[UCI]I804:24011-200000236595

2008년 8월
교육학석사(수학교육)학위논문

생활 속에서 발견된
피보나치 수열에 대하여

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 현 진

생활 속에서 발견된 피보나치 수열에 대하여

On the Fibonacci Sequence discovered in life

2008년 8월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 현 진

생활 속에서 발견된 피보나치 수열에 대하여

지도교수 박 순 철

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함

2008년 4월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

김 현 진

김현진의 교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 조선대학교 교수 한승국 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 홍성금 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 박순철 인

2008년 6월

조선대학원 교육대학원

목 차

표 목 차

그 림 목 차

ABSTRACT

On the Fibonacci sequence discovered in life

Hyun-jin Kim
Advisor : Prof. Soon-cheol Park Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

This thesis provides the guideline and teaching-learning materials for the teachers and researchers who study Fibonacci sequence systematically and constantly.

Ⅰ. 서론

수학은 인류의 역사와 더불어 시작되었다고 할 만큼 가장 오래된 학문이며, 각 시대마다 가장 중요하게 여겨져 온 교과목이다. 수학은 과학, 기술, 철학, 사상, 예술분야까지도 관련이 깊은 학문이며, 모든 학문의 기초가 되는 것임에 틀림이 없다. 이렇듯 수학은 일상 생활에서 집약적이고 논리적인 사고 능력을 길러 주어 문제 해결에 도움을 줄 뿐만 아니라, 다른 교과의 효율적인 학습에 토대가 되며, 필수 교과로서 모든 학생들이 관심을 갖고 공부해야 할 중심적이고 중요한 학문이다. 이에 따라 세계의 모든 국가는 수학교육을 위해 여러 가지 노력을 기울이고 있다. 그러나 현재 우리나라 대부분의 중·고등학교는 학생들의 좋은 성적을 위한 입시 위주의 수학만을 강조하다 보니, 많은 학생들이 수학에 대한 가치와 아름다움을 모르고, 수학을 어렵고 딱딱한 과목으로 인식하고 있다.

수학 교과서를 펼쳐보면 수식과 문제 그리고 정의들을 위주로 가득 차 있고, 재미있는 이야기는 단지 몇 개 뿐이다. 보통 사람들에게 그 속에서 아름다움과 즐거움을 찾으라고 하는 것은 아무래도 무리로 생각된다. 학생들이 수학을 가장 싫어하는 과목으로 꼽는 것도 충분히 이해가 된다.

올바른 수학교육이란 인지적인 차원(가르치는 내용)과 정의적인 차원(학습자의 태도, 흥미, 느낌)의 결합을 필요로 한다. 흥미를 유발시키는 재미있는 수학사와 우리들의 생활과 문화와 자연 속에 스며있는 수학적인 소재를 통해 인지적 목표 뿐만 아니라 정의적 목표를 달성하게 하여 학습자 스스로 수학에 대한 부정적인 시각을 해소하도록 도와 줄 교육방법을 연구할 필요가 있다.

수학교과 목표에서도 나타나 있듯이, 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 갖게 하는 것이 수학 교육의 중요한 목표 중의 하나이다.[13] 교육 현장에서 수학을 지도하는데 있어 많은 수학 교사들이 공통적으로 가지고 있는 가장 큰 고민 중의 하나도 '어떻게 하면 많은 학생들이 좀 더 흥미를 가지고 수업에 적극적으로 참여하도록 수업을 진행할 수 있을까?' 하는 것이라 생각한다. 그러나 기호화, 형식화된 수학과목은 그 위계성으로 인하여 학생들의 개인차가 매우 심하다. 이에 따라 성취도

가 낮은 많은 학생들이 수학학습에 흥미를 잃고 관심을 갖지 않게 된다.

이를 위하여 다양하고 이해하기 쉬운 수학사와 우리들의 생활과 문화와 자연 속에 스며있는 수학적 소재들이 수업매체로 이용된다면, 성취도가 낮은 학생들도 기호나 숫자들의 나열로 이루어진 정형화된 문제만을 풀거나 교과서 위주의 문제해결자로서의 일방적이고 따분한 역할에서 해방되어 수학을 더욱 친밀하고 흥미있게 받아들이게 될 것이다. 이로써 학생들은 수학에 대하여 새로운 시각에서 관심과 흥미를 가지게 되어 적극적인 학습의욕으로 수업에 참여하게 될 것이다.

따라서 본 연구는 학생들에게 흥미로운 내용을 소개하는 교수자를 위해 흥미를 유발하는 수학적 소재를 제공하고자 한다. 이에 수학사에 등장하는 피보나치 수열을 하나의 주제로 정하고, 생활 속에서 발견되는 피보나치 수열에 대하여 조사・분석하려고 한다.

Ⅱ. 피보나치의 생애와 업적

A. 피보나치의 생애

지금으로부터 약 800년 전에 이탈리아의 상인이며 수학자인 피보나치(Fibonacci, 1175~1250)는 중세 시대 유럽의 대수학자이다. 피보나치는 1175년 이탈리아 피사의 상업 중심지에서 태어났으며, Leonardo of Pisa라 불리었다. 알려진 ‘Fibonacci’는 ‘Bonacci의 아들’이란 뜻의 ‘filius Bonacci’를 짧게 말한 것이라고 한다. 그의 아버지는 상업과 관련된 일에 종사하였다. 당시 이탈리아의 큰 상인들은 지중해 연안 여러 곳에 상점을 두고 있었는데, 그의 아버지가 관세관리인으로 아프리카의 북부 연안에 위치한 부기(Bougie)에서 근무하게 되었고 레오나르도는 그 곳에서 교육을 받았다. 아버지의 직업 때문에 소년시절부터 일찍이 산술에 흥미를 느끼기 시작했다. 이후 이집트, 터키, 시칠리아, 그리스, 시리아, 프랑스 등을 여행하면서 각 지역의 학문을 접하여 견문을 넓혀갔다. 그는 부기에 있는 이슬람교 지도자들과 여행 도중에 만났던 여러 학자들로부터 폭넓은 지식을 전수받았다. 그는 피타고라스, 유클리드, 아르키메데스가 발견하고 개발한 고대 그리스 수학과 더불어, 아리아바타, 브라마굽타와 같은 인도 수학자가 발전시킨 수학 지식을 배우기도 하고, 오마르카얌이나 알콰리즈미 같은 아라비아 학자들이 쓴 책들도 접했다. 그 당시 유럽에는 거의 알려지지 않았던 아라비아의 수학을 접한 피보나치는 아라비아 상인들이 유럽인들보다 뛰어난 수학적 기법을 활용하고 있음을 알게 되었다. 인도, 아라비아 계산술의 실용적 우수성에 완전한 확신을 가지게 된 그는 1202년에 고향으로 돌아와 그의 유명한 저서『산반서 Liber abaci』를 출간하였는데, 이 책에서는 가감승제와 문제 풀이 방식 더 나아가 대수학에 대한 설명을 포함하고 있다. 그는 『산반서 Liber abaci』 외에도 다른 책들을 썼다. 1220년에 출간된 피보나치의 『실용기하학 Practica geometriae』은 유클리드적 엄밀함과 약간의 독창성을 가지고 능숙하게 기하학과 삼각법을 다룬 방대한 자료집이다. 1225년에는 『제곱근서 Liber quadratorum』가 출간되었는데, 이 책은 부정해석학에 대한 매우 독창적인 이론을 제시하고 있는 저서로서, 피보나치로 하여금 이 분야에서 디오판투스와 페르마 사이의 가장 뛰어난 수학자로 명성을 떨치게 하였다. 그의 저서들은 모두

당대 학자들의 능력을 훨씬 뛰어넘는 작품이었다.

피보나치의 수학적 재능은 학문의 후원자였던 시칠리아 노르망디 왕국의 황제 프레드릭(Frederick Ⅱ)의 관심을 끌게 되었는데, 피보나치는 궁정에서 열린 어떤 수학 콘테스트에 참여할 것을 초청받았다. 황제의 수행원 중 한 사람인 팔레르모 존(Palermo. John)에 의해서 세 문제가 출제되었다. 피보나치는 그 세 문제를 모두 풀었는데, 그것은 그로 하여금 상당한 존경을 얻도록 만들었다. 당시의 세 문제 중 짧은 두 문제는 『꽃, Flos』이라는 책에, 나머지 하나는 『제곱근서 Liber quadratorum』에 해를 제시하였다. 첫 번째 문제는 $x^2=y^2-5$, $z^2=y^2+5$를 만족하는 유리수 x, y, z를 찾는 것이었다. 피보나치는 어떻게 답을 얻었는지에 대하여 설명하지 않고, 답이 $x=\frac{31}{12}$, $y=\frac{41}{12}$, $z=\frac{49}{12}$임을 제시하였다. 두 번째 문제는 삼차방정식 $x^3+2x^2+10x=20$의 해를 구하는 것이었다. 피보나치는 그리스 수학자 유클리드가 정수와 유리수 중에서 이 방정식을 만족하는 수가 없다는 것을 증명한 사실을 알고 있었다. 그래서 정확한 값이 아닌 근사해 $x=1+\frac{20}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}$을 구하였다. 이것은 소수점 이내 아홉째 자리까지 정확할 정도로 실제의 답에 매우 가까운 수였다. 세 번째 문제는 '3명이 저축한 돈을 나눠 가진 다음 첫 번째 사람은 자신이 가진 돈의 $\frac{1}{2}$를 내고, 두 번째 사람은 $\frac{1}{3}$을 내고, 세 번째 사람은 $\frac{1}{6}$을 내서 돈을 다 모았다. 모은 돈을 다시 똑같이 3등분해서 가졌더니 첫 번째 사람은 처음 저축액의 $\frac{1}{2}$이 되었고, 두 번째 사람은 처음 저축액의 $\frac{1}{3}$이 되었으며, 세 번째 사람은 처음 저축액의 $\frac{1}{6}$이 되었다. 그렇다면 처음 저축액은 얼마이며, 이 세 명이 처음에 가져간 돈은 각각 얼마씩일까?' 라는 가장 쉬운 문제였다. 피보나치는 『산반서』에서 제시한 '사람과 지갑'에 관한 문제의 해결법을 활용하여, 복잡해 보이는 문제와는 달리 매우 간단한 해를 제시하였다.

피보나치는 몇 년 동안 황제 및 그의 학자들과 문제를 교환하면서 서신왕래를 했으며, 황제에게『제곱근서 Liber quadratorum』(1225)을 헌정했다. 또한 1228년 그는

『산반서 Liber abaci』를 수정하여 황제의 수석학자 미하엘 스코트에게 헌정했다. 13세기에서 15세기 사이에 만든 산반서의 사본 12권이 현재까지 전해 내려오고 있다.

피보나치는 생애 마지막 몇 년 동안 피사 정부의 재정 및 회계 관련 업무를 맡았다. 1240년 피사 공화국은 그에게 훌륭한 시민상을 수여하고 정기적인 급여와 함께 매년 보너스를 주었다. 그는 1250년경에 세상을 떠났다.

‘피보나치 수열’에 심취한 사람들은 1963년 호갓(Verner Hoggatt) 박사를 중심으로 피보나치 협회(Fibonacci Association)을 창설하고, 계간지 『피보나치 계간지 The Fibonacci Quarterly』를 간행하기 시작했다. 현재까지도 이 학회는 여전히 활발한 활동을 하고 있다. [3]

B. 피보나치의 업적

1.『산반서 Liber abaci』를 통해 인도-아라비아 숫자를 유럽에 전파

피보나치가 살던 당대 이탈리아를 포함한 서유럽에서는 로마 숫자가 일반적으로 사용되었다. 로마 숫자는 복잡한 계산을 하거나 큰 수를 표시할 때 많은 불편함이 있었다. 1202년 피사로 돌아온 피보나치는 인도-아라비아 수 체계의 이점을 널리 알리기 위해 ‘셈을 하는 판자(주판)에 관한 책’인 『산반서 Liber abaci』를 썼다. 이 책은 인도-아라비아 수 체계의 도입과 그것을 어떻게 사용하는 지에 대한 설명을 유럽에 전해주었다는 측면에서 중요하다. 해마다 그의 수학적 지식은 더해갔고, 1228년 『산반서 Liber abaci』의 새로운 판을 다시 발행했다. 그리고 새로 발행된 이 판이 우리에게 전해진 바로 그것이다.

