[UCI]I804:24011-200000239296

2010년 2월

교육학석사(수학교육)학위논문

단위구면에 내접하는 사면체의 수심에 관한 연구

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 신 욱

단위구면에 내접하는 사면체의 수심에 관한 연구

The orthocenter of a tetrahedron inscribed in a unit sphere

2010년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 신 욱

단위구면에 내접하는 사면체의 수심에 관한 연구

지도교수 안 영 준

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2009년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

강 신 욱

강신욱의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 _____인

심 사 위 원 조선대학교 교수 _____인

심 사 위 원 조선대학교 교수 _____인

2009년 12월

조선대학교 교육대학원

- 목　　차-

ABSTRACT

The orthocenter of a tetrahedron inscribed in a unit sphere

Kang sin-wook
Advisor : Prof. Ahn Young-Joon, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

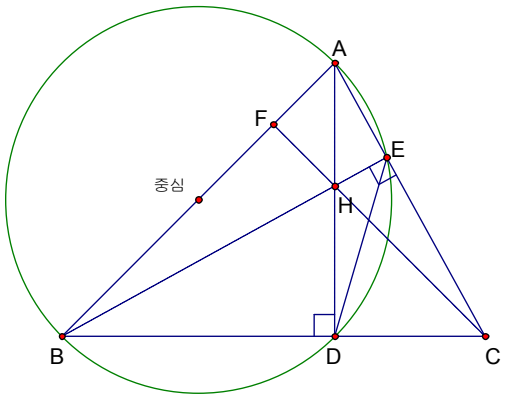
The aim of this thesis, is to find out the orthocenter or the *monge point* on a tetrahedron inscribed to a unit sphere.
If the orthocenter is on a tetrahedron inscribed to a unit sphere, I examine the position where it is.
If not, I attempt to solve this problem by employing the *monge point* instead and reveal the position where the *monge point* is.

Ⅰ. 기 초 지 식

A. 삼각형의 수심에 대한 정리

[정리 1.1] 삼각형의 각 꼭짓점에서 그 대변에 내린 세 수선은 한 점(이를 수심이라 함)에서 만난다.

증명. 꼭짓점 A에서 대변 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D, 꼭짓점 B에서 대변 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 E라 하고, $\overline{AD}$와 $\overline{BE}$의 교점을 H로 한다. 이때, $\overline{CH}$의 연장선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 F로 하면, $\overline{AB}$와 $\overline{CF}$는 서로 직교함을 보이기로 한다.



<그림 1>

$\angle AEB = \angle ADB = \angle R$이므로, 네 점 A, E, D, B는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다. 그러므로

$$\angle BAC = \angle EDC.$$

또한,

$$\angle BEC + \angle ADC = 2\angle R$$

이므로 네 점 E, H, D, C는 한 원 위에 있다. 따라서

$$\angle EDH = \angle ECH.$$

한편,

$$\angle FAC + \angle FCA = \angle R \ (\because \angle EDC + \angle EDH = \angle R).$$

$$\therefore \angle AFC = \angle R, \quad \overline{AB} \perp \overline{CF}. \quad \blacksquare$$

[정리 1.2 (Servois, 1812)] $\triangle ABC$의 외심을 O, 수심을 H, 점 O에서 변 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 L로 하면, $\overline{AH} = 2\overline{OL}$이다.

증명. $\triangle ABC$의 외접원에서 점 B, O를 지나는 이 원의 지름의 다른 끝점을 S로 하면 $\overline{BS}$가 지름이므로

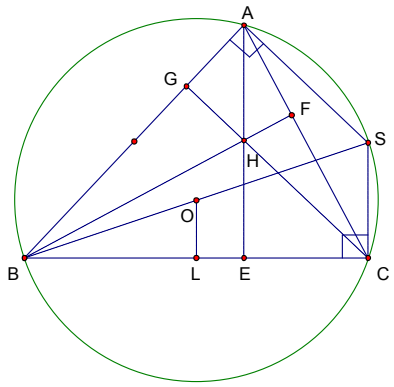
$$\angle BAS = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BCS = \frac{\pi}{2}.$$

또한, $\overline{SA}$와 $\overline{CH}$가 $\overline{AB}$에 수직이므로 $\overline{SA} \,//\, \overline{CH}$이다.

한편, $\overline{AH}$와 $\overline{SC}$가 $\overline{BC}$에 수직이므로 $\overline{AH} \,//\, \overline{SC}$이다. 따라서 $\square AHCS$는 평행사변형이므로 $\overline{AH} = \overline{SC}$.

한편, $\triangle SBC$에서 $\overline{OL} \,//\, \overline{SC}$이므로 $2\overline{OL} = \overline{SC}$.

$$\therefore \ \overline{AH} \,(= \overline{SC}) = 2\overline{OL}. \quad \blacksquare$$



<그림 2>

[정리 1.3] 삼각형의 외심, 무게중심, 수심은 한 직선 위에 있다.

