Collection @ chosun

creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000238500

Collection @ chosun

２００９년　８월

敎育學碩士(數學敎育)學位論文

平面上의 點集合에서의 볼록 多角形에 관한 考察

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

安　晟　允

Collection @ chosun

平面上의 點集合에서의 볼록 多角形에 관한 考察

A study on the convex polygons in planar point sets

2009년 8월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

安 晟 允

Collection @ chosun

平面上의 點集合에서의 볼록 多角形에 寬限 考察

指導敎授 姜 恩 實

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 提出함.

2009년 4월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

安 晟 允

Collection @ chosun

安晟允의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2009년　6월

朝鮮大學校 敎育大學院

Collection @ chosun

- 목 차-

ABSTRACT

Ⅰ. 서 론 ····· 1

A. 이론적 배경 ····· 1

Ⅱ. 본 론 ····· 3

A. 볼록 다각형 ····· 3

1. 볼록 삼각형과 사각형 ····· 3

2. 볼록 오각형 ····· 8

B. 속이 빈 볼록 다각형 ····· 13

1. 속이 빈 볼록 삼각형과 사각형 ····· 14

2. 속이 빈 볼록 오각형 ····· 15

Ⅲ. 결 론 ····· 25

참고문헌 ····· 26

Collection @ chosun

ABSTRACT

A study on the convex polygons in planar point sets

An Sung-yoon
Advisor : Prof. Kang Eun-sil Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In 1935, Erdös and Szekeres posed the problem of determining the smallest positive integer $f(n)$ so that any set of at least $f(n)$ points in general position in the plane contains a convex n-gon. Until now, the problem has been solved for the values $n=3, 4$, and 5 only.

In this thesis, we will show that $f(3)=3, f(4)=5$, and $f(5)=9$. Also, Erdös posed a similar problem on empty convex polygons, which is of determining a smallest positive integer $g(n)$ such that any set of at least $g(n)$ points in general position in the plane contains an empty convex n-gon. For $n=3$ and 4, it is easy to show that $g(3)=3$ and $g(4)=5$. For $n=5$, Harborth proved that $g(5)=10$. In this thesis, we reprove that $g(5)=10$ by visualizing the method of Harborth.

Collection @ chosun

Ⅰ. 서 론

A. 이론적 배경

최근 computer graphics, geometric modelings, motion planing과 같은 여러 분야에서의 볼록 다각형에 관한 중요성 때문에 이에 관한 연구가 다시 활발히 일어나고 있다. 이러한 일면에서 우리는 평면상의 점집합에서의 볼록 다각형의 존재성에 관한 Erdös-Szekeres 가설을 이 논문에서 다루어 보려고 한다.

1933년 Esther Klein은 모든 n에 대하여 '평면상에서 general position에 있는 $f(n)$개의 임의의 점들 중에서 항상 볼록 위치에 있는 n개의 점이 존재한다' 를 만족하는 최소수 $f(n)$이 존재하느냐는 문제를 제시하였다. 이에 대한 답으로, 1935년 Erdös와 Szekeres는 $f(n)$의 존재성을 보였고,

$$2^{n-2}+1 \le f(n) \le \binom{2n-4}{n-2}+1$$

임을 증명하였다. 또한, 그들은 다음을 추측하였다[2].

Erdös-Szekeres 가설: $n \ge 3$인 모든 자연수n에 대하여, $f(n)=2^{n-2}+1$이다.

그러나, 많은 수학자들의 노력에도 불구하고 Erdös-Szekeres의 가설은 n값이 3,4,5일 때만 증명되었다. $n=3$에 대하여 $f(3)=3$이라는 것은 쉽게 알 수 있고, $n=4$에 대하여 $f(4)=5$라는 것은 Klein에 의해 밝혀졌으며, 그리고 $n=5$에 대하여 $f(5)=9$라는 것은 Makai가 증명하였다. 하지만 $n \ge 6$에 대해 $f(n)=2^{n-2}+1$이라는 것은 아직 밝혀지지 않았고, 가장 최적의 상계로 최근 Tóth와 Valtr에 의해 $f(n) \le \binom{2n-5}{n-2}+1$ 임이 밝혀졌다[9].
우리는 이 논문에서 $n=3,4,5$에 대한 $f(n)$값을 자세히 알아보려고 한다.

Erdös는 또한, 비슷한 문제로 속이 빈 볼록 다각형의 존재성에 관해서도

Collection @ chosun

문제를 제기 했다. 즉, 평면상에서 general position에 있는 k개 이상의 점들로 이루어진 임의의 집합이 항상 속이 빈 볼록 n각형을 이루는 n개의 점을 포함할 때, k의 최소수 $g(n)$에 관한 문제를 제기하였다. 이러한 $g(n)$의 존재성은 n=3,4에 대해서는 쉽게 보일 수 있고, n=5에 대해서는 1978년 Harborth가 $g(5)=10$임을 증명하였다. 하지만 $n \geq 7$에 대해서는 $g(n)$이 존재하지 않음을 1983년 Horton이 증명하였다[3]. 따라서, $g(n)$에 관한 Erdös의 문제는 $n=6$에서만 미해결 문제로 남아 있다.

이 논문에서 우리는 $n=3,4,5$에 대한 $g(n)$의 값에 대해 자세히 알아보려고 한다.

Collection @ chosun

Ⅱ. 본 론

A. 볼록 다각형

이 절에서는 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합X가 볼록 다각형을 구성하는 점들을 포함하기 위해서는 X가 적어도 몇 개 이상의 점을 가져야 하는지에 대하여 알아보도록 하자. 특히 볼록 삼각형, 볼록 사각형 그리고 볼록 오각형에 대하여 각각 X가 필요한 최소한의 점들의 개수에 대하여 알아보려고 한다. 먼저 몇 가지 용어를 다음과 같이 정의하자.

[정의1] 평면상의 점들 중 어느 세 점도 일직선상에 있지 않을 때 이 점들을 general position에 있다고 한다.

[정의2] 평면상에서 general position 에 있는 n개 이상의 점들로 이루어진 집합이 항상 볼록 k각형을 이루는 k개의 점을 포함할 때 n의 최소수를 $f(k)$라고 한다.

[정의3] $A(p_i,p_j)$를 점 p_i에서 점 p_j 방향으로 향하는 직선 $\overrightarrow{p_ip_j}$의 왼쪽 반평면이라 한다.

이 절에서는 $f(3)$, $f(4)$ 그리고 $f(5)$에 관해 알아보려고 한다.

1. 볼록 삼각형과 사각형

먼저, 평면상에서 general position에 있는 3개 이상의 점들로 이루어진 집합은 삼각형을 이루는 세 점을 항상 포함하기 때문에 $f(3)=3$임을 알 수 있다.

다음으로 볼록 사각형을 구성하는 점을 포함하기 위해 평면상에서 general

Collection @ chosun

position에 있는 임의의 점집합이 적어도 몇 개 이상의 점을 가지고 있어야 하는지에 대하여 알아보도록 하자.

[정리1] (1) X를 평면상에서 general position에 있는 5개의 점을 가진 임의의 집합이라고 하자. 그러면 X는 반드시 볼록 사각형을 구성하는 네 점을 포함한다.