『산반서 Liber abaci』는 모두 15개의 장으로 이루어져 있는데 처음 7개의 장에서는 새로운 수 체계를 이용한 계산 방법에 대하여 설명하고 있으며, 다음 4개의 장에서는 상거래를 할 때 새로운 수 체계에 의한 계산법의 편리함에 대해 자세히 설명하고 있다. 마지막 4개의 장에서는 산술, 대수, 기하, 수론에서의 여러 가지 계산법들과 재미있는 여러 가지 문제들도 함께 제시하고 있다.

피보나치는 인도-아라비아 수 체계가 계산이 간편하고 검산이 용이하며 매우 효율적이라고 강조하였다. 1장부터 7장까지는 수를 정수와 분수, 대분수로 구분하고 이 수들

을 읽고 쓰는 방법과 이 수들의 사칙연산에 대하여 구체적으로 설명하였다. 또 곱하거나 더할 때 임시로 올리는 숫자를 기억하기 위해 손가락을 활용하는 방법에 대해서도 설명하였다. 정수 계산에서는 계산 과정을 검증하는 한 방법으로 '구거법(casting out 9's)'을 제시하였다. 이것은 계산 전과 후에 각 값들에 대하여 각 자리의 숫자들을 합한 다음 9의 배수가 되는 양만큼을 빼고 남은 수를 서로 비교하여 계산이 옳게 되었는지를 판단하는 방법이다.

8장부터 11장까지는 이 새로운 수 체계가 이자와 이윤 계산, 가격의 할인, 조합영업, 통화의 환전 등 상거래에서 매우 편리하게 활용될 수 있음을 강조하여 설명하고 있다. 피보나치는 각 상황에 대하여 7장까지 앞서 다룬 여러 가지 계산 방법을 바탕으로 종이 위에 직접 써서 하는 계산법에 대하여 설명하였다. 피보나치는 노련한 교사처럼 각 개념을 설명하기 위하여 다양한 예를 들고 각각의 예에 대하여 완전하고 상세한 풀이 방법을 덧붙이기도 하였다.

12장에서 15장까지는 여러 가지 재미있는 수학 문제를 해결하기 위하여 새로운 계산 방법을 도입하는가 하면 높은 수준의 응용문제를 제시하기도 하였다. 책의 $\frac{1}{3}$분량을 차지하는 12장에서 다룬 문제들 중에는 그리스, 아라비아, 이집트, 중국, 인도 수학자들이 저술한 책 속에 들어 있는 흥미로운 문제와 함께 어려운 문제들도 실려 있다. 각 문제는 벽을 기어오르는 거미들, 토끼를 쫓는 개, 말을 사는 사람들에서 체스판 위에 놓인 곡물 낟알의 수나 동전 지갑에 들어있는 돈의 액수를 알아내는 문제들까지 매우 다양하다. 마지막 장에서는 알콰리즈미[1]와 유클리드가 개발한 대수적 방법과 기하학적 방법에 대해서도 다루었다.

피보나치는 이 책에서 유용한 계산 방법 및 실용적인 수학적 응용문제 외에도 단문자로 된 변수와 음수라는 두 가지의 독창적인 아이디어를 제시하기도 하였다.

『산반서 Liber abaci』는 중세에 쓰여진 가장 영향력 있는 수학 책 중 하나이다. 유럽 전역에 걸쳐 사업가나 과학자, 정부관료, 교사들은 계산을 하거나 무언가를 기록할 때 로마 숫자를 사용하지 않고 인도-아라비아 숫자를 사용하기 시작하였다.

1) 아라비아의 유명한 수학자

2. 『제곱근서 Liber quadratorum』를 통해 정수론의 발전에 기여

1225년 말 피보나치는 『제곱근서 Liber quadratorum』를 출간하여 프레드릭 황제에게 바쳤다. 수론을 주로 다룬 이 책은 2차방정식의 해법이 설명되어 있다. 또 부정방정식 $x^2+y^2=z^2$을 만족하는 무한히 많은 피타고라스 세 쌍의 정수 x, y, z를 구하기 위한 여러 가지 방법에 대해서도 다루었다. 그 중 한 방법으로 항등식 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$을 사용하였다. 이 항등식은 수백년 전부터 그리스와 아라비아 수학자들이 자주 이용해 왔지만 나중에는 피보나치 항등식으로 알려지게 되었다.

피보나치는 이 책에서 서로 합동인 수들에 대해서도 설명하였다. 만약 $a+b$가 짝수이면 $n=ab(a+b)(a-b)$꼴의 정수이고, $a+b$가 홀수이면 $n=4ab(a+b)(a-b)$꼴의 정수이다. 그는 모든 합동인 수들이 24에 의해 나누어진다는 것과 합동인 수들의 제곱근이 정수가 될 수 없다는 것을 증명하고 이들 수에 대하여 많은 성질들을 알아내었다.

피보나치는 생전에 『산반서 Liber abaci』로 더 잘 알려졌지만 나중에 수학자들은 『제곱근서 Liber quadratorum』를 보다 중요한 업적으로 간주하였다. 그는 이 책을 구성할 때 이 전의 유명한 수학자들이 연구한 수론의 여러 주요한 이론을 참고로 함은 물론, 자신의 독창적인 계산법 및 개념들을 추가하여 지식을 확장시켰다. 이 책은 이후 400년 동안 그가 제시한 새로운 이론과 해법들로 인해 수론을 선도하는 역할을 하였다. [4]

Ⅲ. 피보나치 수열의 정의 및 성질

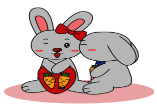
A. 피보나치 수열의 정의

『산반서 Liber abaci』에 제시된 재미있는 문제 중 피보나치의 이름과 관련된 것이 있다. 이 문제는 피보나치 수열이라 부르는 무한수열에 관한 것이다.

농장 주인이 다 자란 한 쌍의 토끼를 가지고 있다. 이 한 쌍의 토끼는 매달 암수 한 쌍의 새끼를 낳으며, 새로 태어난 토끼도 태어난 지 두 달 후부터 매달 한 쌍씩의 암수 새끼를 낳는다고 한다. 1년이 지나면 농장 주인은 모두 몇 쌍의 토끼를 갖게 될까? (단, 토끼들은 절대 죽지 않는다.) [4]

이 문제를 그림을 그려가며 알아보자. 첫 달은 토끼 한 쌍만이 있다.

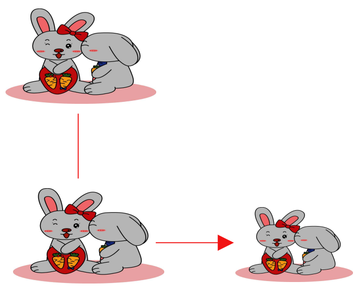
1월 1일



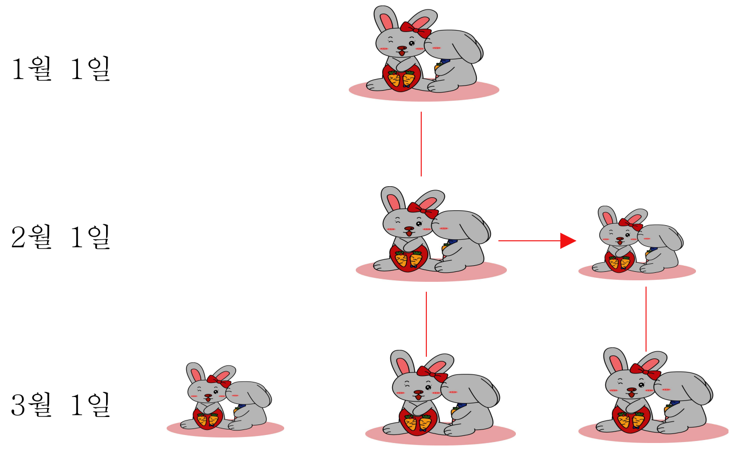
두 달째, 그들은 한 쌍의 새끼 토끼를 낳을 것이다. 그래서 모두 두 쌍의 토끼가 있다.

1월 1일

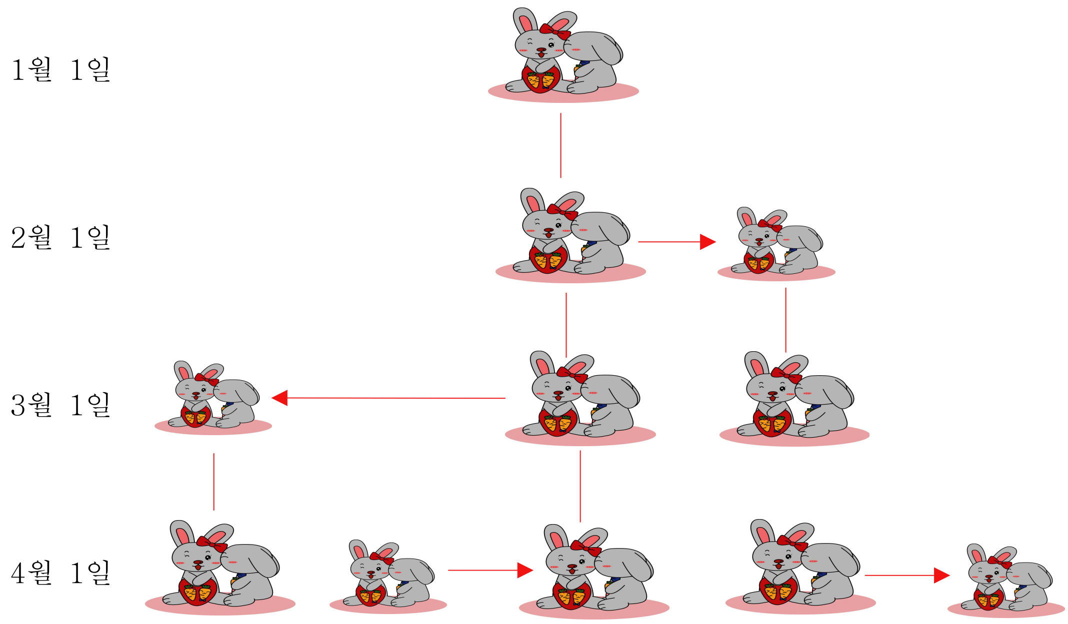
2월 1일



다음달, 원래 토끼 한 쌍은 또 다른 새끼 토끼 한 쌍을 낳고, 처음 태어난 한 쌍의 새끼 토끼가 자랄 것이다. 이제 세 쌍의 토끼가 있다.



한 달 후, 처음 토끼 한 쌍은 또 다른 새끼 토끼 한 쌍을 낳고, 두 번째 태어난 한쌍은 자랄 것이다. 그리고 첫 번째 태어나서 다 자란 토끼 한쌍은 다른 새끼 토끼 한쌍을 낳는다. 그러면 모두 다섯 쌍의 토끼가 있게 된다.



곧 다루기 힘들 정도로 늘어나겠지만, 앞의 그림과 같은 방법으로 계속 그려나갈 수는 없다. 하지만 매달 토끼 쌍의 수를 조사하면 문제를 풀 수 있는 패턴이 아래의 표와

같다. 패턴에서 처음 수로 1을 첨가하면 다음과 같은 규칙과 수열을 구할 수 있다.

