[UCI]I804:24011-200000237664

２００９년　２월

敎育學碩士(數學敎育)學位論文

실수의 구성 방법에 관한 연구

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金　仁　京

실수의 구성 방법에 관한 연구

A study on the construction method of real numbers.

2009년 2월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 仁 京

실수의 구성 방법에 관한 연구

指導敎授　鄭 潤 泰

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 提出합니다.

2008년 10월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金　仁　京

金仁京의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2008년　12월

朝鮮大學校 敎育大學院

- 목　　차-

ABSTRACT

Ⅰ. 서　론 ····· 1

Ⅱ. 정수에서 유리수로의 확장 ····· 2

Ⅲ. 유리수에서 실수로의 확장 ····· 4

A. 실수의 구성 ····· 4

B. 실수의 대수적 구조 ····· 7

C. 실수에서의 순서 ····· 17

Ⅳ. 실수의 완비성 ····· 21

참고문헌 ····· 34

ABSTRACT

A study on the construction method of real numbers.

Kim In-kyung
Advisor : Prof. Jung Yoon-Tae Ph.D.
Major in Physics Education
Graduate School of Education, Chosun University

The study about Mathematics is started from the study for the number system. In particular, it is important to grasp properly the substance of a real number system, because all contents in analytics are established on the feature of real line $\mathbb{R}$.

Introducing irrational numbers with rational numbers, we expand the real number system. The typical methods of constructy real numbers are as follows; Dedekind's method using the notion of the cut in rational numbers, Cauchy's method using the limit notion of Cauchy's sequence in rational numbers, and the least upperbound property-method using the existence of the supremum.

In this study, introducing Cauchy's method that uses the Cauchy's sequence in rational numbers, we prove the existence of the supremum for the bounded subset of real numbers.

Ⅰ. 서론

수학에 대한 연구는 수 체계에 대한 연구로부터 시작한다고 할 수 있다. 수학의 거의 모든 분야가 그 내용을 수에 두고, 특히 해석학에서 다루는 거의 모든 내용이 실직선 $\mathbb{R}$의 성질을 토대로 하고 있기 때문에 실수계의 본질을 제대로 파악하는 일은 대단히 중요하다. 그러므로 본 논문에서는 어떻게 실수의 체계가 만들어졌는지 어떤 공리들로부터 실수가 만들어 졌는지, 그리고 그에 따르는 기본 성질들을 연구하고자 한다.[3]

수의 체계는 자연수로부터 시작하여, 정수, 유리수, 실수의 차례로 확장되어 간다. 자연수는 정수로, 정수는 유리수로 확장되어지는 과정은 비교적 간단한 대수적 방법에 의해 확장되어진다. 하지만, 유리수에서 실수로의 확장되어지는 과정에서는 서로 다른 임의의 두 유리수 사이에 반드시 또 다른 유리수가 존재함에도 불구하고, 유리직선에는 어떤 틈이 있게 되고, 이러한 유리수계의 틈을 없애주는 수를 만들어서 유리수계가 확장되어져야 한다.[1]

이렇게 유리수에서 무리수를 도입하여 실수체계로 확장하는 데는 대표적인 것으로 유리수의 절단의 개념을 이용하여 실수를 구성하는 Dedekind의 방법, 유리수의 Cauchy수열의 극한개념을 이용하여 실수를 구성하는 Cauchy의 방법, 상한의 존재성을 이용한 방법 등 구성적 방법이 있다.[2]

본 논문은 유리수의 Cauchy수열을 이용하여 실수를 구성하는 방법으로 도입하여, 상계가 있는 실수의 부분집합의 상한의 존재성을 증명하고자 한다.

Ⅱ. 정수에서 유리수로의 확장

실수계를 구성하는 방법에서는 여러 가지가 있지만, 실수계를 자연수로부터 정수, 유리수로 확장시키고, 유리수의 기본수열을 이용하여 실수로 확장시키는 방법으로 실수를 완성하고자 한다.

유리수의 기본수열을 이용하여 실수를 확장하는 방법으로 코시가 구축한 수열을 이용하여 실수를 만드는 과정을 정리한다.

본 논문에서는 코시에 의하여 만들어진 실수에 대한 모든 내용은 생략없이 엄밀하게 다루어 자연수에서 정수까지의 확장은 많은 논문에서 다루고 있으므로 다루지 않았다.[6] 먼저 정수에서 유리수로 확장시키는 방법을 동치관계를 통해 간단히 살펴보고 유리수가 체임을 보였다.

이 절에서는 실수를 구성하는 Cauchy의 방법을 이용한 실수의 구성방법을 허범용[6]의 '코시열을 이용한 실수 구축'에서 사용된 방법과 채수영[5]의 '수의 구성과정을 통해 본 수 체계에 대한 이해'와 유사한 방법을 사용한다.

임의의 정수 j,k 에 대하여 $kx=j$ 를 만족하는 해에 대해서 생각해 보자. $k=0\,,\,j\neq 0$ 라면 해는 없다. 또한 $k=j=0$ 라면 해는 무수히 많다. 그러므로 $k\neq 0$ 인 경우를 생각해보자. $3\cdot x=1$ 는 정수에서 해를 갖지 않는다. 즉 곱셈에 대한 3의 역원이 정수에 없다. 이것은 정수보다 더 큰 수 체계를 생각할 수 있게 한다. 위에서 정의한 정수를 이용하여 유리수로 확장시키는 작업을 해보자.

$$T=\{(j,k)\,|\,j\,,\,k\in\mathbb{Z}\,,\,k\neq 0\}$$

라 하자. T에서 관계를 다음과 같이 정의하자.

$$js=rk\Leftrightarrow(j,k)\sim(r,s)$$

【보조정리2.1.1】 위에서 정의한 관계는 동치관계이다.

