[UCI]I804:24011-200000240236

2010년 8월
교육학석사(수학교육)학위논문

입체도형의 부피에 대한 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 호

입체도형의 부피에 대한 연구

A Study on the Volume of Solid Figures
-Centering on the Middle School-

2010 년 8 월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 호

입체도형의 부피에 대한 연구

지도교수 한 승 국

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2010 년 4 월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 호

김호의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 인

심사위원 조선대학교 교수 인

심사위원 조선대학교 교수 인

2010 년 5 월

조선대학교 교육대학원

목 차

ABSTRACT

제 1 장 서 론 ····· 1

제 2 장 입체도형 관련 현행 학업 실태 조사 ····· **3**

1. 연구 대상 평가분석 ····· 3

2. 입체도형에 대한 학습 실태조사 ····· 7

제 3 장 입체도형 관련 교재 분석 및 재구성 ····· **10**

1. 현행 교과서에서 입체도형에 대한 설명 ····· 10

2. 입체도형 관련 자료 재구성 ····· 14

가. 각뿔의 부피 ····· 14

나. 원의 부피 ····· 17

다. 구의 부피 ····· 19

제 4 장 결 론 ····· **25**

참 고 문 헌 ····· 27

A B S T R A C T

A Study on the Volume of Solid Figures

Kim Ho
Advisor : Prof. Han Seung-Gook
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

A grade school education in Korea during the current phase of the shape of a section of the volume of various three-dimensional shape is being introduced.
However, the volume of various three-dimensional shape, look for the approach, each shape depending on the type of specific test, an intuitive mathematical reasoning, mathematical reasoning in detail and explained by the difference in the way that you can see that there is.
This explains the difference between the way that the shape of knowledge about the mathematical background can be understood as dependent. However, when students encounter these methods have a mathematical understanding of how chaos can be learned in the past and not relevant to the new knowledge can be individually accept there will be a limit.In this study, three-dimensional shape, a clear understanding of the concept of volume and shape the students to recognize and more accurately, the mathematical basis of this knowledge is to provide an opportunity to buy. This basic ipchet

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

현재 우리나라 교육 과정 중에서 중1 단계의 도형 단원에서는 여러 입체도형의 부피가 소개되고 있다. 그러나 여러 입체도형의 부피에 대한 접근 방법을 보면, 각 도형의 종류에 따라 구체적 실험, 직관적인 수학적 추론, 세부적 수학적 추론 등을 이용하여 그 설명 방식에 차이가 있다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 설명 방식의 차이는 그 도형에 관한 수학적 배경지식에 대해 많이 의존되는 것으로 이해 될 수 있다. 그러나 학생들이 이런 방식을 접할 때 수학적 이해 방식에 혼란을 가질 수 있으며, 예전에 배운 지식들과 새로운 지식에 관련성이 없어 개별적으로 받아들이게 될 수도 있다는 한계가 있을 것이다.

물론 상위학년(고등학교)의 미분적분 단원에서 회전체와 도형의 부피는 또 다루어지고 있지만 미분적분을 모든 학생이 배우는 것이 아니고 선택적으로 배우기 때문에 더욱 중학수학에서 어느 정도 수학적 경험이 이루어져야 한다. 이런 상황에서 다소 구체적이지 않더라도 구체물을 통한 실험적 방법과 미분적분학을 통한 논증 사이에 수학적 추론방법에 대한 필요성이 제기된다.

학교 교육에서 기하에 대한 교육은 자연 현상 및 실생활이 상황을 통해 평면과 공간의 개념을 이해하며, 이에 대해 그림을 이용하거나, 계량화하는 것이 기초적인 학습활동이고, 뒷부분에서는 연역적 추론을 통해 문제를 해결 할 수 있게 된다. 입체도형에서 기본적인 사실을 이해하는 것은 매우 중요하며, 수학적 사고과정에서 형식적사고와 비형식적 사고를 동시에 거론하는 것은 기하영역에서 효과적이다. 또한, 기하학적 개념은 수학에서 여러 부분의 개념과 매우 연관성이 깊고, 기하문제는 해결방법이 하나의 방법만 있는 것이 아니고 여러 가지 해결 방법이 있기 때문에 이 문제를 접하는 학생들에게 탐구하고 창의적인 사고력을 신장시키기에 매우 좋은 소재가 된다.

그러나, 이렇게 기하학의 중요성을 인식하면서도 현재 학교현장에서의 수업은 수학적 사고과정보다는 유클리드 기하의 논리적 증명이나 형식적 내용을 너무나 강조하므로 학생들이 기하에 대한 생각을 너무 어렵다고 생각하는 계기가 되며, 교수·학습 과정은 연역적 증명에 치우쳐서 학생들이 생각하거나 탐구하는 기회가 배제되고 있는 것 같다. 이로 인해, 기하 교육은 가르치는 사람이나 배우는 입장의 사람들이나 가장 어렵고 재미없는 부분으로 인식하게 되었다. 그 대표적인 예로 학생들이 도형의 부피를 구하는 부분에서 대부분이 그 도형에 대한 성질이나 분석, 탐구를 통한 것이 아니고 오로지 암기에 의존한 공식을 이용 하고 있다. 입체도형의 겉넓이와 부피가 단순히 기본 도형에만 국한된 것이 아니라는 것을 알아야 할 것이다. 이는 교사가 학생들에게 단순한 공식만을 암기하게 할 것이 아니고 원리적인 부분을 이해하고 탐구하는 능력을 길러 줘야 한다는 것을 의미한다고 볼 수 있다.

본 연구는 학생들이 입체도형의 겉넓이와 부피에 대한 기본적인 공식을 이해하고, 그것이 만들어진 과정을 살펴보면서, 입체도형의 부피에 대한 개념을 명확하게 하는데 그 목적이 있다. 또, 현행 교과서에서의 접근방법과, 설문조사를 통해서 학생들의 이해정도를 알아보고 현행 수학교과서에서의 부피에 대한 공식의 접근방법을 살펴보고자 한다.

서론에 이어서 2장에서는 현행 교과서와 연구수업을 비교해보고 입체도형에 대한 부피에 대한 설명에 있어서 그 예시들을 살펴보고 구의 부피와 겉넓이에 대한 설문조사 결과를 확인해보고자 한다.

또, 3장에서는 여러 입체도형의 부피의 일반화 과정에 대해서 살펴보고 기존의 공식들을 수학적으로 정리해보기로 한다.

4장에서는 본문 내용을 요약정리하고, 입체도형의 부피에 대한 기본 개념을 세울 수 있도록 하기 위해 수학적 사고를 통해 수학화가 이루어져야 함을 제안하고자 한다.