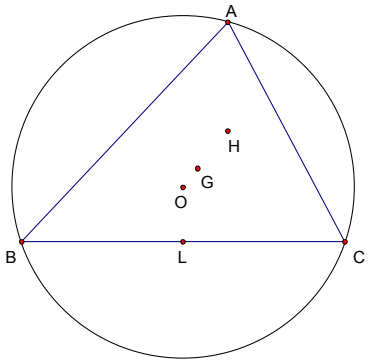
증명. $\overline{OH}$ 와 $\overline{AL}$ 의 교점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심임을 보이기로 한다. 그림에서 $\overline{AH} // \overline{OL}$ 이므로

$$\triangle AGH \backsim \triangle LGO.$$

한편, 정리 1.2 으로부터

$$\overline{AH} : \overline{OL} = 2:1 \ , \ \overline{AG} : \overline{GL} = 2:1$$

그러므로 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이다. ■



<그림 3>

B. Euler line 정리

오일러 라인 정리는 △ABC의 외심, 무게중심, 수심을 각각 O, G, H로 하면 이들 점은 이 순서로 한 직선위에 있다. 그리고 무게중심 G는 외심O와 수심 H를 1:2로 내분한다. 이 오일러 라인 정리는 매우 잘 알려져 있으나, 추가로 증명을 해보기로 하자.

△ABC의 외심 O를 원점으로 하는 복소평면에서 꼭짓점 A, B, C에 대응하는 복소수를 각각 z_1, z_2, z_3이라 하면

$$O = 0, \ G = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \ L = \frac{1}{2}(z_2 + z_3).$$

한편, $\overline{AH} // \overline{OL}$ 이고, △AGH∽△LGO. $\overline{AH} = 2\overline{OL}$ 이므로, 벡터로서의 $\overrightarrow{AH}$

의 복소수 표현은 z_2+z_3이다. 따라서

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$$

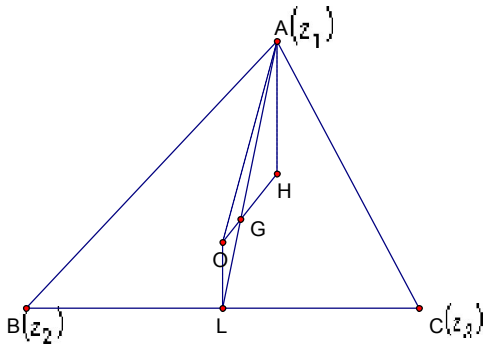
이므로 $H(z_1+z_2+z_3)$이다. 즉, 외심 O, 무게중심 G, 수심H는 각각

$$0,\ \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3),\ z_1+z_2+z_3$$

으로 나타낼 수 있다. 그리고 이들 세 점은 한 직선 위에 있고

$$\overrightarrow{OG}:\overrightarrow{GH}=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3):\frac{2}{3}(z_1+z_2+z_3)=1:2$$

이므로 G는 외심 O와 수심 H을 1:2로 내분한다.



<그림 4>

C. 단위구상에 놓여있는 삼각형의 수심에 관한 정리

다음 정리는 단위구면에 놓여 있는 임의의 세 점으로 만든 삼각형의 수심의 위치에 대한 정리이다. 이 정리는 이지혜[2]가 증명하였다.

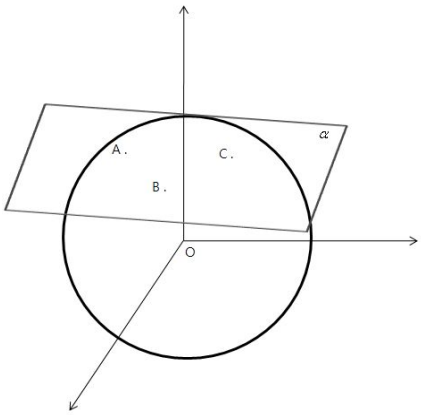
[정리 2.1] 원점이 중심인 단위구면의 임의의 세 점 A,B,C을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 생각해 보자. 이 삼각형의 수심을 $H(x,y,z)$라 하고, 수심의 집합을 H^*라고 하면

$$H^*=\ \{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2+z^2}<3\}$$

이다.[2]

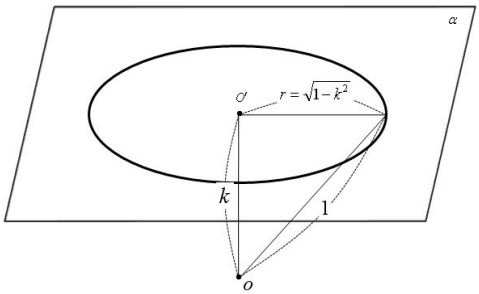
증명. (⊂) 단위구면에 임의의 세 점 A,B,C을 잡아서 세 점 A,B,C가 이루

는 삼각형이 있다. 이 삼각형을 포함하는 평면α로 자르면 평면α와 구가 만나서 생기는 원이 존재하게 되고, 이 원은 △ABC의 외접원이 된다.



<그림 5>

이 원이 구의 중심에서 k만큼 떨어졌다고 하자. 즉 $\overline{OO'}=k$이고, 이 원의 반지름을 r이라 하면 피타고라스 정리에 의해서 $r=\sqrt{1-k^2}$, △ABC의 무게중심은 원의 내부에 있게 된다.