【정의2.1.2】 T의 위에서 증명한 동치관계의 동치류를 유리수라 정의하자.
그리고 유리수의 집합을 $\mathbb{Q}$로 표시하자.

【정의2.1.3】 $\mathbb{Q}$에 속하는 임의의 원소 $[(j,k),(r,s)]$ 에 대하여 연산 $+,\bullet$ 을

$$\lceil\ (j,k)\ \rceil + [\,(r,s)\,] = [\,(js+rk, ks)\,]$$
$$[(j,k)] \bullet [\,(r,s)\,] = [\,(jr, ks)\,]$$

와 같이 정의한다. 이는 잘 정의되어 있음을 쉽게 알 수 있다.

위와 같이 정의하면, $k \neq 0, j \neq 0$ 이므로 $ks \neq 0$이고, 정수가 덧셈과 곱셈에 의하여 닫혀있으므로 유리수도 덧셈과 곱셈에 의하여 닫혀있다. 또한, 덧셈과 곱셈은 잘 정의되어 있다. 정수에 속하는 j에 대하여, $(j,1)$의 형태인 유리수를 j로 보기로 하고, 이러한 유리수를 범 자연수라 한다. 범 자연수라 이름 붙인 정수의 집합은 유리수의 부분집합이다.

【정리2.1.4】 유리수는 체이다.

j와 k가 모두 양의 정수이든지 또는 음의 정수이면 유리수 $u=[(j,k)]$는 양의 유리수라 부르기로 하고, 두 정수 j와 k가 각각 양의 정수와 음의 정수이면 유리수 u는 음의 유리수라고 하자. 유리수 0은 양의 유리수도 음의 유리수도 아니다.

Ⅲ. 유리수에서 실수로의 확장

A. 실수의 구성

유리수를 이용하여 실수를 만들고자한다. 이는 이미 수직선 위에는 유리수에 대응하는 점들이 무수히 많음을 알고 있다. 그러나 서로 다른 임의의 두 유리수 사이에 반드시 또 다른 유리수가 존재함에도 불구하고, 유리직선에는 어떤 틈이 있다. 그 빈틈에 대응되는 수가 무리수이다. 그래서 유리수와 무리수를 동시에 생각하여 수직선에 대응시키면 수직선 위에는 전혀 빈틈이 없고, 새로운 수가 대응될 틈이 없다. 이렇게 완성되어지는 실수의 집합을 실수의 연속성이라 한다. 이상에서 볼 수 있듯이 무리수를 소수 개념을 통해 도입함으로써 실수 개념이 완성되고 있다. 이러한 실수의 연속성을 직관적인 개념을 토대로 수직선을 실수의 성질을 깊이 이해야한다.

【정의3.1.1】유리수의 집합에 속하는 수열 $< x_n >$이 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 자연수$\mathbb{N}$이 존재하여

$$\forall n,m > \mathbb{N} \Rightarrow | x_n - x_m | < \epsilon$$

을 만족하면 수열 $< x_n >$ 을 코시수열이라 한다.

실수를 만드는 과정이므로 ϵ 을 양의 유리수로 제한한다.

집합 S 를 유리수상의 모든 코시 수열의 집합이라 정의하고, S상의 관계

$$< a_n > \sim < b_n > \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$$

를 정의한다.

【보조정리3.1.2】 위에서 정의한 관계는 동치관계이다.

증명 (1) $\forall < a_n > \in S$ 에 대해서

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a_n| = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

이고, $< a_n > \sim < b_n >$ 이므로 관계는 반사적이다.

(2) $< a_n > \sim < b_n >$ 이면, 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$$

이므로 $< b_n > \sim < a_n >$, 즉 관계는 대칭적이다.

(3) $< a_n > \sim < b_n >$ 이고 $< b_n > \sim < a_n >$ 이면

$$\lim_{n\to\infty}|a_n - c_n| = \lim_{n\to\infty}|a_n - b_n + b_n - c_n|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}|a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|a_n - b_n| + \lim_{n\to\infty}|b_n - c_n| = 0$$

이다. 따라서 $< a_n > \sim < c_n >$이므로 관계는 추이적이다.

그러므로 (1),(2),(3)에 의하여 관계는 동치관계이다.

관계 $\sim$이 S상의 동치관계임을 보였으므로, S상에 $< a_n >$의 동치류를

$$[< a_n >] \equiv \{< b_n > | < a_n > \sim < b_n >\}$$

과 같이 정의 할 수 있다.

이제 위에서 정의한 동치류를 이용하여 실수를 정의해 보겠다.

【정의3.1.3】 실수라 부를 $\mathbb{R}$을

$$\mathbb{R} \equiv S/\sim = \{[< a_n >] | < a_n > \in S\}$$

로 정의한다.

우리가 정의한 실수가 유리수를 부분집합으로 가지고 있음을 보이자.

$$\widehat{\mathbb{Q}} \equiv \{[< q >] | < q >: \text{상수수열}, q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

이라 하면, $f : \mathbb{Q} \to \widehat{\mathbb{Q}}$ 를

$$\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = [< q >]$$

라 정의하면 f는 전단사함수 이므로 $\mathbb{Q}$를 $\widehat{\mathbb{Q}}$와 같이 볼 수 있으므로, $\mathbb{Q}$를 실수 $\mathbb{R}$의 부분집합으로 볼 수 있다. 표현을 간단히 하기 위해서 실수에서의 유리수를

$$\hat{q} \equiv [< q >]$$

라고 표현하기로 한다.

B. 실수의 대수적 구조

이 절에서는 실수의 구조 중 실수의 대수적 구조에 대해 알아보고자 한다.

【보조정리3.2.1】 $< a_n >, < b_n > \in S$ 이면 $< a_n + b_n > \in S$ 이다.