제 2 장 입체도형 관련 현행 학업 실태조사

1. 연구 대상 분석

현재 광주소재의 중학교 2학년 학급 학생들의 학업 실태 분석을 실시하였다. 이 실험에서 제한점은 같은 학생들을 비교분석을 해야 하는데, 서구 지역의 여러 학교 생들이 이번 연구 대상으로 참여하였으며, 특정 학교를 대상으로 하지 못한 점이 제한점이 될 수 있다. 그러다 보니 본 실태조사가 일반화 되지 못한다는 제한점이 있지만 여러 학교 학생들이 대상이 되다보니 어느 한 학교에 제한되지 않고 광주 서구 지역 전체가 대상이 되었다는 장점도 있다.

먼저, 현재 중학교 2학년에 제학중인 학생들을 대상으로 (참여인원 총 75명)에 대한 실태를 분석해 보자.

학생들의 성적 분포는 [표1]와 같았다.

[표1] 수학 성적 분포 상황

(1학기 1차 고사 성적)

구 분	90%이상	80%이상~90%미만	70%이상~80%미만	60%이상~70%미만	50%이상~60%미만	40%이상~50%미만	40%미만	계	평균
학생 수	10	8	16	11	13	12	5	75	79.01
비율(%)	13.33%	10.67%	21.33%	14.67%	17.33%	16%	6.67%	100	

이 학생들은 60점 이상의 학생들이 전체 60%를 차지하는 것으로 보면 학생들의 수준이 중급 이상의 학생들이 대부분이라는 평가를 할 수 있으며, 학생들의 수준도 상급반 정도라고 할 수 있을 듯 하다.

이번에는 수학교과에 대한 흥미도를 조사는 하였는데 다음 [표2]와 같은 결과가 나왔다.

[표2] 수학에 대한 흥미도

구 분	매우 좋아한다	좋아한다	보통이다	싫어한다	아주 싫어한다	계
학생수	2	16	23	25	9	75
비율(%)	2.7	21.3	30.7	33.3	12	100

이번 실험에 참여한 학생들은 수학에 대한 흥미가 보통 이상인 학생이 54.7%로 수학에 대해 어느 정도 흥미를 가지고 있다가 상당히 큰 비중을 차지하고 있음을 알 수 있다. 그러나, 보통이라고 대답한 학생의 상당수가 실질적으로 수학에 흥미가 약한 것을 감안한다면 "좋아한다." 이상이 24%로 낮아지므로 수업 참여에 대한 의지가 강하지 않다고 할 수 있다. 그래서, 학생들의 개개인의 수업참여를 이끌어 낼 수 있는 격려와 관심이 필요한 것 같다.

다음으로는 학교 수업에 대해 수학에 대한 이해도를 물어 보았다.

[표3] 수학에 대한 이해도 조사

구 분	이해가 잘 된다	대부분 이해된다	보통이다	이해가 잘 안된다	전혀 이해가 안된다	계
학생수	6	19	27	14	9	75
비율(%)	8	25.3	36	18.7	12	100

위 표에서와 같이 수학에 대한 이해도 조사에서 이해가 된다는 학생과 보통이라는 학생이 과반 수 이상이지만 이해 안 된다는 학생도 23명이 있으므로 수업 중 이해가 되었는지 정확히 판단할 필요가 있으며, 수업 참여에 어려움을 느끼는 학생들도 이해할 수 있도록 수업 참여에 대한 방법 및 설명에 대한 폭 넓은 방법 착안에 대한 고민이 필요 할 것 같다.

다음은 이번 설문에 참여한 학생들의 선행학습에 대한 설문 분석이다.

[표4] 선행학습 조사

구 분	선행학습○	선행학습×	계
학생수	49	26	75
비율(%)	65.3	34.7	100

선행학습을 한 학생이 65.3%로 과반수이상 이지만 수학의 기본 개념과 원리에 대한 이해보다는 문제풀이 위주의 학원 수업에 치우쳐져 있는 듯 하다. 따라서 기본 개념과 원리에 충실한 수업이 이루어져야 하지 않을까 싶다.

[표5] 수학과 학습정도

구 분	매일 한다	과제 만 한다	시험 볼 때만	거의 안한다	전혀 안한다	계
학생수	13	26	18	15	3	75
비율(%)	17.3	34.7	24	20	4	100

수학공부를 매일 한다는 학생들이 17.3%를 차지하지만 이것은 학원수업이나 과외수업이 포함된 것이라는 점을 감안 한다면, 대부분의 학생들이 과제 이외는 대부분이 수학에 대한 학습을 하지 않는다고 봐도 무방할 정도이다. 그러므로 숙제나 익힘책을 이용해서 스스로 공부할 수 있는 자료를 지속적으로 제공해 주는 것이 필요하며 수업에 대한 내용을 과제를 통해서 개념 익히기에 중점을 두는 것이 좋지 않을까 하는 생각이 든다.

이번에는 수학과목에 대한 학습 협력자에 대한 질문에 대한 설문 조사 결과이다.

[표6] 수학과목 학습협력자

구 분	부모님, 형제	친구	학원, 과외	기타	없다	계
학생수	8	13	38	10	6	75
비율(%)	10.7	17.3	50.7	13.3	8	100

학원에 다니는 학생의 비율이 높고 친구나 부모님, 형제를 통해 도움을 받는 학생도 있는 편이다. 그러나 수학과목 학습협력자가 없는 학생도 6명이나 되므로 이 학생들에 대한 관심이 요구되며. 이들에게 모둠별 협동수업이나 멘토 수업이 긍정적인 영향을 미치지 않을까 하는 생각이 든다.

[표7] 학습 형태 선호도

구 분	설명식	활동, 게임	토론식	발표식	컴퓨터 활용	계
학생수	37	12	15	8	3	75
비율(%)	49.3	16	20	10.7	4	100

대부분이 설명식 수업을 선호하였다. 그리고 활동/게임, 토론식, 발표식, 컴퓨터 활용 수업을 선호하는 학생도 있으므로 이들 수업 방법을 적절히 활용하여 모든 학생들에게 흥미 있는 수업 위주의 활동을 하는 것이 요구된다.

[표8] 수학에 대한 인식

구 분	매우 필요하다.	약간 필요하다.	보통이다.	필요하지 않다.	전혀 필요하지 않다.	계
학생수	8	21	30	12	4	75
비율(%)	10.7	28	40	16	5.3	100

수학이 필요하다고 생각하는 학생이 응답자의 13.5%이고, 전혀 필요하지 않다고 응답한 학생이 5.3%이다. 보통이상이라고 생각하는 학생들이 전체 학생의 78.7%로 수학에 흥미를 갖고 있건 그렇지 않건 간에 수학이 실생활에 필요하다고 생각하고 있다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 우리 주변의 다양한 수학적 문제를 소개해주는 것이 학습 효과를 높이는데 기여하지 않을까 하는 생각이 든다.

