Collection @ chosun

creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

Collection

[UCI]I804:24011-200000238432

Collection @ chosun

2009년 8월

教育學碩士(數學教育)學位論文

圓錐曲線에 관한 研究

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

李 必 禮

Collection @ chosun

圓錐曲線에 관한 研究

A study on the Conic

2009年 8月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 必 禮

Collection @ chosun

圓錐曲線에 관한 硏究

指導敎授 韓 承 局

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 제출함.

2009年 4月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 必 禮

Collection @ chosun

李必禮의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2009年　6月

朝鮮大學校 敎育大學院

Collection @ chosun

목 차

목차 ····· i
ABSTRACT ····· ii
Ⅰ. 서론 ····· 1
A. 연구의 필요성 및 목적 ····· 1
Ⅱ. 원추곡선의 분류 ····· 3
A. 원추곡선의 중심 ····· 3
B. 원추곡선의 분류 ····· 5
Ⅲ. 원추의 단면의 성질 ····· 11
Ⅳ. 원추곡선의 초점, 준선, 점근선의 작도법 ····· 16
A. 중심과 직교좌표축의 작도 ····· 19
B. 초점의 작도 ····· 22
C. 준선 및 점근선의 작도 ····· 25
참고문헌 ····· 31

Collection @ chosun

A B S T R A C T

A study on the Conic

Pil-rye Lee
Advisor : Prof. Seung-gook Han, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

The purpose of this thesis is to explain a ellipse, a parabola, and a hyperbola which are deduced from the conic sections. Moreover, we rigorously construct some drawing methods of asymptotic, directrix, foci, and coordinate axises related three curves.

dCollection @ chosun

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

작도에 대한 언급은 역사적으로 고대 이집트, 그리스 기하에서부터 시작된다. 고대 이집트에서는 면적 결정이나 건축 설계 등과 같이 실용적인 목적으로 도형을 작도하였다. 이렇게 측량의 필요에서 비롯된 작도는 그리스 시대에 이르러 논리적인 정신을 중요시하는 그리스인들의 사고와 맞물려 종이 위의 도형의 성질을 연구하기 위한 작도로 위치를 달리 하게 된다. 실용적인 목적이 아니라 도형에 대한 올바른 지식의 습득이 주된 목적인 이들에게 정확하고 논리적인 도형의 작도는 중요한 사고의 수단이었으며, 따라서 그리스 기하에서의 작도는 충분히 이론적인 성질의 것이었다. [6]

점, 직선, 원 및 이들의 집합이나 각기둥, 각뿔, 원기둥, 원뿔, 구 등을 대상으로 하여 유클리드 기하학적으로 그 성질을 연구하는 기하학의 한 부분을 초등기하학(elementary geometry)이라고 한다. 그 연구방법도 해석적인 방법이나 다른 수단을 사용하지 않고 도형을 직접 취급한다.

유클리드의 <원론>은 다섯 개의 공준 중에서 작도에 관해서는 오직 세 개의 공준만을 포함하고 있다. 즉,

공준 1. 한 점에서 또 다른 한 점으로 직선을 그릴 수 있다.

공준 2. 유한직선은 무한히 연장시킬 수 있다.

공준 3. 임의의 점을 중심으로 하고 그 중심으로부터 그려진 유한직선과 동일 반경을 갖는 원을 그릴 수 있다.

이것들은 유클리드 작도에 대한 기본의 원칙을 말하는 것이다. 따라서 모든 작도는 오직 이 세 개의 공준들의 합성에 의해 이루어져야 한다. 이

Collection @ chosun

러한 작도를 기하학적 작도라고 부른다. 이 공준들은 직선자와 컴퍼스만을 사용하도록 기하학적 작도를 제한하고 있기 때문에 직선자와 컴퍼스를 유클리드 도구(Euclidean tools)라고 부르며, 또한 여기에 사용되는 직선자를 유클리드 직선자, 그리고 컴퍼스를 유클리드 컴퍼스라고 부른다. 공준 1과 2는 유클리드 직선자를 가지고 작도할 수 있는 것, 즉 임의의 두 점을 지나는 직선을 그릴 수 있다는 것을 말하며, 공준 3은 유클리드 컴퍼스를 가지고 작도할 수 있는 것, 임의의 한 점을 중심으로 하고 또 다른 한 점을 지나는 원을 그릴 수 있다는 것을 말한다. [4]

어느 특정한 기구만을 유한번 사용하여 주어진 조건에 맞는 도형을 그리라고 하는 문제를 작조제(作圖題)라고 하는데 초등기하학에서의 작도제에서는 어떤 도형을 작도 하는데에 있어서 기구로선 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용해야 한다.

원추가 하나의 평면과 만나서 생기는 평면곡선을 원추곡선(원뿔곡선)이라 한다. 직원추와 평면이 만나서 생기는 단면은 다음과 같은 경우가 있다. 첫째, 평면이 원추의 꼭짓점을 지나는 경우에는 오로지 꼭짓점만 지나는 경우, 하나의 모선을 지나는 경우(하나의 직선), 그리고 두 개의 모선을 지나는 경우(서로 만나는 2개의 직선)가 있고, 둘째, 평면이 원추의 꼭짓점을 지나지 않을 때에는 모든 모선과 만나는 경우(원, 타원), 하나의 모선에 평행인 경우(포물선), 두 개의 모선에 평행인 경우(쌍곡선)가 있다.

본 논문에서는 원추곡선에 대한 직관적인 이해보다는 실질적이고 창의적인 수학적 태도로 임해야 한다는 생각에 직원추를 꼭짓점을 지나지 않는 평면으로 자를 때 그 단면이 타원(원 포함), 포물선, 쌍곡선이 됨을 해석적으로 알아보고 이러한 원추의 단면(원, 타원, 포물선, 쌍곡선)이 주어져 있을 때, 그 도형의 특성에 따라 중심, 초점, 점근선, 준선 등을 작도하는 방법을 알아보고자 한다.

Collection @ chosun

Ⅱ. 원추곡선의 분류

A. 원추곡선의 중심

평면위에서 x, y 에 관한 이차방정식

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

에 의하여 표시되는 도형을 통틀어 이차곡선이라 하며 그 계수의 값에 따라 여러 가지 도형이 되는데 이 도형들은 적당한 직원추와 평면이 만나서 생기는 평면곡선과 일치한다. 그렇기 때문에 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등등의 이차곡선을 원추곡선이라고 한다.

O 를 정점이라 하고, O 를 지나는 임의의 직선이 곡선 C 와 두 점 P, Q 에서 만날 때 O 가 항상 $\overline{PQ}$의 중점이 되면 O 를 곡선 C 의 중심이라 하며 특히 이차곡선이 단 하나의 중심을 가질 때 유심이차곡선이라 하고 그렇지 않을 때 무심이차곡선이라고 한다.