증명 $< a_n >, < b_n > \in S$ 이므로, 임의의 양수 ϵ에 대하여

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > N_1 \text{ 이면 } |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > N_2 \text{ 이면 } |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

이다. $N_0 = \max[N_1, N_2]$ 라 하면, $\forall n,m > N_0$ 에 대하여

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) - (b_n + b_m)|$$

$$\leq |a_n - a_m| - |b_n + b_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로, $< a_n + b_n > \in S$ 이다.

위의 보조정리를 이용하여 실수에서의 덧셈을 정의한다.

【정의3.2.2】 임의의 $[< a_n >], [< b_n >] \in \mathbb{R}$ 에 대해서

$$[< a_n >] + [< b_n >] \equiv [< a_n + b_n >]$$

라고 덧셈을 정의한다.

【보조정리3.2.3】 위에서 정의한 덧셈은 잘 정의되었다.

증명 위의 보조정리에 의하여 $< a_n + b_n > \in S$ 이므로

$[< a_n >], [< b_n >] \in \mathbb{R}$ 이다.

$$< a_n > \sim < a^*_n >, < b_n > \sim < b^*_n >$$

를 가정하면

$$[< a^*{}_n >] + [< b^*{}_n >] \equiv [< a^*{}_n + b^*{}_n >]$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} |(a_n + b_n) - (a^*{}_n + c^*{}_n)| \le \lim_{n\to\infty} |a_n - a^*{}_n| + \lim_{n\to\infty} |b_n - b^*{}_n| = 0$$

이므로 $< a_n + b_n > \sim < a^*{}_n + b^*{}_n >$ 이고,

$[< a_n + b_n >] = [< a^*{}_n + b^*{}_n >]$ 이다.

즉, 덧셈은 잘 정의되었다.

실수에서 정의한 덧셈은 유리수에서의 덧셈과 같음을 보이자.

$\forall\, p, q \in \mathbb{Q}$ 에 대하여 $\hat{p} = [< p >]$, $\hat{q} = [< q >] \in \mathbb{R}$ 이라 하자.

$$\hat{p} + \hat{q} = [< p >] + [< q >] = [< p + q >] = \widehat{p+q} = p + q$$

이므로 실수에서 덧셈은 유리수에서의 덧셈과 같다.

【보조정리3.2.4】(덧셈에 대한 교환법칙) 임의의 실수 $[< a_n >], [< b_n >]$ 에 대해서

$$[< a_n >] + [< b_n >] = [< b_n >] + [< a_n >]$$

이 성립한다.

증명 임의의 유리수 a_n, b_n 에 대해서

$$\lim_{n\to\infty}|(a_n+b_n)-(b_n+a_n)|=0 \Rightarrow [<a_n+b_n>]=[<b_n+a_n>]$$

이므로 덧셈의 정의에 의하여 교환법칙이 성립한다.

위의 증명과 유사하게 덧셈에 관한 결합법칙도 성립함을 보일 수 있다. 덧셈에 관한 항등원을

$$\hat{0}=[<0>]$$

이라 정의하고, 임의의 실수 $[<a_n>]$ 에 대하여 덧셈에 대한 역원을

$$-[<a_n>]\equiv[<-a_n>]$$

라 정의하면, 잘 정의되고,

$$[<a_n>]+[<0>]=[<a_n+0>]=[<a_n>]$$

$$[<a_n>]+[<-a_n>]=[<0>]$$

이므로, 항등원과 역원이 만족해야할 조건을 만족한다.

이제는 곱셈을 정의해보자. 그 준비 작업으로 다음의 보조정리를 도입하자.

【보조정리3.2.5】 $< a_n >, < b_n > \in S$ 이면 $< a_n \bullet b_n > \in S$이다.

증명 먼저 $[< a_n >] \in S$ 이면, 유계임을 보이자. 1은 양의 유리수이므로, N_0가 자연수에 존재하여

$$\forall\ n, m > N_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$$

을 만족한다. $N_0 + 1$ 을 고정하면 $N_0 + 1 > N_0$를 만족하므로

$$\forall\, n > N_0 \Rightarrow |a_n| = |a_n - a_{N_{0+1}} + a_{N_{0+1}}| < |a_{N_{0+1}} + 1|$$

을 만족한다. $m_a = \max[\,|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_{0+1}}|\,] + 1$ 이라고 정의하면,
모든 자연수 n에 대해서

$$|a_n| < M_a$$

를 만족한다. 유사하게 $< b_n > \in S$이면, 모든 자연수 n에 대해서

$$|b_n| < M_b$$

를 만족시키는 M_b를 구할 수 있다. 다시 $< a_n >, < b_n > \in S$ 를 사용하면, 임의의 양수 ϵ 에 대해서

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n,m > N_1 \text{ 이면 } |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2M_b}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n,m > N_2 \text{ 이면 } |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2M_a}$$

이다. $N_3 = \max[N_1, N_2]$ 라 하면, $\forall n,m > N_3$ 에 대해서

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_n b_m|$$

$$\leq |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m|$$

$$< M_a \frac{\epsilon}{2M_a} + M_b \frac{\epsilon}{2M_b} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로, $< a_n \bullet b_n > \in S$ 이다.

【정의3.2.6】 임의의 $[< a_n >], [< b_n >] \in \mathbb{R}$ 에 대해서

$$[< a_n >] \bullet [< b_n >] \equiv [< a_n \cdot b_n >]$$

라고 곱셈을 정의한다.

【보조정리3.2.7】 위에서 정의한 곱셈은 잘 정의되었다.