2. 입체도형에 대한 학습 실태조사

2010년 4월 현재 광주광역시에 있는 학교명과 각 학교에서 선정한 교과서 출판사별 현황을 조사한 것은 [표9]과 같다.

[표9] 광주광역시에 소재한 중학교 현황과 출판사 선정현황

2010년 출판사별 현황

학교명	출판사	학교명	출판사	학교명	출판사	학교명	출판사	학교명	출판사	학교명	출판사	학교명	출판사
각화중	두산	대성여중	천재	두암중	천재	북성중	디딤	서광중	비상	숭일중	미래	운남중	미래
경신여중	천재	대자중	천재	무등중	비상	비아중	좋은책	서석중	천재	신가중	미래	운암중	두산
고려중	비상	대촌중	천재	무진중	웅진	산정중	천재	성덕중	천재	신광중	두산	월계중	두산
광덕중	천재	동명중	천재	문산중	디딤	살레시오여중	천재	송광중	천재	신창중	금성	월곡중	비상
광산중	천재	동성여중	대교	문성중	천재	살레시오중	천재	송원중	천재	양산중	두산	월봉중	대교
광주중	비상	동성중	비상	문화중	비상	삼육중	천재	송정중	두산	영천중	두산	유덕중	천재
금구중	미래	동신여중	비상	문흥중	비상	상무중	천재	수완중	천재	용두중	디딤	은혜중	비상
금당중	비상	동신중	두산	봉산중	천재	상일중	미래	수피아여중	천재	용봉중	두산	일곡중	비상
금호중	비상	동아여중	두산	봉선중	천재	서강중	지학	숭의중	디딤	우산중	디딤	일동중	두산

학교명	출판사	학교명	출판사	학교명	출판사	학교명	출판사
월산중	미래	주월중	천재	첨단중	웅진	화정중	천재
전대부중	디딤	중앙중	천재	체육중	대교	효광중	성지
전남중	디딤	지산중	비상	충장중	두산		
정광중	두산	진남중	교학	치평중	천재		
조대여중	지학	진흥중	미래	풍암중	천재		
조대부중	천재	천곡중	천재	하남중	두산		

광주지역 총 중학학교 수 : 83개 학교

천재 출판사 선정학교 : 30개 (36 %)
비상 출판사 선정학교 : 14개 (17 %)
두산 출판사 선정학교 : 14개 (17 %)
미래 출판사 선정학교 : 7개 (8 %)
디딤 출판사 선정학교 : 7개 (8 %)
대교 출판사 선정학교 : 3개 (4 %)
웅진 출판사 선정학교 : 2개 (2 %)
지학사 출판사 선정학교 : 2개 (2 %)
좋은책 출판사 선정학교 : 1개 (1 %)
금성 출판사 선정학교 : 1개 (1 %)
교학사 선정학교 : 1개 (1 %)
성지 출판사 선정학교 : 1개 (1 %)

본 논문에서는 현행 교육과정에서 학생들이 여러 입체도형의 부피에 대한 단원을 배운 후 그에 대한 내용을 얼마나 기억하는지 살펴보는 평가를 실시하였다.

그 중에서 광주 전체 중학교의 53%를 차지하는 천재 교과서와 비상(비유와 상징)이라는 두 교재를 중심으로 분석을 해봤으며, 분석 대상 학생의 출신학교는 빨간색으로 표시된 여섯 학교를 대상으로 실시하였다. 그리고, 대상 학년은 2009년 중학교 1학년 7차 수정교과서를 배운 학생(현 2학년)을 대상으로 총 75명을 평가하게 되었다. (이 평가에 참여한 학생의 분석은 제2장 1절을 참고.)

먼저 각 단원별로 가장 어려웠던 단원을 순서대로 번호를 쓰는 문제에서 1번으로 쓴 단원만 선택하여 [표10]를 작성하였다.

[표10] 단원별 난의도 설문조사

(천재교육 기준, 단위 : 명)

수와 연산				문자와 식		함수	확률과 통계	기하			
I 집합	II 자연수	III 정수	IV 유리수	V 문자와 식	VI 일차 방정식	VII 함수	VIII 통계	IX 도형의 기초	X 작도와 합동	XI 평면 도형	XII 입체 도형
5	3	3	5	6	5	8	9	3	5	6	17

위 [표10]에서 보는 것과 같이 75명중 17명(22.7%)이 입체도형이 어렵다고 응답하였으며, 다음으로 통계와 함수 순으로 조사가 되었다.

그러면 실질적으로 어려워하는지를 알아보기 위하여 각 단원별로 5문항을 천재 및 비상 교과서에 출제된 예제 문제로 60문항을 만들어 2시간동안 평가를 실시한 결과를 단원별 만점을 기준으로 분석한 결과가 [표11]번과 같은 결과를 얻었다.

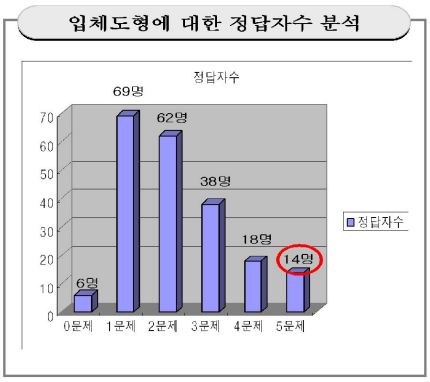
[표11] 단원별 성적조사 분석

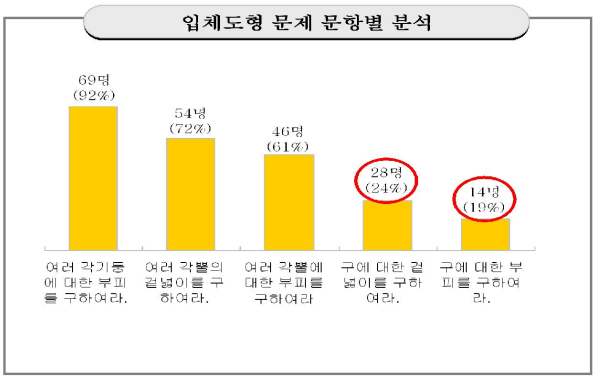
단 원	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
문항수	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
정답률	87%	92%	95%	89%	79%	72%	73%	68%	85%	86%	63%	19%

그러면, 왜 입체도형 단원이 가장 어렵다고 생각하느냐는 질문에 학교 정규 수업 시간에 실험 및 동영상을 통해 이해는 했지만, 문제 적용에 있어서는 그냥 공식을 외우는 형식이어서 잘 기억이 나지 않는다고 응답(37.3%)한 사람이 가장 많았다.