<그림 6>

$|\overline{O'G}| < \sqrt{1-k^2}$이고, 오일러 직선의 정리에 의해서 $\overline{OG}:\overline{OH}=1:3$이므로

$$|\overline{O'H}| < 3\sqrt{1-k^2} = \sqrt{9-9k^2}$$

이것도 피타고라스 정리에 의해서

$$\overline{OH}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{O'H}^2 < 9-9k^2+k^2 = 9-8k^2$$

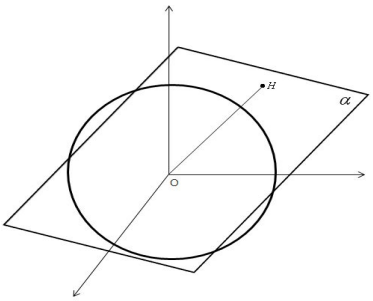
$$\overline{OH} < \sqrt{9-8k^2} \le 3$$

따라서

$$H^* \subset \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 3\} \ .$$

(⊃) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}<3$을 만족하는 임의의 점 $H(x,y,z)$를 잡자. 그러면 $|\overline{OH}| < 3$.

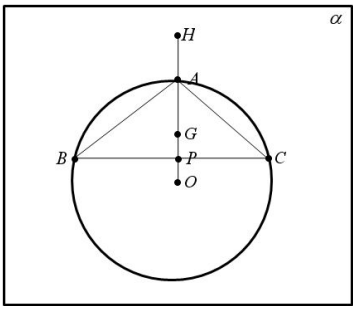
$\overline{OH}$를 포함하는 평면으로 잘랐을 때, 평면위에 단위구와 만나서 생긴 하나의 원이 존재한다.



<그림 7>

이 원과 $\overline{OH}$가 만나는 교점을 A라 하자. 그리고 $\overline{OH}$를 1:2로 내분하는 점 G를 잡자. 여기에 $\overline{AG}$를 3:1로 외분하는 점 P를 잡고 점P를 지나면서 $\overline{AG}$와 수직인 선분을 잇는다. 그리고 원과 선분이 만나는 점을 B와 C라고 놓고 이 세 점을 연결하면 하나의 삼각형이 만들어 지고 이 삼각형은 점 $H(x,y,z)$를 수심으로 하게 된다.

$$H^* \supset \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 3\} \ . \qquad \blacksquare$$



<그림 8>

D. 수심이 존재하는 사면체

본 논문에서는 정리 2.1에서 단위구면 상의 삼각형을 사면체로 확장하여 그 성질을 파악하고자 한다. 따라서 사면체가 수심을 갖는지, 갖지 않는지, 언제 갖는지에 대하여 연구해야 할 필요성이 있다. 우리는 Hans Havlicek의 논문 [3]에서 사면체가 수심을 가질 필요충분조건을 알 수 있다.

유클리드 3차원 공간에서 $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$를 사면체 T의 꼭짓점들의 집합이라 하고 4개의 점들은 같은 평면에 있지 않다고 가정하자. $\{i,j,k,l\} = \{0,1,2,3\}$ 이라고 하자.

만약 l을 사면체의 위쪽 정점의 첨자라고 가정한다면 i,j,k는 밑면의 (첨자)이다. 이제 벡터공간 내의 벡터들로 점들을 표시하려고 하며, 원점은 O라고 한다.

각각의 꼭짓점 A_i의 위치벡터는 $a_i := \overrightarrow{OA_i}$에 의해서 주어진다. 각각의 모서리는 다음과 같은 벡터 식을 얻는다.

$$b_{ij} := a_i - a_j \tag{1}$$

$$b_{ij} + b_{ji} = 0 \tag{2}$$

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{ki} = 0 \tag{3}$$

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li} = 0. \tag{4}$$

여기서 b_{ij}, b_{ik}, b_{il}은 당연히 일차독립이다.

(4)는 사면체T가 한 평면에 있지 않다는 가정으로부터 나온다. (1)과 벡터의 내적으로부터 다음 등식도 성립한다.

$$b_{ij} \cdot b_{kl} + b_{ik} \cdot b_{jl} + b_{il} \cdot b_{jk} = 0. \tag{5}$$

사면체 T의 모서리 A_iA_j와 남아있는 두개의 꼭짓점 중 한 점 A_k를 생각하자. A_k를 지나면서 지정한 모서리 A_iA_j에 수직인 평면의 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_{ij} \cdot (a_k - x) = 0 \ . \tag{6}$$

여기서 x는 미지의 벡터 $\overrightarrow{OX}$를 의미한다. 이러한 평면은 사면체에서 많아야 12개의 평면이 존재한다.

우리는 A_l을 지나면서 마주보는 면 $\triangle A_iA_jA_k$에 수직으로 내린 수선을 h_l이라 쓰고, 높이라 부른다. h_l이 놓여있는 세 개의 평면들의 방정식은

$$b_{ij} \cdot (a_l - x) = 0$$

$$b_{jk} \cdot (a_l - x) = 0 \qquad (7)$$
$$b_{ki} \cdot (a_l - x) = 0$$

이다. 그런데 (3)에서 모든 세 개의 방정식이 일차종속임에도 불구하고, 이 방정식들 중에서 임의의 2개가 일차독립이라는 것은 (4)와 (2)로부터 나온다.