증명 $< a_n >, < b_n > \in S$ 이면 $< a_n \bullet b_n > \in S$ 이므로 $[< a_n \bullet b_n >] \in \mathbb{R}$ 이다.

$$< a_n > \sim < a^*{}_n >, < b_n > \sim < b^*{}_n >$$

를 가정하면

$$[< a^*_n >] \bullet [< b^*_n >] \equiv [< a^*_n \bullet b^*_n >]$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} |(a_n \bullet b_n) - (a^*_n \bullet b^*_n)|$$

$$\leq M \lim_{n\to\infty} |a_n - a^*_n| + M^* \lim_{n\to\infty} |b_n - b^*_n| = 0$$

이므로,

$< a_n \bullet b_n > \sim < a^*_n \bullet b^*_n >$ 이고, $[< a_n \bullet b_n >] = [< a^*_n \bullet b^*_n >]$

이다. 즉, 곱셈은 잘 정의되었다.

실수에서 정의한 곱셈은 유리수에서 정의한 곱셈과 일치함을 확인해보자.

$\forall p, q \in \mathbb{Q}$ 에 대하여 $\hat{p} = [< p >]$, $\hat{q} = [< q >] \in \mathbb{R}$ 이라 하자.

$$\hat{p} \bullet \hat{q} = [< p >][< q >] = [< p \bullet q >] = \widehat{p \bullet q} = pq$$

【보조정리3.2.8】(곱셈에 대한 교환법칙) 임의의 실수 $[< a_n >], [< b_n >]$ 에 대해서

$$[< a_n >][< b_n >] = [< b_n >][< a_n >]$$

이 성립한다.

증명　　임의의 유리수 a_n • b_n에 대해서

$$\lim_{n\to\infty}|a_nb_n - b_na_n| = 0 \Rightarrow [< a_nb_n >] = [< b_na_n >]$$

이므로 곱셈의 정의에 의하여 교환법칙이 성립한다.

곱셈에 관한 결합법칙과 배분 법칙은 쉽게 보일 수 있으므로 생략하기로 한다.

곱셈에 관한 항등원은

$$\hat{1} = [< 1 >]$$

로 정의하기로 하고, 임의의 실수 $[< a_n >] \neq \hat{0}$ 에 대해서 역원을 정의해보자.

【보조정리3.2.9】$[< a_n >] \neq \hat{0}$이면, 자연수 M 이 존재하여, 모든 $n > M$ 에 대해서, $a_n > 0$ 또는 $a_n < 0$ 중에서 하나만 만족한다.

증명　　$[< a_n >] \neq \hat{0}$이라는 가정에서, $< a_n >$은 0으로 수렴하지 않으므로, 양수ϵ_0 이 존재하여, 임의의 N 에 대해서, $|a_{nN}| > \epsilon_0$을 만족하는 $n_N > N$ 이존재한다.

$< a_n >$이 코시수열이라 가정을 사용하면, $\epsilon_0/3$ 에 대해서, $M_0 \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, 임의의 $n, m > M_0$ 에 대해서,

$$|(a_n - a)m| < \frac{\epsilon_0}{3}$$

을 만족한다. 위의 내용에서 $n_0 > M_0$ 가 존재하여,

$$|a_{n_0}| > \epsilon_0$$

를 만족한다.

(1) $a_{n_0} > \epsilon_0$ 을 가정하면, 모든 $n > M_0$ 에 대해서,

$$|a_n - a_{n_0}| < \frac{\epsilon_0}{3} \Rightarrow \frac{2\epsilon_0}{3} < a_n$$

이므로, 모든 $n > M_0$ 에 대해서 $a_n > 0$ 을 증명했고,

(2) $a_{n_0} < -\epsilon_0$ 을 가정하면 위와 유사하게 모든 $n > M_0$ 에 대해서 $a_n < 0$ 을 증명할 수 있다.

【보조정리3.2.10】 $[< a_n >] \neq \hat{0}$ 에 대해서,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{만약 } a_n = 0 \\ \dfrac{1}{a} & \text{만약 } a_n \neq 0 \end{cases}$$

라고 정의하면, $[< b_n >] \in \mathbb{R}$ 이고,

$$[< a_n > \bullet < b_n >] = \hat{1}$$

이다.

증명 먼저 $< b_n >$이 코시수열임을 보이자. 위의 보조정리의 증명에서 $\epsilon_0 > 0$와 M_0가 존재하여, 모든 $n > M_0$에 대해서,

$$|a_n| > \frac{2\epsilon_0}{3} \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} < \frac{3}{2\epsilon_0}$$

을 만족한다. 임의의 약수 ϵ 에 대해서,

$$|a_n - a_m| < \frac{9\epsilon}{4\epsilon^*_0}$$

을 만족한다. 모든 $n, m > \max[M_0, N_0]$ 에 대해서,

$$|b_n - b_m| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n||a_m|} < \epsilon$$

을 만족하므로, $< b_n >$ 이 코시수열이다. 즉, $[< b_n >] \in \mathbb{R}$ 이다.
또, 모든 $n > M_0$ 에 대해서 $a_n \bullet b_n = 1$ 이므로,

$$[< a_n >] \bullet [< b_n >] = \hat{1}$$

이다.

위의 내용을 정리하면, 다음의 정리를 얻을 수 있다.

【정리3.2.11】 실수 $\mathbb{R}$은 체이다.

C. 실수에서의 순서

【정의3.3.1】 임의의 실수 $[<a_n>] \neq \hat{0}$ 에 대해서, $M \in \mathbb{N}$이 존재하여

$$\forall n > M \Rightarrow a_n > 0$$

을 만족할 때,

$$[<a_n>] > \hat{0}$$

라고 정의한다.

【보조정리3.3.2】 위의 정의는 잘 정의되었다.

증명 $[<a_n>] > \hat{0}$ 과 $<a_n> \sim <a^*_n>$을 가정하자.

$[<a_n>] \neq \hat{0}$ 이라는 가정에서, $<a_n>$ 은 0으로 수렴하지 않으므로,

양수 ϵ_0 이 존재하여, $a_n > \epsilon_0$ 을 만족하는 n이 무수히 많이 존재한다.