(2) $f(4)=5$이다.

증명) (1) 앞에서 $f(3)=3$임을 알고 있으므로 X는 삼각형을 구성하는 세 점을 포함한다. 이때 만들어진 삼각형을 P라 하고 P상에 있는 X의 점들을 시계 반대방향으로 p_1, p_2, p_3이라 하자. X는 5개의 점들로 이루어진 집합이므로 점 p_1, p_2, p_3를 제외한 나머지 두 점의 위치에 따라 경우를 나누어 볼록 사각형을 찾아보도록 하자.

먼저, $\triangle p_1p_2p_3$ 내부에만 두 점이 존재하는 경우를 살펴보자. 이 경우에는 $\triangle p_1p_2p_3$의 세 점중 두 점과 $\triangle p_1p_2p_3$ 내부의 두 점을 이용해서 볼록 사각형을 만들 수 있다.

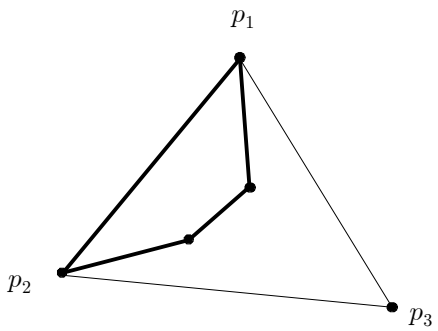

그림1

이제 $\triangle p_1p_2p_3$ 외부에 점이 존재하는 경우를 살펴보자.
$\triangle p_1p_2p_3$의 외부 영역을 다음과 같이 정의 하자.

Collection @ chosun

$R_i = A(p_{i+1}, p_i) \cap A(p_{i+2}, p_i) \cap A(p_{i+1}, p_{i+2})$
$R_i' = A(p_i, p_{i+2}) \cap A(p_{i+1}, p_i)$
$i = 1,2,3,\ \ p_4 = p_1, p_5 = p_2$

먼저, 영역 R_1, R_2, R_3에 점 q가 있다면 세 점 p_1, p_2, p_3과 한 점 q를 이용해서 볼록 사각형을 만들 수 있다.

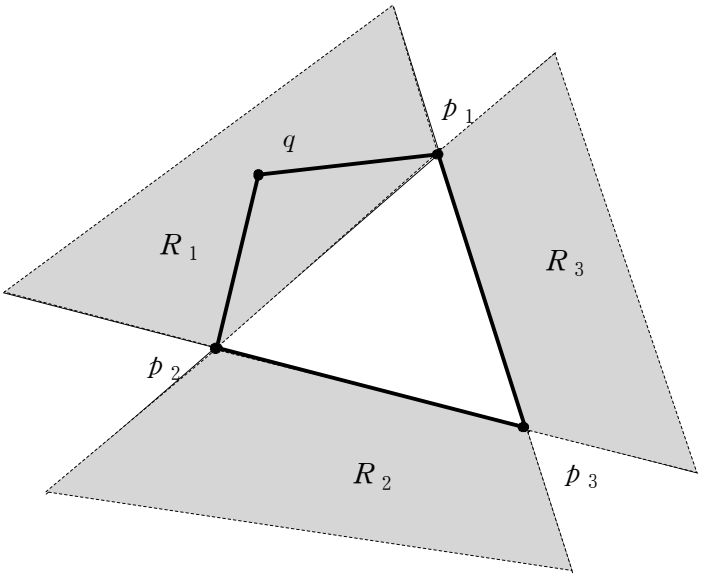

그림2

만약, 영역 R_1, R_2, R_3에 점이 없다면 다음 세 가지 경우로 나누어서 생각해 볼 수 있다.

(a) $\triangle p_1p_2p_3$내부에 한 점이 영역 R_1', R_2', R_3' 중 한 영역에 한 점이 존재하는 경우

이 경우에 영역 R_i', $i = 1,2,3$, 의 한 점과 $\triangle p_1p_2p_3$ 의 세 점 중 두 점을 이용해서 새로운 삼각형 P'을 만들 수 있고 이 삼각형 P'의 내부에는 반드시 두 점이 존재 한다. 따라서 삼각형 P'의 세 점중 두 점과 삼각형 P'내부의 두 점을 이용해서

Collection @ chosun

볼록 사각형을 만들 수 있다.

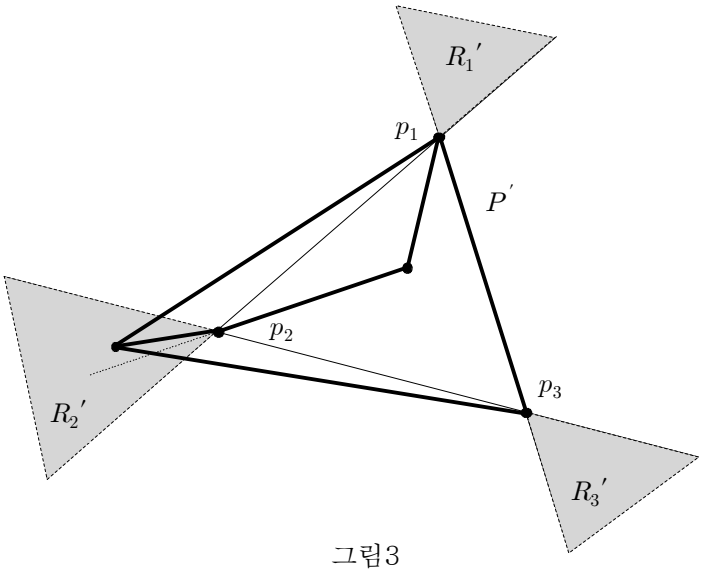

그림3

(b) **영역 R_1', R_2', R_3'중 두 영역에 각각 한 점씩만 존재하는 경우**

$\triangle p_1p_2p_3$의 한 점과 영역 R_1', R_2', R_3'중 두 영역에 각각 포함되는 두 점을 이용하여 새로운 삼각형 P'을 만들 수 있고 삼각형 P'내부에는 $\triangle p_1p_2p_3$의 두 점이 포함되어 있으므로 앞의 경우와 마찬가지로 볼록 사각형을 만들 수 있다.

