[UCI]I804:24011-200000239688

2010년 2월

교육학석사(수학교육)학위논문

확장된 심슨 정리의 증명에 관한 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

배 성 철

확장된 심슨 정리의 증명에 관한 연구

Reproof of generalized Simson Theorem

2010년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

배 성 철

확장된 심슨 정리의 증명에 관한 연구

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2009년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

배 성 철

배성철의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 _____인

심 사 위 원 조선대학교 교수 _____인

심 사 위 원 조선대학교 교수 _____인

2009년 12월

조선대학교 교육대학원

목　　차

ABSTRACT

Reproof of generalized Simson Theorem

Bae, Sung Chul
Advisor : Prof. Ahn, Young Joon, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In this thesis, we reprove the known result which are verified by Longuerre Theorem along with the Simson line of the Plane geometry.

To begin with, let's look into what the Simson line and Longuerre Theorem are what kind of researches have been done with them.

This thesis concerns whether the four points are still located on the identical line in a condition that a line is extended from point P on the circumcircle $\triangle A_j A_k A_l$ in a certain angle, we verify it if it makes sense and focuses on the question that the four points will be still on the identical line when other polygons are inscribed in the circle, not quadrangles.

Ⅰ. 기 초 지 식

A. 직교 좌표와 극좌표

직교좌표계와 다른 새로운 좌표계, 즉 극좌표계에 대하여 소개하고 직교좌표계와의 관계를 알아보자. 기준점 O와 O로부터 반직선 OX을 택하면 평면 위의 임의의 점 P는 O로부터 P까지 거리 r과 반직선 OX로부터 선분OP까지 각 θ로 결정할 수 있다. r과 θ로 표시되는 (r,θ)를 극좌표라고 하며, r을 동경, θ을 편각이라 한다.

편각 θ는 OX로부터 시계바늘의 반대방향으로 재면 양이고, 시계바늘과 같은 방향으로 재면 음이다. 동경 r은 O로부터 편각을 그리는 화살표의 끝점을 향해서 재면 양이고, 그 반대방향으로 재면 음이다. 고정 직선 OX을 기선이라 하고 점 O을 극 또는 원점이라 한다.

직교좌표계의 원점을 극으로 잡고 x축의 양의 반직선을 기선으로 잡는다. 이 때 점 P의 직교좌표 (x,y)와 극좌표 (r,θ)사이에 다음의 관계식이 성립한다.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

이것을 r,θ에 대하여 나타내면,

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

가된다.

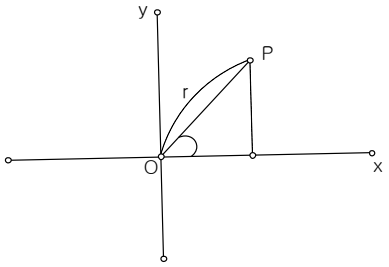

그림 1. 직교좌표와 극좌표의 관계

B. 직선, 원의 극방정식

1. 직선의 극방정식

원점 O를 극으로 잡고 O에서 직선 l에 수선 OA을 내려

$$\overline{OA} = d\ ,\ \angle XOA = \theta_0$$

이라 하고, 직선 l상의 임의의 점을 $P(r,\theta)$라 하면 그림에서

$$\overline{OA} = \overline{OP}cos(\angle POA)\ ,\ \angle POA = \theta - \theta_0$$

이므로, $d = r\cos(\theta - \theta_0)$를 얻는다. 이것을 직선의 극방정식이라 한다.

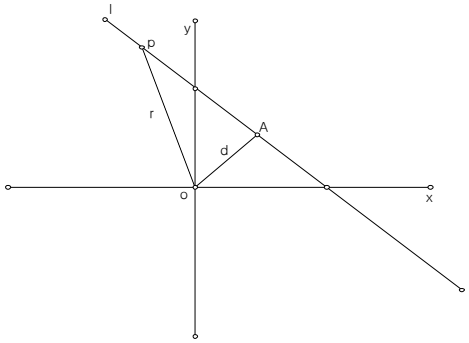

그림 2. 직선의 극방정식

2. 원의 극방정식

먼저 원의 중심이 극에 있는 원의 극방정식을 구해보자. 반지름이 a인 원의 중심이 극이라 하면, 이 원의 방정식은 간단히

$$r = a$$

이다.

이번에는 극을 지나는 원의 극방정식을 구해보자. 원의 중심 $C(a,\theta_0)$라 하고 원주상의 임의의 점을 $P(r,\theta)$라 하면 이 원의 방정식은 cosine 법칙인

$$a^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos(\theta - \theta_0)$$

를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다[3].