그러므로 (7)은 h_l과 만나는 세 개의 다른 평면을 묘사한다. <그림 9>는 높이 h_3를 지나면서 $\overline{A_0A_1}$과 $\overline{A_0A_2}$에 각각 수직인 평면들을 보여준다. 이제, 각각 (7)의 첫 번째, 두 번째, 세 번째 평면들과 평행인A_k, A_i, A_j를 지나는 유일하게 결정되는 평면을 생각하자.

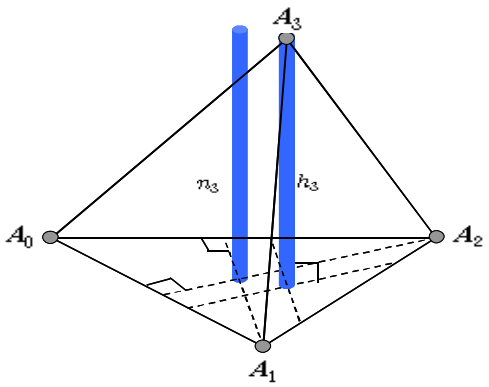
$$b_{ij} \cdot (a_k - x) = 0$$
$$b_{jk} \cdot (a_i - x) = 0 \qquad (8)$$
$$b_{ki} \cdot (a_j - x) = 0.$$

이 식은 (7)과 마찬가지로 세 개의 평면이 한 개의 교선을 가지고 있다는 것을 묘사한다. 이 교선을 n_l이라 하자. (n_3를 지나는 이 평면들의 2개는 <그림 9>에 의해서 그려져 있다.)

그것의 정의로부터 선 n_l은 세 점 A_i, A_j, A_k을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle A_iA_jA_k$의 수심을 포함한다. 또한 삼각형의 평면에 수직이다. 이처럼 우리는 사면체의 한 면에서 수심을 지나고, 그 면에 수직인 직선을 수심직교선 (orthocentric perpendicular)라 하고, n_l을 T의 수심직교선이라고 부른다.

$$b_{ij} \cdot a_k + b_{jk} \cdot a_i + b_{ki} \cdot a_j = 0. \qquad (9)$$

수선 h_l과 수심직교선 n_l은 평행하지만 일반적으로 같지는 않다.



<그림 9>

[정리3.1] $i \neq l$ 각각의 수심직교선 n_l는 모든 높이 h_i와 만난다. [3]

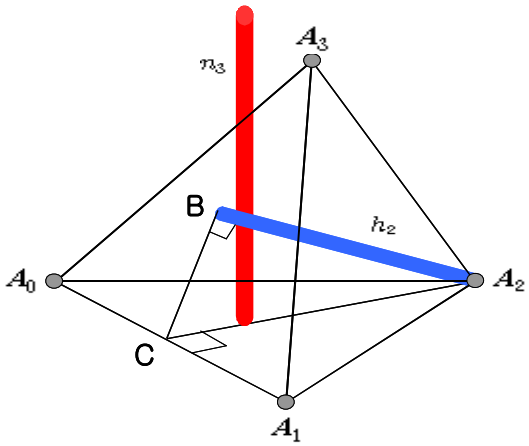
증명. 임의의 사면체의 h_2와 n_3를 보도록 하자. h_2는 $\triangle A_0A_1A_3$에 수직이다. 여기서 $\triangle A_0A_1A_3$과 h_2가 만나는 점을 점 B라 하자. 그리고 점 A_2에서 모서리 A_0A_1에 수직인 선을 그어 만나는 점을 점 C라 하면

$$\overline{A_2B}\,(h_2) \perp \overline{A_0A_1}\ , \qquad \overline{A_2C} \perp \overline{A_0A_1}$$

이므로

$$\overline{A_0A_1} \perp \overline{BC}$$

이다. 그러면 평면 A_2BC라는 것이 생긴다. 여기서 n_3는 $\triangle A_0A_1A_2$의 수심을 포함하면서 $\triangle A_0A_1A_2$에 수직인 선이기 때문에 선 A_2C 위에 $\triangle A_0A_1A_2$의 수심이 있고, 그 수심을 지나면서 평면 A_2BC위에 그려지게 되므로 h_2 와 n_3는 만난다. 나머지도 이와 같은 방법으로 하면 되겠다. ■



<그림 10>

[정리3.2] 수선 h_i와 h_j는 아래 방정식이 성립할 때,

$$b_{kl} \cdot b_{ij} = 0 \tag{10}$$

또는 다른 한편으로는 반대편의 엇갈린 모서리 A_kA_l과A_iA_j이 수직일 때 만난다. [3]

