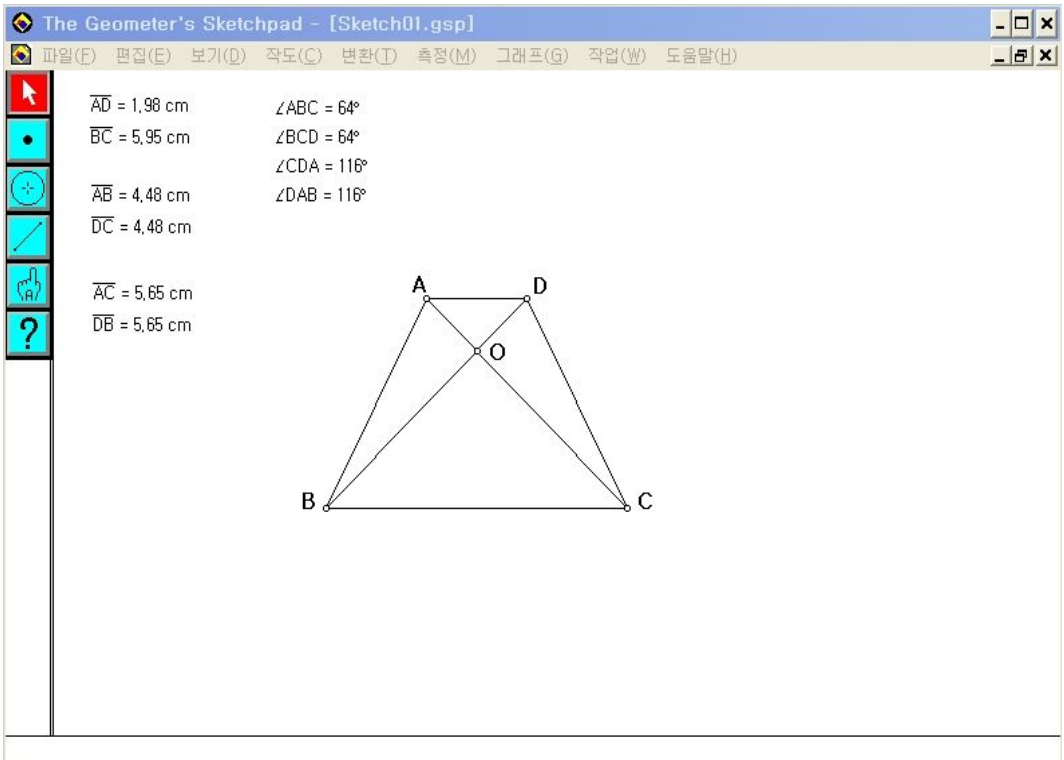
연구자: 네. 맞았어요. 그럼 그 이유가 무엇일까요?

학생A: △ABD와 △DCA가 합동이므로 $\overline{BD}$ 와 $\overline{AC}$의 길이가 같아요.

연구자: 잘했어요. 오늘 작도해본 등변사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사다리꼴 중의 하나라는 것을 잊지 말구요. 수업이 끝난 후에도 반복해서 작도 해보세요. 그리고 마지막으로 지금까지 배운 사각형들의 포함관계를 집합으로 표현해볼까요?

학생A: 정사각형⊂직사각형, 마름모⊂평행사변형⊂사다리꼴⊂사각형 아닌가요?

연구자: 네 맞아요.



[그림 Ⅲ-7] 학생 A의 등변사다리꼴 작도

연구 참여 학생들이 여러 가지 사각형을 GSP를 이용해 작도함으로써 사각형 사이의 관계를 설명할 수 있었으며 도형들의 성질을 잘 이해할 수 있었다. 수업을 마치고 학생들이 GSP에 대해 많은 호감을 갖게 되었고 연구를 시작하기 전보다 도형 단원에 대해 자신감을 갖게 되었다. 학생들이 어려워했던 증명 문제에 대한 접근 방법도 더욱 발전되었고, 학생들이 스스로 사고하려는 모습도 관찰할 수 있었다.

4. 연구결과 분석

GSP를 활용한 작도를 통해 도형의 성질을 학습하는 과정을 알아보기 위해 면담과 학습지 기록 분석을 이용하여 비교 분석하였다. GSP를 이용하여 평행사변형을 작도하고 본인이 작도한 도형을 보면서 연구 참여자들은 변의 길이 및 각의 크기 등을 측정하면서 그에 따른 성질들을 쉽게 알아낼 수 있었다. 처음 평행사변형을 작도 해볼 때는 대부분의 학생들이 어려워하였으나, 나중에는 연구자의 설명 없이 스스로 작도했다는 점으로 미루어 연구 참여자들이 GSP에 많이 익숙해 졌다는 것을 알 수 있었다. 직사각형, 마름모, 정사각형, 등변사다리꼴도 마찬가지로 GSP를 이용하여 작도한 후 대각선의 길이 등을 측정하여 각각의 성질들도 쉽게 알 수 있었다. 그리고 작도하는 과정에서 여러 가지 사각형들 사이에 밀접한 연관성이 있다는 사실을 알고 매우 복잡하다는 표현을 하였다. 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형, 사다리꼴에 관한 포함관계나 어떤 성질을 모두 만족하는지의 여부에 혼란이 많이 있다는 것을 알 수 있었다. 연구자는 연구 참여자들에게 여러 가지 도형들을 반복적으로 작도해보고 그에 따른 성질들을 본인 스스로 찾아보고 정리 하는 것이 여러 가지 도형사이의 포함관계나 성질의 만족여부에서 오는 혼란을 해소할 수 있는 방법이라고 설명하였다. 그리고 GSP를 활용한 작도활동이 학생들이 도형의 성질 단원을 학습하는 과정에서 겪게 되는 다양한 어려움들을(예를 들면, 증명문제에 대한 두려움, 접근방식, 도형의 성질에 대한 복잡한 관계에 대한 이해) 극복하는데 많은 자신감을 갖게 하였다.

모든 수업이 끝난 후에는 GSP를 활용한 수업에 대한 학생들의 생각을 알아보기 위해 사후 설문 조사를 실시하였고 학습내용의 이해도를 알아보기 위해 사후 평가를 실시하였다. 사후 설문 결과는 컴퓨터 사용에 대한 학생들의 견해와 GSP 활용에 대한 학생들의 견해로 나누어 정리하였다.