		1+1	1+2	2+3	3+5	5+8	⋯
1	1	2	3	5	8	13	⋯

<표1> 월별 토끼 집단의 성장표

달	새끼 토끼(쌍)	어미 토끼(쌍)	전체 토끼(쌍)
1월째	0	1	1
2월째	1	1	2
3월째	1	2	3
4월째	2	3	5
5월째	3	5	8
6월째	5	8	13
7월째	8	13	21
8월째	13	21	34
9월째	21	34	55
10월째	34	55	89
11월째	55	89	144
12월째	89	144	233

즉, 앞의 두 달의 토끼 쌍의 수를 합하면 다음 달의 토끼 쌍의 수를 구할 수 있고, 1년이 지난 후인 13달째에 우리 안에 있는 토끼는 모두 377쌍이 된다.

이렇게 해서 나오는 수열을 '피보나치 수열'이라고 하며, 이 수열의 각 항에 있는 수를 '피보나치 수'라고 한다. 세계 수학계에서 통용되는 공식적인 피보나치 수열의 일반항에 대한 표현은 피보나치의 앞 글자를 따서 F_n으로 나타낸다. 17세기에 대수학의 기호가 발전하면서 수학자들은 이 수열을 공식$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$으로 만들었다. 즉, $n+2$번째 항의 피보나치 수는 $n+1$번째와 n번째 피보나치 수의 합과 같다.

B. 피보나치 수를 구하는 방법

1. 피보나치 수열의 정의를 사용

$F_1 = 1, F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3)$[2)]

이 방법은 F_n을 계산하기 전에 n보다 작은 첨수들의 피보나치 수들을 모두 계산해야 한다. 그러나 이 방법은 n이 커질수록 매우 지루하다.

2. 큰 n에 대한 피보나치 수들을 계산하는데 활용될 수 있는 알고리즘

$F_n = F_d F_{n+1-d} + F_{d-1} F_{n-d} \quad$ (n이 짝수이면 $d = \frac{n}{2}$, n이 홀수이면 $d = \frac{n+1}{2}$)

이 방법은 F_n을 얻기 위해 처음부터 $\frac{n}{2}$번째까지의 피보나치 수들의 계산만 필요하다.

3. 비네의 공식(Binet's Formula)

1843년에 Jacques Philippe Marie Binet은 피보나치 수열의 n번째 항을 찾는 formula를 발견했다.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \ \dots\ (*)$$

(*)의 유도과정을 살펴보면 다음과 같다.

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

$F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta(F_{n+1} - \alpha F_n) \qquad \alpha + \beta = 1,\quad \alpha\beta = -1$

근 사이의 관계로부터 $x^2 - x - 1 = 0$라는 식을 얻을 수 있다.

$x^2 - x - 1 = 0$의 두 근을 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$로 놓자.

$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1$

$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \quad \cdots ①, \quad \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n \quad \cdots ②$

①-②를 한 후, $\alpha - \beta$로 나누어서 $\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$을 유도한다.

2) 좀더 엄밀한 정의를 위해, 앞에서 언급하여 정의한 내용과 다르게 첫째항과 둘째항을 1로 정의하였다.

$H_n = \dfrac{\alpha^{n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta}$라고 놓으면 $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$가 성립한다.

또한, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$이므로 $H_1 = \dfrac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$, $H_2 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$이다.

따라서, H_n은 피보나치 수열이고, $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$이다.

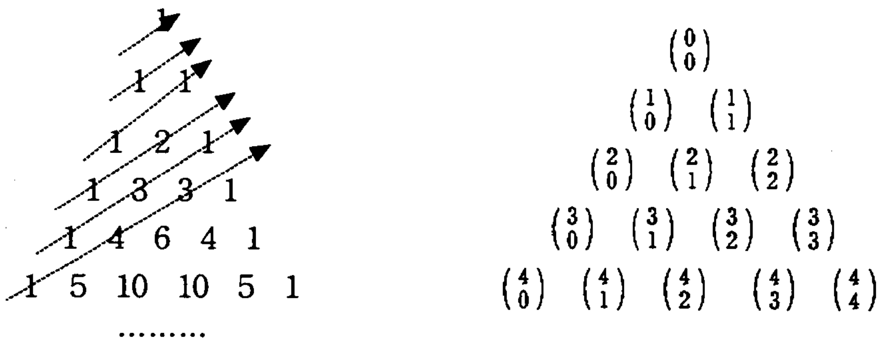
임의의 n에 대해서 F_n의 값은 $r\left(= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$의 값을 이용하여 계산할 수 있다. 여기서 고려해야 할 점이 두 가지 있다. 첫째, r은 무리수이고, 피보나치 수는 정수이므로 계산상 반올림을 해야 하기 때문에 오차가 생긴다. 둘째, n이 매우 크고 F_n의 정확한 값이 필요하다면 계산에 사용된 r의 값이 의미있는 소수부분의 자리까지 고려해야 한다.

4. 이항형식(Binomial Formula)

모든 피보나치 수는 파스칼 삼각형에 있는 어떤 수의 합으로 표현될 수 있다.

즉, $F_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$이다. 여기서 $\binom{n}{k}$는 파스칼의 삼각형에서 n번째 행에서 k번째 열을 뜻하고, 파스칼 삼각형에서 첫 번째 행과 열은 항상 0번째로 센다. 그리고, $k > n$이면, $\binom{n}{k} = 0$이다.

예를 들면, $F_5 = \sum_{k=1}^{5} \binom{n-k}{k-1} = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} + \binom{1}{3} + \binom{0}{4} = 1 + 3 + 1 + 0 + 0 = 5$이다. [12]



<그림1> 파스칼 삼각형

C. 피보나치 수열의 성질

1.

$\gcd(F_n\,,\ F_{n+1}) = 1$

즉, 연속하는 피보나치 수 F_n과 F_{n+1}은 서로 소이다.

(증명) $d = \gcd(F_n\,,\ F_{n+1})$로 잡고, $d > 1$라고 가정하자.
이 때, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$이므로 F_{n-1}은 d로 나누어진다. 마찬가지로 $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$이므로 F_{n-2}도 d로 나누어진다. 이런 과정을 반복하면 F_{n-1}, F_{n-2}, F_{n-3}, $\cdots$,F_1은 모두 d로 나누어진다. 그러나, $F_1 = 1$이므로 1보다 큰 어떠한 자연수 d로도 나눌 수 없다. 이는 모순이 되므로 $d = 1$이다. 따라서, $\gcd(F_n\,,\ F_{n+1}) = 1$이다.

2.

$m \geq 2, n \geq 1$에 대하여 $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$이다.

(증명) m은 $m \geq 2$로 고정하고, n에 대하여 수학적 귀납법을 적용한다.
$n = 1$일 때 $F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_m F_1 = F_{m-1} + F_m$이므로 성립한다.
$n = k$일 때 $F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_m F_{k+1}$, $F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k-1} + F_m F_k$라고 가정하자.
위의 식에서 각 변끼리 서로 더하면,

$$F_{m+k} + F_{m+(k-1)} = F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k)$$
$$F_{m+(k+1)} = F_{m-1}F_{k+1} + F_m F_{k+2}$$

따라서, $n = k+1$일 때도 주어진 등식이 성립하므로, 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

3.

$m \geq 1, n \geq 1$에 대하여 F_{mn}은 F_m에 의하여 나누어진다.

(증명) $n = 1$일 때 $F_m | F_{m \cdot 1}$이므로 성립한다.
$n = k$일 때 $F_m | F_{mk}$라고 가정하자.

$n=k+1$일 때, [성질 2]에 의하여 $F_{m(k+1)}=F_{mk+m}=F_{mk-1}F_m+F_{mk}F_{m+1}$이다.

한편 $F_m|F_{mk-1}F_m$이고 $F_m|F_{mk}F_{m+1}$이므로 $F_m|F_{m(k+1)}$이다.

따라서, 모든 자연수에 대하여 F_{mn}은 F_m에 의하여 나누어진다.

4.

만약 $m=qn+r$이라면 $\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_r, F_n)$이다.

(증명) [성질 2]에 의하여 $\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_{qn+r}, F_n)=\gcd(F_{qn-1}F_r+F_{qn}F_{r+1}, F_n)$

$$=\gcd(F_{qn-1}F_r, F_n)$$

이제 $\gcd(F_{qn-1}, F_n)=1$임을 보이기 위하여 $d=\gcd(F_{qn-1}, F_n)$라고 하자.

그러면 $d|F_n$이고 $d|F_{qn-1}$이다. [성질 다]에 의하여 $d|F_n$이면 $d|F_{qn}$이다.

따라서 d는 연속하는 항 F_{qn-1}과 F_{qn}의 공약수이다. [성질 1]에서 연속하는 피보나치 수는 서로 소이므로 $d=1$이다. $\gcd(a, c)=1$일 때 $\gcd(a, bc)=\gcd(a, b)$라는 성질을 이용하면, $\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_r, F_n)$이 성립한다.

5.

$\gcd(F_m, F_n)=F_{\gcd(m,n)}$ 즉, 두 피보나치 수의 최대공약수도 피보나치 수이다.

(증명) $m \ge n$라고 가정하자. m과 n에 유클리드 알고리즘을 적용하면

$$\begin{array}{ll}
m=q_1n+r_1 & 0<r_1<n \\
n=q_2r_1+r_2 & 0<r_2<r_1 \\
r_1=q_3r_2+r_3 & 0<r_3<r_2 \\
\quad\vdots & \\
r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n & 0<r_n<r_{n-1} \\
r_{n-1}=q_{n+1}r_n &
\end{array}$$

F_m과 F_n의 최대공약수를 구해보면

$$\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_{r_1}, F_n)=\gcd(F_{r_1}, F_{r_2})=\cdots=\gcd(F_{r_{n-1}}, F_r)$$

$r_n | r_{n-1}$이므로 [성질 3]에 의하여 $F_{r_n} | F_{r_{n-1}}$이고, $\gcd(F_{r_n}, F_{r_{n-1}}) = F_{r_n}$이다.

유클리드 알고리즘에서 $\gcd(m, n) = r_n$이므로 $\gcd(F_{r_n}, F_{r_{n-1}}) = F_{\gcd(m, n)}$이다.

따라서, $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$이 성립한다.

6. $\boxed{m \geq 2\text{에 대하여 } F_m | F_n\text{이 되기 위한 필요충분조건은 } m | n\text{이다.}}$

(증명) $F_m | F_n$이면 $\gcd(F_m, F_n) = F_m$이다.

한편, [성질 5]에 의하여 $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m, n)}$이다. 따라서, $F_m = F_{\gcd(m, n)}$, 즉 $m = \gcd(m, n)$이므로 $m|n$이다.

역으로, $m|n$이면 [성질 3]에 의하여 $F_m | F_n$이다.

따라서, $F_m | F_n$이 되기 위한 필요충분조건은 $m|n$이다.

7. $\boxed{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1}$

(증명)

$$
\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2 \\
F_2 &= F_4 - F_3 \\
F_3 &= F_5 - F_4 \\
&\vdots \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n-1}
\end{aligned}
$$

위의 식들을 모두 더하면 $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$이다.

8. $\boxed{F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}}$

(증명)

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 1 \\
F_3 &= F_4 - F_2 \\
F_5 &= F_6 - F_4
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

위의 식들을 모두 더하면 $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$이다.