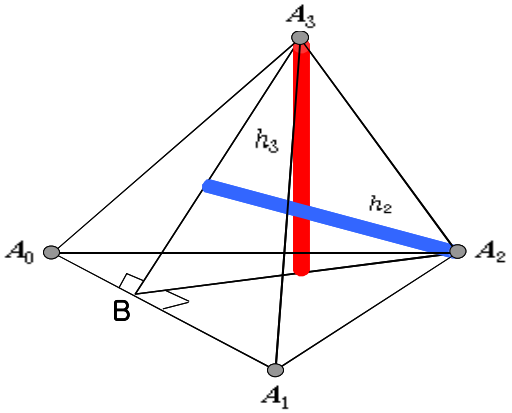
증명. 모서리A_2A_3을 포함하고, 모서리A_0A_1에 수직인 평면은 A_0A_1과 한점에서 만난다. 그러므로 점 A_3에서 모서리 A_0A_1에 수직인 선을 긋고 만나는 점

을 점 B라 하자. 마찬가지로 점 A_2에서 모서리 A_0A_1에 수직인 선을 긋고 만나는 점은 점 B가 된다. 여기서 하나의 평면 BA_2A_3가 생기는 것을 알 수 있는데 평면 BA_2A_3는 모서리 A_0A_1에 수직이 된다. 여기서 h_2는 선 A_3B위에 있는 점을 지나면서 점 A_2를 지나고, 마찬가지로 h_3는 선 A_2B 위에 있는 점을 지나면서 점 A_3를 지나게 되기 때문에 h_2와 h_3는 평면 BA_2A_3위에서 한점으로 만나게 되는 것을 알 수 있다.

역으로 P를 h_i과h_j의 공통점이라고 하자. $p = \overrightarrow{OP}$라 하자.

$$0 = 0 - 0 = b_{kl} \cdot (a_i - p) - b_{kl} \cdot (a_j - p) = b_{kl} \cdot b_{ij}.$$

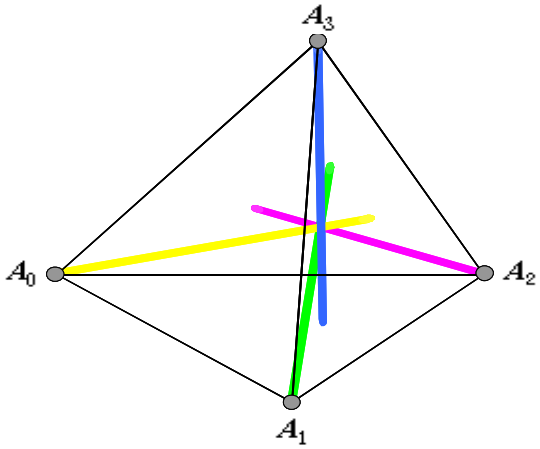
우리는 위의 식에서 (10)을 만족하는 것을 추론할 수 있다. ■



<그림 11>

[정리 3.3] 만약 수선 한 개가 다른 두개의 수선과 만난다면 모든 수선은 한점에서 만난다.[3]

증명. h_0, h_1, h_2가 만난다고 가정하자. (10)은 $b_{23} \cdot b_{01} = b_{13} \cdot b_{02} = 0$ 과 (5)에서 보여주는$b_{03} \cdot b_{12} = 0$이라는 것을 증명할 수 있다. h_0 또한 h_3을 만난다. 정리 3.2에 의해서 2개의 수선은 교점을 가지고 있다. 명료하게 h_3는 위의 과정에 의해서 h_0, h_1, h_2와 모두 만나게 되므로 공통된 점을 가지고 있어야 한다. 그렇지만 네 개의 수선은 동일 평면상에 있지 않다. 따라서 h_3와 h_0, h_1, h_2는 공통된 점을 가지고 있어야 한다. ■



<그림 12>

E. 사면체의 Monge point

임의의 사면체에서 한 모서리에 수직이고 그 모서리와 마주보는 모서리의 중점을 지나는 평면이 존재하게 되는데 이러한 평면을 midplane이라고 한다. 예를 들어 모서리 A_iA_j에 수직이고, A_kA_l의 중점을 지나는 midplane의 방정식은 다음과 같은 방정식이 된다.

$$b_{ij} \cdot (a_k + a_l - 2x) = 0. \tag{11}$$

따라서 임의의 사면체는 6개의 midplane을 가지고 있다.

[정리 3.4] 사면체의 모든(6개의) midplane은 한점에서 일치한다.[3]

증명. (4)에서 우리는 b_{01}, b_{02}, b_{03}이 일차독립이라는 것을 알고 있다. 결과적으로 그것들은 하나의 유일한 공통된 점이 존재하고, 그것을 M이라 하자. 평면의 방정식은

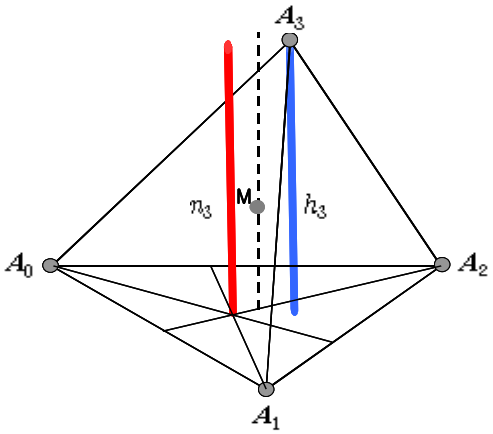
$$b_{01} \cdot (a_2 + a_3 - 2x) = 0$$
$$b_{02} \cdot (a_1 + a_3 - 2x) = 0$$
$$b_{03} \cdot (a_1 + a_2 - 2x) = 0$$