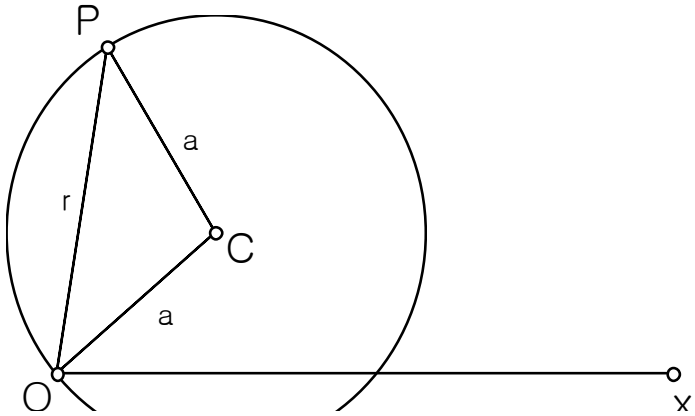

그림 3. 원의 극방정식: $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$

그리고 특수한 경우로

$\theta_0 = 0$일 때는 $r = 2acos\theta$이고

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$일 때는 $r = 2asin\theta$가 된다.

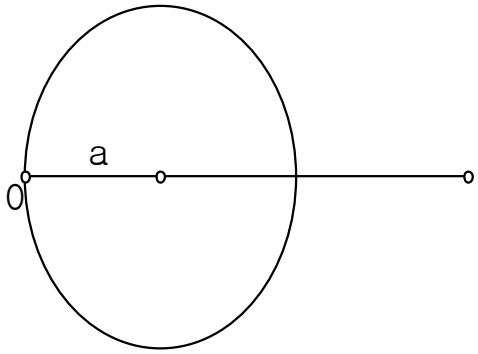

그림 4. $r = 2a\cos\theta$

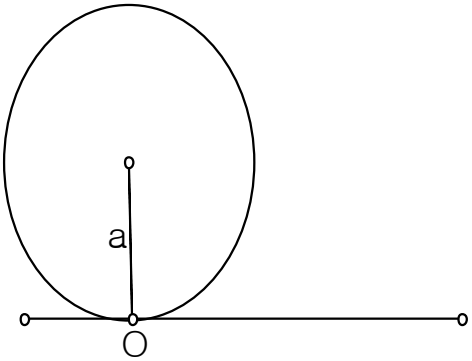

그림 5. $r = 2a\sin\theta$

다음은 극방정식으로 잘 알려진 그래프들이다[1].

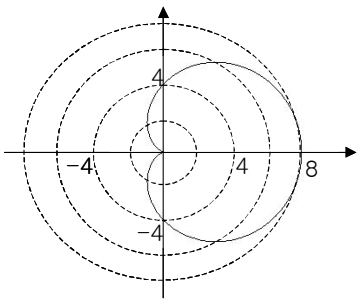

그림 6. 심장형 $r = 4(1+\cos\theta)$

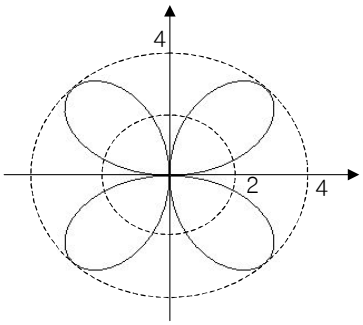

그림 7. 4엽 장미형 $r = 4\sin 2\theta$

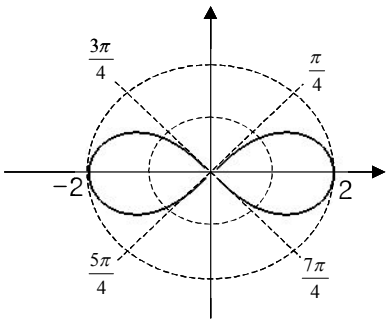

그림 8. 연주형 $r^2 = 4\cos 2\theta$

C. 삼각형의 Simson선

다음은 Simson선 정리이다. 이것은 매우 잘 알려진 정리이며, 그 증명은 참고문헌[2]에 잘 설명되어 있다.

정리 1.1 Simson선 정리

△ABC의 외접원 상의 임의의 점 P에서, 변 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 또는 그 연장선에 내린 수선의 발 D, E, F는 한 직선 위에 있다[2].

(이 직선을 △ABC의 점 P에 관한 **Simson선**이라 한다.)

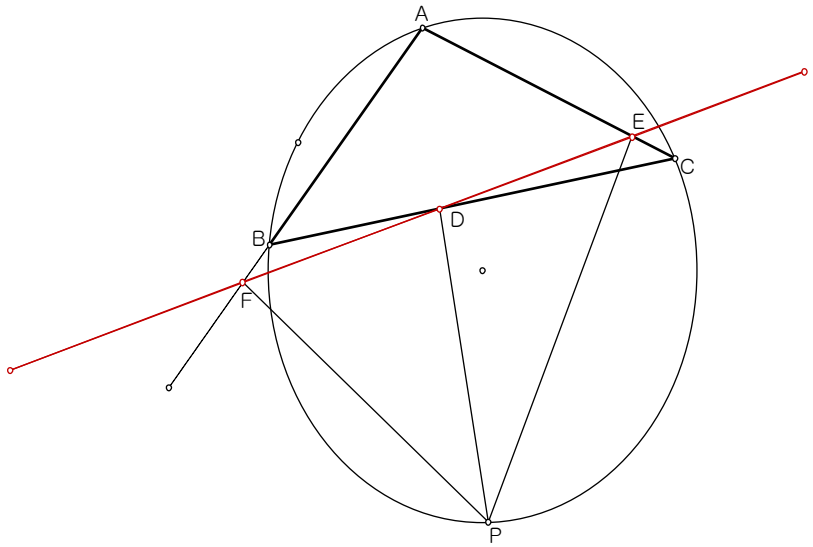

그림 9. Simson선

D. 삼각형의 general Simson선

다음 정리는 general Simson선 정리이다. 이 정리의 증명은 다음과 같이 쉽게 증명할 수 있다.