9.

$$\boxed{F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1}$$

(증명) [성질 7]와 [성질 8]에 의하여

$$\begin{aligned} F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} &= (F_1 + F_2 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n}) - (F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}) \\ &= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n} = (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1 = F_{2n-1} - 1 \end{aligned}$$

10.

$$\boxed{{F_n}^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n-1}}$$

(증명)

$$\begin{aligned} {F_n}^2 - F_{n+1}F_{n-1} &= F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n+1}F_{n-1} \\ &= (F_n - F_{n+1})F_{n-1} + F_nF_{n-2} \\ &= -{F_{n-1}}^2 + F_nF_{n-2} \\ &= -({F_{n-1}}^2 - F_nF_{n-2}) \\ &= (-1)^2(F_{n-2} - F_{n-1}F_{n-3}) \\ &= \cdots = (-1)^{n-2}({F_2}^2 - F_3F_1) \\ &= (-1)^{n-2}(1^1 - 2 \bullet 1) = (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

11.

$$\boxed{\begin{aligned} &{F_{2k}}^2 = F_{2k+1}F_{2k-1} - 1 \\ &{F_{2k+1}}^2 = F_{2k+2}F_{2k} + 1 \end{aligned}}$$

(증명) 위의 [성질 10]에서 $n = 2k$를 대입하면 ${F_{2k}}^2 = F_{2k+1}F_{2k-1} - 1$이고, $n = 2k+1$을 대입하면 ${F_{2k+1}}^2 = F_{2k+2}F_{2k} + 1$이다.

12. $\boxed{F_1{}^2+F_2{}^2+F_3{}^2+\cdots+F_n{}^2=F_nF_{n+1}}$

(증명) $n=1$일 때 (좌변)=$F_1{}^2=1=1\times1=F_1F_2$=(우변) 이므로 성립한다.

$n\geq 2$일 때 $F_n{}^2=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1}$이므로

$F_2{}^2=F_2F_3-F_2F_1$

$F_3{}^2=F_3F_4-F_3F_2$

$\vdots$

$F_n{}^2=F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1}$

위의 식들을 모두 더하면 $F_1{}^2+F_2{}^2+F_3{}^2+\cdots+F_n{}^2=F_nF_{n+1}$이다.

이 외에도 성립하는 성질들을 정리하면 다음과 같다.

$F_n{}^2=F_{n+1}F_{n-1}+(-1)^{n-1}$

$F_{n-1}F_{n+1}+F_{n-2}F_{n+2}=2F_n{}^2$, $F_{n-1}F_{n+1}-F_{n-2}F_{n+2}=2(-1)^2$

$F_nF_{n-1}=F_n{}^2-F_{n-1}{}^2+(-1)^n$

$F_{n+1}{}^2-4F_nF_{n-1}=F_{n-2}{}^2$

$F_{3n}=F_{n+1}{}^3+F_n{}^3-F_{n-1}{}^3$

$F_1+F_4+F_7+\cdots+F_{3n-2}=\frac{1}{2}F_{3n}$

$F_2+F_6+F_{10}+\cdots+F_{4n-2}=F_{2n}{}^2$

$F_4+F_8+F_{12}+\cdots+F_{4n}=F_{2n+1}{}^2-1$

$F_n{}^2-F_{n-p}F_{n+p}=(-1)^{n-p}F_p{}^2$ [2]

Ⅳ. 피보나치 수열과 황금비

A. 황금비의 정의

'황금비'라는 명칭은 그리스의 수학자 에우독소스가 붙인 것이라고 한다. 또한 황금비를 나타내는 기호ϕ(파이)는 이 비(比)를 조각에 이용하였던 피디아스(Phdias)의 그리스어인 첫 글자에서 나온 것이다. 그리스인은 이 황금비에 도취하여 도기류나 의복의 장식, 회화 그리고 건축 등에 응용하였다.

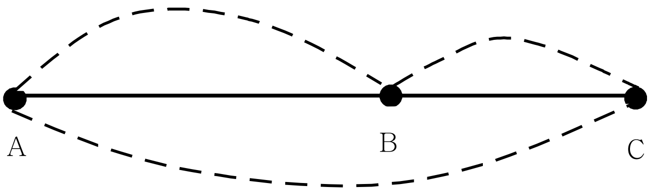
황금비는 선분의 분할로 정의할 수 있는데, '전체길이 : 긴 길이 = 긴 길이 : 짧은 길이'를 만족하는 분할의 비를 말한다. 황금비는 무리수 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$로 나타나는데, 보통 소수점 세 번째 자리까지인 1.618을 사용한다. 피타고라스 학파는 정오각형의 한 대각선이 다른 대각선에 의해 분할될 때 생기는 두 부분의 길이의 비가 황금비가 됨을 발견했다. 직사각형의 경우 가로와 세로의 길이의 비가 황금비를 이룰 때, 가장 안정감 있고 균형있는 아름다운 직사각형으로 사람들이 느낀다는 것은 놀라운 일이다. 파르테논 신전의 외각모양이나 카드의 가로, 세로 비는 대표적인 황금비의 적용 예이다.

황금분할은 자연에서도 흔히 발견된다. 이것은 계란의 가로, 세로 비에서 그리고 소라껍질이나 조개껍질의 각 줄간의 비율에서도 발견된다. 그것은 식물들의 잎차례, 가지치기, 꽃잎 등에서 발견될 뿐 아니라 초식동물의 뿔, 바다의 파도, 물의 흐름 나아가 태풍, 은하수의 형태에서도 발견된다.

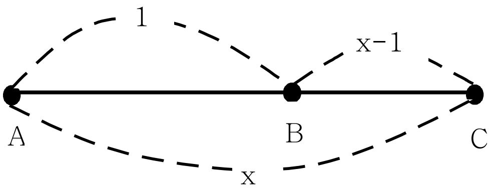
수학적으로 "황금비 ϕ는 그 역수 $\frac{1}{\phi}$이 그 자신 ϕ로부터 1을 뺀 것과 같다", 즉 $\frac{1}{\phi}=\phi-1$이라는 성질을 가지고 있다. 이 식의 양변에 ϕ를 곱하면, $\phi^2-\phi-1=0$이다. 따라서, $\phi=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$에서 양수인 값을 계산하면, $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.61803398\cdots$이다.

다시 살펴보면, 선분 $\overline{AC}$를 점 B에서 황금분할로 나누면 전체 선분의 길이 대 긴 선분의 길이의 비와 긴 선분의 길이 대 짧은 선분의 길이의 비가 같다.

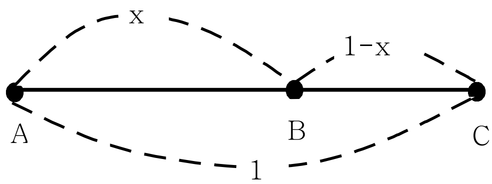
즉, $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC}$ $(\overline{AB}>\overline{BC})$이다. [5]



<그림2> 황금분할점



<그림3> 황금분할점(방법1)



<그림4> 황금분할점(방법2)

[방법1] $\overline{AC}=x$, $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=x-1$이라고 놓자. $(x>1>x-1)$
따라서 선분들의 길이의 비는 $x:1=1:(x-1)$ 즉, $x^2-x-1=0$이다. 이 방정식의 근은 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$이다. 이 문제의 문맥상 양수의 근만이 물리적인 의미를 가지므로, $\sqrt{5}$의 근사값 2.236을 대입하면 $\phi=\dfrac{x}{1}=x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 1.618$이다.

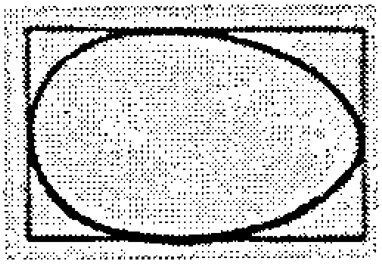
[방법2] $\overline{AC}=1$, $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=1-x$이라고 놓자. $(1>x)$
따라서 선분들의 길이의 비는 $1:x=x:(1-x)$ 즉, $x^2+x-1=0$이다. 이 방정식의 근은 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$이다. 이 문제의 문맥상 양수의 근만이 물리적인 의미를 가지므로, $\sqrt{5}$의 근사값 2.236을 대입하면 $\phi=\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}\fallingdotseq 1.618$이다.

B. 주변에서 찾아볼 수 있는 황금비

황금비는 가장 안정적이고 아름답게 보이는 비율이다. 그래서 우리가 느낄 수는 없지만, 우리의 주변 곳곳에서 찾아볼 수 있다. 주변에서 황금비가 적용되고 있는 것이 무엇이 있는지 살펴보겠다.

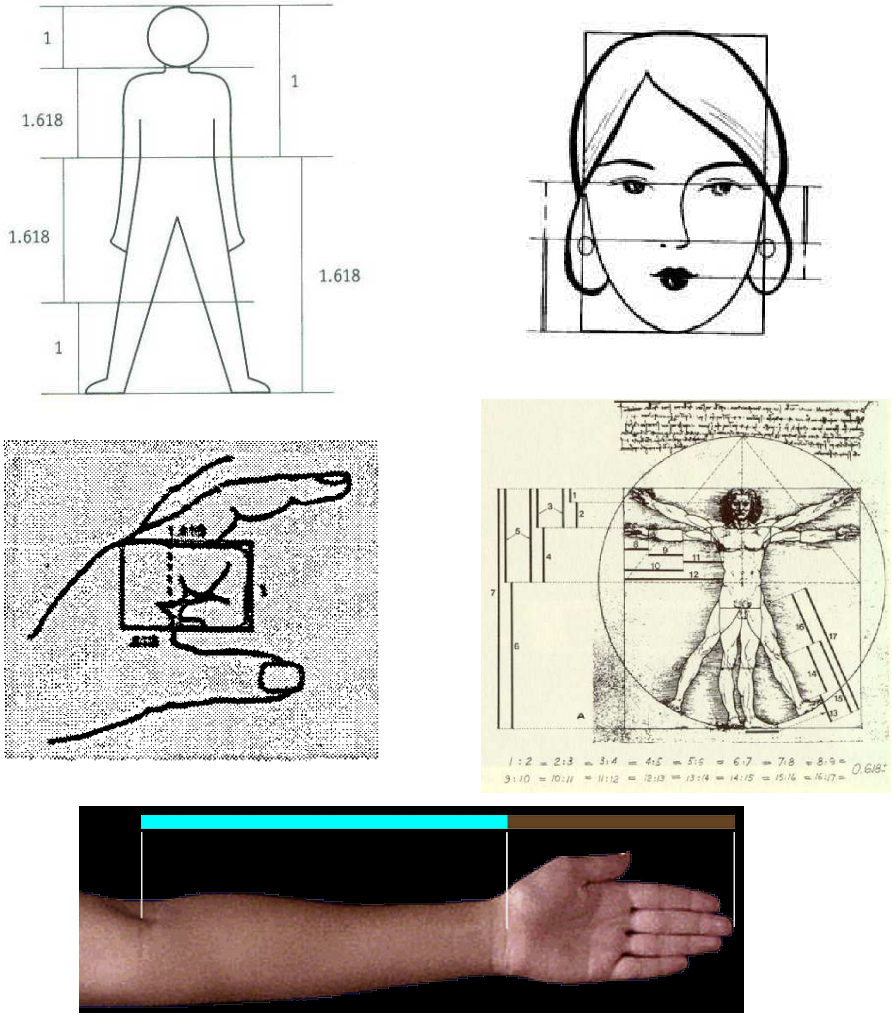
현대 사회의 필수품인 신용카드의 가로, 세로의 길이를 재어보자. 가로의 길이는 8.6cm이고, 세로의 길이는 5.35cm으로, $\frac{\text{가로}}{\text{세로}} = \frac{8.6}{5.35} \fallingdotseq 1.607$로 황금비에 가깝다.

또한, 우리가 거의 매일 먹고 있는 달걀을 잘 살펴보아도 황금비를 찾을 수 있다. 달걀은 타원형의 모양인데, 이 타원형의 장축과 단축의 길이비도 황금비를 이룬다.