이므로, 첫 번째 방정식에서 두 번째를 빼주면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
0 &= b_{02} \cdot a_1 - b_{01} \cdot a_2 + (b_{02} - b_{01}) \cdot (a_3 - 2x) \\
&= b_{02} \cdot a_1 + b_{10} \cdot a_2 + b_{12} \cdot (a_3 - 2x) \\
&= b_{12} \cdot (a_0 + a_3 - 2x).
\end{aligned}
$$

그래서 M은 A_1A_2에 수직인 중앙면에 놓여있다. 유사하게 계산하면 M이 중앙면에 속하는 것을 보여준다. ■

[정리 3.4]에서 모든 midplane은 한 점에서 만나게 된다는 것을 알 수 있고, 이 점을 Monge point라 부른다.



<그림 13>

[정리 3.5] n차원에서 Euler line정리의 무게중심 G는 외심 O와 *monge point* M을 (n-1):2 로 내분한다. 따라서 n=2일 때 평면에서 수심(=*monge point*) 이고 n=3 이면 1:1로 내분한다.[3]

증명. 사면체 T의 꼭짓점을 $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$라 하고 구의 외심을 C, 사면체의 무게중심을 G, *monge point*을 M이라 하자.
여기서 모서리 A_iA_j에 수직이등분하는 평면의 방정식을 알아보면

$$b_{ij} \cdot (a_i + a_j - 2x) = 0 \tag{12}$$

이 되고, 그 결과 $\overline{OC}$가 (12)의 모든 6개의 방정식의 선형대수적인 풀이다. 만약 여기서 i, j를 고정하고 위의 (11)식의 midplain의 방정식을 풀면

$$b_{ij} \cdot (a_i + a_j + a_k + a_l - 4x) = 0. \tag{13}$$

이 평면은 선분 CM의 중점을 포함한다. (4)에서 각각 독립적인 벡터라고 했

기 때문에 (13)의 모든 방정식의 풀이는

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}(a_i + a_j + a_k + a_l).$$

이것은 선분 CM의 중점이 무게중심 G라는 것을 의미한다. 다른 한편으로는 서로 다른 점 G, C, M이 있으면 그 점들은 3차에서의 Euler line을 의미한다고 볼 수 있다. ■

Ⅱ. 중요 정리 및 증명

[정리 4.1] 구의 중심이 원점인 단위구면에 내접하는 수심을 갖는 임의의 사면체의 수심의 집합을 H^* 라 하면

$$H^* = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 2\}$$

(증명) (⊂) 단위구면에 내접하는 수심을 갖는 임의의 사면체를 잡자. 그렇다면 수심을 갖는 임의의 사면체의 수심은 존재하게 된다. 그리고 사면체의 무게중심은 사면체 내부에 존재하게 되므로

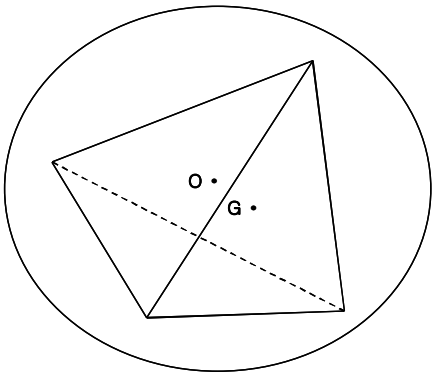
$$|\overline{OG}| < 1.$$

따라서 Euler line정리에 의해서 $\overline{OG}:\overline{GH} = 1:1$ 이 된다.

$$\overline{OG}:\overline{OH} = 1:2.$$

따라서 $|\overline{OH}| < 2$ 이고

따라서 $H^* \subset \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 2\}$.

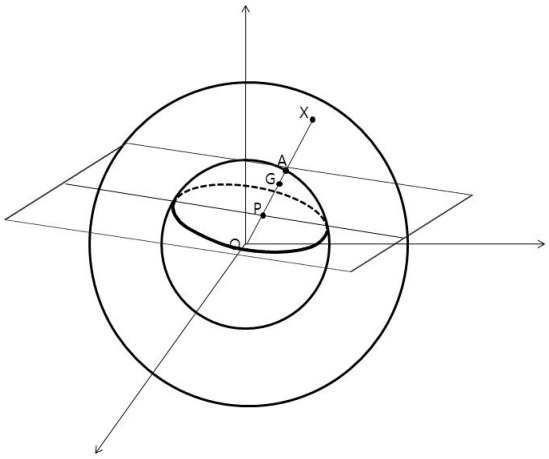


<그림 14>

(⊃) 구의 중심이 원점이면서 반지름이 2인 구와 1인 단위구면을 생각해보자. 반지름이 2인 구의 내부에 임의의 $X(x,y,z)$를 잡자. 그렇다면 $|\overline{OX}| < 2$ 이다. $\overline{OX}$를 1:1로 내분하는 점 G를 잡자.

그리고 점 G를 무게중심으로 하는 수심을 갖는 임의의 사면체를 잡으면 증명이 완료되겠다.