그렇다면, 가장 낮은 성적을 받은 입체도형 단원의 문제들을 확인해 보기로 하자.

전체 75명중 14명(19%)만이 5문제를 모두 맞췄으며, 그 중에서 구에 대한 문제를 대부분의 학생들이 틀렸다. 구에 대한 설명에서 학생들의 개념이나 수학적 이해가 많이 부족하다는 것을 알 수 있었다.([표12] 참고.)





[표12] 입체도형 단원에 대한 분석

각기둥과 관련된 겉넓이는 평면도형적 개념을 적용하여 학생들이 문제를 해결하고 있었으며, 부피는 밑면의 확장. 즉 공간적인 개념을 가지고 수학적인 계산을 통해서 문제를 해결하였다. 하지만, 삼각뿔의 부피와 구의 부피, 또, 구의 겉넓이는 수업시간에 했던 실험적인 방법과 공식 암기로 문제를 해결하는 학생들이 대부분이었지만, 이중에서도 공식암기로 문제를 풀어나가는 학생들이 대부분이었다.

그러므로 공식에 대입하기 편한 문제는 쉽게 풀 수 있었지만 응용을 통해서 해결하는 과정에서 공식적용이 잘 안되는 부분이 발생하였고 이는 학생들이 단순 공식 암기만을 하고 있어서 발생되는 문제점이라고 볼 수 있다.

제 3 장 입체도형 관련 교재 분석 및 재구성

1. 현행 교과서에서 입체도형에 대한 설명

현행 교과서(천재와 비상)에서 입체도형의 부피 단원을 어떻게 설명하고 있는지를 살펴보면 다음과 같다.

가, 각기둥에 대한 부피를 구하는 방법은 직육면체 부피에서 절반으로 나누어서 삼각기둥의 부피를 구한 후에 각기둥들을 삼각기둥들이 모여 있는 것으로 생각하고 구한다. 또, 원기둥의 부피를 구하는 방법은 각기둥의 변의 개수를 무한대로 확장하면 원기둥에 점점 가까워진다는 것을 이용하거나, 초등학교에서 원의 넓이를 구하는 방식과 유추적으로 원기둥의 밑면을 부채꼴로 잘게 나누어 만든 작은 입체도형들을 직육면체 비슷한 모양으로 재결합하는 방식을 이용한다.

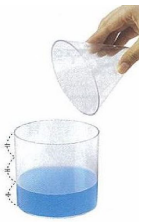
나, 각뿔 혹은 원뿔의 부피를 구하는 방법은 그것과 같은 모양의 그릇에 물이나 좁쌀 등을 채운 다음 밑면과 높이가 똑같은 기둥에 부은 다음 그 높이를 계산하는 방법으로 설명하고 있다.

[그림1] 2009년 수학교과서 비유와 상징 중에서의 뿔에 대한 부피 설명

즉, 사각뿔의 부피는 사각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

마찬가지로 원뿔의 부피도 원기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이 된다.

일반적으로 뿔의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.



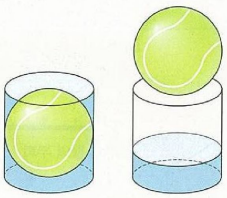
뿔의 부피 밑넓이가 S이고 높이가 h인 뿔의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

[그림2] 2009년 수학교과서 비유와 상징 중에서의 뿔에 대한 부피 설명

다, 구의 부피를 구하는 방법은 위의 각뿔이나 원뿔에서 부피를 구하는 것처럼 실험을 통해서 구하는데, 즉, 구를 물에 넣어서 넘치는 물의 양을 측정하거나 외접하는 원기둥 속에 넣고 빈틈에 들어가는 좁쌀의 양을 측정하는 등의 방법을 이용한다.

개 / 념 / 탐 / 구 오른쪽 그림과 같이 공에 꼭 들어맞는 원기둥 모양의 통이 있다. 이 통에 물을 가득 채운 다음 공을 넣었다가 꺼냈을 때, 남아 있는 물의 높이를 재었더니 통의 높이의 $\frac{1}{3}$이었다.
이 공의 부피는 원기둥 모양의 통의 부피의 몇 배가 되는가?



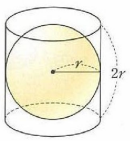
위의 개념 탐구에서 통 속의 물은 공의 부피만큼 넘치므로 공의 부피는 원기둥 모양의 통의 부피의 $\frac{2}{3}$가 됨을 알 수 있다.

실제로 반지름의 길이가 r인 구의 부피는 밑면의 반지름의 길이가 r이고, 높이가 $2r$인 원기둥의 부피의 $\frac{2}{3}$임이 알려져 있다.

따라서 반지름의 길이가 r인 구의 부피를 V라고 하면

$$V=(\pi r^2\times 2r)\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 부피 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V는

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

[그림2] 2009년 수학교과서 비유와 상징 중에서의 구에 대한 부피 설명

이 처럼 도형에 대한 설명방식을 전체적으로 살펴보면 도형의 종류에 따라 그 설명방법이 달라지고 있음을 알 수 있다. 즉, 각기둥의 부피에 대한 설명은 거의 수학적 추론에 의해서 설명되고, 원기둥의 부피는 직관적인 극한과정이나 무한적으로 확장된 도형을 이용하여 다루어지는데 이런 방법은 세밀하지는 않지만 개연성이 있는 하나의 수학적 추론이라고 볼 수 있다. 그렇지만, 뿔이나 구의 부피에 대해서는 수학적 추론보다는 눈에 보이는 구체물에 의존하는 실험적 방법을 택하고 있다.

물론 설명방법이 일관되지 않는 것에는 도형의 종류에 따라 수학적 수준상의 문제가 많은 영향을 주는 것은 사실이다. 먼저 부피의 문제를 살펴보면, 여러 각기둥의 부피는 근본적으로 그 각기둥의 밑면이 이루는 다각형의 넓이에 영향을 받으므로 비교적 수학적 설명이 가능하다. (다각형의 넓이는 삼각형들의 넓이의 합으로 잘 환원되어 설명된다.) 이와 마찬가지로 원기둥의 부피는 이미 학생들이 원의 넓이에 의존하여 직관적인 수학적 추론으로 다룬바 있으므로 원과 같은 수준으로 논의가 가능하다. 그렇지만, 삼각뿔의 경우에는 그 도형이 매우 단순해 보이는 도형이긴 하지만, 다각형의 경우와는 달리 유한개의 조각으로의 분할과 재결합만을 통해 직육면체로 혹은 밑면의 넓이와 높이가 같은 다른 삼각뿔로 변형하는 것이 일반적으로 불가능하다는 사실이(즉, 삼각뿔의 부피를 엄밀하게 정의하기 위해서는 극한의 개념이 도입되어야 한다는 사실이) 'Hilbert의 세 문제'에 대한 Max Dehn의 증명을 통해 밝혀져 있다[1]. 따라서 그에 대한 엄밀한 취급은 현재 중학교 수학의 영역 밖의 것이다.