$<a_n> \sim <a^*_n>$이므로, 양수 $\epsilon_0/3$ 에 대해서, $N_1 \in \mathbb{N}$ 이 존재하여,

$$\forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - a^*_n| < \frac{\epsilon_0}{3}$$

를 만족한다. $a_n > \epsilon_0$ 을 만족하는 n중에서 $M > N_1, N_2$ 을 만족하는 M을 하나 택하자.

임의의 $m > M$ 에 대해서,

$$|a^*_m - a| \le |a^*_m - a^*| + |a^* - a| < \frac{2\epsilon_0}{3}$$

이므로

$$-\frac{2\epsilon_0}{3} < a^*_m - a < \frac{2\epsilon_0}{3} \Rightarrow a^*_m > a - \frac{2\epsilon_0}{3} > \frac{\epsilon_0}{3}$$

즉, $[< a^*_n >] > \hat{0}$ 을 만족하므로, 잘 정의되었다.

$-[< a^*_n >] = [< -a^*_n >] > \hat{0}$ 을 만족할 때,

$[< a^*_n >] < \hat{0}$

이라고 정의하고, 임의의 실수

$$[< a_n >] - [< b_n >] = [< a_n - b_n >] > 0 \Rightarrow [< a_n >] > [< b_n >]$$

라고 정의하자.

【보조정리3.3.3】 $[< a_n >] - [< b_n >]$ 과 $[< b_n >] > [< c_n >]$ 을 만족하면,
$[< a_n >] > [< c_n >]$ 을 만족한다.

증명 가정에 의하여

$$\exists M_1 \in \mathbb{R} \quad \forall n > M_1 \Rightarrow (b_n - a_n) > 0$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{R} \quad \forall n > M_2 \Rightarrow (c_n - b_n) > 0$$

을 만족하므로, 모든 $n > \max[M_1, M_2]$ 에 대해서

$$c_n - a_n > (c_n - b_n) + (b_n - a_n) > 0$$

을 만족하므로 증명되었다.

【보조정리3.3.4】 (삼분법) 임의의 실수 $[< a_n >]$ 은

$$[< a_n >] > \hat{0} \qquad [< a_n >] = \hat{0} \qquad [< a_n >] < \hat{0}$$

중에서 단 하나만 만족한다.

증명 우리는 $[< a_n >] \neq \hat{0}$ 에 대해서, $[< a_n >] > \hat{0}$, $[< a_n >] < \hat{0}$ 둘 중 하나만 만족한다라는 것을 보이면 된다. 이는 위의 보조정리에서 증명되었다.

【보조정리3.3.5】 $[< a_n >] < [< b_n >]$ 이면, 모든 실수 $[< c_n >]$ 에 대해서,

$$[< a_n >] + [< c_n >] < [< a_n + c_n >]$$

임을 만족한다.

【보조정리3.3.6】 $[< a_n >] < [< b_n >]$ 이고, $[< c_n >] > 0$ 이면,

$$[< a_n >] \cdot [< c_n >] < [< b_n >] \cdot [< a_n >]$$

을 만족한다.

위의 내용을 종합하면, 다음 결과를 얻을 수 있다.

【정리3.3.7】 실수 $\mathbb{R}$은 순서체이다.

Ⅳ. 실수의 완비성

먼저 거리공간의 정의를 도입하자.

【정의4.1.1】 공집합이 아닌 집합 S상에 $d: S\times S\to \mathbb{R}$ 이 존재하여

$$(a)\quad \forall x\in S \quad d(x,y)\geq 0$$
$$(b)\quad (x,y)=0 \quad \Leftrightarrow x=y$$
$$(c)\quad \forall\, x,y\in S \quad d(x,y)=d(y,x)$$
$$(d)\quad \forall x,y,z\in S \quad d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,x)$$

을 만족할 때, S 를 거리공간이라고 부른다.

먼저 실수에서의 절대값을 정의하자.

【정의4.1.2】 임의의 실수 $[<a_n>]$ 에 대해서

$$|[<a_n>]|=[<|a_n|>]$$

라고 정의한다.

【정의4.1.3】 임의의 실수 $[<a_n>],[<b_n>]$ 에 대해서

$$d([<a_n>],[<b_n>])=|[<a_n-b_n>]|$$

라고 정의하면, 실수 $(\mathbb{R},d)$ 은 거리공간이다.

증명 모든 n에 대해서 $|a_n - b_n| \geq 0$ 을 만족하므로, 다음의 경우로 나누어서 생각해보자.

(1) $< a_n - b_n >$ 은 0으로 수렴하는 경우 : 정의에 의하여,

$[< a_n >] = [< b_n >]$ 이고,

$$\hat{0} = [< a_n - b_n >] = |[< a_n - b_n >]| = d([< a_n >, < b_n >])$$

(2) $< a_n - b_n >$ 이 0으로 수렴하지 않을 경우 : 앞의 보조정리에 의해서, M 이 존재하여, 모든 $n > M$ 에 대해서 $|a_n - b_n| > 0$ 을 만족하므로, 정의에 의해서

$$\hat{0} = [< |a_n - b_n| >] = |[< a_n - b_n]| = d([< a_n >], [< b_n >])$$

이다. (1)에 의해서 (b)가 증명되고, (1),(2)에 의해서 (a)가 증명되었다. (c)와(d)는 쉽게 증명할 수 있으므로 생략하자.

우리는 실수를 코시 수열의 동치류로 정의하였다. 실수에서의 수열의 수렴과 실수에서의 코시 수열을 다루어야 하는데, 이 중 첨자로 표현하여야 하므로, 이를 정리해보기로 하자. 평의상 임의의 양수$[< \epsilon_k >]$를 임의의 양의 유리수 $\hat{\epsilon}$ 으로 제한하여 정의를 내리고, 나중에 임의의 실수에 대한 식으로 대치하기로 하자.