정리 1.2 general Simson선

△ABC의 외접원 상의 임의의 점 P에서, 변 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 또는 그 연장선에 일정한 각으로 내린 D, E, F는 한 직선 위에 있다.

(이 직선을 △ABC의 점 P에 관한 **general Simson선**이라 한다.)

단, 점 P에서 일정한 각을 내릴 때 각각의 세 변에 내리는 방향이 같은 방향으로 내려야 한다.(그림 10.)

증명.

네 점 A,B,P,C는 한 원 위에 있으므로,

$$\angle ACP = \angle FBP.$$

$\angle PDC = \angle PEC$이므로 네 점 D,E,C,P는 한 원 위에 있으며,

$$\angle EDC = \angle EPC$$

또한 $\angle PDC = \angle PFB$이므로 네 점 B,F,P,D는 한 원 위에 있으며,

$$\angle FBP = \angle FDP$$

그러므로

$$\angle FDP + \angle PDC + \angle CDE = \angle ECP + \angle PEC + \angle CPE$$
$$= 2\angle R$$

임을 알 수 있다. ■

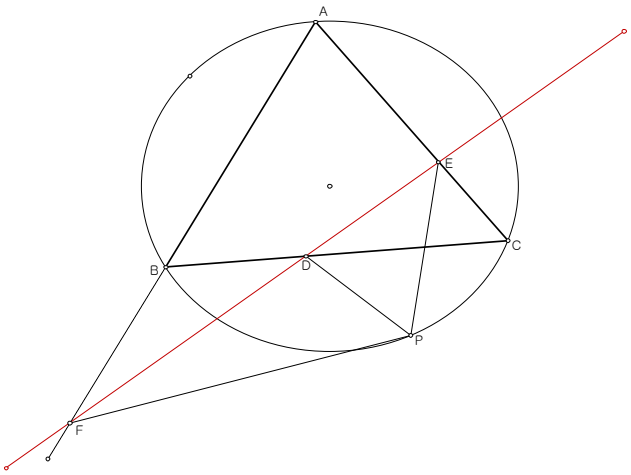

그림 10. general Simson선

Simson선 정리를 다음과 같이 공간으로 확장해보자.

사면체 A-BCD의 외접구 위의 임의의 한 점 P에서 네 면에 내린 수선의 발은 한 평면 위에 있다. 그러나 아래의 예와 같이 Simson의 정리가 3차원으로 확장이 되지 않는다.

(예) 사면체의 네 꼭지점 A(0,0,1), B(1,0,0), C(0,1,0), D(0,0,0)를 지나는 구면위의 한 점 P(1,1,1)에서 네 면에 내린 수선의 발은 한 평면위에 있지 않음을 보이도록 하자.

사면체 A-BCD의 외접구의 방정식은

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

구위의 어떤 한 점 P(1,1,1)를 잡아보자. 점 P에서 네 면에 내린 수선의 발은 각각 E(0,1,1), F(1,1,0), G(1,0,1), H($\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$)이다. 여기서 점 H는 점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발이다. 점 H는 O(0,0,0), P(1,1,1)를 지나는 직선 위의 한 점이므로 H(t,t,t)로 잡을 수 있다. 평면 ABC의 방정식은

$$x+y+z=1$$

이다. H는 평면 ABC위의 한 점이므로 대입하면 H($\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$)를 얻을 수 있다.

이제 네 점 E, F, G, H가 한 평면위에 있는지 확인해 보자. 먼저 E, F, G를 지나는 평면 방정식은

$$x+y+z=2$$

이다. 점 H가 위의 평면 위에 있는지 대입해보면 성립하지 않음을 알 수 있다.

그러므로 외접구면위의 임의의 점에서 사면체의 네 면 또는 그 연장 평면에 내린 수선의 발은 일반적으로 한 평면위에 있지 않음을 알 수 있다.

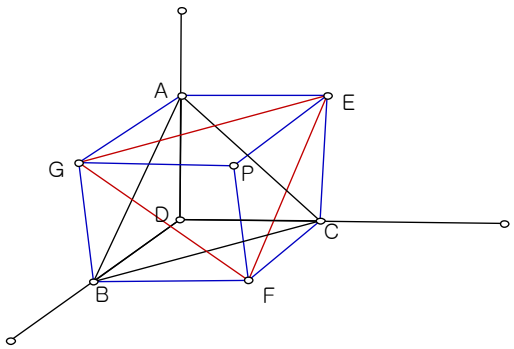

그림11. 사면체 A-BCD

E. Longuerre Theorem

정리 1.3 Longuerre Theorem

점 P는 원위의 임의의 점이고 원에 내접하는 사각형을 $A_1A_2A_3A_4$라 하자. S_i 는 $\triangle A_jA_kA_l(i,j,k,l$는 서로 다른 점)의 외접원 위의 임의의 점 P에서 Simson선이라 하자. 그리고 D_i는 점 P에서 S_i로의 사영한 점이라고 하자. 이 때 D_1, D_2, D_3, D_4 네 점은 동일선상에 있다[5].