첫째, 컴퓨터 사용에 대한 학생들의 설문 결과이다. 학생 4명 중에 2명이 컴

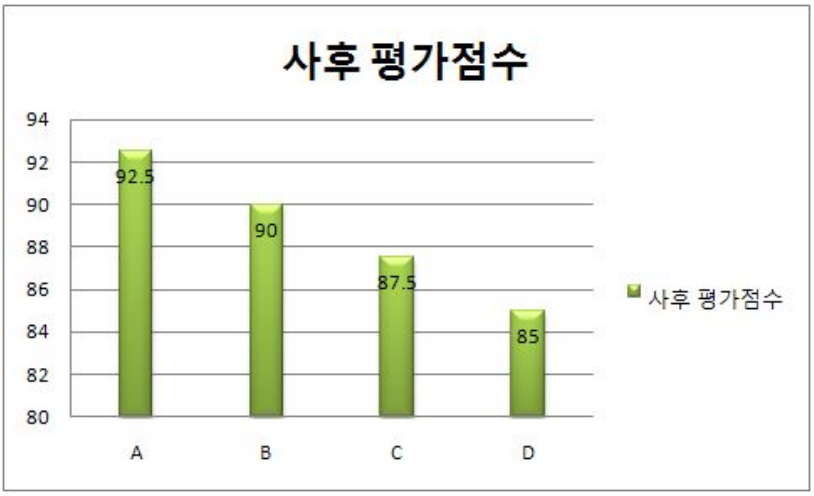
퓨터를 능숙하게 사용할 수 있다고 하였고, 나머지 2명은 보통 수준이라고 하였다. 수학 수업에서 칠판이 아닌 새로운 수업도구를 이용하는 수업이 필요하다고 생각하느냐는 질문에 4명 모두 긍정적인 반응을 보였다. 기존의 수학 수업에서 컴퓨터를 이용한 수업을 받아 본적이 있냐는 질문에는 4명 모두 없다고 하였다. 마지막으로 수학 수업시간에 컴퓨터를 이용하여 공부하는 것이 도움이 된다고 생각하느냐는 질문에 4명 모두 매우 도움이 된다고 하였다.

둘째, GSP 활용에 대한 학생들의 설문 결과이다. 학생 4명 모두 GSP 프로그램을 이용하여 도형을 직접 조작해보는 것이 도형 학습에 도움이 많이 되었고, 학교 수학 시간에도 GSP를 활용하면 좋겠다고 하였다. GSP를 개인적으로 공부해서 활용해 볼 생각이 있느냐는 질문에는 학생 1명만 긍정적인 반응을 보였고 나머지 3명의 학생은 그저 그렇다는 반응이었다. 마지막으로 GSP를 활용한 수업을 한 후 학생들이 느낀 점이나 소감을 적은 내용은 다음<표 Ⅲ-5>와 같다.

<표 Ⅲ-5> GSP를 활용한 수업 후 학생들의 소감내용

학생A	GSP를 활용해 수학공부를 하니 쉽게 이해할 수 있었고, 원과 선분들을 직접 그린다는 것이 실감나고 재미있었다. 하지만 컴퓨터를 이용하기 때문에 다른 곳에 빠져들기 쉬운 단점이 있는 것 같다.
학생B	전에는 도형문제를 풀 때 눈으로만 보고 성질을 파악하여 문제를 풀려고 하니 문제의 의도도 잘 모르겠고 이해하기 힘들었는데, GSP를 이용해서 직접 도형을 작도해보고 작도한 도형의 변의 길이와 각의 크기를 바로바로 측정할 수 있어서 좋았다.
학생C	학원이나 학교에서 작도할 때는 무슨 소리인지도 잘 모르겠고 짜증나고 잠만 왔었는데 GSP를 이용하니깐 재미있고 어떻게 작도해야 하는지 이제 알 것 같다. 확실히 말로만 하는 수업보다 이해가 잘되었다.
학생D	연필로 그리고 지우고 하는게 정말 귀찮았는데, GSP를 이용하니깐 쉽게 작도할 수 있어서 좋았다. 그리고 컴퓨터로 하는 것이 더 정확하고 좋은 것 같다. 학교 수업시간에도 컴퓨터로 수업하면 좋겠다.

그리고 사후 평가를 실시한 결과 <그림 Ⅲ-8>과 같이 본 연구에 참여한 학생들은 도형영역에서 높은 성취를 보여주었다. GSP의 사용이 학생들이 도형의 성질을 이해하는데 긍정적인 영향을 미친 것으로 분석된다.



<그림 Ⅲ-8> 학생들의 사후 평가점수

Ⅳ. 결론 및 제언

학교에서 도형영역을 지도할 때 연역적이고 형식적인 면이 강조된 학습 내용과 방법이 큰 비중을 차지하고 있다. 국내외의 여러 연구 결과에 의하면(예를 들어, 우정호, 1994; 류성림, 1998; 서동엽, 1999; Usiskin, 1982; Senk, 1985; Kahan, 1999)중·고등학생들의 증명쓰기 능력은 대체로 낮은 수준이라고 한다. 예를 들면, 우리나라 중학생 1041명을 대상으로 한 우정호(1994)의 연구 결과에 의하면, 연구에 참여한 중학생들의 약 10-30% 정도만이 기본적인 정리에 대한 타당한 증명을 쓸 수 있는 수준이었다(한혜숙·신현성, 2008, 재인용). 이렇듯 중학교 2학년 학생들의 대부분이 기하학적 사고수준이 낮음에도 불구하고 일선 학교에서는 정리의 증명이나 도형의 성질 사이의 논리성 등을 이해하기를 강조하고 있는 것이 현실이다.

이에 본 연구는 학생 스스로 지식을 구성할 수 있는 교구로써 가장 일반적으로 보편화된 프로그램인 GSP를 이용하여 '도형의 성질'을 이해해 가는 과정을 탐구할 목적으로 설계하였다. 이를 위해 '도형의 성질' 단원이 포함된 2학기 과정을 배우지 않은 중학교 2학년 학생 4명을 대상으로 관련된 자료를 수집하였다. 우선, 사전 평가를 실시하여 중학생들이 도형의 성질 단원의 학습과정에서 겪는 어려움이 무엇인지를 파악하였다. 그리고 GSP를 활용 하였을 때 연구 참여자들이 도형의 성질을 이해하는 과정에서 어떤 변화가 생기는지를 알아보았다. 연구 참여자들의 학습과정이나 학습 전·후의 면담내용은 녹음 등의 방법을 활용하여 기록, 녹취하였다. 사전 평가 및 면담 결과를 분석하여 학생들이 도형을 학습하는 과정에서 다음과 같은 어려움을 겪고 있다는 것을 확인하였다.