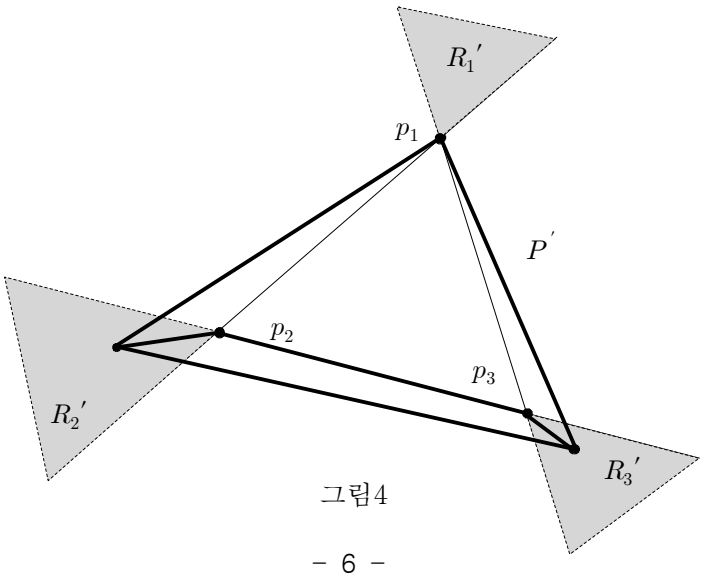

그림4

Collection @ chosun

(c) 영역 R_1', R_2', R_3'중 한 영역에 두 점이 존재하는 경우

만약 영역 R_2'에 두 점 q_1, q_2가 존재한다면 두 점중 점 p_2에 가장 가까운 점(두 점 사이의 거리)을 q_1이라 하자. 그러면 점 q_2의 위치에 따라 두 가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

① 영역 $A(p_2, q_1) \cap R_2'$ 에 점 q_2가 존재하는 경우

점 p_3, p_2, q_1과 점 q_2를 이용해서 볼록 사각형을 만들 수 있다.

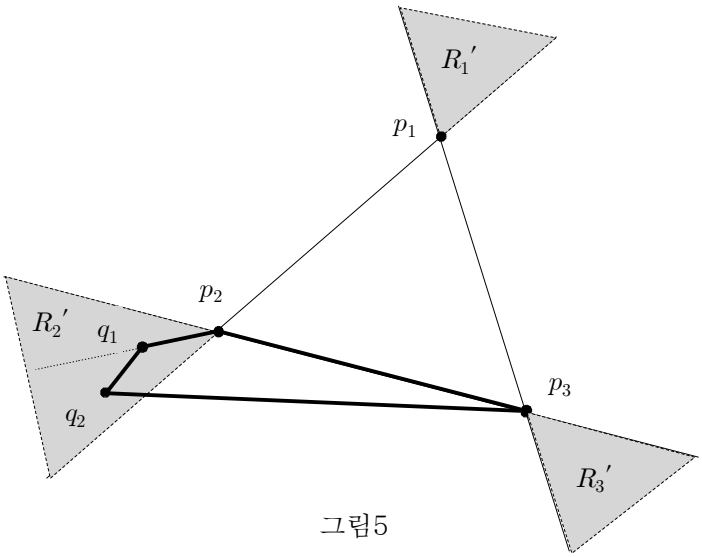

그림5

② 영역 $A(q_1, p_2) \cap R_2'$ 에 점 q_2가 존재하는 경우

점 p_1, p_2, q_1과 점 q_2를 이용해서 볼록 사각형을 만들 수 있다.

Collection @ chosun

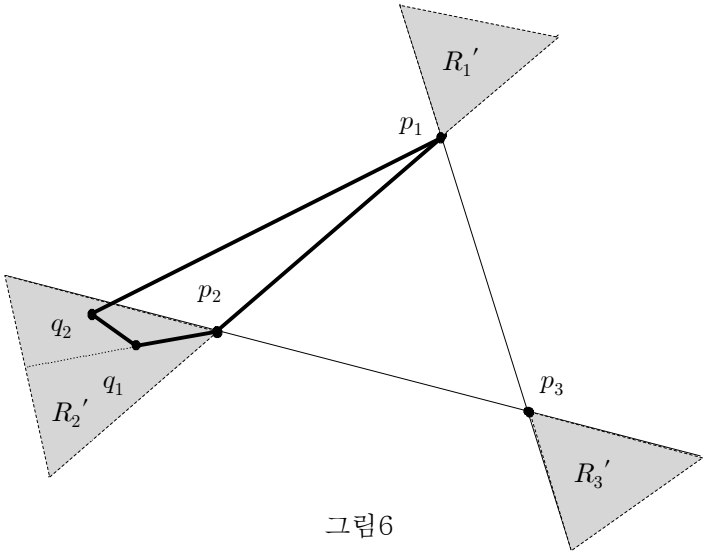

그림6

따라서 평면상에서 general position에 있는 5개의 점을 가진 임의의 집합은 반드시 볼록 사각형을 구성하는 네 점을 포함한다.

(2) (1)의 증명에 의해 평면상에서 general position에 있는 임의의 5개 이상의 점들로 이루어진 집합은 항상 볼록 사각형을 구성하는 점들을 포함하고 있고 볼록 사각형을 포함하지 않는 4개의 점들로 이루어진 점집합을 쉽게 찾을 수 있으므로 5는 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 항상 볼록 사각형을 구성하는 점들을 포함하기 위한 최소한의 점의 개수이다.
즉, $f(4)=5$이다. ■

2. 볼록 오각형

이제 마지막으로 볼록 오각형을 구성하는 점을 포함하려면 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 적어도 몇 개 이상의 점을 가지고 있어야하는지에 대하여 알아보도록 하자.

Collection @ chosun

[예제1] 다음 집합은 8점을 가진 집합들 중에 유일하게 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함하지 않는 경우이다.

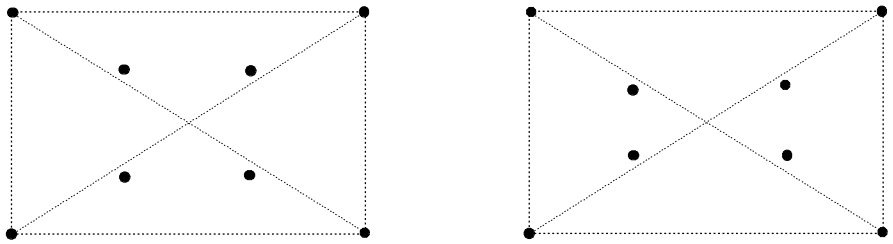

그림 7 Makai's eight-point counterexample

위의 Makai의 예에 의해 볼록 오각형의 존재성이 보장되기 위해서는 적어도 9개 이상의 점이 필요하다는 것을 알 수 있다. 즉, $f(5) \geq 9$이다. 따라서, 9개의 점을 가진 임의의 집합에 관해 볼록 오각형의 존재성을 보이면 우리는 $f(5)=9$임을 알 수 있다.

[정리2] (1) X를 평면상에서 general position에 있는 9개의 점을 가진 임의의 집합이라고 하자. 그러면 X의 9개의 점은 반드시 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함한다.

(2) $f(5)=9$이다.

증명) (1) Makai´s eight point 집합을 제외한 나머지의 8개의 점집합은 항상 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함하므로 Makai´s eight point 집합에서 한 점 더 추가 한 9개의 점집합에 대해 항상 볼록 오각형을 구성하는 점들이 존재함을 보이면 된다.

Makai´s eight point 집합에서 외부의 사각형과 내부의 사각형 위의 점을 각각 시계반대방향으로 p_1, p_2, p_3, p_4 그리고 q_1, q_2, q_3, q_4 라고 하고 추가되는 한 점을 z라 하자.