이 정리의 증명은 Yu Zhihong[5]이 한 것이며, 간단히 정리하면 다음과 같다. 점 P에 관한 극좌표를 설정하자. 먼저 점 P에서의 반직선을 극좌표의 축, d는 원의 지름이라고 하자. 원의 극방정식은 $r = d\cos\theta$이다.

A_1, A_2, A_3, A_4의 좌표는 $(d\cos\theta_i, \theta_i)((i=1,2,3,4), \theta_i \in [0, 2\pi])$라고 하자.

먼저 직선 A_1A_2의 극방정식을 구해보자.

$$\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{r} = \frac{\sin(\theta_2-\theta)}{d\cos\theta_1} + \frac{\sin(\theta-\theta_1)}{d\cos\theta_2}$$

$$\therefore r[\sin(\theta_2-\theta)\cos\theta_2 + \sin(\theta-\theta_1)\cos\theta_1] = d\sin(\theta_2-\theta_1)\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$\therefore \frac{1}{2}r[\sin(2\theta_2-\theta) + \sin(\theta-2\theta_1)] = d\sin(\theta_2-\theta_1)\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$\therefore r\sin(\theta_2-\theta_1)\cos(\theta-\theta_1-\theta_2) = d\sin(\theta_2-\theta_1)\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$\because \sin(\theta_2-\theta_1) \neq 0$$

$$\therefore r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2) = d\cos\theta_1\cos\theta_2$$

위식은 A_1A_2의 직선의 극방정식이다. 우리는 점 P에서 직선 A_1A_2로의 수선의 발을 내렸을 때 만나는 점의 극좌표 $B_1(d\cos\theta_1\cos\theta_2, \theta_1+\theta_2)$을 구할 수 있다.

이와 같은 방법으로

$$B_2(d\cos\theta_2\cos\theta_3, \theta_2+\theta_3),\ B_3(d\cos\theta_1\cos\theta_3, \theta_1+\theta_3)$$

의 좌표를 구할 수 있다.

이 세 점 B_1, B_2, B_3을 지나는 직선의 극방정식은 다음과 같으며, 세 점은 동일 선상에 있다.

$$r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3)=d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$$

그래서 우리는 $\triangle A_1A_2A_3$에 관하여 점 P에 관한 Simson선 S_1의 직선의 극방정식을 얻을 수 있다.

$$S_1:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3)=d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3.$$

이와 같은 방법으로 우리는 $\triangle A_jA_kA_l$에 관한 Simson선 S_i의 극방정식을 얻을 수 있다.

$$S_2:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_4)=d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4$$

$$S_3:\ r\cos(\theta-\theta_2-\theta_3-\theta_4)=d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4$$

$$S_4:\ r\cos(\theta-\theta_3-\theta_4-\theta_1)=d\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_1.$$

그리고 점 P에서 직선 $S_i(i=1,2,3,4)$에 사영된 점의 좌표 $D_i(i=1,2,3,4)$는 다음과 같다.

$$D_1:(d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3,\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$D_2:(d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4,\theta_1+\theta_2+\theta_4)$$

$$D_3:(d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4,\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$

$$D_4:(d\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_1,\theta_3+\theta_4+\theta_1).$$

네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$을 지나는 직선의 극방정식 S는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$S:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4)=d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4.$$

그러므로 네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$는 동일선상에 있다.

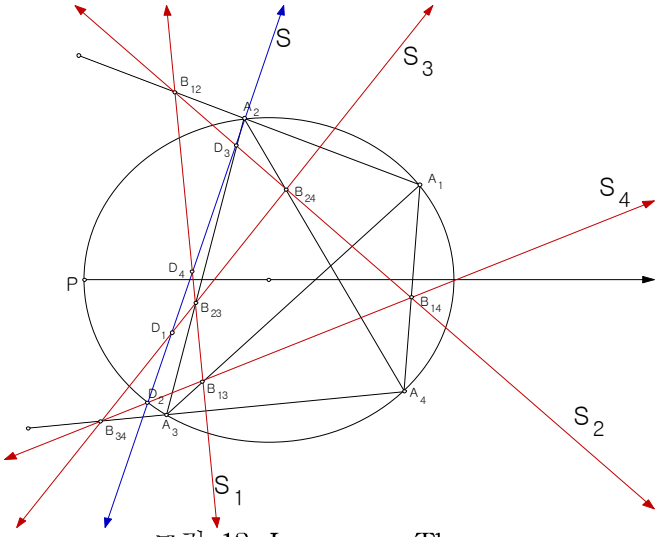

그림 12. Longuerre Theorem

따름정리 1.4

원 위의 다섯 개의 점을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5라 하고 그 원 위에 임의의 한 점을 P라고 하자. 그리고 S_i을 사각형 $A_jA_kA_lA_m(i,j,k,l,m$는 서로 다른 점)에 관한 점 P의 Simson선이라고 하자. 또한 D_i을 점 P에서 $S_i(i=1,2,3,4,5)$로의 정사영된 점의 좌표라고 하자. 이때 다섯 개의 점 D_i는 동일선상에 놓여있다[5].