첫째, 학생들은 증명의 필요성을 느끼지 못하거나 증명의 의미를 이해하는데 많은 어려움을 겪고 있었다. 사전 평가지 면담에서 많은 학생들이 "삼각형의 내각의 크기의 합이 180° 라는 건 알고 있는데 증명은 하지 못하겠어요. 그냥

너무나 당연한 것으로만 받아들여서 그러나?”라고 대답함으로써 증명이 왜 필요한지 인식하지 못하고 있었다.

둘째, 학생들은 도형의 성질을 설명하는데 필요한 기초지식이 부족하였다. 학생 C는 증명문제를 해결할 때 어디서부터 어떻게 시작해야할 지를 모르겠다는 표현을 자주 하였다. 구체적으로 증명문제에 대한 접근 방식이나 정리를 분석하는 과정에서 많은 어려움을 토로하였다. Van Hiele 이론에서 말한 것처럼 교사와 학생은 서로 다른 수준에서 말하여 교사의 설명 자체가 학생들에게 의미를 갖지 못해 서로를 이해하기가 힘든 결과를 초래하였다.

그리고 GSP의 사용이 연구 참여자들이 도형의 성질을 이해하는 과정에서 다음과 같은 변화를 가져왔다.

첫째, GSP를 활용한 학습을 통해 학생들은 도형의 성질을 더 쉽게 파악할 수 있었다. 평행사변형 작도에서 학생 A는 “학교 수업시간에도 이런 수업을 했으면 좋겠어요. 제가 직접 작도해보니깐 도형의 성질이 더 쉬워요”라는 말을 하였다. 그 이유로는 GSP를 활용해 도형을 직접 작도해보고 작도한 도형의 변의 길이와 각의 크기를 바로바로 측정할 수 있어서 좋았다는 의견, 그리고 에니메이션 기능과 드레그 기능을 사용함으로써 도형의 성질을 연속적으로 관찰할 수 있어 성질을 이해하는데 많은 도움이 되었다는 의견 등이 있었다.

둘째, 증명문제에 대한 접근방식에서 다양한 사고 활동을 촉진시켰다. 처음에는 학생들이 증명문제에 대한 접근 방식이나 정리를 분석하는 과정에서 많은 어려움이 있다고 하였는데, GSP를 활용한 수업이 종료된 후에 실시한 면담에서는 GSP를 활용해 도형을 직접 작도해봄으로써 어렵게만 느껴졌던 증명문제가 조금은 친숙해졌다는 의견이었다. 본 연구자가 작도과정을 관찰하고 면담해본 결과 학생들이 GSP를 활용해 도형을 작도해봄으로써 명제의 이해가 쉬워지고 도형의 성질을 정확하게 이해하면서 증명문제에 쉽게 접근하는 모습이었다. 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형, 사다리꼴의 성질에 관한 증명에서 학생들이 작도한 그림을 보면서 변의 길이나 각의 크기 등을 직접 측정해보고 본

인 스스로 해결하려고 하는 모습들을 관찰할 수 있었다.

셋째, GSP를 활용한 수업이 도형의 성질을 직접 눈으로 확인하고 조작하면서 학생들의 흥미를 유발하고 호기심을 불러일으켜 도형단원에 대한 자신감을 갖게 하였다.

연구 결과 GSP 프로그램이 제공하는 여러 가지 기능은 중학교 2학년 학생들이 도형 수업에서 자유롭게 사고하고 실험적인 놀이를 해보면서 개념을 탐구하고 관찰을 통한 추측 및 발견된 사실에 대한 정확한 이해를 할 수 있도록 도와주고 창의력 향상에 도움을 주리라 생각한다.

마지막으로 본 연구에서 얻은 결과를 바탕으로 학교 현장에서 다양한 교구 및 테크놀로지를 활용하여 수업을 전개하기 위하여 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 학교마다 여러 가지 공학적 도구 및 소프트웨어를 활용할 수 있도록 충분한 공간이 확보되어야 하고, 소프트웨어 구입을 충분히 하여야 한다.

둘째, 기존의 소프트웨어보다 더 나은 교육용 멀티미디어 저작도구의 개발과 보급이 이루어져야 한다. 현장 교사들에게도 멀티미디어를 활용한 수업이 계속 이루어지도록 교사를 위한 교육 연수의 기회가 많이 주어져야 한다. 그리고 무엇보다도 교육매체로서 컴퓨터 활용에 대한 긍정적인 인식의 변화가 필요하다.

셋째, 교사 스스로가 컴퓨터를 활용한 수업을 위한 자료 개발에 힘써야 한다. 대체로 많은 수학 교사들이 칠판을 사용한 설명식 수업을 주로 하고 있으며, 컴퓨터를 활용해서 수업을 진행하더라도 인터넷에 있는 정형화된 자료를 다운받아 그대로 사용하는 경우가 많다. 최소한 자신의 스타일에 맞게 변형하거나 새롭게 수업 자료를 개발해보는 것은 학생들의 흥미로운 수업을 위해 반드시 필요하다.

위와 같은 내용들이 해결된다면 더욱더 재미있고 적극적인 수학 수업을 기대할 수 있을 것이다. 또한 도형 단원의 학습뿐만 아니라 더 나아가 수학 학습에 긍정적인 영향을 미칠 것이라 기대된다.