원점이 이차곡선

$$F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

의 중심이면 곡선위의 임의의 점 (x_1,y_1)에 대하여 점$(-x_1,-y_1)$도 곡선위에 있으므로

$$F(x_1,y_1)=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

$$F(-x_1,-y_1)=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2-2gx_1-2fy_1+c=0$$

이다. 위 두식을 변끼리 빼주면

$$gx_1+fy_1=0$$

이 된다. 이 관계식은 곡선위의 임의의 점(x_1, y_1)에 대하여 성립하므로

$$g=f=0$$

dCollection @ chosun

이라야 한다. 따라서 (2.1)식은 x, y에 대한 일차항이 없는

$$F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+c=0$$

이 되어야 한다. 역으로 $g=f=0$일 때는 곡선 (2.1)은

$$F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+c=0$$

이 되고 이 곡선위의 임의의 점(x_1,y_1)에 대하여

$$F(x_1,y_1)=F(-x_1,-y_1)$$

이므로 곡선(2.1)은 원점에 관하여 대칭인 곡선이다. 따라서 원점이 곡선 (2.1)의 중심이 되기 위한 필요충분조건은

$$g=f=0$$

이다. 이차곡선

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

이 하나의 중심을 가질 때, 연립방정식

$$\begin{cases} ax+hy+g=0 \\ hx+by+f=0 \end{cases}$$

의 해를 $x=x_1$, $y=y_1$ 이라하면 그 중심의 좌표는 (x_1,y_1)이다.

왜냐하면 점 $\mathrm{C}(x_1,y_1)$가

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

의 중심 이라고 하자. 좌표축을 평행 이동하여 원점을 $C\ (x_1,y_1)$에 옮기면 신좌표축 $C-XY$ 에 관한 방정식은

$$x=X+x_1\ ,\ y=Y+y_1$$

에 의하여

$$a(X+x_1)^2+2h(X+x_1)(Y+y_1)+b(Y+y_1)^2+2g(X+x_1)+2f(Y+y_1)+c=0$$

이 된다. 따라서 이식을 전개하면

$$aX^2+2hXY+bY^2+2(ax_1+hy_1+g)X+2(hx_1+by_1+f)Y$$

Collection @ chosun

$$+(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c)=0 \quad \cdots\cdots (2.2)$$

이 된다. 따라서 점 $C(x_1,y_1)$가 신좌표축의 원점이므로 식(2.2)의 X, Y항의 계수가 0 즉,

$$\begin{cases} ax_1+hy_1+g=0 \\ hx_1+by_1+f=0 \end{cases}$$

이어야 한다. 따라서 연립방정식

$$\begin{cases} ax+hy+g=0 \\ hx+by+f=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (2.3)$$

의 해 (x_1,y_1)이 이차곡선

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

의 중심이 된다.

관계식 (2.3)에서 $h^2-ab\neq 0$ 일 때는 이차곡선(2.1)은 단 하나의 중심을 가지며(유심이차곡선), $h^2-ab=0$ 일 때는 중심이 하나도 없거나 무수히 많은 중심을 가진다(무심이차곡선). 어느 경우이든 식(2.3)는 이차곡선(2.1)의 중심을 결정하는 관계식이다.

B. 원추곡선의 분류

이차곡선

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

의 중심을 구하는 관계식을 알아보았다. 이제 이차곡선의 중심을 원점으로 하는 이차곡선의 표준형을 구하여 이차곡선

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

의 계수와 타원, 쌍곡선, 포물선 등의 관계를 알아보고자 한다.

Collection @ chosun

이차곡선

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

가 단 하나의 중심을 가질 때, 즉 $h^2-ab\neq 0$ 일 때 그 중심을 $C(x_1,y_1)$이라 하고 좌표축의 원점을 $C(x_1,y_1)$에 오도록 평행이동하면 신좌표축 $C-XY$ 에 관해서

$$aX^2+2hXY+bY^2+c'=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

$$(\text{단, } c'=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c)$$

으로 나타내어진다.

직교좌표의 x 축 및 y 축을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전한 좌표축을 X, Y 라고 하면

$$\begin{cases} x=Xcos\theta-Ysin\theta \\ y=Xsin\theta+Ycos\theta \end{cases}$$

인 관계가 있으므로 이차곡선 (2.4)의 X 축, Y 축을 $C(x_1,y_1)$을 중심으로 θ 만큼 회전한 직교좌표축 $C-\xi\eta$ 에 관한 이차곡선은

$$\begin{cases} X=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta \\ Y=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta \end{cases}$$

을 식(2.4)에 대입하면 된다. 따라서

$$a(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)^2+2h(\xi\cos\theta-\eta\sin\theta)(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)+b(\xi\sin\theta+\eta\cos\theta)^2+c'=0\,.$$

이를 전개하여 정리하면

$$(acos^2\theta+hsin2\theta+bsin^2\theta)\xi^2+\{2hcos2\theta+(b-a)\sin2\theta\}\xi\eta$$
$$+(asin^2\theta-hsin2\theta+bcos^2\theta)\eta^2+c'=0\,.$$

여기서

$$\begin{cases} a'=acos^2\theta+hsin2\theta+bsin^2\theta \\ 2h'=(b-a)\sin2\theta+2hcos2\theta \\ b'=asin^2\theta-hsin2\theta+bcos^2\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

이라고 놓으면 (2.4)식은 일반적으로

Collection @ chosun

$$a'\xi^2+2h'\xi\eta+b'\eta^2+c'=0$$

으로 된다. 위의 관계식 (2.5)에서

$$a'+b'=a+b$$
$$a'-b'=2hsin2\theta+(a-b)\cos 2\theta$$

이므로

$$\begin{aligned}&4h'^2-4a'b'=4h'^2+(a'-b')^2-(a'+b')^2\\&=\{2hcos2\theta-(a-b)\sin 2\theta\}^2+\{2hsin2\theta+(a-b)\cos 2\theta\}^2-(a+b)^2\\&=4h^2-4ab\,.\end{aligned}$$

즉,

$$h'^2-a'b'=h^2-ab$$

이다. 이것은 곡선

$$aX^2+2hXY+bY^2+c'=0$$

을 θ 만큼 회전이동하면

$$a'\xi^2+2h'\xi\eta+b'\eta^2+c'=0$$

의 형태가 되는데 이 두 식에서 계수를 비교하면

$$a'+b'=a+b$$

$$h'^2-a'b'=h^2-ab$$

이 됨을 알 수 있다. 또한 (2.5)식에서

$$2h'=(b-a)\sin 2\theta+2hcos2\theta$$

이 0이 되도록 즉,

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}$$

가 되도록 회전각 θ를 정하면 $h'=0$ 이 되므로 이 θ 만큼 X, Y 축을 회전하면 곡선 (2.4)식

$$aX^2+2hXY+bY^2+c'=0$$

Collection @ chosun

은 $\xi\eta$ 항이 없어진 $C-\xi\eta$ 좌표축에 관한 곡선

$$a'\xi^2+b'\eta^2+c'=0 \cdots\cdots (2.6)$$

의 형태로 된다. 일반 이차곡선

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

은 $h^2-ab\neq 0$(유심이차곡선) 일 때 즉,

1. $h^2-ab<0$ 인 경우에는

$$h^2-ab=h'^2-a'b'<0\ ,\ h'=0$$

이므로 a', b' 는 같은 부호이다. 따라서 (2.6)식은

$$A\xi^2+B\eta^2=C\ (A>0,\ B>0) \cdots\cdots (2.7)$$

의 형태가 된다.

a. $C>0$ 이면 $\frac{A}{C}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{B}{C}=\frac{1}{b^2}$이라 놓을 때

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$$

이 되어서 타원이 된다.

b. $C=0$ 이면 (2.7)을 만족하는 실수 값 ξ, η는 $\xi=\eta=0$ 뿐이므로 이때는 점 타원을 표시하게 된다.

c. $C<0$ 이면 (2.7)을 만족하는 실수 값이 존재하지 않으므로 이때 (2.7)은 허 타원이 된다.