실수$\mathbb{R}$의 수열 $< [< a_n >]_m > \equiv < a_{km} >$ 이 실수 $[< b_k >]$ 으로 수렴한다는 정의를 내려보자. 여기서 앞의 첨자k 는 실수가 코시 수열을 이용하여 정의되는

데 사용되고, 뒤의 첨자 m은 실수의 수열을 표현하는데 사용되는 것에 주의하자.

임의의 양의 유리수 $\hat{\epsilon}$ 에 대해서 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, 모든 $n > N$ 에 대해서,

$$d([< a_k >]_m, [< b_k >]) = [< |a_{km} - b_k| >] < \hat{\epsilon}$$

을 만족하면 된다. 이를 다시 실수에서의 덧셈의 정의를 사용하면,

$$\hat{\epsilon} - [< |a_{km} - b_k| >] = [< \epsilon - |a_{km} - b_k| >] > 0$$

이고, 다시 실수에서의 순서의 정의를 사용하면, $M(m) \in \mathbb{N}$ 이 존재하여,
모든 $k > M(m)$ 에 대해서,

$$|a_{km} - b_k| < \epsilon$$

을 만족한다. 이를 정리하면, 다음의 정의를 얻을 수 있다.

【정의4.1.4】 임의의 양의 유리수 $\hat{\epsilon}$ 에 대해서 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하고, 임의의 $m > \mathbb{N}$ 에 대해서 $M(m) \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, $k > M(m)$ 에 대해서,

$$|a_{km} - b_k| < \epsilon$$

을 만족할 때,

$$\lim_{m \to \infty} [< a_k >]_m \equiv \lim_{m \to \infty} a_{km} = [< b_k >]$$

라 정의한다.

$< [< a_k >]_m >$ 이 실수에서의 코시 수열이라면, 임의의 양의 유리수 $\hat{\epsilon}$ 에 대해서 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, 모든 $n, m > \mathbb{N}$ 에 대해서,

$$d([< a_k >]_n, [< a_k >]_m) = [< \epsilon - |a_{kn} - a_{km}| >] < \hat{\epsilon}$$

을 만족하면 된다. 이를 다시 실수에서의 덧셈의 정의를 사용하면,

$$\hat{\epsilon} - [< |a_{kn} - a_{km}| >] = [< \epsilon - |a_{kn} - a_{km}| >] > 0$$

이고, 다시 실수에서의 순서의 정의를 사용하면, $M(n, m) \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, 모든 $k > M(n, m)$ 에 대해서,

$$|a_{kn} - a_{km}| < \epsilon$$

을 만족한다. 이를 정리하면, 다음의 정의를 얻을 수 있다.

【정의4.1.5】 임의의 양의 유리수 $\hat{\epsilon}$ 에 대해서 $N \in \mathbb{N}$이 존재하고, 임의의 $m,n > N$에 대해서 $M(n, m) \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, $k > M(m, n)$ 에 대해서,

$$|a_{kn} - a_{km}| < \epsilon$$

을 만족할 때, $< [< a_k >]_m >$을 실수에서의 코시수열이라 정의한다.

【보조정리4.1.6】 $< a_k >$이 $\mathbb{Q}$의 코시수열이고, $\widehat{a_m} = [< a_k >]_m = [< a_k >]$ 는 모든 k 에 대해서, $a_{km} = a_m$ 을 만족하는 실수의 수열이라 하면,

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{a_m} \equiv \lim_{m\to\infty} a_{km} = [< a_k >]$$

이다.

증명 $< a_n >$이 $\mathbb{Q}$의 코시수열이라는 가정에 의하여, 임의의 양의 유리수 ϵ 에 대해서 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여, 임의의 $m, n > N$에 대해서,

$$|a_{km} - a_k| = |a_m - a_k| < \epsilon$$

을 만족한다. 즉,

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{a_m} = \lim_{m\to\infty} a_{km} = [< a_k >]$$

이다.

【정리4.1.7】 유리수 $\mathbb{Q} = \widehat{\mathbb{Q}}$ 는 실수에서 조밀하다.

증명 유리수가 실수에서 조밀하다는 것을 보이기 위해서,
임의의 실수에 $[< a_k >]$ 에 대해서, $[< a_k >]$ 로 수렴하는 유리수 이루어진 수열이 존재함을 보이자.
실수의 정의에 의해여 $< a_k >$ 는 유리수 상의 코시 수열이므로,
위의 보조정리에 의하여, $\widehat{a_m} = [< a_k >]_m \equiv [< a_k >]$ 는 모든 k 에 대해서, $a_{km} = a_m$ 을 만족하는 유리수로 이루어진 수열이고,

$$\lim_{m\to\infty}\widehat{a_m}\equiv\lim_{m\to\infty}a_{km}=[<a_k>]$$

이므로 증명되었다.

우리는 위의 정리를 이용하여, 임의의 양의 유리수를 임의의 양수로 바꾸어 줄 수 있으나, 증명을 간단히 하기 위해서, 계속 양의 유리수를 사용하여 내용을 전개하겠다.

【정의4.1.8】 거리 공간 (S,d) 상의 코시수열이 (S,d) 의 원소로 수렴할 때, (S,d) 를 완비(Complete) 라고 부른다.

【정리4.1.9】 $(\mathbb{R},d)$ 는 완비이다.

증명 $<[<a_k>]_m>$ 이 실수에서의 코시 수열이라면, 위의 정리에 의하여 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대해서,

$$\exists\,\alpha_n\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow d([<a_k>]_n,\widehat{\alpha_n})<\frac{1}{n}$$

을 만족한다.

(1) 먼저 $<\alpha_n>$ 이 유리수상의 코시 수열임을 보이자.