참 고 문 헌

[1] 김미아, GSP 프로그램을 활용한 수업이 7단계 도형단원 학습에 미치는 영향 분석, 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2009

[2] 김영선, 종이접기와 GSP를 활용한 학습과정 탐구(8-나 도형의 성질 단원을 중심으로), 순천대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2007

[3] 김양희, 교사를 위한 수학교육론 특강, 10101, 2005

[4] 노영순, 학교 현장의 정보화 시설 보급 및 운용과 정보화 교육 정책에 중등학교 수학교사들의 의식 조사, 공주대학교 교육연구소, 15, 1999

[5] 박은정, Van Hiele 이론에 기초한 중등기하 개선방향 연구, 아주대학교 교육대학원 석사학위논문, 2001

[6] 안연희, GSP를 활용한 학생중심수업의 학습효과에 관한 연구, 국민대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2001

[7] 손인수 외 3인, 예제로 배우는 한글 GSP, 1999

[8] 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 1998

[9] 우정호 외 9인, 중학교 2학년 수학 교과서, 두산동아(주), 2010

[10] 이상혁, 고등학교 이차곡선 지도를 위한 학습자료 개발 (GSP를 활용하여), 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2003

[11] 이창연, 반힐레 이론과 GSP를 활용한 중학교 기하영역에 관한 연구 (8-나 단계의 사각형의 성질을 중심으로), 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2010

[12] 정성두, GSP를 활용한 고등학교 이차곡선의 지도에 관한 연구, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2000

[13] 정현정, GSP를 활용한 수학수업의 효과(중학교 3학년 원과 비례를 중심으로), 공주대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2008

[14] 최부일, GSP를 활용한 Van Hiele의 기하·학습 단계 연구 (중학교 8-나 단계를 중심으로), 숙명여자대학교 교육대학원 석사학위논문, 2007

[15] 한혜숙·신현성, 증명학습에 대한 학생들의 성향과 GSP를 활용한 증명학습, 한국학교수학회논문집, 11(2), pp. 299~314, 2008

[16] 황혜정 외 5인, 수학교육학신론, 문음사, 2007

<부록1> 사전·후 설문지

설문지

이 설문지는 여러분의 수학에 대한 생각, 태도 등을 알아보기 위한 것입니다. 조사의 결과는 공개하지 않을 것이며, 본 연구의 목적으로만 사용할 것입니다. 각 문항을 읽고 자신에게 적합하다고 생각되는 곳에 ○표 해 주십시오.

번호	문항내용	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 수학에 소질이 있다고 생각한다.					
2	나는 다른 과목에 비해 수학이 더 재미있다.					
3	나는 수학수업시간에 발표를 많이 한다.					
4	혼자 힘으로 해결되지 않는 수학문제는 포기하는 편이다.					
5	나는 수학성적이 나빠질까봐 걱정한다.					
6	수학이 사고력을 기르는데 도움이 된다고 생각한다.					
7	나는 수학시간이 기다려진다.					
8	수학문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다 다양한 방법을 찾아보려고 한다.					
9	나는 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 노력한다.					
10	나는 수학을 공부하면서 도형 단원이 어렵다.					

설문지

여러분들이 학습한 GSP를 활용한 수업에 대한 반응을 조사하고자 합니다. 수학 학습을 보다 바람직하고 효과적으로 수행하기 위한 자료를 얻기 위한 것이니 성실히 대답해 주시기 바랍니다. 자신에게 적합하다고 생각되는 곳에 ○표 해 주십시오.

번호	문항내용	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	컴퓨터를 능숙하게 다룰 수 있다.					
2	수학 수업에서 칠판이 아닌 새로운 수업도구를 이용하는 수업이 필요하다고 생각한다.					
3	이번 수업 이외에 수학수업에서 컴퓨터를 이용한 수업을 받아 본 적이 있다.					
4	수학 수업시간에 컴퓨터를 이용하여 공부하는 것이 도움이 된다.					
5	각 개인이 GSP 프로그램을 이용하여 도형을 직접 조작해보는 것이 도형단원 학습에 많은 도움이 되었다.					
6	수학시간에 도형단원을 학습할 때 GSP 프로그램을 사용하면 좋겠다.					
7	GSP 프로그램을 개인적으로 공부해서 활용해 볼 생각이 있다.					
8	GSP 프로그램을 활용한 수업을 한 후 느낀 점이나 소감을 솔직하게 써 보세요.					

<부록2> 사전·후 평가지

사전 평가지

학교: 이름:

1. 삼각형이 하나로 결정되는 조건을 3가지 적으시오.

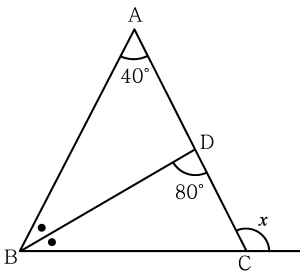
2. 삼각형의 세 변의 길이가 $3cm$, acm $10cm$일 때, a의 값의 범위를 구하시오.

3. 다음 물음에 답하시오.

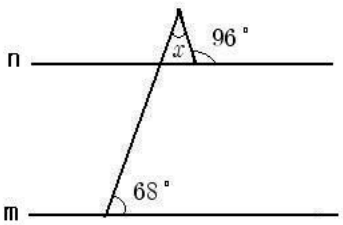
(1) 삼각형의 세 내각의 크기의 비가 3 : 4 : 5일 때, 세 각의 크기를 각각 구하시오.

(2) 대각선의 총수가 54개인 다각형은 무엇인지 구하시오.

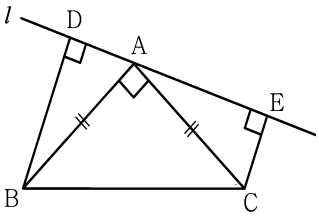
4. 다음 그림에서 $\angle ABD = \angle DBC$이다. 이 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.



5. 다음 그림에서 $n//m$일 때, $\angle x$를 구하시오.



6. 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변 삼각형 ABC의 꼭지점 A를 지나는 직선 l위에 점 B, C에서 내린 수선의 발을 각각 D, E라 할 때, $\angle ABD = 15^\circ$ 일 때, $\angle ACE$의 크기를 구하시오.



7. 다음 ( )안에 옳은 것은 ○, 옳지 않은 것은 × 를 하시오.