Collection @ chosun

다음과 같은 몇 가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

(a) 점 z가 $\square p_1p_2p_3p_4$ 외부에 있는 경우

$\square p_1p_2p_3p_4$ 외부 영역을 다음과 같이 정의하자.

$$R_i = A(q_i, p_i) \cap A(p_{i+1}, q_{i+1}) \cap A(p_{i+1}, p_i)$$
$$i = 1,2,3,4,\ \ p_5 = p_1,\ q_5 = q_1$$

점 z가 영역 R_i에 존재한다면 점 $p_i, p_{i+1}, q_{i+1}, q_i$와 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다. 예를 들어, 영역 R_1에 점 z가 존재한다면 점 p_1, p_2, q_2, q_1 과 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다.

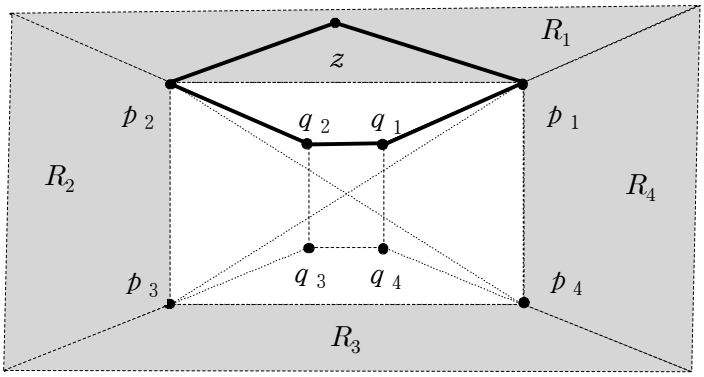

그림8

(b) 점 z가 $\square p_1p_2p_3p_4$ 내부에 있는 경우

이 경우에는 점 z가 $\square q_1q_2q_3q_4$ 외부에 있는 경우와 $\square q_1q_2q_3q_4$ 내부에 있는 두 가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

① 점 z가 $\square q_1q_2q_3q_4$ 외부에 있는 경우

$\square p_1p_2p_3p_4$ 내부와 $\square q_1q_2q_3q_4$ 외부의 영역을 다음과 같이 정

Collection @ chosun

의하자.

$$R_i' = A(q_{i+1}, q_i) \cap A(q_{i+1}, q_{i+2}) \cap A(q_{i-1}, q_i) \cap A(p_i, p_{i+1})$$
$$R_i'' = A(q_i, q_{i-1}) \cap A(q_i, p_i) \cap A(p_i, p_{i+1})$$
$$R_i''' = A(q_{i+1}, q_i) \cap A(p_i, q_i) \cap A(p_{i-1}, p_i)$$
$$i = 1,2,3,4,\ p_4 = p_0,\ p_5 = p_1,\ p_6 = p_2,\ q_4 = q_0,\ q_5 = q_1,\ q_6 = q_2$$

i) 점 z가 영역 R_i'에 있는 경우

점 q_1, q_2, q_3, q_4와 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다.

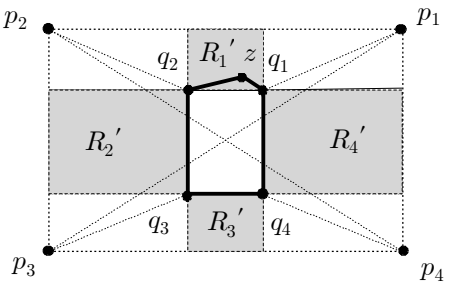

그림9

ii) 점 z가 영역 R_i''에 있는 경우

점 $p_i, q_i, q_{i-1}, p_{i-1}$과 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다. 예를 들어, 영역 R_1''에 점 z가 존재하면 점 p_1, q_1, q_4, p_4와 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다.

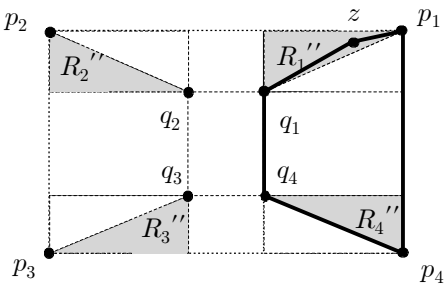

그림10

Collection @ chosun

iii) 점 z가 영역 R_i'''에 있는 경우

점 $p_i, q_i, q_{i+1}, p_{i+1}$과 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다. 예를 들어, 영역 R_1'''에 점 z가 존재하면 점 p_1, q_1, q_2, p_2와 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다.

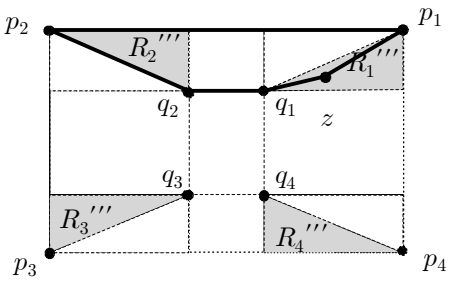

그림11

② 점 z가 $\square q_1q_2q_3q_4$ 내부에 있는 경우

$\square q_1q_2q_3q_4$ 내부 영역을 다음과 같이 정의하자.

$$S_i = A(q_i, p_i) \cap A(p_{i+1}, q_{i+1}) \cap \square q_1q_2q_3q_4$$
$$i = 1,2,3,4,\ p_5 = p_1,\ q_5 = q_1$$

영역 S_i에 점 z가 존재한다면 점 $p_i, q_i, q_{i+1}, p_{i+1}$과 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다. 만약 점 z가 영역 S_1에 존재 한다면 점 p_1, q_1, q_2, p_2와 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있고, 또 영역 S_2에 존재 한다면 점 p_2, q_2, q_3, p_3와 점 z를 이용해서 볼록 오각형을 만들 수 있다

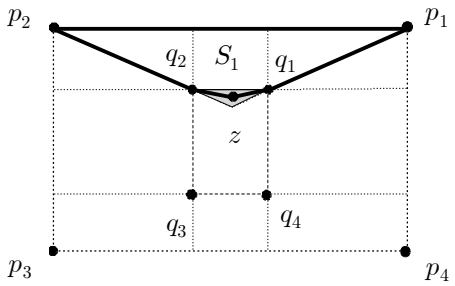

그림12

Collection @ chosun

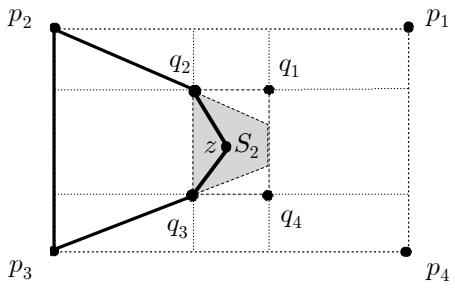

그림13

따라서, 위의 Makai´s eight point 집합에 한 점을 추가하여 얻어지는 9개의 점집합에는 항상 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점이 있다는 것을 알 수 있고 이에 따라 평면상에서 general position에 있는 임의의 9개의 점집합은 항상 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함한다는 것을 알 수 있다.