<그림5> 황금비를 찾아볼 수 있는 사물

그리고, 우리의 신체에서도 황금비를 찾아볼 수 있다고 한다. 아름답게 보이는 신체를 살펴보면 다음과 같은 특징이 있다고 한다. 배꼽은 몸을 황금비로 나누고, 어깨는 상반신을 황금비로 나누며, 무릎은 하반신을 황금비로 나눈다. 머리는 황금 직사각형 안에 꼭 맞게 들어가고, 얼굴과 손도 황금비로 나누어진다. 검지손가락과 엄지손가락으로 사각형을 만들면 황금 직사각형이 된다. 또한, 사람이 팔을 벌렸을 때 가로, 세로의 비도 황금비를 이루며, 손끝에서 팔목까지의 길이와 팔목에서 팔꿈치까지의 길이비도 황금비를 이룬다고 한다. 이것을 그림으로 살펴보면 아래와 같다.



<그림6> 인체에서 찾아볼 수 있는 황금비

미국의 성형의사인 스테판 마커트 박사는 얼굴의 모든 부분에서 황금 비율을 측정할 수 있는 얼굴이 바로 미인의 얼굴이라 말하고, 이 황금비율을 적용하여 황금비율 마스크를 만들었다. 이 마스크는 인종, 시대에 관계없이 모든 미인들의 얼굴에 완벽하게 들어맞는데, 우리나라의 김태희가 이 마스크에 완벽하게 맞는 얼굴이라고 한다. [5]

많은 사람들이 공통적으로 아름답다고 느끼는 곳곳에 황금비의 수학적 규칙이 숨어서 균형과 조화미를 발산하고 있다는 것을 알 수 있다.

C. 피보나치 수열과 황금비 사이의 관계

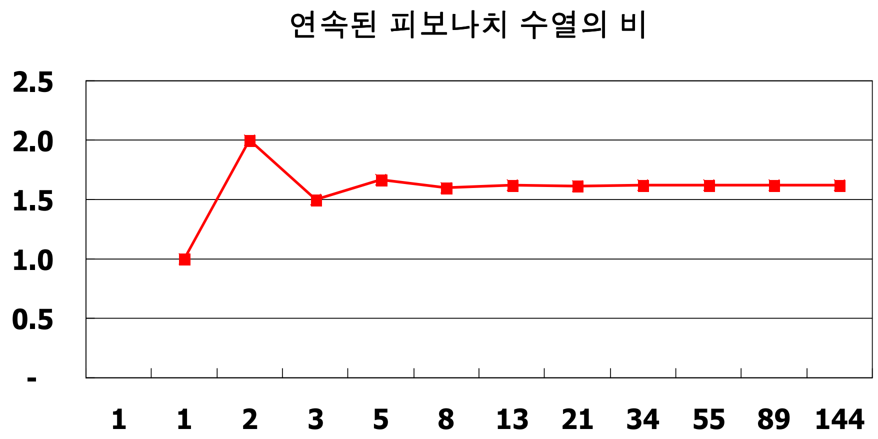
피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …에서 연속한 항들의 비를 살펴보면 어떻게 될까?

$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$ $\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$ $\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1.5$ $\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} \fallingdotseq 1.667$

$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1.6$ $\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} \fallingdotseq 1.625$ $\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \fallingdotseq 1.615$ $\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} \fallingdotseq 1.619$

$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \fallingdotseq 1.618$ $\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} \fallingdotseq 1.618$ …

n이 점점 커지면서 연속적인 피보나치 수들의 비 $\frac{F_n}{F_{n-1}}$은 1.618에 접근한다는 것을 알 수 있다. 이것을 그래프로 그려보면 보다 쉽게 알 수 있다. [5]



<그림7> 피보나치 수와 황금비

앞에서 언급한 Binet의 공식에 의하여 $\frac{F_n}{F_{n-1}}$의 극한을 구해보면 다음과 같다.

Binet의 공식에서 $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ $\left(\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 이다.

이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}$$

$$= \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.618$$

따라서, 이웃하는 피보나치 수들의 비는 n이 점점 커지면 황금비에 접근한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.618$이다.

V. 자연 현상 속의 피보나치 수열

A. 꿀벌의 가계도

인간의 성별은 부모의 성염색체가 결정한다. 아버지와 어머니로부터 성염색체를 하나씩 물려받아 XY의 조합을 가지면 남자, XX의 조합을 가지면 여자가 된다. 철저하게 우연에 의해 성별이 정해지는 셈이다.

그러나 꿀벌사회에서는 여왕벌이 자손의 성 선택권을 갖는다고 한다. 여왕벌은 생애 내내 짝짓기비행을 하며 수컷의 정자를 몸에 저장해둔 뒤 알을 낳을 때마다 조금씩 사용한다. 낳은 알에 정자를 주입해 수정시키면 암벌이 되고, 정자를 주입하지 않아 수정되지 않은 알에서는 수펄이 태어난다. 그래서 꿀벌은 다음과 같은 독특한 면이 있다.

① 꿀벌 모두가 두 명의 부모를 갖는 것은 아니다.
② 벌떼 중에는 여왕이라 불리는 특별한 암컷이 있다.
③ 여왕벌이 아닌 많은 암컷이 있지만 그들은 알을 낳지 못한다.
④ 일을 하지 않는 수펄들이 있다. 수펄들은 여왕의 수정되지 않은 알에서 태어나기 때문에 어미만 있고 아비는 없다.
⑤ 암펄은 여왕벌이 수펄과 짝지어 태어난다. 모든 암펄은 두 명의 부모를 갖게 되며 대부분 일벌이 된다. 이 중 몇몇은 여왕벌로 자라게 되는데 이들은 집을 떠나 새 보금자리를 지을 장소를 찾아 새로운 벌떼를 이루게 된다.
그러므로 암펄은 어미, 아비 두 명의 부모를 갖지만, 수펄은 단지 어미만을 갖는다.

암펄은 두 부모를 갖는다. 수펄은 한 부모를 갖는다.

<그림8> 꿀벌의 가계도 기본 원리

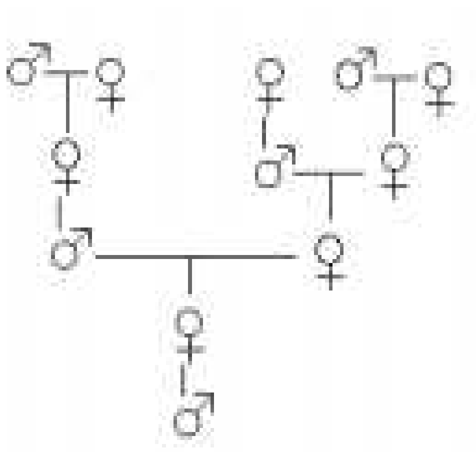
일하지 않는 수펄의 가계도를 살펴보자.

① 어미만을 갖는다.

② 2명의 조부모를 갖는다. 왜냐하면 그의 어미는 2명의 부모, 암펄과 수펄 부모를 갖기 때문이다.

③ 3명의 증조부모를 갖는다. 왜냐하면 그의 할머니가 2명의 부모를 갖고 그의 할아버지는 어미만 갖기 때문이다.

④ 그는 얼마나 많은 고조부모를 갖겠는가? [9]



<그림9> 꿀벌 가계도

위의 수펄의 가계도를 참고로 하여 꿀벌의 조상의 수에 대한 표를 만들어 보면 다음과 같이 피보나치 수를 볼 수 있다.

<표2> 꿀벌의 조상의 수

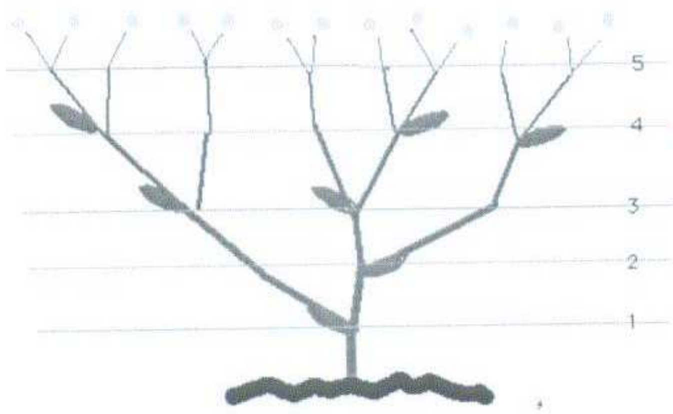
구분	부모	조부모	증조부모	고조부모	5대 조부모	6대 조부모	7대 조부모
수펄	1	2	3	5	8	13	21
암펄	2	3	5	8	13	21	34

꿀벌의 가계도는 피보나치 수열의 개념이 딱 들어맞는 자연 속의 정확한 예이다. 이러한 내용은 수열을 소개하는 도입 단계에 언급함으로써, 학습자에게 자연의 신비함을 제공하고, 수학과 자연 현상이 별개가 아님을 느끼게 해 줄 것이다. 따라서, 학습자들이 자연에 더 관심을 가질 것이고 수학의 심미성을 스스로 깨달아, 수학학습에 지속적인 관심을 가질 것으로 생각된다.

B. 식물의 가지와 잎의 배열

1. 식물의 가지

피보나치 수는 식물의 가지가 자라는 방법에서도 찾을 수 있다. 아래 그림에서는 식물들이 가지를 뻗으며 자랄 때 가지의 수가 피보나치 수를 유지하는 것을 알 수 있다.



<그림10> 식물의 가지

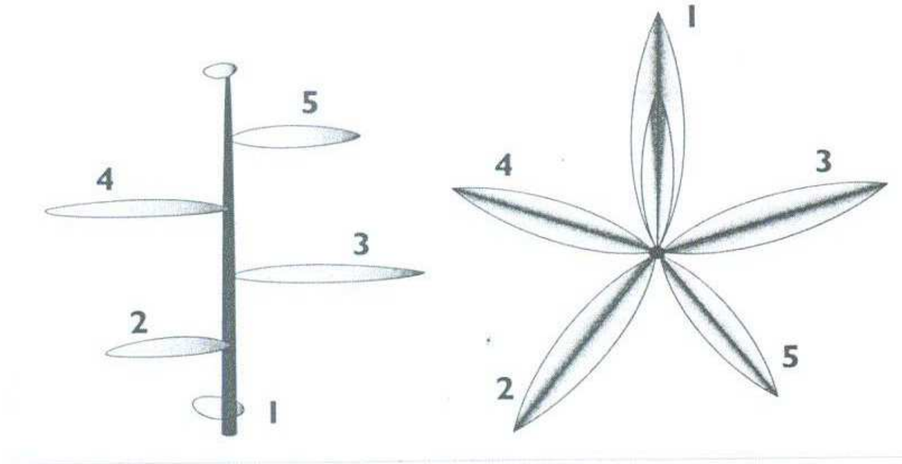
처음에 한 가지가 두 개로 나뉘어진다. 이들 두 가지 중 새로 난 가지가 다시 두 개로 나뉘어지는 동안 다른 것은 나뉘어지지 않고 있다. 하나가 가지를 나누면 다른 가지는 쉬는 현상은 각 가지가 생길 때마다 반복된다. 이 때 수평 방향에 있는 가지의 수는 피보나치 수를 이루는데, 이러한 과정은 제한된 환경적인 영향을 필요로 하는 것이어서 완벽한 실례를 찾기는 힘들다. 그러나 물속 말류들이나 나무의 뿌리 구조 속에서는 위 그림과 같은 '피보나치의 가지 성장 패턴'이 확실히 나타난다고 한다. [9]

2. 잎의 배열

많은 식물들의 줄기 주위에 있는 잎들의 배치에서도 피보나치 수를 찾을 수 있다. 식물을 위에서 내려다보면 위의 잎이 밑의 잎을 가리지 않도록 배열되어 있다. 이것은 각각의 잎들이 다 햇빛을 잘 받고, 가장 많은 수분을 받아내어, 잎과 줄기를 따라 뿌리로 보내도록 하기 위한 배치임을 짐작할 수 있다.