마찬가지로, Yu Zhihong[5]이 제시한 증명을 간단히 설명해 보자.

점 P에 관한 극좌표를 설정하자. 먼저 점 P에서의 반직선을 극좌표의 축, d는 원의 지름이라고 하자. 그러면 원의 극방정식은 $r=dcos\theta$이다.

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5의 좌표를 $(d\cos\theta_i, \theta_i)((i=1,2,3,4,5), \theta_i \in [0,2\pi])$라고 하자.

정리2.3의 증명에 의해서 S_i에 관한 극방정식을 얻을 수 있다.

$$S_1 : r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4) = \mathrm{d}\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4$$

$$S_2 : r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_5) = \mathrm{d}\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_5$$

$$S_3 : r\cos(\theta-\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5) = \mathrm{d}\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5$$

$$S_4 : r\cos(\theta-\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_1) = \mathrm{d}\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_1$$

$$S_5 : r\cos(\theta-\theta_4-\theta_5-\theta_1-\theta_2) = \mathrm{d}\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

그러므로 점 P에서 직선 $S_i(i=1,2,3,4,5)$로 사영된 점의 좌표 $D_i(i=1,2,3,4,5)$는 다음과 같다.

$$D_1 : (d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4,\ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$

$$D_2 : (d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_5,\ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_5)$$

$$D_3 : (d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5,\ \theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$

$$D_4 : (d\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_1,\ \theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_1)$$

$$D_5 : (d\cos\theta_4\cos\theta_5\cos\theta_1\cos\theta_2,\ \theta_4+\theta_5+\theta_1+\theta_2).$$

다섯 점 $D_i(i=1,2,3,4,5)$을 지나는 직선의 극방정식은 S임을 알 수 있다.

$$S : r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5) = d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5.$$

그러므로 다섯 점 $D_i(i=1,2,3,4,5)$는 동일선상에 있다.

정리 1.5

원 위의 n개의 점을 $A_1, A_2, \cdots, A_n$라 하고 그 원 위에 임의의 한 점을 P라고 하자. 그리고 S_i을 $(n-1)$각형 $A_jA_kA_l\cdots A_m(i,j,k,\cdots,m$는 서로 다른 점)에 관한 점 P의 Simson선이라고 나타내자. 또한 D_i을 점 P에서 $S_i(i=1,2,3\cdots n)$로의 정사영된 점의 좌표라고 하자. 이때 n개의 점 D_i는 동일선상에 놓여있다[5].

점 P를 극으로 하는 극좌표를 설정하자. 그러면 따름정리 1.4의 오각형에서 n각형으로의 확장을 통해 n개의 점 D_i를 지나는 직선의 극방정식을 알 수 있다.

$$S : r\cos(\theta-\sum_{i=1}^{n}\theta_i) = d\prod_{i=1}^{n}\cos\theta_{\mathrm{i}}\ .$$

Ⅱ. 중 요 정 리 및 증 명

정리 2.1 general Longuerre Theorem I

점 P는 원 위의 임의의 점이고 원에 내접하는 사각형을 $A_1A_2A_3A_4$라 하자.. S_i 는 $\triangle A_jA_kA_l(i,j,k,l$는 서로 다른 점)의 외접원 위의 임의의 점 P에서 세 점에 관한 general Simson선이라 하자. 그리고 D_i는 점 P에서 S_i로의 사영한 점이라고 하자. 그 때 D_1, D_2, D_3, D_4 네 점은 동일선상에 있다.

증명. 정리 1.3의 증명과 같은 극좌표를 사용하자. 점 P를 원점으로 하고, 원의 지름을 x축으로 설정하면, 지름 d인 원의 극방정식은 $r = d\cos\theta$이다. 정리 1.3의 증명과 같이 두 점 A_1, A_2을 지나는 직선의 극방정식은

$$r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2) = d\cos\theta_1\cos\theta_2 \text{ 또는 } r = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos(\theta-\theta_1-\theta_2)} \qquad (2.1)$$

임을 알 수 있다.

이제, 점 P에서 직선 A_1A_2로의 수선의 발을 기준으로 하여 일정한 각(α)으로 그었을 때 만나는 점 B_{12}의 위치를 구해보자. 일정한 각의 크기를 $\angle HPB_{12} = \alpha$라 하자. 이때 점 P에서 직선 A_1A_2에 수선의 발을 내리면 ($\angle PHB_{12} = 90^\circ$), $\angle XPH = \theta_1 + \theta_2$이고 $\overline{PH} = d\cos\theta_1\cos\theta_2$이다. 따라서

$$\angle XPB_{12} = \theta_1 + \theta_2 - \alpha$$

이고, 식 (2.1)에 대입하면 $\overline{PB_{12}} = \dfrac{d\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos\alpha}$임을 알 수 있다. 따라서 우리는 점 P에서 직선 A_1A_2로의 일정한 각으로 그었을 때 만나는 점의 극좌표 $B_{12}\left(\dfrac{d\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos\alpha}, \theta_1+\theta_2-\alpha\right)$을 구할 수 있다.