그러나 중학교 1학년의 수학적 수준의 한계를 인정하더라도 입체도형의 측정에 대한 설명방식의 개선 혹은 보완 및 논의는 필요하다고 보인다. 우선 구체적인 물건을 통해 실험을 하는 것은 학생들이 입체도형의 부피의 크기에 대한 공식을 추측하거나 느낌을 가지게 하는데 적합한 수단이 될 수 있다. 그러나 실험에 의한 설명만으로 마무리 된다면 그 것을 배우는 학생들은 수학과 실험과학의 방법론 사이에서 혼란을 가질 수 있다. 또한 이러한 설명만으로는 새로운 사실들이 기존의 지

식들과 관련성을 가지지 못하고 개별적인 현상의 기술로만 남게 된다[2].

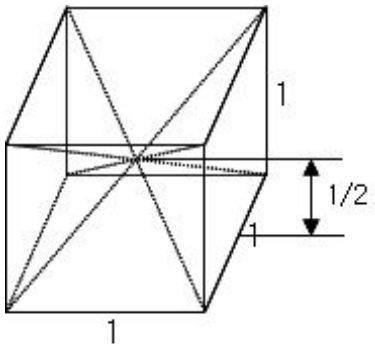
현재 중학교 1학년 교육과정에서 이용할 수 있는 수학적 지식의 수준에는 입체도형의 부피에 대한 이해에 있어서 한계가 있으며, 입체도형 이후에 배운 학습 내용들을 수학적으로 다른 단원과 연계시키지 못하는 것으로 보인다.

2. 입체도형 관련 자료 재구성

가. 각뿔의 부피 (사각뿔, 삼각뿔의 부피)

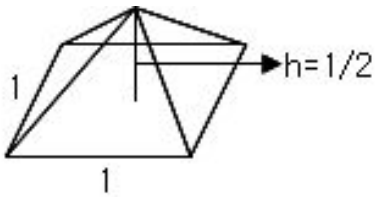
가-1. 사각뿔의 부피

한 변의 길이가 1인 정육면체에서 생각해보자. 이 정육면체를 아래 그림과 같이 6등분을 하면 정사각뿔 6개를 얻을 수 있을 것이다.

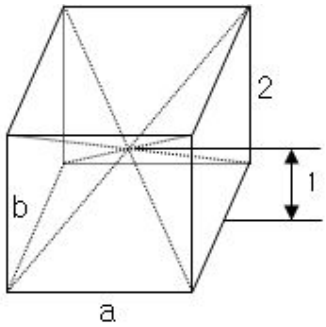


부피 = 1

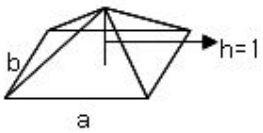
이제, 그 중에 한 모형만 가지고 와서 생각해보면 밑면의 각 변이 1이고, 높이가 $\frac{1}{2}$인 정사각뿔의 부피가 $\frac{1}{6}$이 됨을 알 수 있다.



부피=1/6

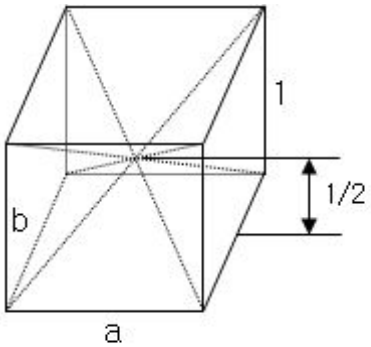


부피 =2ab

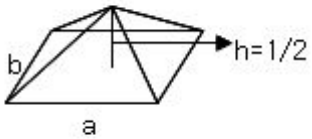


부피=2ab*1/6=1/3ab

이제, 한 차원 높게 생각을 해보자. 밑면의 가로와 세로의 길이를 각각 a, b 이고, 높이가 $\frac{1}{2}$인 사각뿔을 생각해보자. 이 사각뿔은 앞에서 본 정육면체를 가로와 세로의 방향으로 a, b 만큼 팽창하지만, 높이는 고정시킨 1이다. 그러므로 이 사각뿔의 부피는 $\frac{1}{6}$ab가 됨을 알 수 있다.



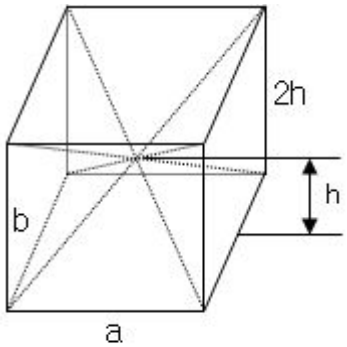
부피 = ab



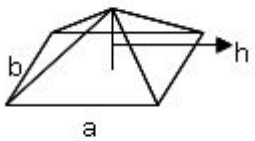
부피=1/6ab

이번에는 가로와 세로를 a, b로 고정한 다음 높이를 변화시켜보자. 앞에서 본 것과 같이 사각뿔의높이를 $\frac{1}{2}$에서 1이 되도록 높이 방향으로 2만큼 확장한 것이다. 그러면, 아래 그림과 같이 사각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}$ab가 된다.

이제, 밑면의 각 변의 길이가 a, b이고, 높이가 h인 사각뿔의 부피를 생각해보기로 하자. 그러면, 이 사각뿔의 밑면은 한 변의 길이가 각각 a, b이고, 높이의 길이가 1인 사각뿔에서 높이가 h로 확장한 것이 된다. 그러므로, 이렇게 확장된 사각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}abh$가 된다.



부피 =2abh



부피=2abh*1/6=1/3abh

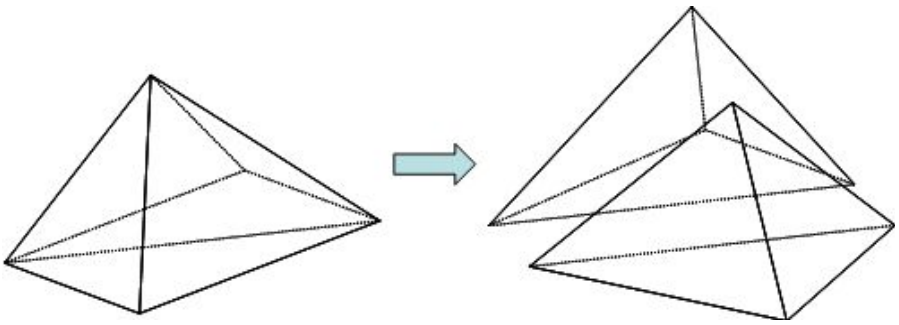
이제 일반적으로, 밑면의 한 변의 길이가 각각 a, b이고, 높이의 길이가 h라고 하는 사각뿔의 부피를 정의한다면 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$\text{사각뿔의 부피} = \frac{1}{3} \times \text{사각뿔의 밑넓이} \times \text{높이}$$

$$= \frac{1}{3}\text{abh}$$

가-2. 삼각뿔의 부피

삼각뿔의 부피는 위에서 본 사각뿔의 부피를 사용하면 어렵지 않게 구할 수 있게 된다. 다음 그림에서 보듯이 삼각뿔은 사각뿔의 절반이 됨을 보여주고 있는데, 이것을 위 사각뿔의 부피에 적용하면 아래의 삼각뿔의 부피 공식을 얻을 수 있다.