2. $h^2-ab>0$ 인 경우에는

$$h^2-ab=h'^2-a'b'>0,\ h'=0$$

이므로 a', b'는 서로 다른 부호이다.

그러므로 (2.7)식은

$$A\xi^2-B\eta^2=C\ \ (A>0,\ B>0) \cdots\cdots (2.8)$$

의 형태가 된다. 이때

Collection @ chosun

a. $C>0$ 일 때는

$$\frac{A}{C}=\frac{1}{a^2}, \qquad \frac{B}{C}=\frac{1}{b^2}$$

으로

b. $C<0$ 일 때는

$$-\frac{A}{C}=\frac{1}{a^2}\ , \ -\frac{B}{C}=\frac{1}{b^2}$$

이라 놓을 수 있으므로 (2.8)식은

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=\pm 1$$

이 되어서 쌍곡선이 된다.

c. $C=0$ 일때는

$$A\xi^2-B\eta^2=(\sqrt{A}\,\xi-\sqrt{B}\,\eta)(\sqrt{A}\,\xi+\sqrt{B}\,\eta)=0$$

에서

$$\sqrt{A}\,\xi=\sqrt{B}\,\eta,\ \ \sqrt{A}\,\xi=-\sqrt{B}\,\eta$$

가 되어 원점에서 만나는 두 직선이 된다.

3. $h^2-ab=0$(무심이차곡선)인 경우에는 중심을 구하는 식

$$\begin{cases} ax+hy+g=0 \\ hx+by+f=0 \end{cases}$$

에서 $h^2-ab=0$ 이므로 중심이 하나도 없거나 무한히 많다.

따라서 좌표축의 원점을 평행 이동하지 않고

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}$$

인 θ 만큼 좌표축을 회전하여 X, Y 축이라고 하면

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

은 xy 항이 없어진

Collection @ chosun

$$a'X^2+b'Y^2+2g'X+2f'Y+c=0$$

의 형태가 된다. 그리고

$$h^2-ab=h'^2-a'b'=-a'b'=0$$

이고 a', b' 는 동시에 0 일수는 없으므로

a. $a'=0$, $b'\neq 0$ 인 경우에는

$$a'X^2+b'Y^2+2g'X+2f'Y+c=0$$

은

$$b'Y^2+2g'X+2f'Y+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.9)$$

이 된다. 여기서 $g'\neq 0$ 이면

$$b'(Y+\frac{f'}{b'})^2+2g'(X+\frac{b'c-f'^2}{2b'g'})=0\,.$$

그러므로 좌표축의 원점을 $(-\frac{b'c-f'^2}{2b'g'},\ -\frac{f'}{b'})$ 으로

평행이동하고 $4p=-\frac{2g'}{b'}\ (\neq 0)$ 이라 놓으면

$$\eta^2=4p\xi$$

가 되므로 포물선이 된다. 만일 $g'=0$ 이면 (2.9)는

$$b'Y^2+2f'Y+c=0$$

으로 되고 이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면

$$Y=\alpha,\ Y=\beta$$

로 되어 X 축에 평행인 두 직선이 된다.

b. $a'\neq 0$, $b'=0$ 인 경우에는

$$a'X^2+b'Y^2+2g'X+2f'Y+c=0$$

은

$$a'X^2+2g'X+2f'Y+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.10)$$

Collection @ chosun

이 된다. 여기서 $f' \neq 0$ 이면

$$a'(X+\frac{g'}{a'})^2+2f'(Y+\frac{a'c-g'^2}{2a'f'})=0\,.$$

그러므로 좌표축의 원점을 $(-\frac{g'}{a'}\,,\,-\frac{a'c-g'^2}{2a'f'})$으로 평행이동하고

$4p=-\frac{2f'}{a'}\,(\neq 0)$ 이라 놓으면

$$\xi^2=4p\eta$$

가 되므로 포물선이 된다.

만일 $f'=0$ 이면 (2.10)은

$$a'X^2+2g'X+c=0$$

으로 되고 이 이차방정식의 두근을 α, β 라 하면

$$X=\alpha,\ X=\beta$$

로 되어 Y축에 평행인 두 직선이 된다.

Ⅲ. 원추의 단면의 성질

공간에서 정점 S와 곡선 C상의 임의의 점을 잇는 직선으로 이루어지는 곡면을 추면, S를 그 꼭짓점, 곡선 C를 도선, 추면을 만드는 직선을 모선이라 한다.

원점 O가 꼭짓점이고 도선의 방정식이

$$f(x,y)=0,\quad z=k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

이라고 하자. 곡선(3.1)위의 점을 $Q(x_1, y_1, k)$라고 하면 직선 OQ의 방정식은

Collection @ chosun

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{k}.$$

따라서

$$x_1=\frac{kx}{z}, \quad y_1=\frac{ky}{z}.$$

점(x_1, y_1)은 (3.1)식을 만족하므로 추면의 방정식은

$$f(\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z})=0$$

으로 주어진다. 따라서 원점 O를 꼭짓점으로 하고

$$x^2+y^2=a^2, \quad z=1$$

을 도선으로 하는 원추의 방정식은

$$x^2+y^2=a^2z^2$$

이다.