$\overline{OX}$와 점 O를 중심으로 하는 단위구면과 만나는 점을 $A(x_a, y_a, z_a)$라 하자. 점 P를 $\overline{OX}$ 위에 잡는데 점 P는 $\overline{AG}$를 4:1로 외분하는 P점을 잡는다. 그리고 점 P를 포함하면서 $\overline{OX}$에 수직인 평면을 잡는다.



<그림 15>

평면에서 점 P는 평면과 단위구면이 만나서 생기는 원의 중심에 놓이게 된다. 이 원에 내접하는 정삼각형$\triangle BCD$를 찾자. 우선 원의 둘레에 한점 $B(x_b, y_b, z_b)$를 잡고 $\overline{BP}$를 3:1로 외분하는 점을 잡고 그 점을 지나면서 $\overline{BP}$와 수직이게 현을 하나 긋는다. 그 현과 원이 만나는 점을 $C(x_c, y_c, z_c)$, $D(x_d, y_d, z_d)$라고 하고, B, C, D 세 점을 연결하면 정삼각형이 만들어 진다. 그리고 점 P는 정삼각형의 무게중심이기 때문에

$$P = (\frac{x_b + x_c + x_d}{3}, \frac{y_b + y_c + y_d}{3}).$$

사면체 $ABCD$의 무게중심 좌표는

$$G = (\frac{x_a + x_b + x_c + x_d}{4}, \frac{y_a + y_b + y_c + y_d}{4}).$$

점 P를 잡을 때 $\overline{AG}$를 4:1로 외분점이므로 계산을 해서 점P가 나온다면 정

리가 되겠다.

$$P=\left(\frac{4\cdot\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4}-x_a}{3},\frac{4\cdot\frac{y_a+y_b+y_c+y_d}{4}-y_a}{3}\right).$$

따라서

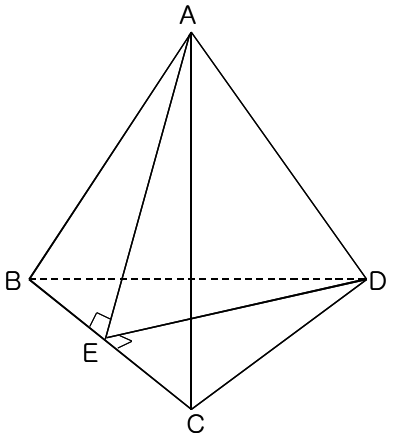
$$P=\left(\frac{x_b+x_c+x_d}{3},\frac{y_b+y_c+y_d}{3}\right).$$

A,B,C,D를 연결하면 G를 무게중심으로 하는 사면체가 되겠다.
이 사면체가 수심을 갖는 임의의 사면체인지 알아보자. 사면체에서 임의의 한 모서리를 잡고 그 모서리와 만나지 않은 다른 모서리를 잡아서 그 두 모서리가 수직임을 보이자. $\overline{BC}$에서 중점 E를 잡으면 $\overline{BC}\perp\overline{AE}$ 이고, $\overline{BC}\perp\overline{DE}$이므로 평면$ADE$와 직선 BC가 수직이므로, 따라서 $\overline{BC}\perp\overline{AD}$, $ABCD$사면체는 수심을 갖는 임의의 사면체이다. 그리고 사면체 $ABCD$의 수심 H는 존재하며, Euler 라인 정리에 의해서

$$\overline{OH}=2\overline{OG}=\overline{OX}$$

가 성립한다. 즉, 사면체 $ABCD$의 수심은 X에 있다. 모든 점 $X\in\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2+z^2}<2\}$ 에 대하여 그 점을 수심으로 갖는 사면체가 존재한다.
따라서

$$H^*\supset\left\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2+z^2}<2\right\}.\qquad\blacksquare$$



<그림 16>

[정리 4.2] 구의 중심이 원점인 단위구면에 접하는 임의의 사면체의 *monge point*의 집합을 M^*라 한다면

$$M^* = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 2\}$$

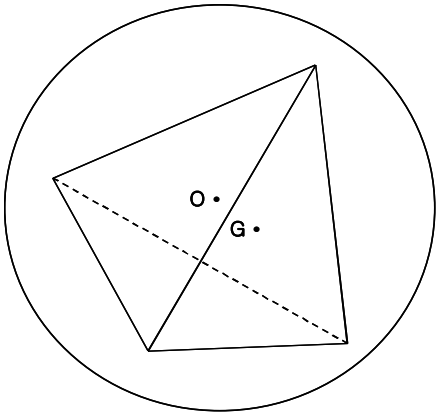
(증명) ($\subset$) 단위구면에 내접하는 사면체를 잡자. 그렇다면 사면체의 *monge point*은 존재하게 된다. 그리고 사면체의 무게중심은 사면체 내부에 존재하게 되므로

$$|\overline{OG}| < 1.$$

따라서 Euler line에 의해서 $\overline{OG} : \overline{GM} = 1:1$ 이 된다.