(1) 육각형의 대각선의 수는 18 개다. ( )

(2) 정십각형의 한 내각의 크기는 120° 이다. ( )

(3) 모든 변의 길이가 같은 다각형은 정다각형이다. ( )

(4) 모든 다각형의 외각의 크기의 합은 360° 이다. ( )

(5) 오각형의 내각의 합은 540° 이다. ( )

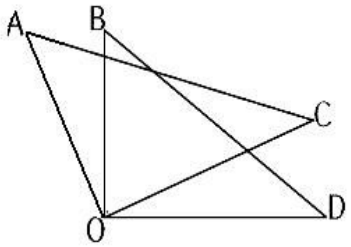
(6) 십이각형의 내각의 크기의 합은 900° 이다. ( )

(7) 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않은 두 각의 크기의 합과 같다. ( )

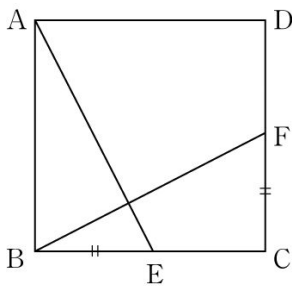
(8) 십각형의 한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 개수는 7 개다. ( )

8. 한 내각의 크기가 135° 인 정다각형의 한 외각의 크기를 구하시오.

9. 그림에서 $\triangle AOC$와 $\triangle BOD$는 $\angle AOC = \angle BOD = \angle R$인 직각삼각형이고 $\angle AOB + \angle COD = 70^\circ$ 일 때, $\angle BOC$의 크기를 구하시오.

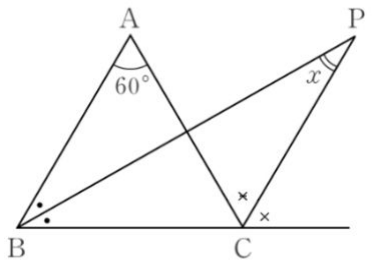


10. 그림의 정사각형에 $\triangle ABE \equiv \triangle BCF$ 이다. 이 때, 성립하는 합동조건을 설명하시오.

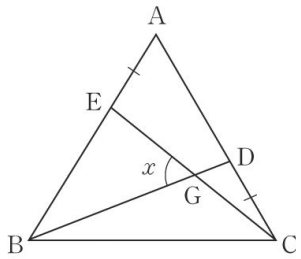


11. 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180° 이다. 그 이유를 설명하시오.

12. 다음 그림에서 점 P는 $\angle B$의 이등분선과 $\angle ACB$의 외각의 이등분선과의 교점이다. 이때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

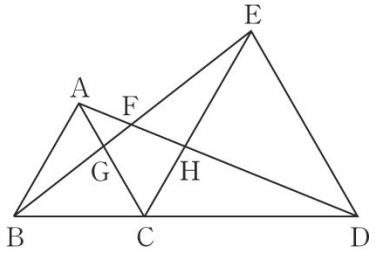


13. 다음 그림과 같은 정삼각형 ABC에서 $\overline{AE} = \overline{CD}$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.



14. 삼각형의 합동조건 3 가지를 적으시오. (간단히 기호로 나타내시오.)

15. 선분 BD위에 점 C를 잡고, 선분 AC, EC를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 ABC, ECD를 다음 그림과 같이 만든다.



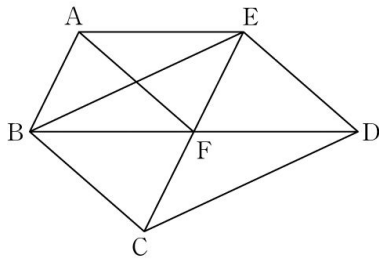
(1) $\triangle ACD \equiv \triangle BCE$이 되는 이유를 설명하시오.

(2) $\angle ABE = \angle ADB$ 인 이유를 설명하시오.

사후 평가지

학교: 이름:

1. 다음 그림에서 □$ABFE$와 □$BCDE$는 모두 평행사변형이다. △ABF의 넓이가 $15cm^2$일 때, □$BCDE$의 넓이는?



2. 다음 사각형 중에서 평행사변형인 것은?

① $\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AB}=5cm$, $\overline{DC}=5cm$

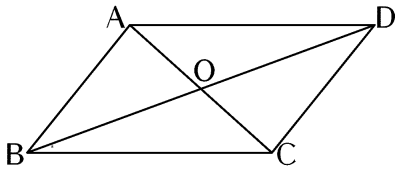
② $\overline{AB}=7cm$, $\overline{BC}=8cm$, $\overline{CD}=7cm$

③ $\angle A=100^\circ$, $\angle B=80^\circ$, $\angle C=80^\circ$

④ $\overline{OC}=6cm$, $\overline{OD}=4cm$, $\overline{OA}=4cm$
$\overline{OB}=6cm$ (단, 점 O는 두 대각선의 교점)

⑤ $\overline{AB}\perp\overline{AD}$, $\overline{BC}\perp\overline{CD}$

3. 다음 보기 중 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 되기 위한 것을 고르면?



<보기>

(ㄱ) $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{BC}=\overline{CD}$

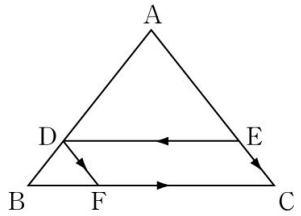
(ㄴ) $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$

(ㄷ) $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$

(ㄹ) $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$

4. 평행사변형 $ABCD$에서 $\angle A:\angle D=5:4$일 때, $\angle B$의 크기는?

5. 다음은 △ABC에서 $\overline{BC} // \overline{DE}$일 때, $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$임을 증명하는 과정이다.



[증명]

주어진 그림에서 점 D를 지나 $\overline{AC}$ 에 평행인 직선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 F라 고 하면, $\triangle ADE$와 $\triangle DBF$에서

$\angle ADE = \angle DBF$, $\angle AED = \angle C =$ (①)

이므로 $\triangle ADE \backsim$ (②) (AA 닮음)

$\therefore\ \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} :$ (③)

그런데 $\square DFCE$는 평행사변형이므로

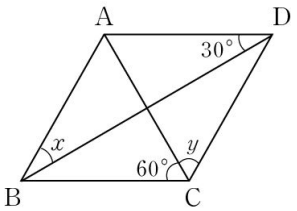
$\overline{DF} =$ (④)

따라서, $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} :$ (⑤)

다음 중 ( ) 안의 내용으로 옳지 않은 것은?

① $\angle DFB$ ② $\triangle ABC$ ③ $\overline{DF}$
④ $\overline{EC}$ ⑤ $\overline{EC}$

6. 다음 그림과 같은 평행사변형 $ABCD$에 서 $\angle ADB = 30^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$ 일 때 $\angle x$, $\angle y$의 크기를 각각 구하여라.