유향직선 l위의 선분 AB의 다른 유향직선 g위로의 정사영을 $[AB]_g$라고 하면

$$[AB]_g=AB\cdot\cos\theta \text{ (단 } \theta \text{는 } l \text{과 } g \text{가 이루는 각)}$$

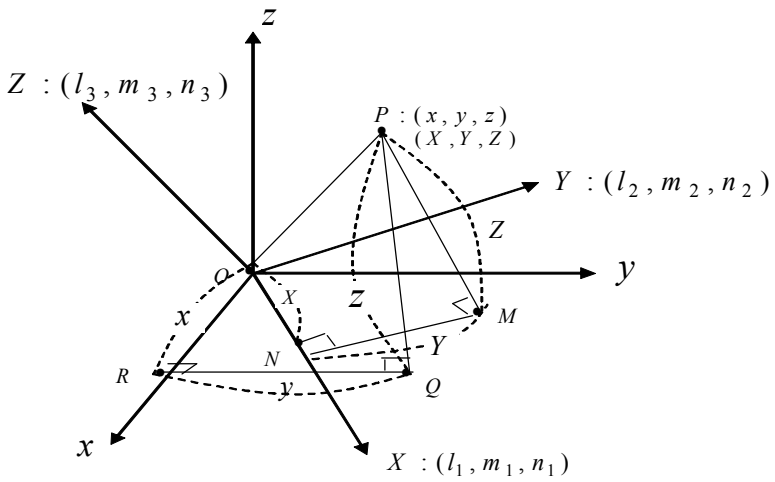
이고, 공간내의 한 개의 꺽어진 선 $A_1A_2...A_n$을 g위에 사영하면

$$[A_1A_n]_g=[A_1A_2]_g+[A_2A_3]_g+...+[A_{n-1}A_n]_g$$

이다.

원점을 공유하는 두 개의 직교축을 $O-xyz$, $O-XYZ$ 이라하고 X, Y, Z축의 $O-xyz$ 좌표축에 대한 방향코사인을 각각 (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)이라 하자. 그리고 공간의 임의 점 P의 x, y, z축에 대한 좌표를 (x, y, z), X, Y, Z축에 대한 좌표를 (X, Y, Z)라 하면

Collection @ chosun



$$[ONMP]_x = [ON]_x + [NM]_x + [MP]_x = [OP]_x$$

$$= l_1X + l_2Y + l_3Z = x \ ,$$

$$[ONMP]_y = [ON]_y + [NM]_y + [MP]_y = [OP]_y$$

$$= m_1X + m_2Y + m_3Z = y \ ,$$

$$[ONMP]_z = [ON]_z + [NM]_z + [MP]_z = [OP]_z$$

$$= n_1X + n_2Y + n_3Z = z \ .$$

즉, $O-xyz$ 좌표축과 $O-XYZ$ 좌표축과의 관계식은

$$x = l_1X + l_2Y + l_3Z$$

$$y = m_1X + m_2Y + m_3Z$$

$$z = n_1X + n_2Y + n_3Z$$

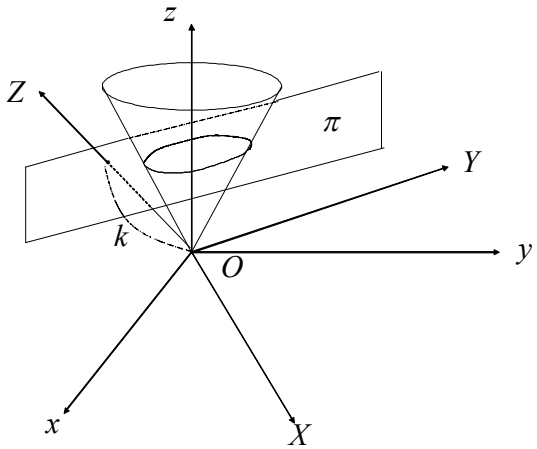
이다.

이를 바탕으로 하여 원추를 그 꼭짓점을 지나지 않는 평면 π로 자를때, 그 단면은 평면 π가 모든 모선과 만나면 타원(원 포함), 한 개의 모선에 평행이면 포물선, 두 개의 모선에 평행이면 쌍곡선임을 알 수 있다. 즉, 꼭짓점이 좌표축 $O-xyz$의 원점에 있는 원추의 방정식을

Collection @ chosun

$$x^2+y^2=r^2z^2$$

이라 하자. 원점 O를 지나고 평면 π에 평행인 평면을 XY평면이라 하고 O를 지나고 이에 수직인 직선을 Z축으로 잡자.



그리고 평면 π의 XY평면에서 거리를 k라 하자. $O-xyz$ 좌표축에 관한 X, Y, Z축의 방향코사인을 각각 (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)라 하면 원추 $x^2+y^2=r^2z^2$ 의 $O-XYZ$ 좌표축에 대한 방정식은

$$(l_1X+l_2Y+l_3Z)^2+(m_1X+m_2Y+m_3Z)^2=r^2(n_1X+n_2Y+n_3Z)^2 .$$

이를 전개하여 정리하면

$$aX^2+2hXY+bY^2+2gXZ+2fYZ+cZ^2=0$$

의 형태가 된다. 평면 π는

$$Z=k$$

이므로 평면 π와 원추와의 교선의 XY 평면에의 사영은

$$aX^2+2hXY+bY^2+2gkX+2fkY+ck^2=0 \cdots\cdots\cdots (3.2)$$

인 이차곡선이 된다, 따라서

$$D=h^2-ab$$

Collection @ chosun

라고 놓으면 식 (3.2)은 $D<0$ 이면 타원, $D=0$ 이면 포물선, $D>0$ 이면 쌍곡선 이다. 또한

$$aX^2+2hXY+bY^2+2gXZ+2fYZ+cZ^2=0$$

의 XY 평면과의 교선은 $Z=0$ 일때 이므로

$$aX^2+2hXY+bY^2=0$$

이다. 이것으로부터

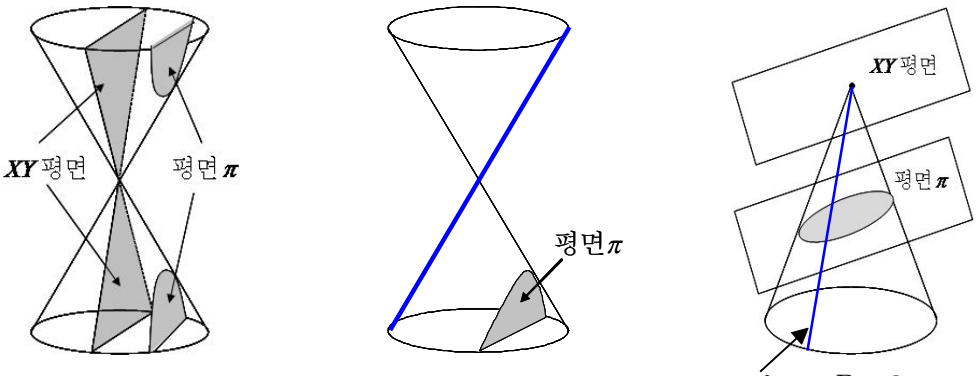
$$X=\frac{-h\pm\sqrt{D}}{a}Y$$

이므로 $D>0$ 이면 두 직선, $D=0$ 이면 한 직선을 나타낸다. 그리고 $D<0$ 이면 $X=Y=0$ 일때만 만족하고 XY 평면과의 교선은 원점 하나뿐이다. 원점과 π 위의 타원(원추와 π 와의 교선)의 점들을 잇는 직선들은 원추의 모선이다. 평면 π 는 XY 평면과 평행이므로

① $D>0$ 이면 평면 π 는 원추의 두 개의 모선에 평행이고 원추와의 교선은 쌍곡선이다.