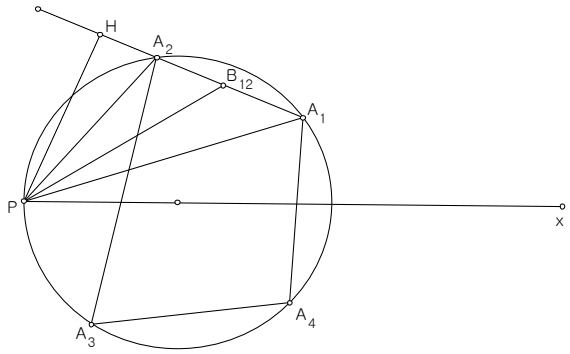

그림 13. 두 점 A_1, A_2을 지나는 직선의 극방정식

이와 같은 방법으로

$$B_{23}\left(\frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\alpha}, \theta_2+\theta_3-\alpha\right),\ B_{13}\left(\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3}{\cos\alpha}, \theta_1+\theta_3-\alpha\right)$$

의 좌표를 구할 수 있다.

이 세 점 B_{12}, B_{23}, B_{13}을 지나는 직선의 극방정식은 다음과 같으며, 세 점은 동일 선상에 있다.

$$r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\alpha)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\alpha}$$

그래서 우리는 $\triangle A_1A_2A_3$에 관하여 점 P에 관한 general Simson선 S_4의 직선의 극방정식을 얻을 수 있다.

$$S_4:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\alpha)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\alpha}.$$

이와 같은 방법으로 우리는 $\triangle A_jA_kA_l$에 관한 general Simson선 S_i의 직선의 극방정식을 얻을 수 있다.

$$S_3:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_4+\alpha)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4}{\cos\alpha}$$

$$S_2:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_3-\theta_4+\alpha)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}$$

$$S_1:\ r\cos(\theta-\theta_2-\theta_3-\theta_4+\alpha)=\frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}.$$

그리고 점 P에서 직선 $S_i(i=1,2,3,4)$에 사영된 점의 좌표 $D_i(i=1,2,3,4)$는 다음과 같다.

$$D_4 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\alpha}, \theta_1+\theta_2+\theta_3-\alpha)$$

$$D_3 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4}{\cos\alpha}, \theta_1+\theta_2+\theta_4-\alpha)$$

$$D_2 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}, \theta_1+\theta_3+\theta_4-\alpha)$$

$$D_1 : (\frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}, \theta_2+\theta_3+\theta_4-\alpha).$$

네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$을 지나는 직선의 극방정식 S는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$S : \ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4+\alpha) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}.$$

그러므로 네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$는 동일선상에 있다.

따라서 S의 극방정식이 네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$을 지나는 일직선을 나타냄을 알 수 있다. ■

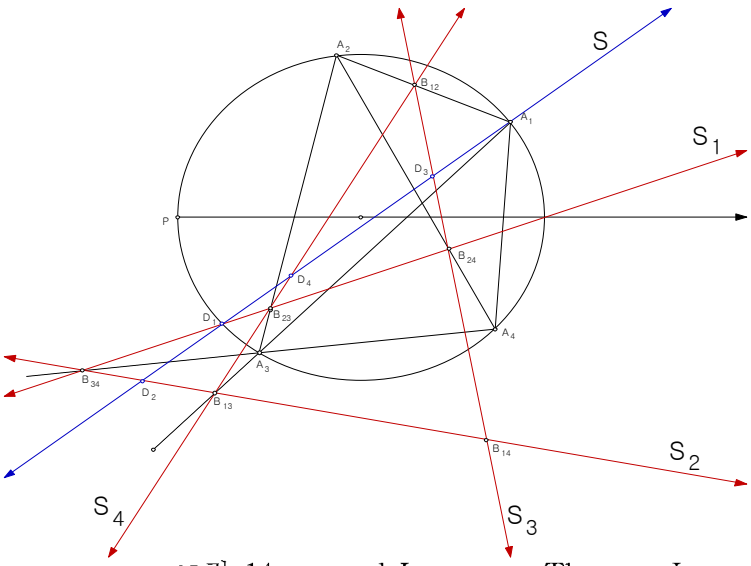

그림 14. general Longuerre Theorem I

정리 2.2 general Longuerre Theorem Ⅱ

점 P는 원 위의 임의의 점이고 원에 내접하는 사각형을 $A_1A_2A_3A_4$라 하자. S_i 는 $\triangle A_jA_kA_l(i,j,k,l$는 서로 다른 점)의 외접원 위의 임의의 점 P에서 세 점에 관한 general Simson선이라 하자. 그리고 D_i는 점 P에서 S_i로의 동일한 각을 이루는 점이라고 하자. 그 때 D_1, D_2, D_3, D_4 네 점은 동일선상에 있다.