사각뿔을 밑면을 대각선으로 이등분하면 삼각뿔 2개가 만들어진다.

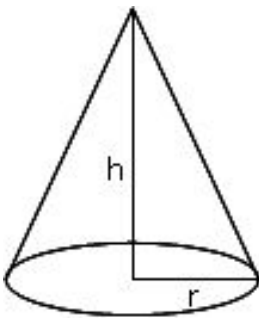
$$\text{삼각뿔의 부피} = \text{사각뿔의 부피} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{사각뿔의 밑넓이} \times \text{높이} \times \frac{1}{2}$$

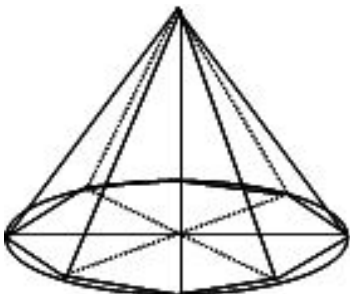
$$= \frac{1}{3} \times \text{삼각뿔의 밑넓이} \times \text{높이}$$

나. 원뿔의 부피

이번에 밑면은 반지름의 길이가 r이고, 높이가 h인 원뿔을 생각해보자.



원기둥의 부피를 구한 것과 같게 밑면을 반지름이 r인 원에 내접하게 정n각형을 만들어서 다음과 같이 밑면이 같은 n개의 삼각뿔로 나타낼 수 있다.



이렇게 되면, 정n각뿔에서 n을 무한대로 확장 시키면 그것은 원뿔의 부피로 근사하게 접근시키게 된다. 이제, 각 삼각뿔들에서 밑변의 길이를 a, 높이의 길이를 b이라 하면 정n각형의 넓이는 $n \cdot \frac{1}{2}ab$이 될 것이다. 따라서, 정n각뿔의 부피를 정리하면 아래와 같이 정리 할 수 있을 것이다.

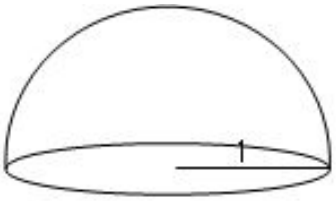
$$
\begin{aligned}
\text{정n각뿔의 부피} &= \text{삼각뿔들의 부피의 합} \\
&= \text{삼각뿔의 부피} \times \mathrm{n} \\
&= \frac{1}{3} \times (\text{삼각뿔의 밑넓이}) \times \mathrm{h} \times \mathrm{n} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}ab \times \mathrm{h} \times \mathrm{n} \\
&= \frac{1}{3} \times n \cdot \frac{1}{2}ab \times \mathrm{h} \\
&= \frac{1}{3} \times \text{정n각형의 넓이} \times \mathrm{h}
\end{aligned}
$$

여기서, n의 값을 무한대로 커질 때 좌변의 정n각뿔의 부피는 점점 원뿔의 부피에 가까워질 것이고, 우변의 정n각형의 넓이가 반지름이 r인 원의 넓이와 같아 질 것이다. 높이 h는 고정된 값이므로 변하지 않는다. 따라서 밑면이 반지름이 r인 원의 넓이이고, 높이가 h인 원뿔의 부피를 다음과 같이 적을 수 있을 것이다.

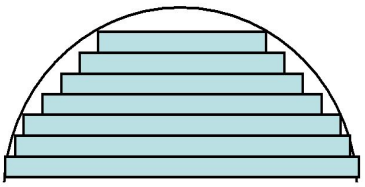
$$
\begin{aligned}
\text{원뿔의 부피} &= \frac{1}{3} \times (\text{원뿔의 밑넓이}) \times \mathrm{h} \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2 h
\end{aligned}
$$

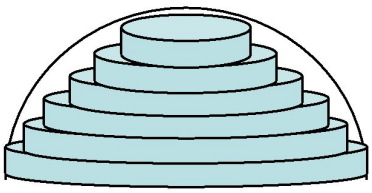
다. 구의 부피

이제 여러 입체도형 중 구에 대하여 알아보기로 하는데 반지름이 1인 구를 생각해보자. 이 구를 절반으로 자른 다면 다음 그림과 같이 반구가 생기게 된다.



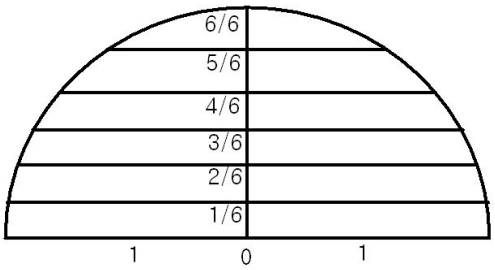
이 반구를 세부적으로 잘라서 다음 그림과 같이 여러개의 원기둥으로 조각내어 만들어보자.



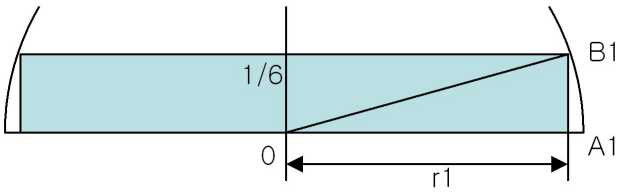


원기둥의 부피를 이용하여 반구의 부피를 구하려고 하는데 이는 원기둥을 무한대로 확장 했을 때 그 부피가 반구의 부피로 근사됨을 알 수 있다.

원기둥의 부피를 구하기 위해서 다음 그림처럼 반구를 6등분 하여보자.