(2) (1)의 증명에 의해 평면상에서 general position에 있는 임의의 9개 이상의 점들로 이루어진 집합은 항상 볼록 오각형을 구성하는 점들을 포함하고 있으므로 $f(5) \leq 9$이고 또한, Makai's eight point에 의해 $f(5) \geq 9$이므로 $f(5) = 9$이다. 즉, 9는 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 항상 볼록 오각형을 구성하는 점들을 포함하기 위한 최소한의 점의 개수이다. ■

B. 속이 빈 볼록 다각형

이 절에서는 앞 절에서와 비슷하게 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합 X가 속이 빈 볼록 다각형을 구성하는 점들을 포함하려면 X가 적어도 몇 개 이상의 점을 가져야 하는지에 대하여 알아보도록 하자. 특히 볼록 삼각형, 볼록 사각형 그리고 볼록 오각형에 대하여 각각 X가 필요한 최소한의 점들의 개수에 대하여 알아보려고 한다.

Collection @ chosun

[정의4] 평면상에서 general position에 있는 n개 이상의 점들로 이루어진 집합이 항상 속이 빈 k각형을 이루는 k개의 점을 포함할 때 n의 최소 수를 $g(k)$라고 한다.

이 절에서는 $g(3), g(4)$ 그리고 $g(5)$관해 알아보려고 한다.

1. 속이 빈 볼록 삼각형과 사각형

$f(k)$와 $g(k)$의 정의에 의해서 $f(k) \leq g(k)$임을 알 수 있으므로, $f(k) \leq n$인 n개의 점집합에서 볼록 k각형을 먼저 찾은 후 이 k각형을 변형시켜 속이 빈 볼록 k각형을 찾고자 한다.

먼저, $f(3)=3$이므로 평면상에서 general position에 있는 3개 이상의 점들로 이루어진 집합에서 볼록 삼각형을 만들 수 있다. 만약, 이 삼각형 내부에 $m(\geq 1)$개의 점이 존재한다면, 내부의 m개의 점 중 한 점과 삼각형의 두 점을 이용해서 새로운 볼록 삼각형을 만들 수 있고, 새롭게 만들어진 볼록 삼각형 내부에는 m보다 작은 점을 갖게 된다. 이와 같은 방법을 반복하여 시행하면, 어떤 경우에든지 항상 속이 빈 볼록 삼각형을 얻을 수 있다. 따라서, $g(3)=3$임을 알 수 있다.

다음으로 속이 빈 볼록 사각형을 구성하는 점을 포함하려면 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합은 적어도 몇 개 이상의 점을 가지고 있어야 하는 지 알아보도록 하자. $f(4)=5$이므로 평면상에서 general position에 있는 5개 이상의 점을 가진 임의의 점집합은 항상 볼록 사각형을 구성한다.

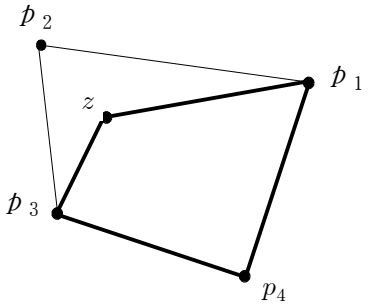

그림14

dCollection @ chosun

만약, 이 사각형 내부에 $m(\geq 1)$개의 점이 존재한다면, 내부의 m개의 점 중 한 점과 사각형의 세 점을 이용해서 새로운 볼록 사각형을 만들 수 있고, 새롭게 만들어진 볼록 사각형 내부에는 m보다 작은 점을 갖게 된다. 이와 같은 방법을 반복하여 시행하면, 어떤 경우에든지 항상 속이 빈 볼록 사각형을 얻을 수 있다.

따라서, 평면상에서 general position에 있는 5개의 점을 가진 임의의 점집합은 항상 속이 빈 볼록 사각형을 구성하는 네 점을 포함한다. 또한, $g(4) \geq f(4) = 5$ 이므로 5는 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 항상 속이 빈 볼록 사각형을 구성하는 점들을 포함하기 위한 최소한의 점의 개수이다. 즉, $g(4) = 5$이다. 따라서 다음의 정리를 얻을 수 있다.

[정리3] $g(3) = 3$이고, $g(4) = 5$이다.

2. 속이 빈 볼록 오각형

이제 마지막으로 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 속이 빈 볼록 오각형을 구성하는 점을 포함하려면 적어도 몇 개 이상의 점을 가지고 있어야 하는지 알아보도록 하자. 먼저, 앞 절에서 $f(5) = 9$임을 보였으므로 $g(5) \geq 9$임을 알 수 있고 다음 예로부터 $g(5) \neq 9$임을 알 수 있다. 따라서, 10개 이상의 점을 가진 임의의 집합에 대해 속이 빈 볼록 오각형의 존재성을 보이면 $g(5) = 10$임을 알 수 있다.

[예제2] 다음은 Heiko Harboth´s nine points 집합인데 이 집합은 속이 빈 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함하지 않는다. 따라서 $g(5) \neq 9$ 임을 알 수 있다.

Collection @ chosun

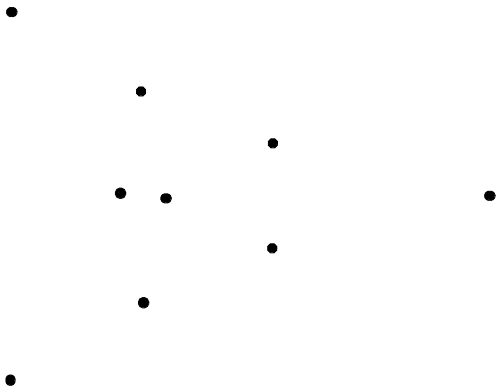

그림15 Heiko Harboth's nine points

[정리4] (1) X를 평면상에서 general position에 있는 10개 이상의 점을 가진 임의의 집합이라고 하자. 그러면 X는 반드시 속 이빈 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함한다.

(2) $g(5)=10$이다.

증명) (1) 앞에서, $f(5)=9$ 임을 알고 있으므로 평면상에서 general position 에 있는 10개 이상의 점은 항상 볼록 오각형을 구성한다.

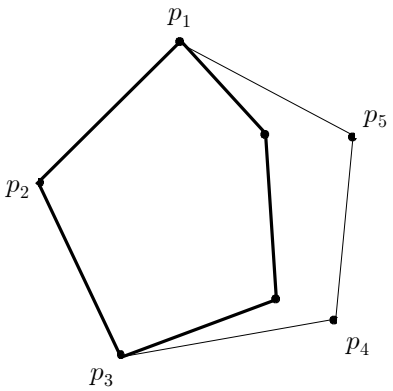

그림16

Collection @ chosun

만약, 볼록 오각형 내부에 $m(\geq 2)$개의 점들이 존재 한다면, 오각 형의 다섯 점중 세 점과 내부의 m개의 점중 두 점을 이용해서 다른 볼록 오각형을 만들 수 있다. 그리고 새롭게 만들어진 볼록 오각형의 내부에는 m보다 작은 점이 존재한다. 이와 같은 방법 을 반복해서 시행하면 우리는 내부의 점이 한 개이거나 속이 빈 볼록 오각형 P를 찾을 수 있다. 따라서 우리는 내부에 한 점이 있는 경우에 속이 빈 새로운 볼록 오각형을 찾는 방법을 알아보려고 한다.