② $D=0$ 이면 평면 π 는 원추의 한 개의 모선에 평행이고 원추와의 교선은 포물선이다.

③ $D<0$ 이면 평면 π 는 원추의 모든 모선과 만나고 원추와의 교선은 타원이다.



$D>0$ $D=0$ $D<0$

dCollection @ chosun

Ⅳ. 원추곡선의 초점, 준선, 점근선의 작도법

원추를 그 꼭짓점을 지나지 않는 평면으로 자른 단면은 타원, 쌍곡선, 포물선이 됨을 살펴보았다.

이제 원추의 한 평면에 의한 단면이 주어져 있을 때 즉, 평면위에 타원, 쌍곡선, 포물선 등이 그려져 있을 때, 그 도형의 모양이 기본형(표준형)이 되도록 직교 좌표축을 작도하고 나아가 초점, 준선, 점근선등을 작도하는 방법에 대하여 알아보고자 한다.

이차곡선과 직선이 두 점에서 만날때, 그 두 개의 교점을 양 끝으로 하는 선분을 그 곡선의 현이라고 한다. 그리고 타원과 쌍곡선에서는 그 중심을 지나는 현을, 포물선에서는 주축에 평행인 직선(또는, 그것이 포물선 안쪽에 있는 부분)을 직경이라고 한다.

원추곡선의 평행한 현의 중점의 자취는 한 직경이다. 왜냐하면 중심이 원점인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라고 하고 점(x_1, y_1)을 지나고 방향코사인이 (λ, μ) 인 직선의 매개변수 방정식을

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda t \\ y = y_1 + \mu t \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.1)$$

이라 하자.

이 직선과 타원의 교점을 Q, R 이라고 하고

Q, R 에 대한 t 의 값을 t_1, t_2 라고 하면 t_1, t_2 는 방정식

$$\frac{(x_1+\lambda t)^2}{a^2}+\frac{(y_1+\mu t)^2}{b^2}=1$$

즉,

$$(b^2\lambda^2+a^2\mu^2)t^2+2(b^2\lambda x_1+a^2\mu y_1)t+(b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2)=0$$

Collection @ chosun

의 두 근이다. 그러므로,

$$t_1 + t_2 = -2\frac{b^2\lambda x_1 + a^2\mu y_1}{b^2\lambda^2 + a^2\mu^2}.$$

따라서 $P(x_1, y_1)$ 가 자취위의 점이면 $t_1 + t_2 = 0$ 이므로

$$b^2\lambda x_1 + a^2\mu y_1 = 0$$

즉,

$$y_1 = -\frac{b^2\lambda}{a^2\mu}x_1.$$

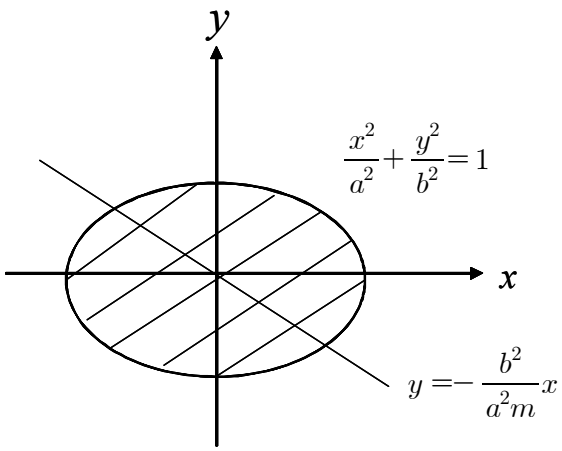
이다. 여기서

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

이라고 놓고 이것을 곡선위의 임의좌표 (x, y) 로 고쳐쓰면, 자취의 방정식은

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$$

이 되어 타원의 한 직경이 된다.



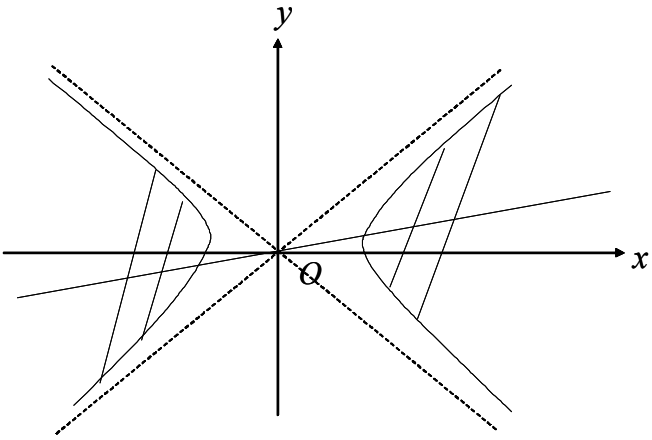
< 그림 1 > 타원의 직경

Collection @ chosun

또한 중심이 원점인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 대하여도 타원의 경우가 같은 방법으로 하면

$$y=\frac{b^2}{a^2m}x$$

가 되어 쌍곡선의 한 직경이 됨을 알 수 있다.



< 그림2 > 쌍곡선의 직경

꼭짓점이 원점에 있는 포물선 $y^2=4px$ 에 대하여도 이 포물선과 직선(4.1)와의 교점을 구하면

$$(y_1+\mu t)^2=4p(x_1+\lambda t)\,.$$

따라서

$$\mu^2t^2+2(\mu y_1-2p\lambda)t+y_1^2-4px_1=0\,.$$

그러므로 $P(x_1,\,y_1)$ 이 자취상의 점이면 $t_1+t_2=0$ 이므로

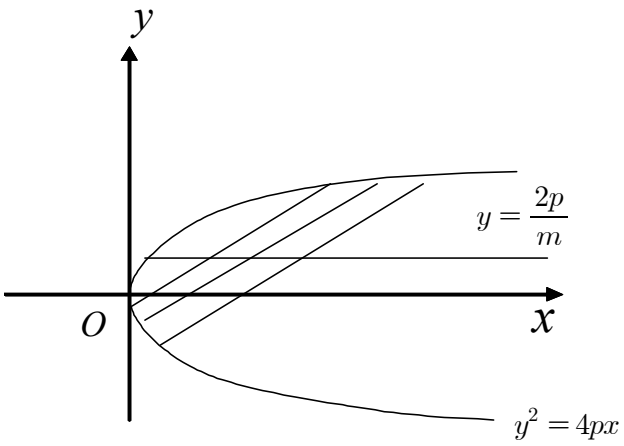
$$y_1\mu-2p\lambda=0$$

즉,

Collection @ chosun

$$y_1 = \frac{2p\lambda}{\mu}\ .$$

그러므로 이것을 곡선위의 임의좌표 (x, y) 로 고쳐쓰고 $\frac{\mu}{\lambda} = m$ 이라 놓으면 자취의 방정식은 $y = \frac{2p}{m}$ 가 되어 포물선의 한 직경이다.