임의의 양의 유리수 ϵ에 대해서, $N_1\in\mathbb{N}$ 이 존재하여, $n>N_1$ 이면,

$$d([<a_k>]_n,\widehat{\alpha_n})<\frac{1}{n}<\frac{\epsilon}{3}$$

을 만족하고, $< [< a_k >]_m >$ 이 실수에서의 코시 수열이라는 가정에 의하여, $N_2 \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, $m,n > N_2$ 이면,

$$d([< a_k >]_n,[< a_k >]_m) < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족한다. $n, m > \max[N_1, N_2]$ 를 만족하면,

$$|\alpha_n - \alpha_m| \le d(\widehat{\alpha_n}[< a_k >]_n) + d([< a_k >]_m) + d([< a_k >]_m, \widehat{\alpha_m})$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

이므로, $< \alpha_n >$ 이 유리수상의 코시 수열이다. 그러므로,

$$< \alpha_k > \in \mathbb{R}$$

이다.

(2) 이제

$$\lim_{m \to \infty} [< a_k >]_m = [< \alpha_k >]$$

을 증명하자.

(1)에서, 임의의 양의 유리수 ϵ 에 대해서, $N_1 \in \mathbb{N}$ 이

존재하여, $n > N_1$ 이면,

$$d([< a_k >]_n , \widehat{\alpha_n}) < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족하므로, $M_1 \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, $k > M_1$이면,

$$|a_{kn} - \alpha_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족한다.
$< \alpha_n >$ 이 유리수상의 코시 수열이라는 사실을 이용하면,
$N_3 \in \mathbb{N}$ 이 존재하여, 임의의 $n, k > N_3$ 에 대해서

$$|a_n - \alpha_k| < \frac{\epsilon}{3}$$

를 만족하므로, $n > \max[N_1, N_2]$ 와 $k > \max[N_3, M_1]$ 에
대해서,

$$|a_{kn} - \alpha_n| \le |a_{kn} - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_k| < \epsilon$$

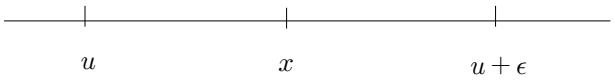
【정의4.1.10】 $\mathbb{R}$의 공이 아닌 부분집합 S 에 대하여, 명제

「모든 $x \in S$ 에 대하여, $x \le u$ $[u \le x]$인 $u \in \mathbb{R}$가 존재한다.」

를 만족할 때, 집합 S는 위로 유계(bounded above) [아래로 유계 (bounded below)]라고 한다. 이 때, $u \in \mathbb{R}$을 S의 상계(upper bound) [하계(lower bound)] 라고 한다. 또한, S가 위로 유계인 동시에 아래로 유계일 때는 간단히 S는 유

계(bounded)라고 한다.

【정의4.1.11】 $\mathbb{R}$의 공이 아닌 부분집합 S 가 위로 유계라고 하자. 다음의 두 조건을 만족하는 $\alpha \in \mathbb{R}$가 존재할 때, α를 S의 상한(supremum) 또는 최소상계(least upper bound)라고 한다.

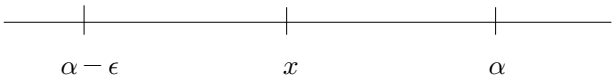


(a) α는 S의 상계이다. 즉, 모든 $x \in S$ 에 대하여 $x \le \alpha$ 이다.

(b) $\beta \in \mathbb{R}$이고 $\beta < \alpha$ 이면 β는 S 의 상계가 될 수 없다. 즉, $\beta < \alpha$ 이면, $\beta < x \le \alpha$ 를 만족시키는 $x \in S$ 가 반드시 존재한다.

임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $\alpha - \epsilon < x \le \alpha$인 $x \in S$가 존재한다.

【정의4.1.12】 $\mathbb{R}$의 공이 아닌 부분집합 S 가 아래로 유계이고, 다음의 두 조건을 만족하는 $u \in \mathbb{R}$가 존재할 때, u를 S의 하한(infimum) 또는 최대하계(greatest lower bound)라고 한다.



(c) u는 S의 하계이다. 즉, 모든 $x \in S$ 에 대하여 $u \le x$ 이다.

(d) $v \le \mathbb{R}$이고 $u < v$ 이면 v는 S의 하계가 될 수 없다. 즉, $u < v$ 이면, $u \le x < v$ 를 만족시키는 $x \in S$ 가 반드시 존재한다.

임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $u \le x < u + \epsilon$ 인 $x \in S$ 가 존재한다.

또한 따름정리에서 S의 상한 α가 존재한다면, 그 α는 유일하다. 왜냐하면, α와 α'가 각각 S의 상한이면 α와 α'는 S의 상계이어야 하고, α가 S의 상한이라는 사실로부터 $\alpha \le \alpha'$가 성립하고, 또한 α'가 S의 상한이라는 사실로부터 $\alpha' \le \alpha$인 관계가 성립하기 때문이다.

같은 방법으로, S의 상한 u가 존재한다면 u가 유일함을 보일 수 있다.[4]

【정리 4.1.9】를 이용하여, 실수계를 구성하는 공리로 사용되는 '최소상계성질'를 증명하고자 한다..

【정리4.1.13】(최소상계성질 : Least upper bound property) $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 S 가 위로 유계이면, 반드시 그 상한이 존재한다.

증명 $\varnothing \neq S \le M = < b_n >$

ⅰ) $< b_n > \in S \rightarrow$ M : 상한

ⅱ) $< b_n > \notin S \rightarrow S \neq \varnothing$ 이므로 $< a_n > \in S$ 이다.

$< a_n > \in S$, $< a_n^{(1)} > = < a_n >$, $< b_n^{(1)} > = < b_n >$ 이라 놓고,

$< c_n^{(1)} > = \dfrac{< a_n^{(1)} > + < b_n^{(1)} >}{2}$ 라 정의하자.