7. 다음 중 평행사변형의 성질로만 짝지어진 것은?

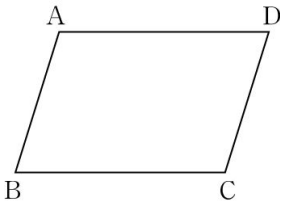
㉮ 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
㉯ 두 대각선의 길이가 같다.
㉰ 한 쌍의 대변이 평행하고 다른 한 쌍의 대변의 길이가 같다.
㉱ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
㉲ 이웃하는 두 변의 길이가 같다.

① ㉮, ㉯, ㉱ ② ㉮, ㉯, ㉰
③ ㉮, ㉯, ㉰, ㉱ ④ ㉮, ㉱
⑤ ㉮, ㉯, ㉰, ㉱, ㉲

8. 다음에 주어진 사각형 중에서 두 대각선의 길이가 같은 사각형을 모두 고르면? (정답 2개)

① 사다리꼴 ② 평행사변형
③ 직사각형 ④ 마름모
⑤ 정사각형

※ 평행사변형 $ABCD$가 다음 조건을 만족하면 어떤 사각형이 되는지 물음에 답하여라. (9번~12번)



9. $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이면 사각형 $ABCD$는 어떤 사각형인가?

10. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$이면 사각형 $ABCD$는 어떤 사각형인가?

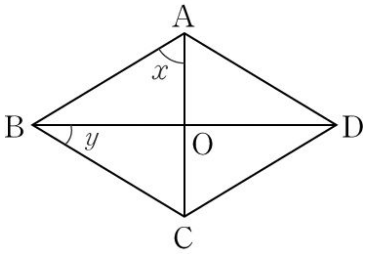
11. $\angle A = 90^\circ$ 이면 사각형 $ABCD$는 어떤 사각형인가?

12. $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$이면 사각형 $ABCD$는 어떤 사각형인가?

13. 다음 중 평행사변형이 직사각형으로 될 수 있는 조건은?

① 이웃하는 두 변의 길이가 같다.
② 이웃하는 두 내각의 크기가 같다.
③ 한 쌍의 대변의 길이가 같다.
④ 두 대각선이 직교한다.
⑤ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

14. 마름모 $ABCD$에서 $\angle x + \angle y$의 크기는?



15. 직사각형의 네 변의 중점을 차례로 연결한 사각형을 $ABCD$라 할 때, 다음 중 □$ABCD$와 관련 있는 것을 모두 고른 것은?

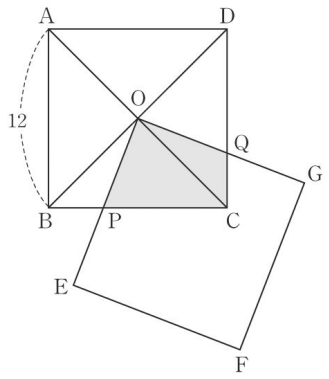
㉠ 네 변의 길이가 모두 같다. ㉡ 네 각의 크기가 모두 같다. ㉢ 두 대각선의 길이가 서로 같다. ㉣ 두 대각선은 서로 직교한다. ㉤ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

① ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉣, ㉤
③ ㉡, ㉢, ㉣ ④ ㉠, ㉢, ㉣
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

16. 다음 중 평행사변형 $ABCD$가 정사각형이 될 수 있는 조건으로 적당하지 않은 것은? 단, 점 O는 두 대각선의 교점이다. (정답 2개)

① $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$
② $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{CO} = \overline{DO}$
③ $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{BC}$
④ $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
⑤ $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

17. 다음 그림에서 □$ABCD$와 □$OEFG$는 합동인 정사각형이다.
$\overline{AB} = 12$일 때, □$OPCQ$의 넓이는?



18. 다음 중 정사각형이 될 수 없는 것은?

① 서로 이웃한 변의 길이가 같은 직사각형

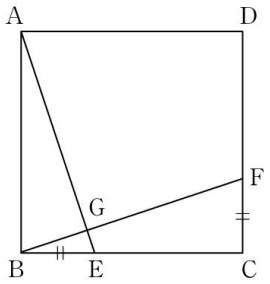
② 한 내각의 크기가 90° 인 마름모

③ 두 대각선의 길이가 같은 마름모

④ 두 대각선이 수직으로 만나는 직사각형

⑤ 대각선이 수직으로 만나고 두 대각선의 길이가 같은 사각형

19. 아래 그림의 정사각형 $ABCD$에서 $\overline{BE}=\overline{CF}$일 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



① $\overline{AB}=\overline{BC}$

② $\overline{AE}=\overline{BF}$

③ $\angle AEB=\angle BFC$

④ $\angle EAB=\angle BEG$

⑤ $\angle ACF=90^\circ$

20. 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형, 사다리꼴의 집합을 각각 A, B, C, D, E라 할 때, 포함관계를 나타내어라.

<부록3> 개인별 학습지

개인별 학습지-평행사변형

〔**물음**〕 평행사변형의 정의를 쓰시오.

〔**작도 및 결과 쓰기**〕

1. 평행사변형을 GSP화면에 작도하세요.

2. 평행사변형의 모든 변의 길이와 각의 크기를 측정하세요.

3. 측정값으로부터 알 수 있는 사실은 무엇일까요? 토론해봅시다.

4. 평행사변형에서 대각선을 그어 그 길이를 측정하고 토론해봅시다.

5. 본인이 작도한 그림을 보면서 합동인 삼각형을 찾아보시오. 또한 합동인 이유(조건)도 설명하시오.

6. 평행사변형의 성질을 쓰시오.

개인별 학습지-여러 가지 사각형

〔**물음**〕 직사각형, 마름모, 정사각형, 등변사다리꼴의 정의를 각각 쓰시오.

〔**작도 및 결과 쓰기**〕

1. 직사각형, 마름모, 정사각형, 등변사다리꼴을 GSP화면에 작도하세요.

2. 각각의 도형들의 대각선을 그어 변의 길이와 각의 크기를 측정하고 토론해봅시다.

3. 직사각형의 성질을 쓰시오.

4. 마름모의 성질을 쓰시오.