P상에 있는 X의 점들을 시계 반대방향으로 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 라 하고 P 내부에 점 z가 있다고 하자. 만약, 점 z가 $\triangle p_1p_2p_3$, $\triangle p_2p_3p_4$, $\triangle p_3p_4p_5$ 또는 $\triangle p_5p_1p_2$ 내부에 있다면 점 z와 점 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 중에 네 점을 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

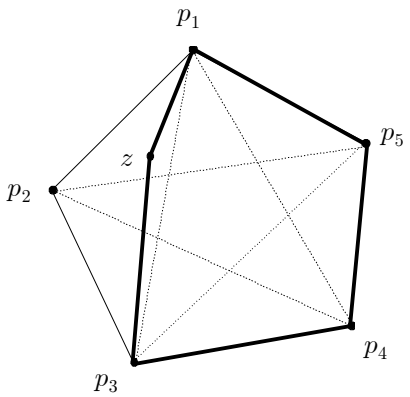

그림17

점 z가 위에서 주어진 어떠한 삼각형 내부에도 없다고 가정하자. 그러면 점 z는 P 내부의 대각선들로 이루어진 작은 볼록 오각형 내부에 존재한다. 우리는 P 외부에 있는 점들의 위치에 따라 경우를 나눠서, 각 경우마다 P 외부의 점과 점 z와 점 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5로부터 속이 빈 볼록 오각형을 얻을 수 있을 것이다.

Collection @ chosun

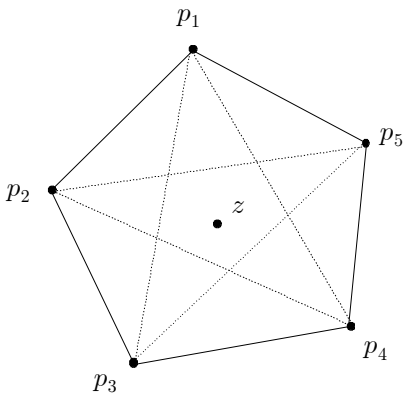

그림18

$\triangle p_1p_2p_3p_4p_5$의 외부 영역을 다음과 같이 정의 하자.

$R_i = A(z,p_i) \cap A(p_{i+1},p_i) \cap A(p_{i+1},p_{i+2})$
$R_i^{'} = A(p_i,z) \cap A(p_i,p_{i-1}) \cap A(p_{i-2},p_{i-1})$
$S_i = A(p_i,p_{i-1}) \cap A(p_{i+2},p_{i+1})$
$i = 1,2,3,4,5,\ p_{-1} = p_4,\ p_0 = p_5,\ p_6 = p_1,\ p_7 = p_2$

(a) X의 점이 영역 R_i나 영역 R_i'에 존재 하는 경우

X의 점이 영역 R_i에 존재한다면, 점 z와 p_i, p_{i+1}, p_{i+2}와 영역 R_i의 점들 중 $\overleftrightarrow{p_ip_{i+1}}$에 가장 가까운 점 (점과 직선 사이의 거리) q_i를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다. 만약, 영역 R_5의 점들 중 $\overleftrightarrow{p_5p_1}$에 가장 가까운 점을 q_5라 한다면, 점 z와 점 p_5, p_1, p_2와 점 q_5를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

Collection @ chosun

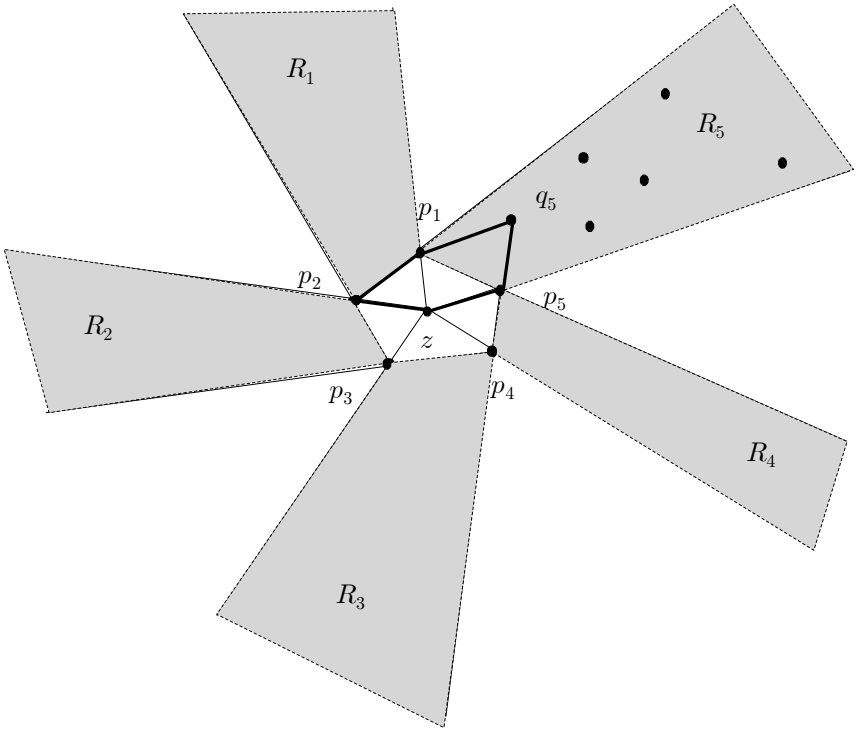

그림19

마찬가지로 영역 R_i'에 X의 점이 존재한다면 점 z와 점 p_{i-2}, p_{i-1}, p_i와 영역 R_i'의 점들 중 $\overleftrightarrow{p_{i-1}p_i}$에 가장 가까운 점 q_i'을 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다. 만약, 영역 R_5'의 점들 중 $\overleftrightarrow{p_4p_5}$에 가장 가까운 점을 q_5'이라 한다면, 점 z와 점 p_3, p_4, p_5와 점 q_5'을 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