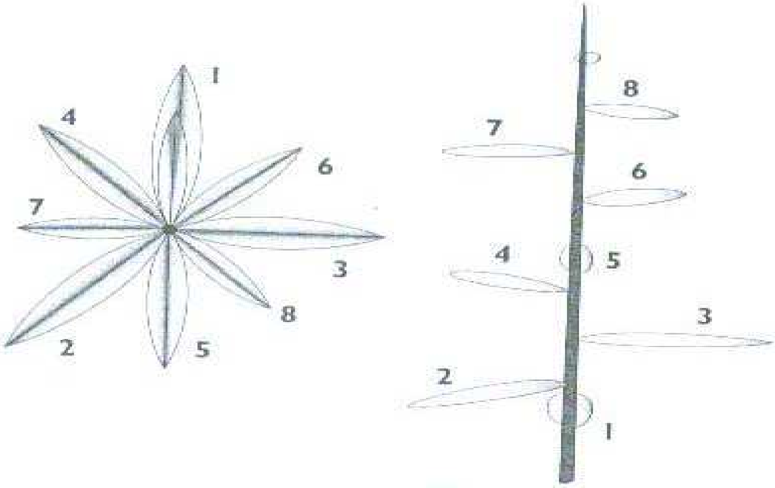
줄기를 회전하는 회전수와 잎에서 잎으로 갈 때마다 처음 출발한 잎의 바로 위의 잎을 만날 때까지 만나게 되는 잎들을 세는 데서 피보나치 수열을 발견할 수 있다. 반시계 방향으로의 회전수, 시계 방향으로의 회전수, 회전하며 만나게 되는 잎의 수는 연속하는 세 피보나치 수이다.

예를 들면, 아래 그림과 같이 식물에서 줄기의 밑 근처에 있는 하나의 잎에 초점을 두고, 그것과 같은 방향으로 뻗어 나온 잎까지 도달하려면 시계 방향으로 3바퀴 회전해야 하고 중도에 5개의 잎들을 지난다. 반시계 방향으로는 2바퀴만 회전하면 된다. 이 때, 2, 3, 5는 물론 피보나치 수들이다.



<그림11> 잎의 배열

아래의 그림을 보면, 8개의 잎을 지나며 시계방향으로 5바퀴 회전하고, 반시계방향으로 3바퀴 회전한다. 역시 3, 5, 8도 피보나치 수들이다.



<그림12> 잎의 배열

<그림9>에 대해서는 잎당 시계 방향으로 $\frac{3}{5}$바퀴라고 하면, <그림10>의 식물은 잎당 $\frac{5}{8}$바퀴가 된다. 잎이 생겨나는 잎차례 비율이 피보나치의 수로 나타나는 식물의 예를 들면 다음과 같다. [11]

<표3> 잎차례 비율과 피보나치의 수

비율	식물들
$\frac{1}{2}$	벼, 옥수수, 고사리, 대나무, 느릅나무, 단풍나무, 담쟁이덩굴
$\frac{2}{3}$	너도밤나무, 개암나무, 검은 딸기
$\frac{3}{5}$	참나무, 벚나무, 사과나무, 자두나무, 겨자나무, 살구나무, 포플러
$\frac{5}{8}$	장미, 배나무, 가지가 늘어지는 수양버들, 감탕나무
$\frac{8}{13}$	갯버들, 아몬드, 쇠뜨기

모든 식물의 90%에서 피보나치 수와 관련된 이런 형태의 잎의 배치를 보인다고 한다.

C. 꽃잎의 수와 꽃씨의 배열

1. 꽃잎의 수

많은 꽃들은 그들의 싹이나 씨 뿐만 아니라, 꽃잎의 수에서도 피보나치 수를 보여주고 있다. 솔잎은 종류에 따라 2개, 3개 또는 5개의 송이로 자라는 경향이 있다. 백합과 아이리스, 붓꽃은 3개의 꽃잎이 있고, 미나리아재비는 5개의 꽃잎을 갖는다. 코스모스는 8개의 꽃잎을, 금잔화는 13개의 꽃잎을, 애스터는 21장의 꽃잎을 갖는다. 데이지는 13개, 21개 또는 34개, 55개, 89개의 꽃잎을 가지고 있는 것을 볼 수 있다. 꽃잎이 피보나치 수를 갖는 이유는 꽃이 활짝 피기 전까지 꽃잎이 봉오리를 이루어 내부의 암술과 수술을 보호하는데, 이 때 꽃잎들이 가장 효율적인 모양으로 암술과 수술을 감싸기 위해서라고 한다. 직접 들에 나가 여러 가지 꽃들의 꽃잎을 세어 보면, 어떤 종들은 꽃잎의 수가 매우 정확하지만, 그렇지 않은 것들도 많다. 그러나 꽃잎의 수를 세어 평균적으로 나타내어 보면 다음과 같은 피보나치 수가 나타나고 있음을 알 수 있다.

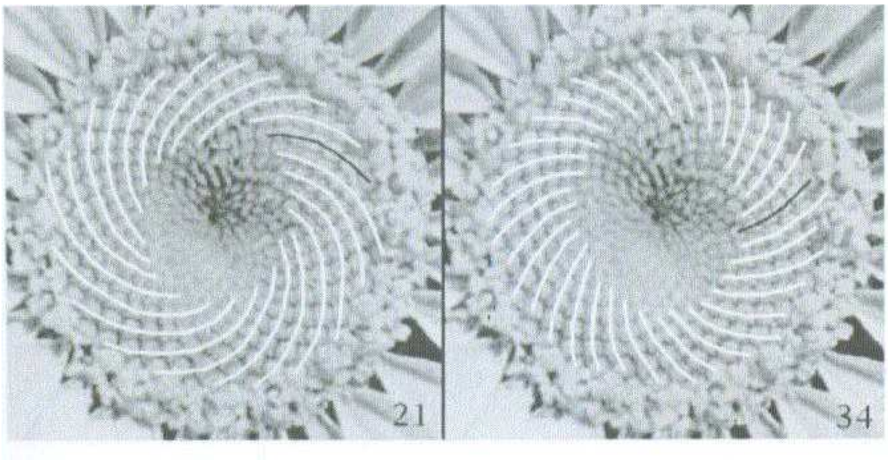
<표4> 꽃잎의 수와 피보나치 수

꽃잎의 수	식물들
2	마법의 가지과의 식물
3	백합, 아이리스, 붓꽃
5	미나리아재비, 도로가의 상추, 야생의 장미, 참매발톱꽃
8	코스모스, 참제비고깔, 뿌리가 붉은 양귀비과 식물
13	금잔화, 금불초, 시네라리아, 이중 참제비고깔
21	애스터, 검은 눈의 수산, 치커리
34	야생 데이지, 질경이, 제충국
55	아프리카 데이지, 갯개미취
89	갯개미취

2. 꽃씨의 배열

꽃술의 씨 배열에서도 피보나치 수열을 볼 수 있다. 해바라기는 독특한 방법으로 피보나치 수를 보여준다. 성숙한 해바라기 꽃의 중앙을 보면, 씨들의 다른 두 나선형을 분명히 볼 수 있다.

아래 그림은 일상적으로 볼 수 있는 해바라기 씨이다. 해바라기 꽃씨를 확대한 그림으로 중심은 검은 점으로 표시되어 있다. 하나는 시계 방향으로 21개의 나선형, 다른 하나는 반시계 방향으로 34개의 나선형을 형성하고 있다. 커다란 해바라기 꽃들은 21개와 34개의 나선형을 가지고 있다고 보고되어 있다. 물론 이런 모든 수들은 인접한 피보나치 수들이다. 가끔씩 예외가 나타나기도 하지만, 조사 결과들은 해바라기의 나선형의 수가 압도적으로 피보나치 수들로 나타나고 있다. 때로는 피보나치 수의 2배로 나타나기도 한다. 예를 들면, 34, 55의 2배인 68, 110이 되는 경우이다.

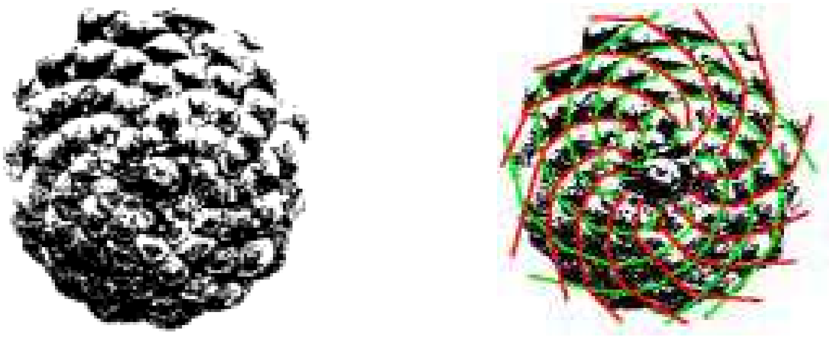


<그림13> 해바라기 꽃씨

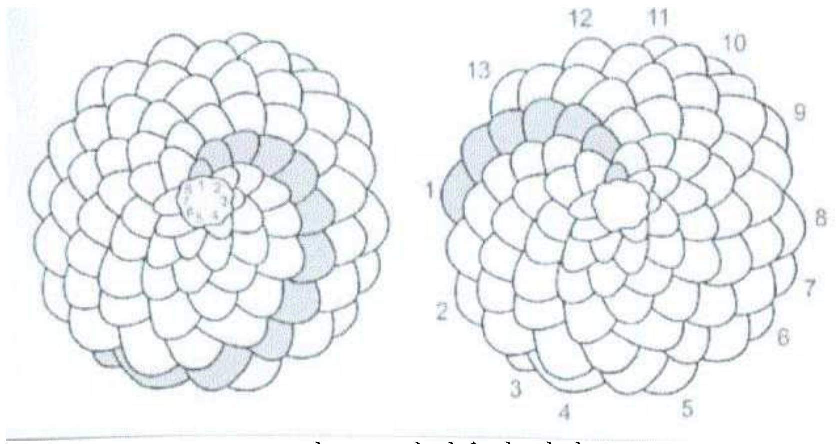
자연에 존재하는 실제의 씨앗에서도 식물의 종류에 따라 다르지만, 나선의 수가 34와 55, 55와 89, 89와 144 등의 연속하는 피보나치 수가 쌍의 형태로 나타난다. 그리고, 씨앗들은 모두 같은 크기이며, 중심에 더 밀집해 있거나 가장자리에 드물게 모이거나 하지 않는다. 그 이유는 씨앗들이 크기에 상관없이 균일하게 쌓이는 데 최적의 형태이기 때문인 것으로 보인다. [11]

D. 솔방울

솔방울은 피보나치 나선형을 분명히 보여준다. 아래 그림은 솔방울의 나선을 강조해서 나타낸 것이다. 시계 반대 방향의 나선과 시계 방향의 나선은 각각 같은 방향으로의 나선들을 나타내고 있다. 솔방울의 특성을 나타내는 나선형들은 피보나치 비율의 보다 명백한 예가 되곤 한다.



<그림14> 솔방울과 솔방울의 나선



<그림15> 솔방울의 나선

솔방울의 표면을 덮고 있는 잎들은 서로 압축되어 개조된 잎들로 생각할 수 있다. 그것들은 줄기에 둘러 있는 잎들처럼 솔방울을 나선형으로 둘러싸고 있다. 위 그림에서 보는 것처럼 두 종류의 나선형을 볼 수 있다. 왼쪽 솔방울은 시계 방향으로 8개의 나

선이 왼쪽 아래에서 오른쪽 위 대각선 방향으로 천천히 가고, 오른쪽 솔방울은 반시계 방향으로 13개의 나선이 오른쪽 아래에서 왼쪽 위 대각선 방향으로 보다 급하게 가로질러 가고 있다.