< 그림 3 > 포물선의 직경

이상을 종합하면 타원과 쌍곡선의 직경은 그 중심을 지나므로 직경의 중점이 타원과 쌍곡선의 중심이 된다. 또한 포물선에 있어서 그 직경과 포물선의 교점에서의 접선은 직경을 정하는 평행한 현과 평행함을 알 수 있다.

A. 중심과 직교좌표축의 작도

위의 사실들로부터 주어진 이차곡선의 중심과 직교좌표축을 작도 할 수 있다.

Collection @ chosun

1. 타원의 경우

a. 타원의 중심 작도

① 두 개의 평행한 현 l_1, l_2 를 작도한다.

② 평행한 현의 중점을 M, N 이라 한다.

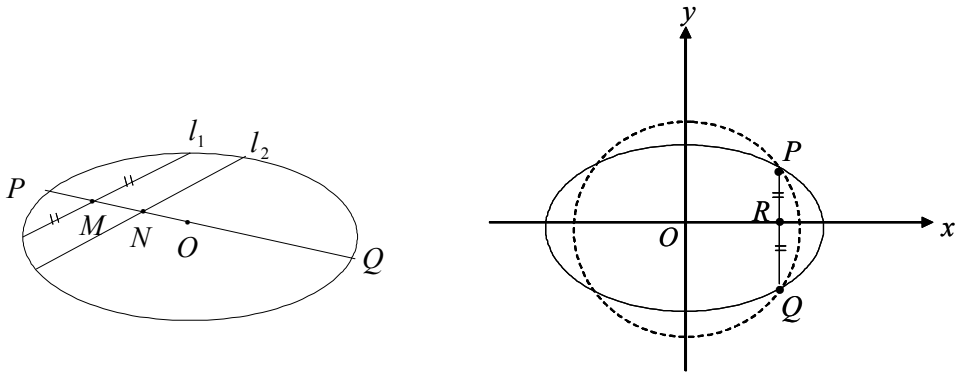
③ M, N 을 지나는 직경 PQ 의 중점 O 가 중심이 된다.

b. 타원의 직교좌표축 작도

① O 를 중심으로 하고 적당한 반경을 가진 원을 타원과 만나도록 작도한다.

② 그림과 같이 그 두 점을 P, Q 그리고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 R 이라 하고 직선 OR 을 x 축으로 한다.

③ O 에서 x 축에 수직인 직선을 y 축으로 한다.



< 그림 4 > 타원의 중심 및 직교좌표축의 작도

2. 쌍곡선의 경우

a. 쌍곡선의 중심 작도

① 두 개의 평행한 현 l_1, l_2 를 작도한다.

② 평행한 현의 중점을 M, N 이라 한다.

Collection @ chosun

③ M, N 을 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 P, Q 라 한다.

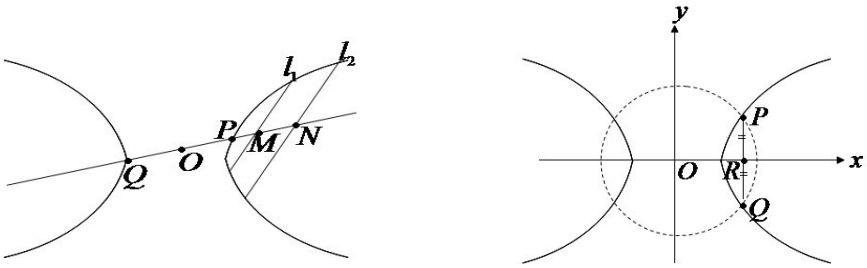
④ M, N 을 지나는 직경 PQ 의 중점 O 가 중심이 된다.

b. 쌍곡선의 직교좌표축 작도

① O 를 중심으로 하고 적당한 반경을 가진 원을 쌍곡선과 만나도록 작도한다.

② 그림과 같이 그 두점을 P, Q 그리고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 R 이라 하고 직선 OR 을 x 축으로 한다.

③ O 에서 x 축에 수직인 직선을 y 축으로 한다.



< 그림 5 > 쌍곡선의 중심 및 직교좌표축 작도

3. 포물선의 직교좌표축의 작도

① 두 개의 평행한 현 l_1, l_2 를 작도한다.

② 평행한 현의 중점을 M, N 이라 한다.

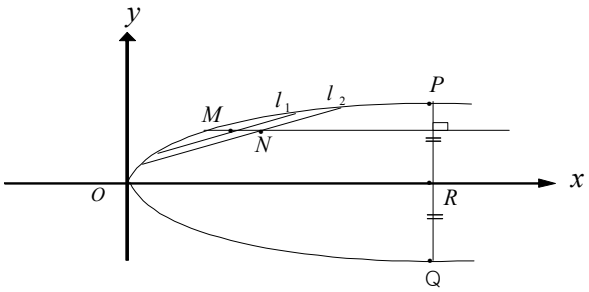
③ M, N 을 지나는 직선이 직경이 된다.

④ 직경에 수직인 임의의 현 PQ 의 중점을 R 이라 한다.

⑤ R 을 지나고 직경에 평행인 직선을 x 축으로 한다.

⑥ x 축과 포물선의 교점을 원점 O 로하고 O 에서 x 축에 수직인 직선을 y 축으로 한다.

Collection @ chosun



< 그림 6 > 포물선의 직교좌표축 작도

B. 초점의 작도

지금까지 주어진 타원, 쌍곡선, 그리고 포물선에 대한 좌표축을 작도하는 방법을 알아 보았다. 이를 바탕으로 이차곡선의 초점을 작도 할 수 있다.

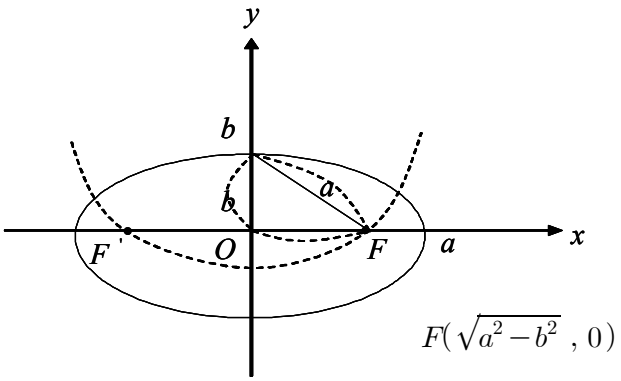
1. 타원의 초점작도

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

의 초점의 좌표는 $F'(-\sqrt{a^2-b^2},0)$, $F(\sqrt{a^2-b^2},0)$ 이다. 이 사실로부터 타원의 초점을 작도할 수 있다.

① b에 중심을 두고 반경이 a인 원이 x축과 만나는 점을 F', F 한다.

② $\overline{OF}=\sqrt{a^2-b^2}$ 이 되므로 F', F 가 타원의 초점이 된다.



< 그림 7 > 타원의 초점작도

dCollection @ chosun

2. 쌍곡선의 초점작도

원

$$x^2+y^2=a^2$$

을 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

의 보조원이라고 한다.