$< c_n^{(1)} > \in S$ 인 경우, $< a_n^{(1)} > = < c_n^{(1)} >$ 이라 하고 $< b_n^{(2)} > = < b_n^{(1)} >$ 이라 놓고, $< c_n^{(1)} > \notin S$ 인 경우, $< a^{(2)} > = < a_n^{(1)} >$ 이라 하고

$< b_n^{(2)} >=< c_n^{(1)} >$ 이라 하자.

이와 같이 반복하여 $< c_n^{(2)} >= \dfrac{< a_n^{(2)} >+< b_n^{(2)} >}{2}$ 가 되는

$< c_n^{(k)} >= \dfrac{< a_n^{(k)} >+< b_n^{(k)} >}{2}$ 로 잡는다.

여기서 $< c_n^{(k)} > \in S$ 이고 $< b_n^{(k)} > \notin S$ 이다.

$$| c_n^{(k)} - c_n^{(k+1)} | \le \left| \frac{< a_n^{(k)} >-< b_n^{(k)} >}{2} \right| < \cdots < \left| \frac{< b_n^{(1)} >-< a_n^{(1)} >}{2^k} \right| < M$$

$l > k$ 일 때,

$$\left| c_n^{(l)} - c_n^{(k)} \right| \le \left| < c_n^{(l)} >-< c_n^{(l-1)} >+< c_n^{(l-1)} >-< c_n^{(l-2)}) >\cdots-< c_n^{(k)} > \right|$$

$$\le \frac{M}{2^k} < \epsilon$$

가 된다.

그러므로, $< c_n^{(k)} >$는 Cauchy 수열이다.

때문에, $\lim_{k\to\infty} < a_n^{(k)} >=< \alpha_n >$ 이라는 $< \alpha_n >$ 이 존재한다.

$< \alpha_n >$ 이 S의 상한임을 보이기 위해

$< e_n > \in S$ 일 때, $< e_n > \le < a_n >$을 보이자.

$< e_n >>< \alpha_n >$ 라 가정하자.

$< e_n > - < \alpha_n > > \epsilon$

$< e_n > - < b_n^{(k)} > + < b_n^{(k)} > - < \alpha_n > > \epsilon$

이 때, $k \hookrightarrow \infty$

$$| < \alpha_n > - < c_n^{(k)} > | < \frac{\epsilon}{3}$$

$$a_n^{(k)} < c_n^{(k)} < b_n^{(k)} \quad , \left| b_n^{(k)} - a_n^{(k)} \right| \leq \frac{M}{2^{k-1}}$$

$$< c_n^{(k)} > - < a_n^{(k)} > < \frac{M}{2^{k-1}} < \frac{\epsilon}{3}$$

$$< c_n^{(k)} > - < b_n^{(k)} > < \frac{M}{2^{k-1}} < \frac{\epsilon}{3}$$

$$< b_n^{(k)} > - < \alpha_n^{(k)} > = < b_n^{(k)} > - < c_n^{(k)} > + < c_n^{(k)} > - < \alpha_n^{(k)} > < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

이므로,

$$< e_n > - < b_n^{(k)} > > \frac{\epsilon}{3}$$

$$< e_n > > < b_n^{(k)} > + \frac{\epsilon}{3}$$

결국, $< b_n > \notin S$ 이므로 $< e_n > \notin S$ 되어 $< e_n > \in S$ 이라는 가정에 모순이 된다.

또, $< f_n > \in S$ 의 또 다른 상계라 하자.

만약 $< f_n > << \alpha_n >$ 이라 하자.

$< \alpha_n > - < f_n > > \hat{\epsilon}$ 를 만족하는 $\hat{\epsilon} > 0$ 이 존재한다.

$$< \alpha_n > - < c_n^{(k)} > + < c_n^{(k)} > - < a_n^{(k)} > + < a_n^{(k)} > - < f_n > > \hat{\epsilon}$$

$$< \alpha_n > - < c_n^k > < \frac{\hat{\epsilon}}{3}$$

$< c_n^k > - < a_n^k > < \frac{\hat{\epsilon}}{3}$ 이므로

$$< a_n^k > - < f_n > > \frac{\hat{\epsilon}}{3}$$

$$< a_n^k > > < f_n > + \frac{\hat{\epsilon}}{3} > < f_n >$$

이 되어, $< f_n >$이 S 의 상계가 되지 못해 모순이다.

그러므로 $< \alpha_n > \leq < f_n >$ 이다.

따라서 $< \alpha_n >$가 S 의 최소상계가 된다.

참고문헌

[1] 김주희, 유리수의 완비화에 대해, 원광대학교 교육대학원(2006)

[2] 박찬운, 고등학교 과정에서의 실수의 연속성과 그 지도에 대한 연구, 단국대학교 교육대학원(1984)

[3] 신은례, 데데킨트 절단을 이용한 실수의 연구, 원광대학교 교육대학원(2005)

[4] 정동명 · 조승제, 실해석학 개론 2판, 경문사(2004)

[5] 채수영, 수의 구성과정을 통해 본 수 체계에 대한 이해, 서강대학교 교육대학원 논문집(2005)

[6] 허범용, 코시열을 이용한 실수 구축, 세명대학교 교육대학원(2004)

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20068062	과 정	석사
성명	한글: 김 인 경 한문: 金 仁 京 영문: Kim In-kyung				
주소	광주광역시 남구 진월동 진월아파트 2동 304호				
연락처	010-5424-0469 E-MAIL: ink2000i@hanmail.net				
논문제목	한글 : 실수의 구성 방법에 관한 연구. 영문 : A study on the construction method of real numbers.				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억 장치에의 저장, 전송 등을 허락함.
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집·형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포·전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 이지책임을 지지 않음.
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송·출력을 허락함.

2009년 2월 일

저작자: 김 인 경(서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하