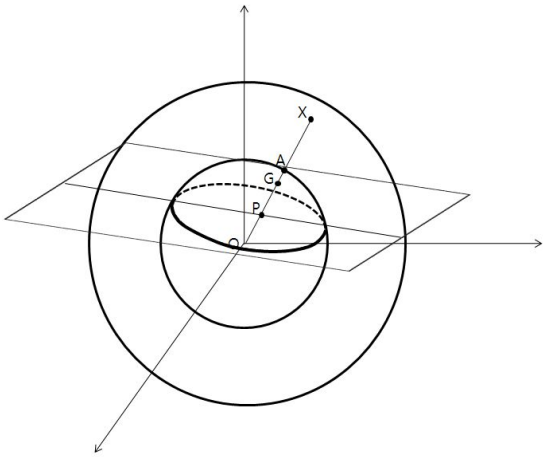
$$\overline{OG} : \overline{OM} = 1:2$$

따라서 $|\overline{OM}| < 2$ 이고, 따라서 $M^* \subset \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 2\}$.



<그림 17>

($\supset$) 구의 중심이 원점이면서 반지름이 2인 구와 1인 단위구면을 생각해보자. 반지름이 2인 구의 내부에 임의의 $X(x,y,z)$를 잡자. 그렇다면 $|\overline{OX}| < 2$ 이다. $\overline{OX}$를 1:1로 내분하는 점 G를 잡자. 그리고 점 G를 무게중심으로 사면체를 잡으면 증명이 완료되겠다. $\overline{OX}$와 점 O를 중심으로 하는 단위구면과 만나는 점을 $A(x_a,y_a,z_a)$라 하자. 점 P를 $\overline{OX}$위에 잡는데 점 P는 $\overline{AG}$를 4:1로 외분하는 P점을 잡는다. 그리고 점 P를 포함하면서 $\overline{OX}$에 수직인 평면을 잡는다.



<그림 18>

평면에서 점 P는 평면과 단위구가 만나서 생기는 원의 중심에 놓이게 된다. 이 원에 내접하는 정삼각형$\triangle BCD$를 찾자. 우선 원의 둘레에 한점 $B(x_b, y_b, z_b)$를 잡고 $\overline{BP}$를 3:1로 외분하는 점을 잡고 그 점을 지나면서 $\overline{BP}$와 수직이게 현을 하나 긋는다. 그 현과 원이 만나는 점을 $C(x_c, y_c, z_c)$, $D(x_d, y_d, z_d)$라고 하고, B, C, D 세 점을 연결하면 정삼각형이 만들어 진다. 그리고 점 P는 정삼각형의 무게중심이기 때문에

$$P = \left(\frac{x_b + x_c + x_d}{3}, \frac{y_b + y_c + y_d}{3}\right).$$

사면체$ABCD$의 무게중심 좌표는

$$G = \left(\frac{x_a + x_b + x_c + x_d}{4}, \frac{y_a + y_b + y_c + y_d}{4}\right).$$

점 P를 잡을 때 $\overline{AG}$를 4:1로 외분점이므로 계산을 해서 점P가 나온다면 정리가 되겠다.

$$P = \left(\frac{4 \cdot \frac{x_a + x_b + x_c + x_d}{4} - x_a}{3}, \frac{4 \cdot \frac{y_a + y_b + y_c + y_d}{4} - y_a}{3}\right).$$

따라서

$$P = (\frac{x_b + x_c + x_d}{3}, \frac{y_b + y_c + y_d}{3}).$$

A, B, C, D를 연결하면 G를 무게중심으로 하는 사면체가 되겠다. 그리고 사면체 $ABCD$의 *monge point* 은 존재하며, Euler 라인 정리에 의해서

$$\overline{OM} = 2\overline{OG} = \overline{OX}$$

가 성립한다. 즉, 사면체 $ABCD$의 *monge point* 은 X에 있다.

모든 점 $X \in \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 2\}$ 에 대하여 그 점을 *monge point*로 갖는 사면체가 존재한다.

따라서

$$M^* \supset \left\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 2\right\} \qquad \blacksquare$$

IV. 참 고 문 헌

[1] 박진석 · 신양재. (1999). *평면기하와 GSP* , 경남대학교 출판사 p.145~149

[2] 이지혜. (2006). *다차원 삼각형의 수심, 외심, 무게중심에 관한 연구*, 조선대학교 교육대학원 석사학위논문.

[3] Hans Havlicek; Gunter Weiß, Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 110, No. 8 (Oct., 2003)

[4] K. Satyanarayana, The tetrahedron the feet of whose altitudes are coplanar. *Math. Stud.* **50** (1982) 275-281

[5] S. R. Mandan, Altitudes of a simplex in *n*-space, *J. Aust. Math. Soc.***2**(1962) 403-424

[6] S. R. Mandan, Altitudes of a general n-simplex, *J. Aust. Math. Soc.* **5** (1965) 409-415.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20078071	과 정	석사
성 명	이름: 강 신 욱 한자: 姜 信 旭 영문Kang sin wook				
주 소	광주광역시 북구 두암동 부영아파트 105동 309호				
연락처	016-836-4173				
논문제목	단위구상에 내접하는 사면체의 수심에 관한 연구				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2009년 10월 20 일

저작자: 강 신 욱 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하