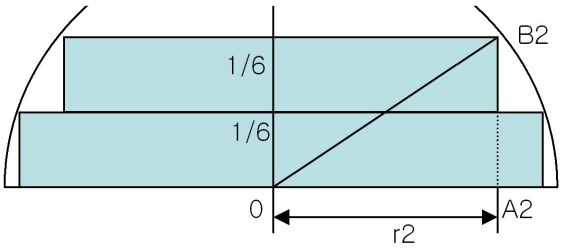
그러면, 반구가 6개의 원기둥으로 나누어지는데, 여기서 원기둥의 높이들은 각각 $\frac{1}{6}$이 됨을 알 수 있다. 이때 원기둥의 넓이를 구하려면 6개의 원기둥의 밑넓이. 즉, 원의 넓이를 구해야하는데 넓이를 구하기 위해서는 반지름을 알아야 하므로 반지름들을 각각 구하여보자. 그래서, 각 원기둥의 반지름을 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6로 놓자.



먼저, 첫 번째 원기둥의 반지름인 r_1을 구해보자. OB_1 은 구의 반지름 1이 되고, A_1B_1은 원기둥의 높이 $\frac{1}{6}$이 된다. 따라서 피타고라스의 정리를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$r_1^2 = 1^2 - (\frac{1}{6})^2$$

이제, 두 번째 원기둥의 반지름 r_2를 구해보자.



OB_2=1, $A_2B_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$이므로 $r_2^2=1^2-(\frac{2}{6})^2$이 된다.

마찬가지로 나머지 반지름들을 구하면 다음과 같다.

$$r_1^2=1^2-(\frac{1}{6})^2$$

$$r_2^2=1^2-(\frac{2}{6})^2$$

$$r_3^2=1^2-(\frac{3}{6})^2$$

$$r_4^2=1^2-(\frac{4}{6})^2$$

$$r_5^2=1^2-(\frac{5}{6})^2$$

$$r_6^2=1^2-(\frac{6}{6})^2$$

반지름 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6이고, 높이가 모두 $\frac{1}{6}$이므로 이것을 이용하여 원기둥의 부피공식 $\pi r^2 h$에 대입하여 각 원기둥들의 부피를 구해보면 다음의 식들이 나온다.

$$\pi r_1^2 h=\pi\ \{1^2-(\frac{1}{6})^2\}\ \times\frac{1}{6}$$

$$\pi r_2^2 h=\pi\ \{1^2-(\frac{2}{6})^2\}\ \times\frac{1}{6}$$

$$\pi r_3^2 h=\pi\ \{1^2-(\frac{3}{6})^2\}\ \times\frac{1}{6}$$

$$\pi r_4^2 h=\pi\ \{1^2-(\frac{4}{6})^2\}\ \times\frac{1}{6}$$

$$\pi r_5^2 h = \pi \ \{1^2 - (\frac{5}{6})^2\} \ \times \frac{1}{6}$$

$$\pi r_6^2 h = \pi \ \{1^2 - (\frac{6}{6})^2\} \ \times \frac{1}{6}$$

따라서, 이렇게 나온 6개의 원기둥의 부피를 모두 더하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\pi \ \{1-(\frac{1}{6})^2\} \ \times \frac{1}{6} \ + \ \pi \ \{1-(\frac{2}{6})^2\} \ \times \frac{1}{6} \ + \ \cdots \ + \ \pi \ \{1-(\frac{6}{6})^2\} \ \times \frac{1}{6}$$

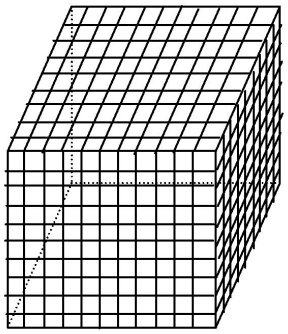
또, 이번에는 반구를 7개의 원기둥으로 나누면 부피의 총합은 다음과 같이 될 것이다.

$$\pi \ \{1-(\frac{1}{7})^2\} \ \times \frac{1}{7} \ + \ \pi \ \{1-(\frac{2}{7})^2\} \ \times \frac{1}{7} \ + \ \cdots \ + \ \pi \ \{1-(\frac{7}{7})^2\} \ \times \frac{1}{7}$$

이제, 반구를 6개 7개가 아닌 8, 9, 10, ⋯ 개의 원기둥으로 나누어 보면 부피의 총합을 쓸 수 있는데, 이 반구를 일반적인 원기둥의 부피의 총합으로 쓴 다면 다음과 같이 쓸 수 있다.

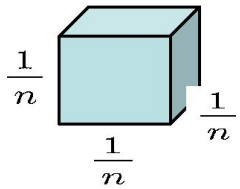
$$\begin{aligned}
&\pi \ \{1-(\frac{1}{n})^2\} \ \times \frac{1}{n} \ + \ \pi \ \{1-(\frac{2}{n})^2\} \ \times \frac{1}{n} \ + \ \cdots \ + \ \pi \ \{1-(\frac{n}{n})^2\} \ \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{\pi}{n}[1-(\frac{1}{n})^2+1-(\frac{2}{n})^2+...+1-(\frac{n}{n})^2] \\
&= \frac{\pi}{n}[n- \ \{(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+...+(\frac{n}{n})^2\} \ ] \\
&= \frac{\pi}{n}\cdot n-\frac{\pi}{n} \ \{(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+...+(\frac{n}{n})^2\} \\
&= \pi-\pi \ \{\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2+...+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n}{n})^2\}
\end{aligned}$$

여기서, $\{\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2+...+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n}{n})^2\}$ 의 값이 얼마인지 알아보자. 이 식에

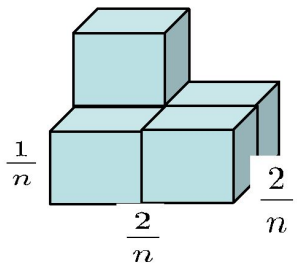


서 각각의 항들을 살펴보자. 즉, 두 번째 항 $\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2$ 을 보면, 이것이 의미하는 것은 한 변이 $\frac{1}{n}$이고, 다른 두 변이 $\frac{2}{n}$인 직육면체의 부피를 나타낸 것이라 할 수 있다. 그러므로 이것을 그림으로 보면 다음과 같이 한 변이 1인 정육면체를 각 변이 $\frac{1}{n}$인 정육면체로 분할한 것이 된다.

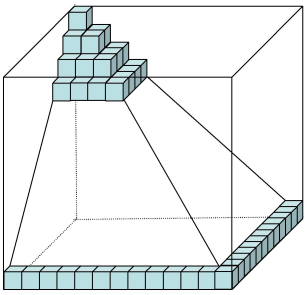
그러면, 첫 번째 항 $\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2$이 의미하는 것은 각 변이 $\frac{1}{n}$인 정육면체의 부피이다.



또, 두 번째 항 $\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2$이 의미하는 것은 두 변이 $\frac{2}{n}$이고, 높이가 $\frac{1}{n}$인 직육면체의 부피이다.