이 쌍곡선의 초점을 $F'(-\sqrt{a^2+b^2},0)$, $F(\sqrt{a^2+b^2},0)$ 라고 하자.

기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \quad \cdots\cdots (4.2)$$

이므로 F', F 에서 접선 (4.2)에 내린 수선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{m}(x\pm\sqrt{a^2+b^2}) \quad \cdots\cdots (4.3)$$

이다. 수선의 발 P, Q 는 (4.2)와 (4.3)의 교점으로 구할 수 있다.

(4.2)에서

$$(y-mx)^2=a^2m^2-b^2$$

즉,

$$y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2-b^2 \quad \cdots\cdots (4.4)$$

(4.3)에서

$$(my+x)^2=a^2+b^2$$

즉,

$$m^2y^2+2mxy+x^2=a^2+b^2 \quad \cdots\cdots (4.5)$$

(4.4)와 (4.5)에서

$$(m^2+1)(x^2+y^2)=(m^2+1)a^2$$

이므로

dCollection @ chosun

$$x^2+y^2=a^2.$$

따라서, P, Q는 쌍곡선의 보조원 위에 있다.

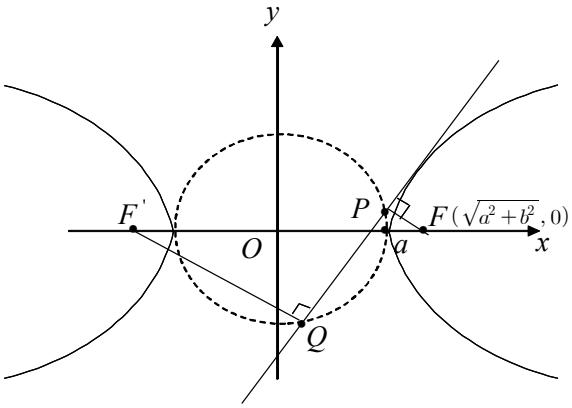
이 사실로부터 쌍곡선의 초점을 작도 할 수 있다.

① 쌍곡선의 보조원을 작도한다.

② 임의의 한 접선이 보조원과 만나는 점을 P, Q라 한다.

③ 점 P, Q에서 접선에 수직인 직선을 작도하여 x축과 만나는 점 F, F'를 작도한다.

④ F, F'가 쌍곡선의 초점이 된다.



< 그림 8 > 쌍곡선의 초점 작도

3. 포물선의 초점 작도

포물선 $y^2=4px(p>0)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 직경 PX를 긋고 P에서의 접선 PT가 x축과의 만나는 점을 T_1이라고 하자, $P(x_1, y_1)$에서 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1).$$

이 접선의 x절편은 $OT_1=-x_1$이고 초점이 $F(p, 0)$이므로

$$\overline{T_1F}=x_1+p=\overline{PF}$$

Collection @ chosun

이다. 따라서 $\triangle FPT_1$ 은 이등변삼각형이므로

$$\angle FPT_1 = \angle FT_1P = \angle XPT .$$

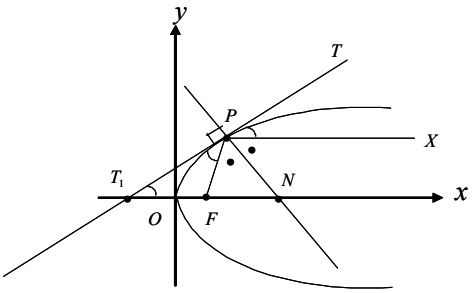
그러므로 법선 PN 은 $\angle FPX$ 를 이등분한다.

이 사실로부터 포물선의 초점을 작도할 수 있다.

① 평행한 현의 중점의 자취를 작도하여 한 직경 PX 를 작도한다.

② P 에서 접선 T_1T 를 그린다.

③ $\angle TPX = \angle T_1PF$ 이 되도록 작도하면 F 가 포물선의 초점이 된다.



< 그림 9 > 포물선의 초점 작도

C. 준선 및 점근선의 작도

1. 타원의 준선 작도

기울기가 m 인 평행한 현의 중점의 자취는 기울기가 $-\dfrac{b^2}{a^2m}$ 인 직경이 됨을 앞에서 밝혔다. 기울기가 $-\dfrac{b^2}{a^2m}$ 인 평행한 현의 중점의 자취는 기울기가 $-\dfrac{b^2}{a^2(-\dfrac{b^2}{a^2m})}$, 즉 m 인 직경이 된다.

이와같이 타원의 한 직경 d_2 가 다른 직경 d_1 에 평행한 현을 이등분하면

dCollection @ chosun

d_1 도 d_2 에 평행한 현을 이등분 한다.

이와같은 두 개의 직경을 서로 공액인 직경이라 하며 두 공액직경의 기울기의 곱은 $m\times(-\frac{b^2}{a^2m})=-\frac{b^2}{a^2}$ 이 된다.

타원

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

의 공액직경을 PP', QQ' 라 하고 초점 $F(ae,0)$ 에서 QQ' 에 그은 수선을 FM 이라고 하면, 두 직선 PP' 와 FM 과의 교점 R 은 F 에 대응하는 준선 f 위에 있다. 왜냐하면 준선 f 의 방정식을 $x=\frac{a}{e}$, 직경 PP' 의 방정식을 $y=mx$ 그리고 직경 PP' 에 대한 공액직경의 방정식을 $y=m'x$ 라고 하면

$$mm'=-\frac{b^2}{a^2}$$

이다. 이 때, FM 방정식은

$$y-0=-\frac{1}{m'}(x-ae)$$

이므로 직선 PP' 와 직선 FM 과의 교점은

$$mx+\frac{1}{m'}(x-ae)=0.$$

따라서,

$$(mm'+1)x=ae.$$

그러므로

$$(-\frac{b^2}{a^2}+1)x=ae.$$

그런데 타원의 이심율 e 는

Collection @ chosun

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

이므로

$$e^2x=ae.$$

따라서

$$x=\frac{a}{e}.$$

즉, 직선 PP' 와 직선 FM의 교점 R은 준선위에 있음을 알 수 있다.

이 사실과 타원의 대칭성에 의하여 타원의 준선을 작도할 수 있다.

① 공액인 직경 PP' 와 QQ'를 작도한다.