Collection @ chosun

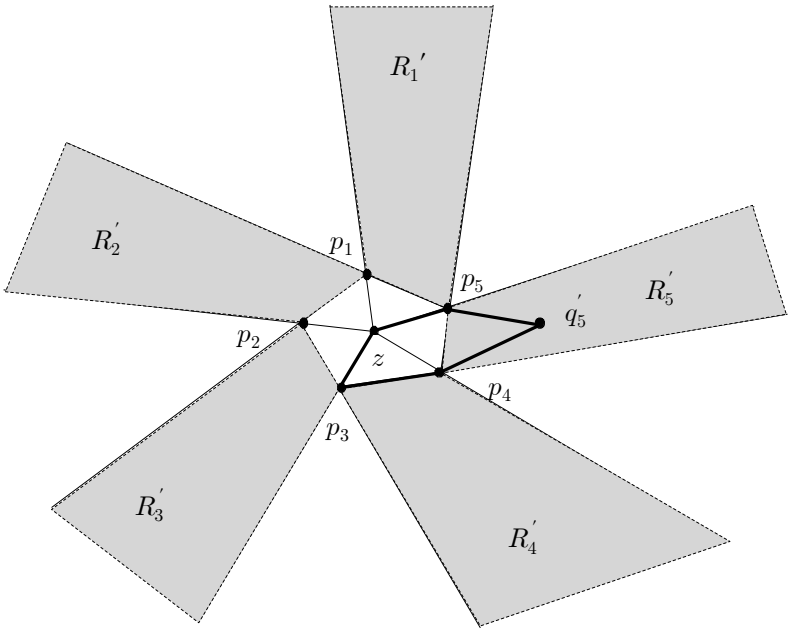

그림20

(b) X의 점이 영역 $R_i \cup R_i'$에 존재 하지 않는 경우

이제 영역 R_i와 영역 R_i'에 X의 점이 없다고 가정해보자. 그러면 적어도 네 점은 영역 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$에 존재하게 된다. 먼저, 각 영역 S_i에 기껏해야 한 점이 있는 경우를 생각해보자. 이 경우 X의 한 점씩을 포함하는 연속되는 세 영역 S_i, S_{i+1}, S_{i+2}이 존재하게 된다. 왜냐하면 오각형 P 외부에 있는 점은 네 점이고 영역 S_i는 총 다섯 영역이므로 각 영역에 한 점 씩만 들어간다면 반드시 각 영역 S_i에 한 점씩 존재하는 연속적인 세 영역이 존재한다. 그렇다면 영역 $S_i \cup S_{i+1} \cup S_{i+2}$의 세 점과 두 점 p_{i+1}, p_{i+2}를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다. 만약, 영역 S_3, S_4, S_5에 한 점씩 존재한다면 영역 S_3, S_4, S_5의 세 점과 두 점 p_4, p_5를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

Collection @ chosun

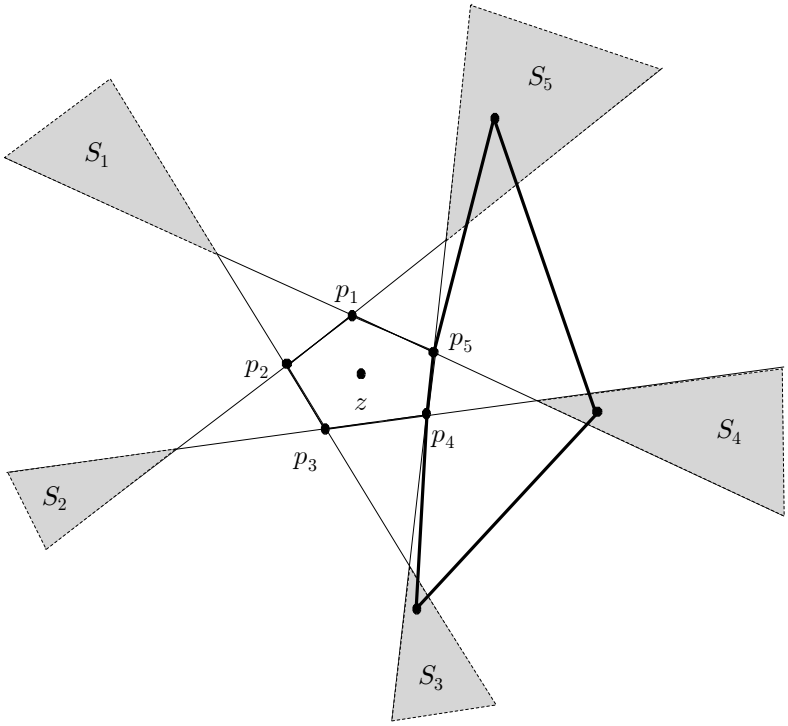

그림21

이제 어떤 영역 S_i에 X의 점이 두 개 이상 있다고 가정하자. 예를 들어 영역 S_5에 있다고 하고 영역 S_5의 점들 중 $\overleftrightarrow{p_1p_5}$에 가장 가까이에 있는 점을 q_5라 하자. 그러면 $\triangle q_1p_1p_5$에는 X의 점이 없게 된다. 여기서 영역 S_5안에 남아 있는 X의 점들의 위치에 따라 두 가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

① 영역 $T_5 = (A(p_5,q_5) \cup A(q_5,p_1)) \cap S_5$에 X의 점이 있는 경우

영역 T_5에서 점 q_5를 제외하고 $\overleftrightarrow{p_1p_5}$에 가장 가까운 점 r_5를 택한다. 그러면 점 q_5, r_5, p_1, z, p_5를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

Collection @ chosun

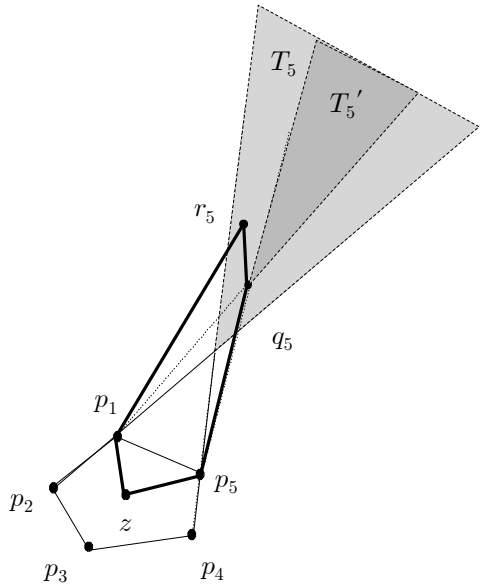

그림22

② 영역 T_5에 X의 점이 없을 때

영역 $T_5' = (A(p_1, q_5) \cup A(q_5, p_5))$은 X의 점을 적어도 하나 가지고 있게 된다. 영역 T_5'의 점들 중에 점 q_5를 제외하고 $\overleftrightarrow{p_1 p_5}$에 가장 가까운 점을 r_5이라하자.

i) 만약, 영역 $S_1 \cup S_2$에 X의 점이 있다면 영역 $S_1 \cup S_2$의 점들 중 한 점과 점 r_5, q_5, p_1, p_2를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

ii) 만약, 영역 $S_3 \cup S_4$에 X의 점이 있다면 영역 $S_3 \cup S_4$의 점들 중 한 점과 점 r_5, q_5, p_5, p_4를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