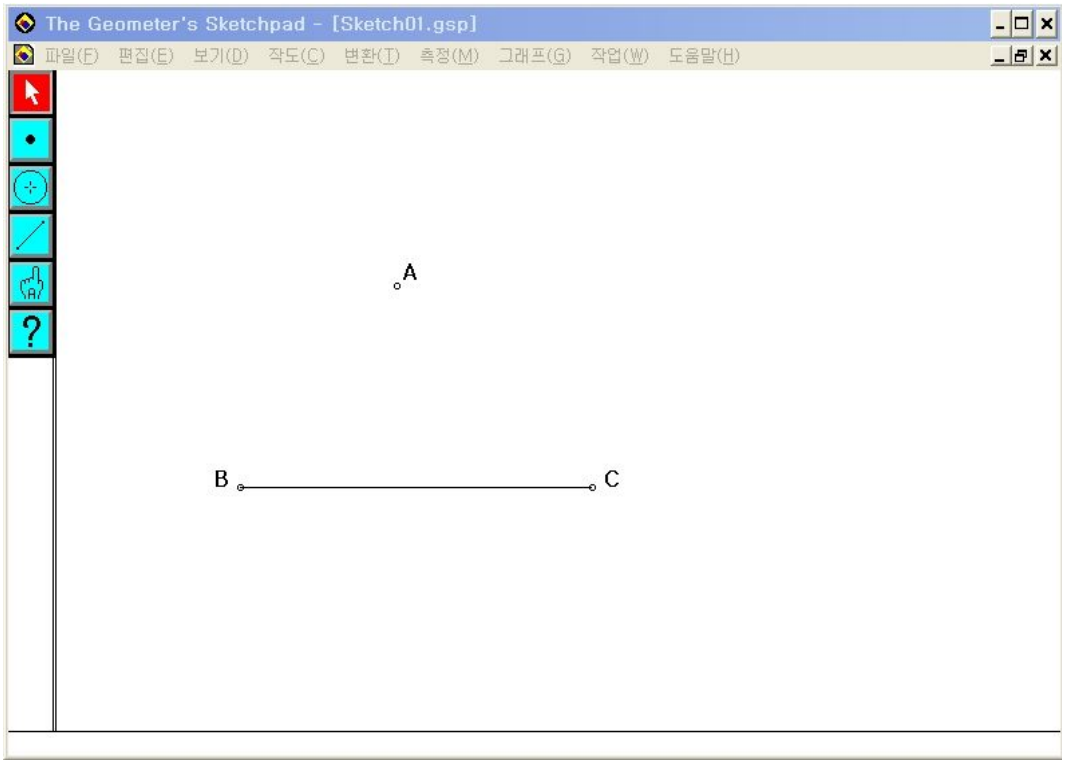
5. 정사각형의 성질을 쓰시오.

6. 등변사다리꼴의 성질을 쓰시오.

7. 여러 가지 사각형들 간에 관계에 대해서 토론해봅시다.

<부록4> 연구에 사용된 기본적인 작도

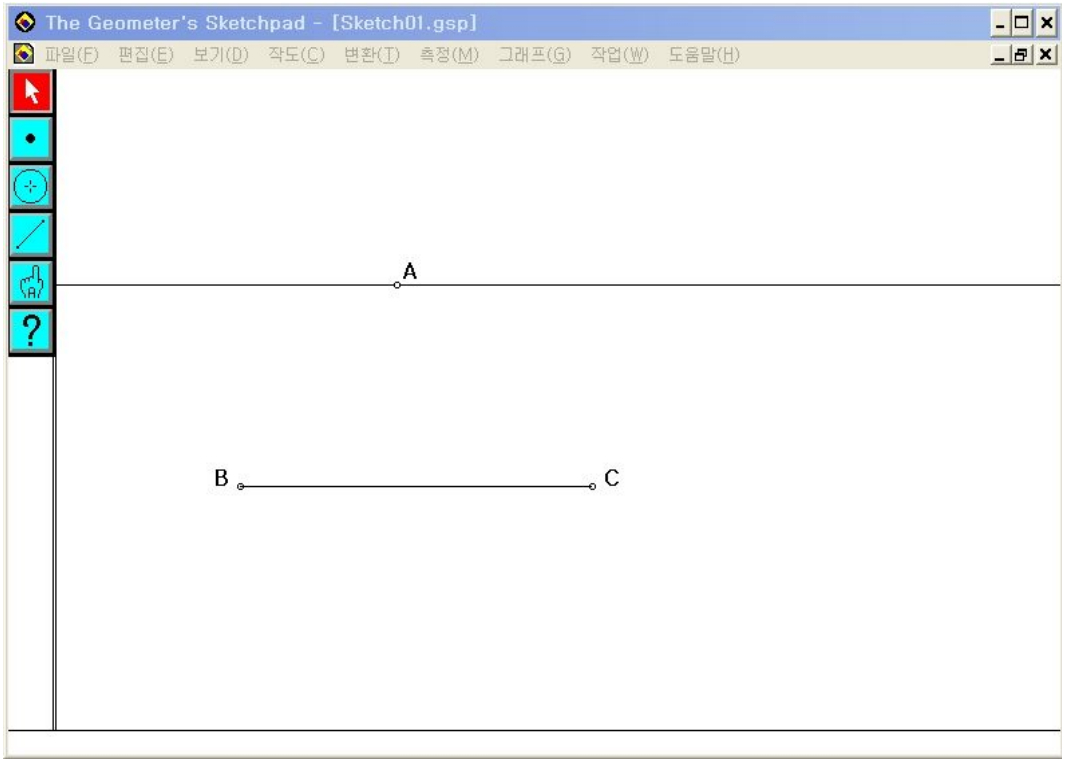
1. 점, 선분의 작도



① 도구를 이용하여 점 A를 작도한다.

② 도구를 이용하여 선분 BC를 작도한다.