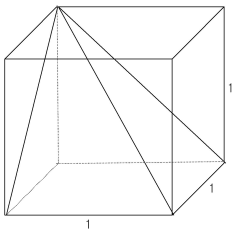
계속해서, 나머지 항들을 차례로 그리면 다음 그림과 같다.



즉, $\{\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2+...+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n}{n})^2\}$ 은 위의 그림에서처럼 계단 같은 모양의 부피의 합이 된다. 이 때 n을 무한대로 확장하면 이 계단모양은 다음 그림과 같이 사각뿔의 부피에 가까워지고 있음을 짐작 할 수 있다.

여기서, 변형된 모양의 사각뿔의 부피는 밑면의 양변이 모두 1이고, 높이가 1인 사각뿔의 부피와 같으므로 부피는 $\frac{1}{3}$이 된다. 다시 처음 공식에서 n개의 원기둥의 부피의 합을 구한 식으로 가보면,

$$\text{n개의 원기둥의 부피의 합} = \pi-\pi\ \{\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2+...+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n}{n})^2\}$$



이다. 이 때, n의 값이 무한대로 커질 때 좌변의 n개의 원기둥의 부피의 합은 반구의 부피에 가까워지고, 우변의 식 $\{\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2+...+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n}{n})^2\}$ 은 $\frac{1}{3}$에 가까워진다. 그러므로 반지름이 1인 반구의 부피는 $\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$이므로, 구의 부피는 $\frac{2}{3}\pi\times2=\frac{4}{3}\pi$가 된다. 또, 반지름이 r인 구에서 반지름이 1인 구를 r 만큼 세 방향으로 확장한 것이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{구의 부피} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

제 4 장 결론 및 제언

현행 중학교 1학년 단계에서 다루는 입체도형들 중에서도 구는 우리들에게 친숙한 수학적 대상 중 하나이다. 그러나 본 연구의 설문에서 본 것처럼, 대부분의 학생들이 구의 부피와 공식을 기억하지 못하고 있으며, 그 공식에 이르기 위한 추론 방법을 대부분이 알지 못하고 있다. 이는 중학교 교육 과정에서 입체도형의 부피와 겉넓이에 대한 설명 방법이 일관되지 못하고, 입체도형(즉. 뿔의 부피, 구의 부피. 구의 겉넓이 등)에 대해 실험적 방법으로 설명을 하고 있는 상황에 기인한 것으로 보인다.

본 연구는 입체도형의 부피의 개념을 명확히 이해하고 학생들이 도형을 좀 더 정확하게 인식하기 바라며, 이런 지식을 바탕으로 수학적으로 사고하는 기회를 제공하고자 한다. 이에 기본적인 입체도형의 부피 공식을 일반화가 이루어지는 과정을 논리적으로 설명하였다.

또, 본 연구는 학생들이 입체도형의 연관성을 이해하는데 도움을 주었으면 하는데 목적이 있다.

신동선과 류희찬(1998)은 기하교육의 문제를 개선하기 위한 방안으로 실험실 활동과 역동적인 소프트웨어의 활용을 제안하고 있다. 그들에 따르면, 과학 실험실 활동과 마찬가지로 수학 교육에서도 학생들이 실험실에서 관찰하고 토의하는 활동이 필요하다. 수학을 행하는 수학자들처럼 학생들은 특별한 경우에 이루어진 관찰과 탐구를 통해 규칙성을 일반화함으로써 가설을 설정하고, 다시 논리적인 증명이나 반례를 찾음으로써 그 가설을 검증하는 활동이 동시에 이루어질 필요가 있다고 하였는데, 분명 위의 주장이 틀린 말은 아니다. 수학이라는 딱딱한 과목을 학생들과 실험이나 관찰을 통한다는 새로운 개념은 충분히 찬성하는 바이다. 하지만, 너무 실험이나 관찰위주의 수업이 이루어지면 학생들은 단순히 보고 넘어가는 수준이 되지 않을까 하는 우려도 있다. 또, 기존에 교사들은 수학적인 논리를 통해서 설명하는 방식에 젖어 있어서 충분한 자료와 교육이 선행이 된 후에 학생들에게 접목

시키는 것이 이루어져야 하지 않을까 하는 생각이다.

본 논문에서 제시하고 있는 방법들이 입체도형의 부피 지도에 참고 자료로 그 역할을 했으면 하는 바람이며, 학생들에게는 어려웠던 입체도형의 부피 파트를 쉽게 이해하면서 수학에 대한 자신감을 갖는데 도움을 줄 수 있는 여러 가지 새로운 방법 찾기가 끝없이 이루어져야 한다는 생각이 든다.

참 고 문 헌

[1]. Boltianskii, V. G. (1978). Hilbert's thied problem. Washington, DC: V. H. Winston&Sons

[2]. 갑주(2008). 아르키메데스 수학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

[3]. 한국수학교육연구회 역(1970). 중학교 SMSG수학. 문교부.

[4]. UCSMP (1997). Geometry. Scott ForeSman.

[5]. 김성환, 원의 넓이와 입체도형의 부피의 지도방법에 관한 연구 - 기둥과 뿔의 부피를 중심으로 -, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문, 1998

[6]. 김수연, 원의 지도에 관한 교재관 연구, 부산대학교 교육대학원 석사학위논문, 2001

[7]. 김정남, Archimedes 기하학습에 관한 연구, 성신여자대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2000

[8]. 김용운 • 김용국, 재미있는 수학여행 '기하의 세계', 김영사, 1991

[9]. 송교식(역), 수학과의 만남, 가서원, 1992

[10]. 오혜영 • 허민(역), 수학의 위대한 순간들, 경문사, 1994

[11]. 우정호, 학교수학의 기초, 서울대학교 출판부, 1998

[12]. 이기철, 기하 영역 교수 - 학습지도 개선 방안에 대한 연구 - 증명 지도를 중심으로 -, 홍익대학교 교육대학원, 2001

[13]. 송주열, 도형의 넓이와 부피에 관한 연구. 성균관대학교 교육대학원, 2002

[14]. 홍갑주외 3명. 중학수학에서의 입체도형의 부피와 겉넓이의 접근방법에 대한 고찰, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18권 제1호 Journal of Educational Research in Mathematics Vol. 18, No. 1, 81-101. Feb 2008

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20078206	과 정	석사
성 명	한글: 김 호 한문: 金 浩 영문: kim ho				
주 소	광주광역시 남구 주월2동 974-25번지 201호				
연락처	E-MAIL: kimho780117@naver.com 010-8004-4353				
논문제목	국문 : 입체도형의 부피에 대한 연구 - 중학교 영역을 중심으로 - 영문 : A Study on the Volume of Solid Figures -Centering on the Middle School -				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2010 년 7 월 9 일

저작자: 김 호 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하