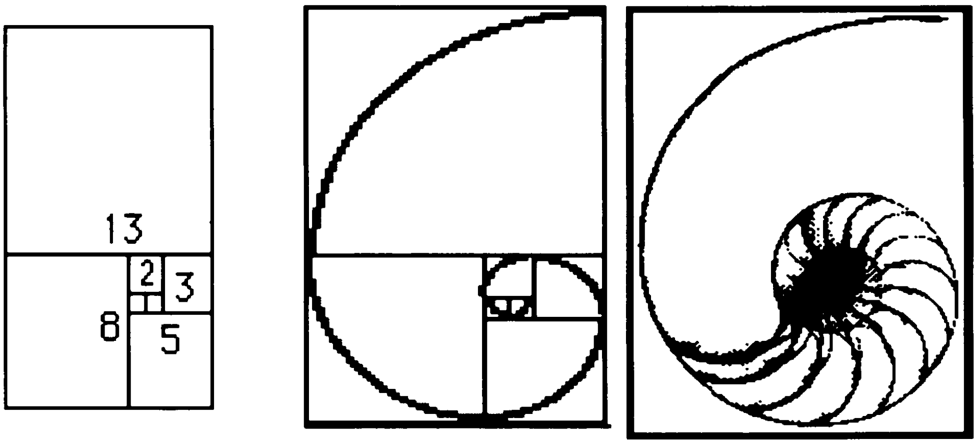
하나의 솔방울에서, 완급에 따른 나선형의 숫자는 항상 피보나치 수열에 나타난 수들과 거의 근접해 있다. 어떤 솔방울들은 3개의 완만한 나선형과 5개의 급한 나선형을 가지고 있다. 다른 것은 5개의 완만한 나선형과 8개의 급한 나선형을 가지고 있거나, 또는 8개의 완만한 나선형과 13개의 급한 나선형을 가진 것들도 있다. 이처럼 세 가지의 서로 다른 나선형을 가진 솔방울들은 모두 피보나치 수와 밀접한 관계를 가지고 있음을 보여주고 있다. 많은 연구 결과 솔방울들의 나선형 수에서 99% 정도는 피보나치 수로 나타난다는 사실이 밝혀지고 있다. [10]

피보나치 수가 다른 수보다 식물에서 자주 나타난다는 것은 우연이 아니다. 식물은 물과 햇빛, 공기를 많이 받기 위하여 어느 정도 순환적인 나선형으로 자라려는 경향이 있다. 식물도 하나의 생명체이기 때문에 생존하기 위한 최적의 상태를 유지하는 것이고, 이것이 어느 정도의 규칙을 가지게 된 것 같다. 이러한 현상을 수학적으로 설명하기는 힘들지만, 피보나치가 발견한 단순한 숫자배열에서 찾아볼 수 있다는 것은 놀랍지 않을 수 없다.

꽃잎, 잎, 솔방울과 수학 사이의 흥미로운 연관성은 계속적인 호기심의 대상이 될 수 있다. 또한, 수학적인 눈은 다른 사람들이 간과한 것을 찾아내는 능력을 키우는데 도움을 준다.

E. 조개의 나선형

피보나치 수 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …가 나타나는 또 다른 그림을 만들어 볼 수 있다. 한 변의 길이가 1인 두 정사각형을 옆으로 나란히 붙인다. 이 위에 한 변의 길이가 2(=1+1)인 정사각형을 그린다. 이제 단위 정사각형과 한 변의 길이가 2인 정사각형 모두에 접하는 새로운 정사각형을 그리자. 그러면 한 변의 길이가 3인 정사각형을 얻는다. 다음에는 마지막의 두 정사각형(한 변의 길이가 각각 2와 3이었던 정사각형)에 모두 접하도록 또 다른 정사각형을 그린다. 이것은 한 변의 길이가 5인 정사각형이 된다. 이런 방법으로 계속해서 정사각형을 그려 나갈 수 있다. 새롭게 얻어지는 정사각형의 한 변의 길이는 가장 마지막 두 정사각형의 변의 길이의 합이 된다. 이 직사각형들의 집합은 두 변의 길이가 연속하는 피보나치 수가 되며, 한 변의 길이가 피보나치 수인 정사각형들로 이루어져 있다. 이 직사각형들의 집합을 '피보나치 직사각형'이라고 부른다. [9]



<그림16> 황금직사각형, 등각나선, 앵무조개

위의 그림에서 볼 수 있듯이, 각각의 정사각형 안에 사분원을 그려 넣어서 나선형을 그릴 수 있다. 이것이 피보나치 나선(Fibonacci Spiral)이다. 피보나치 나선은 나선 위 임의의 점에서 그은 접선과 그 접점에서 중심에 이르는 선분이 이루는 각각의 크기가 모두 같아서 등각나선이라고도 부른다. 등각나선은 매우 독특한 특성을 가지고 있는

데, 각 사분원과 그 반지름이 일정한 비율 1.618을 유지하며 무한대로 팽창한다는 것이다. 이와 유사한 곡선은 자연에서도 존재한다. 등각나선의 가장 적당한 예는 앵무조개이다. 앵무조개는 남태평양과 인도양 심해에서 발견되는 연체동물로, 긴 촉수를 이용해 게를 잡아먹는다고 한다. 성장하는 앵무조개는 한정된 껍데기 속에 머무를 수 없기 때문에, 자신의 몸이 들어갈 더 큰 공간이 필요하다. 그래서, 원래의 집에 부속 건물을 지어 붙이면서 성장한다. 앵무조개 나선형 곡선은 1회전할 때마다 1.618배만큼씩 중심에서 멀어지게 된다. [6]

등각 나선들은 동물의 세계에서도 찾을 수 있다. 예를 들면 양의 뿔, 거미줄, 새의 부리, 고양이와 카나리아의 발톱, 상아, 박테리아의 성장 도표, 빛에 가까이 가는 곤충의 궤적 등이다. 동물 세계에 있는 모든 등각 나선이 피보나치 수를 따라서 만들어지는 것은 아니지만, 대부분은 피보나치 수로 만들어진다.

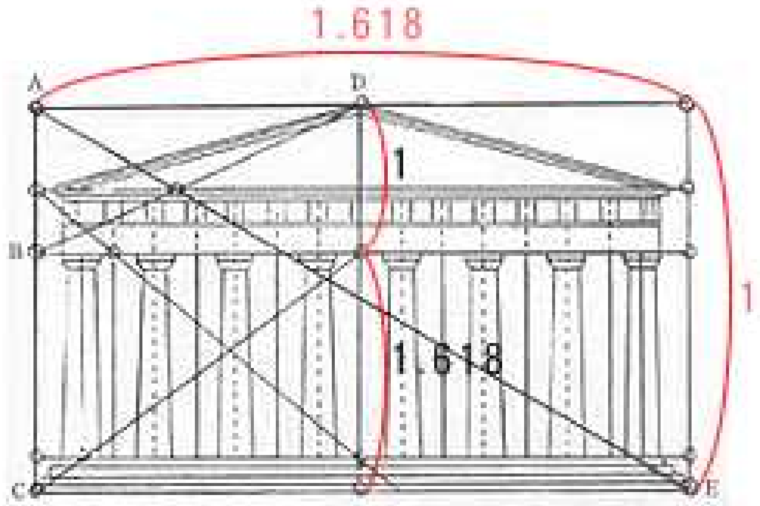
식물이나 동물들의 성장에서 볼 수 있었던 피보나치 수의 발견은 면밀한 관찰로 얻어낸 연구결과이다. 학생들에게 이러한 내용을 소개할 때, 단순히 자연의 신비로움만을 보여주기보다는 자세하고 깊게 볼 수 있는 수학적 안목이 중요하다는 것을 강조해야 할 것이다.

Ⅵ. 피보나치 수열의 응용

A. 건축과 미술에서의 응용

황금분할은 이름 그대로 가장 아름다운 선분의 분할방법으로서 건축, 회화, 조각 등에서 이용되어 왔다. 예로는 액자를 비롯해서 책, 심지어 담배나 성냥갑마저도 대부분 가로, 세로의 길이가 황금분할의 비와 같게 만들어지고 있다. 그러나 '황금분할' 이라든지 '황금비'라는 이름은 처음부터 그렇게 불려진 것은 아니었다. '황금비'라고 부르게 된 것은 지난 19세기 때 부터였다.

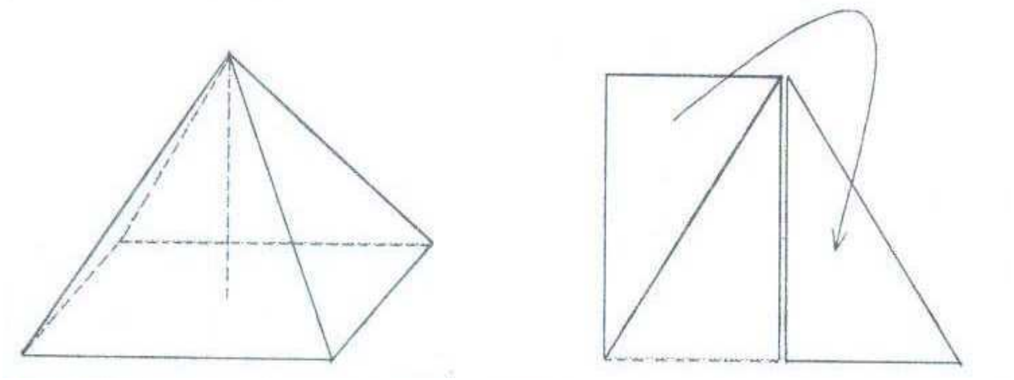
건축에서 황금 사각형을 사용했음을 나타내는 증거는 역사를 통해 세계 여러 곳에서 발견된다. B.C. 400년경에 건조된 아테네의 파르테논 신전에서 외부 규격(치수)은 정확히 황금 직사각형을 나타내고 있는데, 파르테논 신전의 다른 여러 구조 속에서 황금비가 잘 나타나고 있다.



<그림17> 파르테논 신전의 황금 직사각형

황금비를 '피(phi)'라고 부르는 것은 그리스의 가장 유명한 조각가였던 피디아스(Phidias) 때문인데, 이 황금비는 아테네 파르테논 신전의 기둥들의 위부분에 있는 일련의 조각품을 포함하여 그의 여러 작품들 속에서 풍부하게 나타나고 있다.

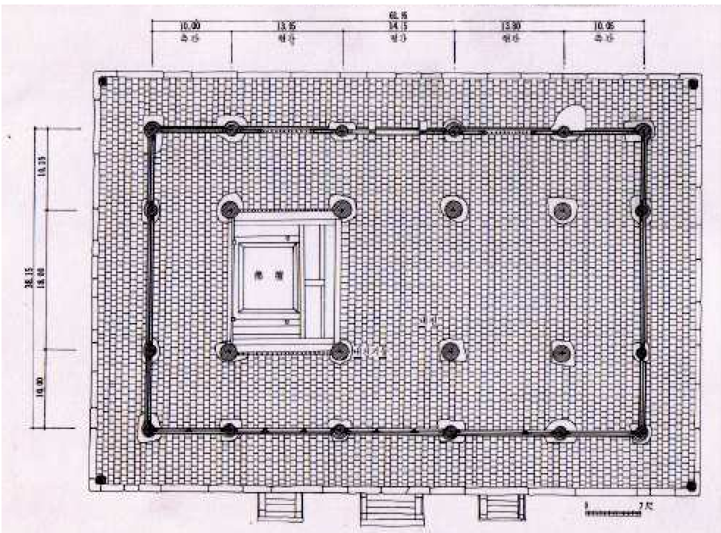
피라미드 중에서 가장 크고 완전한 것으로는 B.C. 2600년경에 세워진 이집트의 기제(Gizeh) 마을에 있는 거대한 피라미드이다. 이 피라미드의 진가는 장대한 규모에 있는 것이 아니라, 거대한 규모의 건축물임에도 불구하고, 가로-세로-높이의 비율이 무척 안정적인 구도로 되어있다는 점에 있다. 이 피라미드에서 높이와 정사각형 밑면의 한 변에 대한 비는 5:8이다. 더욱이 피라미드의 옆면 삼각형은 황금 사각형을 대각선을 따라 자른 후, 다시 이 사각형의 긴 변을 겹쳐 결합시킨 삼각형이다. 또 평지에서 피라미드를 어느 쪽에서 보더라도 오직 3개의 선만 보일 뿐이며, 피라미드보다 높은 위치에서 피라미드를 보게 되면 모두 5개의 선이 보이게 된다. 또, 하늘 높은 데서 피라미드를 내려다보면 모두 8개의 선이 나타나게 된다. 여기에서도 피보나치 수들이 살아 숨쉬고 있는 것이다.