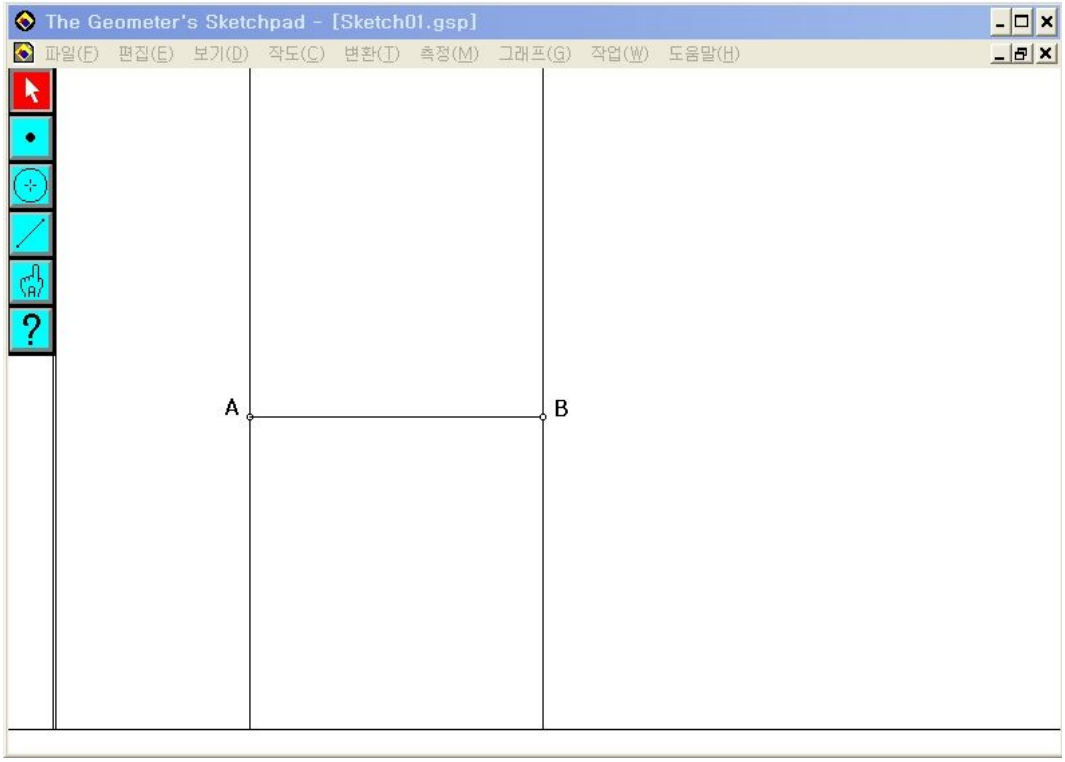
2. 평행선의 작도



① 점 A와 선분 BC를 그린 후 도구로 점과 선분을 선택한다.
이때 선분의 양 끝점을 선택하지 않아야 한다.

② [작도]-[평행선]을 선택하여 평행선을 작도한다.

3. 수선의 작도

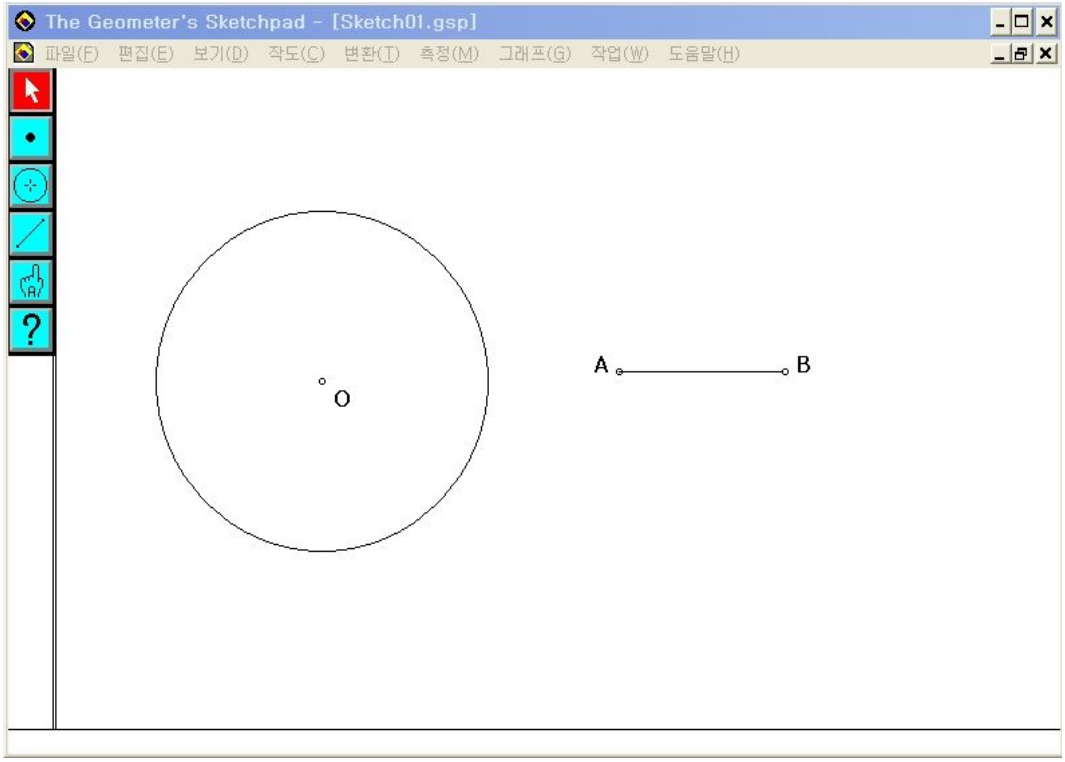


① 선분 AB를 작도한다.

② 선분 AB에서 점 A와 점 B를 지나는 수선을 작도한다.

[작도]-[수선]을 선택하여 작도한다.

4. 중심과 반지름의 길이가 주어진 원의 작도



① 점 O를 작도하고, 그 점과 길이를 알 수 있는 선분 AB를 선택한다.

② [작도]-[중심과 반지름이 주어진 원]을 선택하여 원을 작도한다.

선분의 길이를 변화시키면 원의 크기가 변한다.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20088071	과 정	석사
성 명	한글: 김 미 애 한문: 金 美 愛 영문: Kim Mi-Ae				
주 소	광주광역시 서구 화정1동 화정현대아파트 100동 601호				
연락처	E-MAIL: goctkfrkxdl@hanmail.net				
논문 제목	한글 : GSP를 활용한 도형 지도에 관한 연구 -중학교 2학년을 중심으로- 영어 : A study on the teaching of geometric shapes using GSP -Focused on second grade middle school-				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집·형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포·전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송·출력을 허락함.

동의여부 : 동의(○) 반대( )

2011 년 2 월 25 일

저작자: 김 미 애 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하