증명. $\triangle A_jA_kA_l$에 관한 general Simson선 $S_i(i=1,2,3,4)$의 직선의 극방정식을 얻는 과정은 위의 정리 2.1의 방법과 동일하다.

$$S_4: r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\alpha)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\alpha}$$

$$S_3:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_4+\alpha)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4}{\cos\alpha}$$

$$S_2:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_3-\theta_4+\alpha)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}$$

$$S_1:\ r\cos(\theta-\theta_2-\theta_3-\theta_4+\alpha)=\frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}.$$

정리 2.1에서는 점 P에서 직선 $S_i(i=1,2,3,4)$에 사영된 점의 좌표를 $D_i(i=1,2,3,4)$로 한데 반해서 정리 2.2에서는 직선 $S_i(i=1,2,3,4)$에 동일한 각으로 투영한 점의 좌표를 $D_i(i=1,2,3,4)$라고 하자.

$$D_4:\ (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\alpha\ \cos\beta},\theta_1+\theta_2+\theta_3-\alpha-\beta)$$

$$D_3:\ (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4}{\cos\alpha\ \cos\beta},\theta_1+\theta_2+\theta_4-\alpha-\beta)$$

$$D_2:\ (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha\ \cos\beta},\theta_1+\theta_3+\theta_4-\alpha-\beta)$$

$$D_1:\ (\frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha\ \cos\beta},\theta_2+\theta_3+\theta_4-\alpha-\beta).$$

네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$을 지나는 직선의 극방정식은 다음과 같다.

$$S:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4+\alpha+\beta)=\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha\ \cos\beta}.$$

그러므로 네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$는 동일선상에 있다. 이때 S의 극방정식이 네 점 $D_i(i=1,2,3,4)$을 지나는 일직선을 나타냄을 알 수 있다. ■

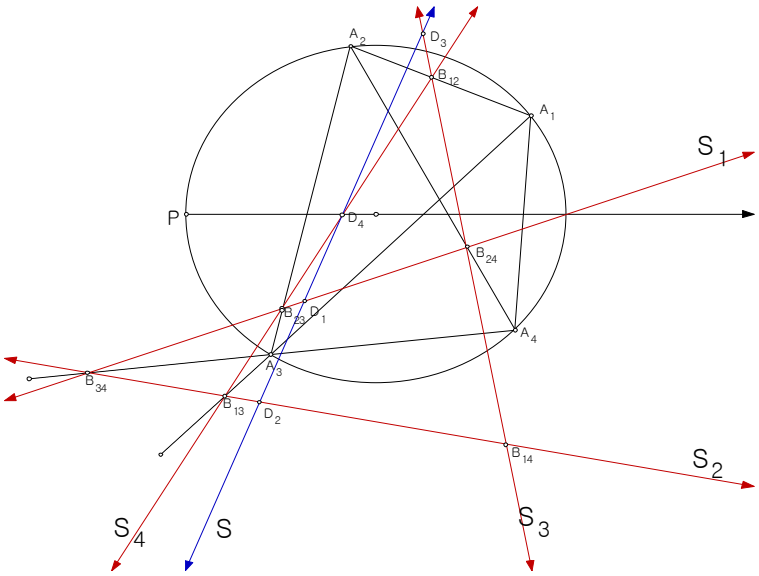

그림 15. general Longuerre Theorem Ⅱ

따름정리 2.3

원 위의 다섯 개의 점을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5라 하고 그 원 위에 임의의 한 점을 P라고 하자. 그리고 S_i을 사각형 $A_jA_kA_lA_m(i,j,k,l,m$는 서로 다른 점)에 관한 점 P의 general Simson선이라고 하고 또한 D_i를 점 P에서 $S_i(i=1,2,3,4,5)$로의 정사영된 점의 좌표라고 하자. 이 때 다섯 개의 점 D_i는 동일선상에 놓여있다.

증명. 정리 1.4의 증명과 같은 극좌표를 사용하자. 점 P를 원점으로 하고, 원의 지름을 x축으로 설정하면, 지름 d인 원의 극방정식은 $r = d\cos\theta$이다.

정리 2.1의 증명에 의해서 S_i에 관한 극방정식을 얻을 수 있다.

$$S_1 : r\cos(\theta - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \alpha) = \frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha}$$

$$S_2 : r\cos(\theta - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \alpha) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha}$$

$$S_3 : r\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2 - \theta_4 - \theta_5 + \alpha) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha}$$

$$S_4 : r\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_5 + \alpha) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_5}{\cos\alpha}$$

$$S_5 : r\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \alpha) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha}.$$

그리고 점 P에서 직선 $S_i(i = 1,2,3,4,5)$로 사영된 점의 좌표 $D_i(i = 1,2,3,4,5)$는 다음과 같다.

$$D_1 : (\frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha},\ \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \alpha)$$

$$D_2 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha},\ \theta_1 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \alpha)$$

$$D_3 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha},\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_4 + \theta_5 - \alpha)$$

$$D_4 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_5}{\cos\alpha},\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_5 - \alpha)$$

$$D_5 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha},\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \alpha)$$

다섯 점 $D_i(i = 1,2,3,4,5)$을 지나는 직선의 극방정식은 S임을 알 수 있다.

$$S : r\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \alpha) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha}.$$

그러므로 다섯 개의 점 $D_i(i = 1,2,3,4,5)$는 동일선상에 있다. ■

정리 2.4

원 위의 n개의 점을 $A_1, A_2, \cdots, A_n$라 하고 그 원 위에 임의의 한 점을 P라고 하자. 그리고 S_i을 $(n-1)$각형 $A_jA_kA_l \cdots A_m(i,j,k,\cdots,m$는 서로 다른 점)에 관한 점 P의 일반화된 Simson선이라고 하고 또한 D_i를 점 P에서 $S_i(i=1,2,3,\cdots n)$로의 정사영된 점의 좌표라고 하자. 이때 n개의 점 D_i는 동일선상에 놓여있다.