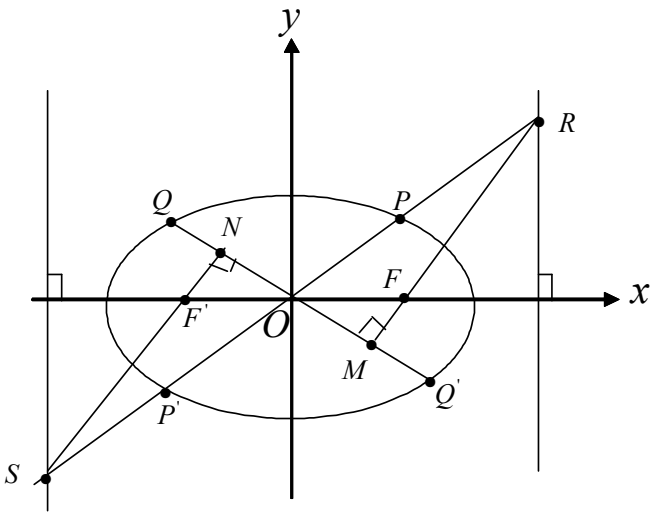
② 초점 F 에서 QQ' 에 수선을 작도하고 그 교점을 M이라 한다.

③ 초점 F' 에서 QQ' 에 수선을 작도하고 그 교점을 N이라 한다.

④ PP' 와 MF의 교점 R을 작도한다.

⑤ PP' 와 NF'의 교점 S을 작도한다.

⑥ R과 S에서 x축에 수직인 직선을 작도하면 이 직선이 준선이 된다.



< 그림 10 > 타원의 준선 작도

dCollection @ chosun

2. 쌍곡선의 준선 및 점근선의 작도

쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

의 한 초점은 $F(\sqrt{a^2+b^2}\,,0)$ 이고, 한 점근선은 $y=\frac{b}{a}x$ 이다.

점근선 위의 점(a,b)는 원

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

위에도 있으므로 원점 O에서 직선 $x=a$와 원 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 의 교점을 지나는 직선은 쌍곡선의 한 점근선이 된다.

또한 점근선 위의 점$(\frac{a}{e},\frac{b}{e})$ 에 대하여 쌍곡선의 이심율 e는

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

이므로

$$(\frac{a}{e})^2+(\frac{b}{e})^2=\frac{a^2+b^2}{e^2}=\frac{a^2e^2}{e^2}=a^2.$$

그러므로 점근선 $y=\frac{b}{a}x$ 위의 점$(\frac{a}{e},\frac{b}{e})$는 원 $x^2+y^2=a^2$ 위에도 있다.

따라서 점근선과 보조원 $x^2+y^2=a^2$ 의 한 교점의 x 좌표는 $\frac{a}{e}$ 이다.

이 사실로부터 쌍곡선의 준선과 점근선을 작도할 수 있다.

a. 쌍곡선의 점근선 작도

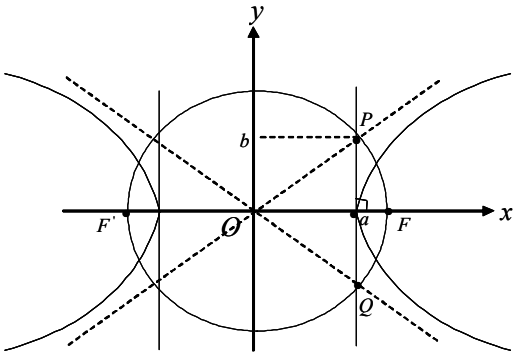
① 원점 O에서 $\overline{OF}$를 반경으로 하는 원을 그린다.

(원의방정식 : $x^2+y^2=a^2+b^2$)

dCollection @ chosun

② 쌍곡선의 한 꼭짓점 $(a, 0)$ 에서 x 축에 수선을 세워 원 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 과의 교점 P 와 Q 를 작도한다.

③ 직선 OP, OQ 가 점근선이 된다.



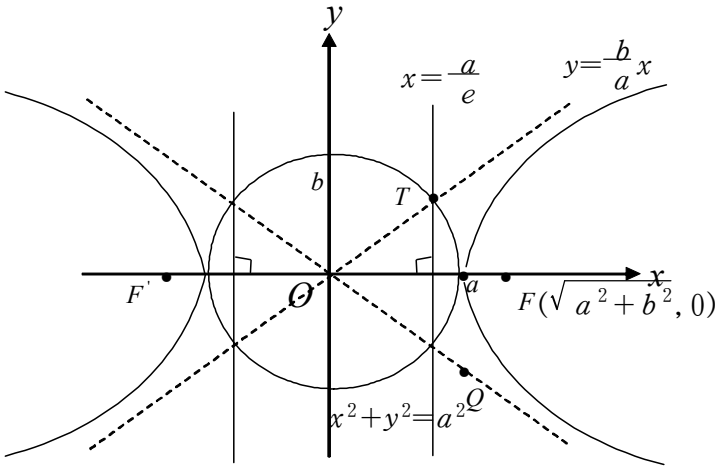
< 그림 11 > 쌍곡선의 점근선 작도

b. 쌍곡선의 준선 작도

① 원점 O 에서 보조원 $x^2+y^2=a^2$ 을 그린다.

② 이 원과 점근선과의 교점 T를 작도한다.

③ T 에서 x 축에 수선을 내리면 이 수선이 쌍곡선의 준선이 된다.

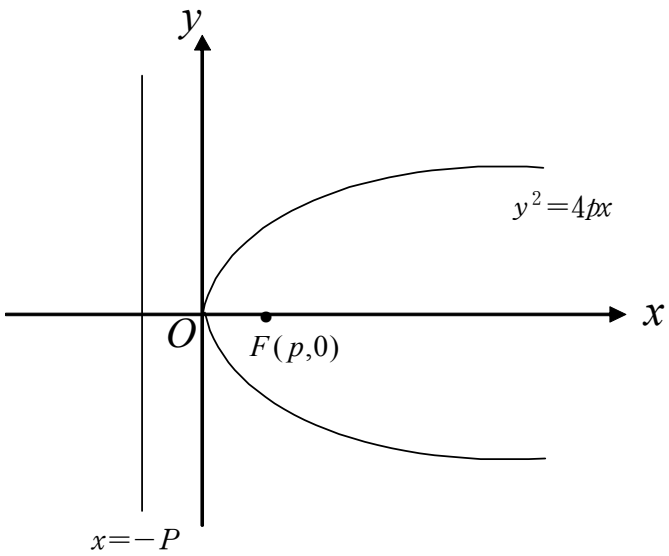


< 그림 12 > 쌍곡선의 준선 작도

Collection @ chosun

3. 포물선의 준선 작도

위에서 포물선의 좌표축과 초점 $F(P, 0)$를 작도할 수 있었으므로 $x = -\overline{OF}$인 점에서 x축에 수선을 작도하면 포물선의 준선이 된다.



< 그림 13 > 포물선의 준선 작도

Collection @ chosun

참 고 문 헌

1. 백용배. 현대기하학 . 교학연구사 1991
2. 엄상섭. 대학일반기하학. 교학연구사 1999
3. 이성헌. 해석기하학. 진명문화사 1994
4. 이종우. 기하학의 역사적 배경과 발달. 경문사 1997
5. 남주연. 이차곡선에 관한 연구. 조선대학교 교육대학원 석사학위논문 1993
6. 정수진. 작도활동을 통한 중학교 평면도형의 지도에 관한연구. 숙명여자대학교 교육대학원 석사학위논문 2002