Collection @ chosun

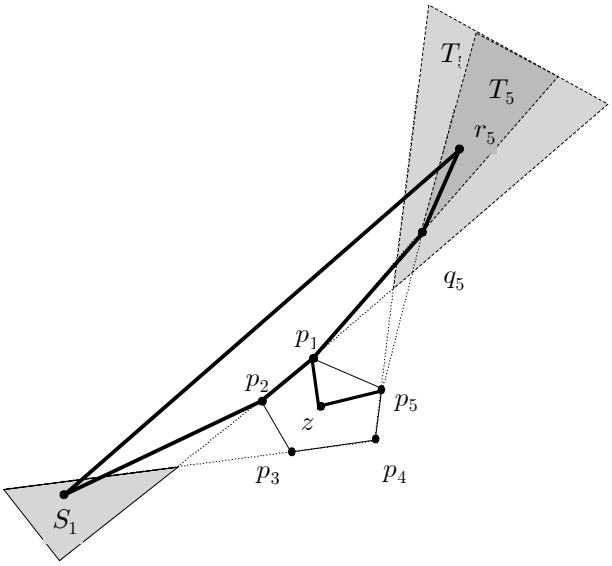

그림23

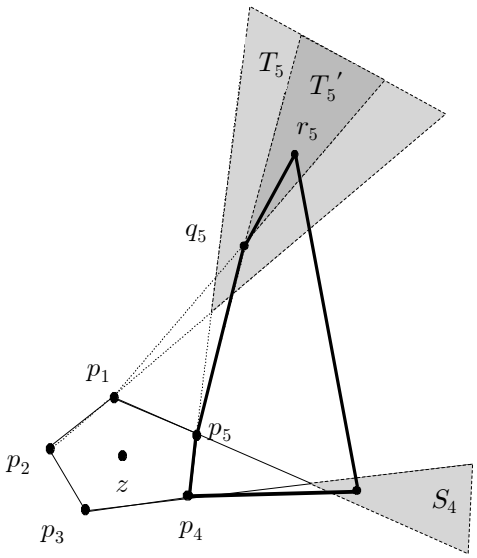

그림24

Collection @ chosun

iii) 만약, 영역 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$에 점이 없다면 영역 T_5'에는 X의 점이 적어도 두 개 이상 존재하게 된다. 영역 T_5'의 점들 중에 점 q_5를 제외하고 $\overleftrightarrow{p_1 p_5}$에 가장 가까운 점을 s_5라 하자. 만약, 점 s_5가 영역 $A(r_5, q_5)$에 있다면, 점 s_5, r_5, q_5, p_5, p_4를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있고 그렇지 않으면 점 s_5, r_5, q_5, p_1, p_2를 이용해서 속이 빈 볼록 오각형을 만들 수 있다.

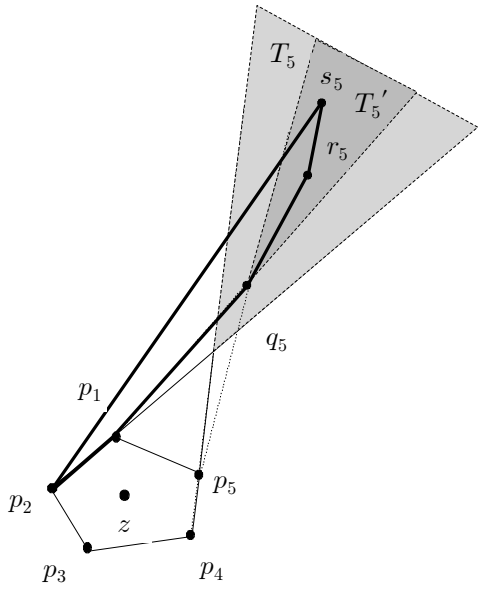

그림25

따라서, 평면상에서 general position에 있는 10개 이상의 점을 가진 임의의 점집합은 항상 속이 빈 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함한다는 것을 알 수 있다.

(2) (1)의 증명에 의해 평면상에서 general position에 있는 임의의 10개 이상의 점들로 이루어진 집합은 항상 속이 빈 볼록 오각형을 구성하는 다섯 점을 포함한다는 것을 알 수 있고, 속이 빈

Collection @ chosun

볼록 오각형을 포함하지 않는 9개의 점들로 이루어진 점집합 즉, Heiko Harboth´s nine points가 존재 하므로 10은 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 항상 속이 빈 볼록 오각형을 구성하는 점들을 포함하기 위한 최소한의 점의 개수이다.

즉, $g(5)=10$이다. ■

Collection @ chosun

Ⅲ. 결 론

이 논문에서 우리는 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 볼록 삼각형과 사각형 그리고 오각형을 구성하는 점을 포함하기 위해서는 각각 적어도 3,5,9개 이상의 점이 필요하다는 것을 알았다. 또, 평면상에서 general position에 있는 임의의 점집합이 속이 빈 볼록 삼각형과 사각형 그리고 오각형을 구성하는 점을 포함하기 위해서는 각각 적어도 3,5,10개 이상의 점이 필요하다는 것을 알았다. 여기서 우리는 더 나아가 여섯 점 이상으로 구성되는 볼록 다각형 또는 속이 빈 볼록 다각형이 존재하기 위해선 적어도 몇 개 이상의 점으로 이루어진 점집합이어야 하는지에 의문을 가질 수 있는데, Erdös-Szekeres에 의해 볼록 다각형에 대한 점의 최소수 $f(n)$의 존재성에 관하여는 증명이 되었지만, 속이 빈 볼록 다각형에 대해서는 $n \geq 7$에 대한 $g(n)$은 존재하지 않음을 Horton이 증명하였다. 즉, Horton은 $n \geq 7$인 모든 자연수 n에 대하여 속이 빈 볼록 n각형을 찾을 수 없는 무한개의 점으로 이루어진 평면상의 점집합을 제시하였다[4]. 따라서 Erdös-Szekeres 문제에서 아직 미해결로 남아있는 부분은 $n \geq 6$에 대한 Erdös-Szekeres의 가설 $f(n) = 2^{n-2} + 1$이 사실임을 증명하는 것과, 그리고, $n = 6$에 대한 $g(n)$의 값에 대한 존재성과 $g(n)$값이 존재할 때 그 값을 구하는 문제이다.

이에 본 논문에서는 지금까지 해결된 Erdös-Szekere 문제를 재조명하여 자세하게 다시 다룸으로써 아직 미해결된 문제에 대한 접근에 조금이나마 도움이 되는 연구 자료가 되었으면 한다.

Collection @ chosun

참 고 문 헌

[1] S.Y. An, E.S. Kang, *Empty convex 5-gons in planar point sets,* submitted

[2] P. Erdös, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. 2 (1935), 463-470

[3] H. Harborth, *Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen*, Elem. Math. 33 (1978), 116-118

[4] J.D. Horton, *Sets with no empty convex 7-gons,* Canad. Math. Bull. 26 (1983), 482-484

[5] L.N. Jessica, *On the Erdös problem of empty convex hexagons*, (2003), 1-10

[6] J.D. Kalbfleisch, J.G. Kalbfleisch, R.G. Stanton, *A combinatorial problem on convex regions*, Proc. Louisiana Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, Louisiana State Univ. Baton Rouge, La, 1970. Congr. Number 1. (1970), 180-188

[7] W. Morris, V. Soltan, The *Erdös-Szekeres problem on points in convex position - A survey,* Bull. Amer. Math. Soc. 37 (2000), 437-458

[8] G. Töth, P. Valtr, *Note on the Erdös-Szekeres Theorem*, Discrete Comput. Geom. 19 (1998), 457-459

[9] G. Töth, P. Valtr, *The Erdös-Szekeres Theorem: upper bounds and related results,* Combinatorial and Computational Geometry, 557-568. Math. Sci. Res. Inst. Publ. 52, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005

Collection @ chosun

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20068227	과 정	석사
성 명	한글: 안 성 윤 한문 : 安 晟 允 영문 : An sung-yoon				
주 소	광주광역시 남구 양림동 92-149				
연락처	E-MAIL : 07207279@hanmail.net				
논문제목	한글 : 평면상의의 점집합에서의 볼록 다각형에 관한 고찰 영어 : A study on the convex polygons in planar point sets				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집·형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포·전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송·출력을 허락함.

동의여부 : 동의(○) 반대( )

2009년 04월 24일

저작자: 안성윤 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하