증명. 점 P에 관한 극좌표를 설정하자. 그러면 정리2.3의 오각형에서 n각형으로의 확장을 통해 n개의 점 D_i을 지나는 직선의 극방정식을 알 수 있다.

$$S : r\cos(\theta - \sum_{i=1}^{n}\theta_i + \alpha) = \frac{d\prod_{i=1}^{n}\cos\theta_i}{\cos\alpha}. \qquad \blacksquare$$

따름정리 2.5

원 위의 다섯 개의 점을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5라 하고 그 원 위에 임의의 한 점을 P라고 하자. 그리고 S_i을 사각형 $A_jA_kA_lA_m(i,j,k,l,m$는 서로 다른 점)에 관한 점 P의 general Simson선이라고 나타내자. 또한 D_i를 점 P에서 $S_i(i=1,2,3,4,5)$로의 동일한 각을 이루는 점의 좌표라고 하자. 그때 다섯 개의 점 D_i 는 동일선상에 놓여있다.

증명. 정리 1.4의 증명과 같은 극좌표를 사용하자. 점 P를 원점으로 하고, 원의 지름을 x축으로 설정하면, 지름 d인 원의 극방정식은 $r = d\cos\theta$이다.
정리 2.2의 증명에 의해서 S_i에 관한 극방정식을 얻을 수 있다.

$$S_1 : r\cos(\theta-\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5+\alpha+\beta) = \frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$S_2 : r\cos(\theta-\theta_1-\theta_3-\theta_4-\theta_5+\alpha+\beta) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$S_3 : r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_4-\theta_5+\alpha+\beta) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$S_4 : r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_5+\alpha+\beta) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$S_5 : r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4+\alpha+\beta) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

그리고 점 P에서 직선 $S_i(i=1,2,3,4,5)$에 동일한 각으로 투영한 점의 좌표 $D_i(i=1,2,3,4,5)$는 다음과 같다.

$$D_1 : (\frac{d\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\ \theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-\alpha-\beta-\gamma)$$

$$D_2 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\ \theta_1+\theta_3+\theta_4+\theta_5-\alpha-\beta-\gamma)$$

$$D_3 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\ \theta_1+\theta_2+\theta_4+\theta_5-\alpha-\beta-\gamma)$$

$$D_4 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_5-\alpha-\beta-\gamma)$$

$$D_5 : (\frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},\ \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-\alpha-\beta-\gamma).$$

다섯 점 $D_i(i=1,2,3,4,5)$을 지나는 직선의 극방정식은 S임을 알 수 있다.

$$S:\ r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5+\alpha+\beta+\gamma) = \frac{d\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\cos\theta_5}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

그러므로 다섯 점 $D_i(i=1,2,3,4,5)$는 동일선상에 있다. ■

정리 2.6

원 위의 n개의 점을 $A_1, A_2, \cdots, A_n$라 하고 그 원 위에 임의의 한 점을 P라고 하자. 그리고 S_i을 $(n-1)$각형 $A_jA_kA_l \cdots A_m(i,j,k,\cdots,m$는 서로 다른 점)에 관한 점 P의 일반화된 Simson선이라고 하자. 또한 D_i를 점 P에서 $S_i(i=1,2,3,\cdots n)$로의 동일한 각으로 투영한 점의 좌표라고 하자. 이때 n개의 점 D_i는 동일선상에 놓여있다.

증명. 점 P에 관한 극좌표를 설정하자. 그러면 정리 2.5의 오각형에서 n각형으로의 확장을 통해 n개의 점 D_i을 지나는 직선의 극방정식을 알 수 있다.

$$S : r\cos(\theta - \sum_{i=1}^{n}\theta_i + \alpha + \beta + \gamma + \delta \cdots) = \frac{d\prod_{i=1}^{n}\cos\theta_i}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\cdots}. \qquad \blacksquare$$

참 고 문 헌

1. 강성권 외, 미분적분학, 경문사, 100-102.
2. 박진석 · 신양재, (1999). *평면기하와 GSP*, 경남대학교 출판사, 265-266.
3. Edwin J. Purcell, Dale Varberg. Calculus, 562-563.
4. O. Giering, Affine and Projective Generalization of Wallace Lines, J. Geom. Graph. V1, no 2, 119-133, 1997.
5. Yu Zhihong, Proof of Longuerre's theorem and its extensions by the method of polar coordinates. Pasific J. Math, V176, no2, 581-585, 1996.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20078076	과 정	석사
성 명	이름: 배 성 철 한자: 裵 成 哲 영문:Bae Sung Chul				
주 소	광주광역시 남구 봉선동 라인광장 105동 213호				
연락처	010-6660-3600				
논문제목	확장된 심슨 정리의 증명에 관한 연구				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2009년 12월 일

저작자: 배 성 철 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하