<그림18> 기제 마을의 피라미드와 옆면의 삼각형

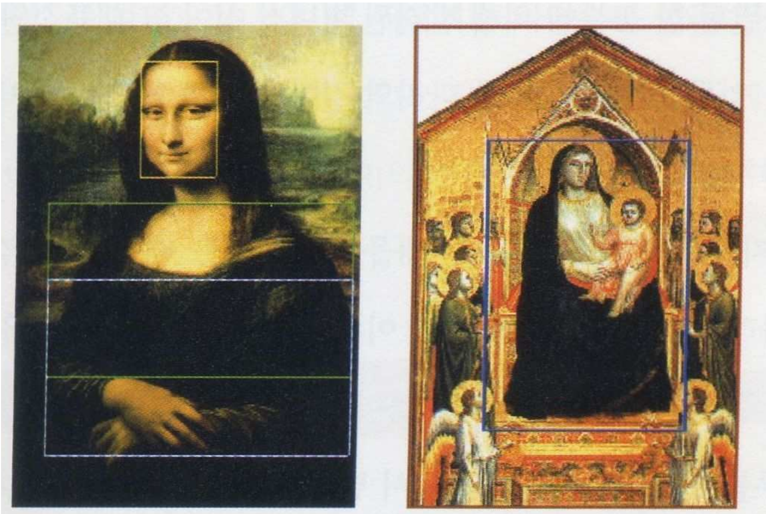
우리나라에는 '배흘림 기둥[3]'으로 된 전통 건축 양식이 있는데, 그리스 신전에 쓰인 엔터시스 양식의 기둥과 같다. '배흘림 기둥'으로 유명한 대표적인 건물은 고려 중엽에 세워진 부석사 무량수전인데, 평면에는 1:1.618의 황금비가 적용되어 아름다움을 자아낸다. 또, 무위사의 극락전, 화엄사의 대웅전 등에서도 이런 기둥을 볼 수 있다. 무량수전은 겉으로 보면 정면 5칸, 측면 3칸으로 지어져 있는데, 균형이 잘 잡힌 3:5의 비율임을 알 수 있다. 건물의 실제 비율은 1:1.618의 황금비이다. [11]

3) 건출물 기둥의 중간이 굵게 되고 위, 아래로 가면서 점차 가늘게 된 주형으로, 구조상의 안정과 착시현상을 위한 것임.



<그림19> 무량수전의 평면구도

레오나르도 다빈치는 황금비를 ‘신의 비’라 하여 그 비의 아름다움을 찬양하였고, 자신의 작품들에 철저하게 이 황금 비율을 이용했다. 그의 작품 ‘모나리자’를 살펴보자. 얼굴 크기에 맞게 사각형을 그려 보면, 이 사각형은 황금 사각형이다. 또한, 두 눈동자를 잇는 선은 얼굴의 위, 아래를 1:1.618로 황금 분할하고 있다. 이 외에도 단아한 자태에도 2개의 황금 직사각형이 숨어 있다.

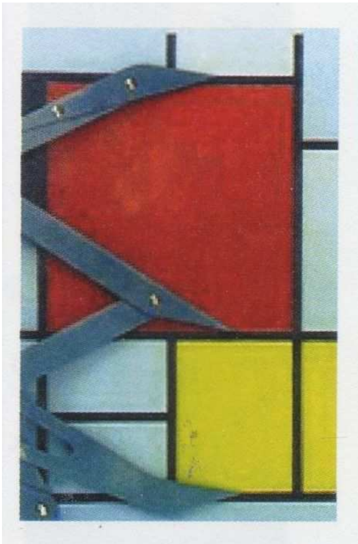


〈모나리자〉　〈마돈나Ognissanti Madonna〉

<그림20> 황금사각형이 들어있는 예술작품

화가 조토 또한 황금비를 바탕으로 '마돈나'를 그렸다. 가운데 부분에 마리아가 아기를 안고 있는 모습이 황금 직사각형 안에 들어가도록 하였고, 전체 그림 또한 가로의 길이와 세로의 길이가 황금비를 이루고 있다. 르네상스 시대의 회화와 건축은 대부분 황금비의 영향을 받았다고 할 수 있다.

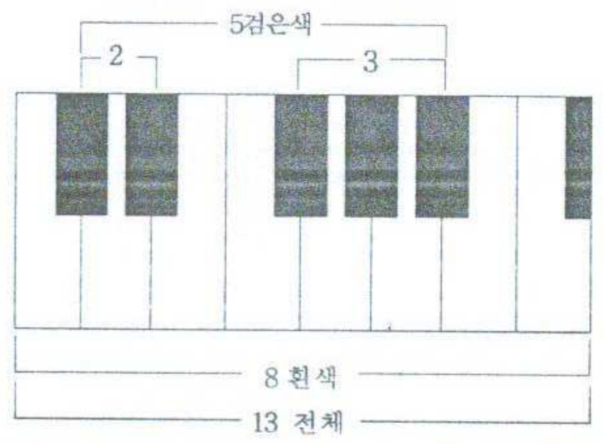
마지막으로 몬드리안의 작품에서도 황금비를 발견할 수 있다. 그는 화면분할에서 의도적으로 황금비를 적용하였는데, 아래 그림에서 빨간색 정사각형 아래쪽에 있는 큰 직사각형 또한 황금 직사각형이고, 그 안에 있는 세 개의 직사각형 또한 황금 직사각형이다. [5]



<그림21> 몬드리안의 작품에서 화면 분할

B. 음악에서의 응용

피보나치 수열과 음악 사이의 명백한 연관 관계는 피아노의 건반에서 가장 잘 나타난다. 피아노 건반에서 한 옥타브는 8개의 흰 키와 5개의 검은 키로 이루어져 있다. 검은 키는 2개 또는 3개의 묶음으로 이루어져 있다. 한 옥타브에는 모두 13개의 키들이 있는데, 이것을 종합해 보면 피보나치 수가 나타남을 알 수 있다.

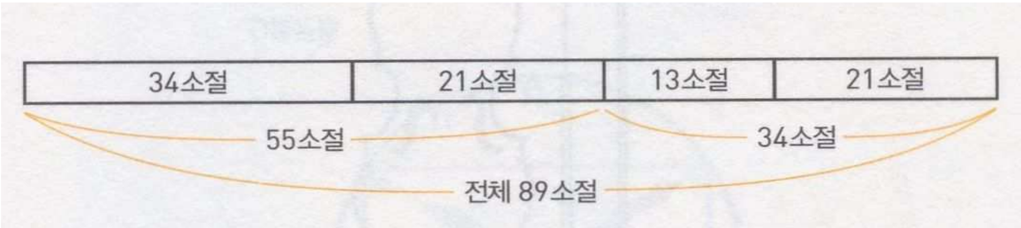


<그림22> 피아노의 건반에 나타나는 피보나치 수

13개의 키는 반음계(chromatic scale)를 이루는데, 반음계는 서양 음악에서 가장 완전한 음계로 알려져 있다. 최초의 음계는 5개로 이루어진 5음계(pentatonic scale)였고, 그 이후에는 흔히 옥타브로 더 잘 알려진 8개의 키의 온음계(diatonic scale)가 발달하였다. 5음계는 초기 유럽 음악에 쓰였었고, 현재는 미국에서 아동을 위한 코다이식(kodaly method) 음악 교육[4)]의 기초가 되고 있다. 피아노 건반에서 연이어지는 어떠한 5개의 검은 키들도 5음계를 이룰 수 있다. 미국 동요 중 여러 곡은 그 건반들만을 이용해서 연주할 수 있다. 한편, 우리의 고유음계인 '중(솔), 임(라), 무(도), 황(레), 태(미)'를 사용하는 대다수의 민요가 여기에 해당된다. 여러 다른 음계들은 존재했지만, 5음계(5), 온음계(8), 그리고 반음계(13)는 음악 발전 과정의 대부분을 차지하고 있다. [10]

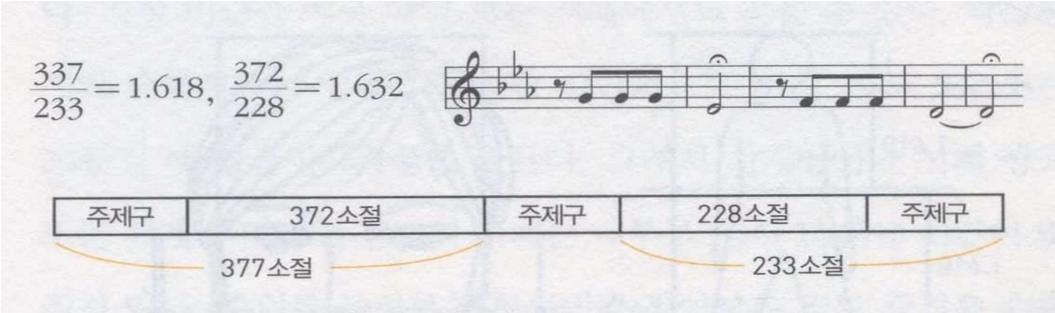
4) 민요를 강조하고 이를 이용한 합창교육으로 내청을 개발하여 음악을 읽고, 쓰고, 이해할 수 있도록 하여, 음악적 능력향상과 함께 지적, 정서적 발달을 도모하기 위한 음악 교육

특히 피보나치 수는 음악 작곡에서 다양한 방법으로 적용되었다. 그 중에서도 작곡가들이 가장 중요하게 여긴 것은 악절을 피보나치 비로 나누는 것이었다. 화가들이 수평선, 나무 등의 위치를 정할 때 빈 화판에 황금비를 기본으로 영역을 나눈 것처럼, 작곡가들도 테마, 무드, 짜임 등의 시작과 끝을 정할 때 악절을 황금비로 나눈다.
이 기법은 팔레스트리나, 바흐, 베토벤, 버르토크의 작품을 포함해서 초기 교회 음악에서 현대의 작곡법에까지 나타나고 있다. 버르토크는 '현악기, 타악기, 첼로를 위한 음악'에서 피보나치 수열을 사용하였다. 그는 이 곡의 첫 악장을 모두 89소절로 구성하였으며, 55번째 소절에서 클라이맥스를 이루도록 하였다. 더욱이, 55소절 앞부분은 34소절과 21소절 두 부분으로 나누었고, 뒷부분의 34소절은 다시 21소절과 13소절로 나누어 피보나치 수열을 치밀하게 사용하였다.



<그림23> 작곡에 적용된 피보나치 수

베토벤의 제5번 교향곡 '운명'의 1악장에서도 황금 분할을 찾아볼 수 있다. '빠바바밤~'의 주제구는 3번 나오도록 되어 있다. 시작 부분과 마지막 부분에 첫 번째, 세 번째 주제구가 배치되어 있고, 두 번째 주제구는 황금 분할 지점에 배치되어 있다. 두 번째 주제구를 중심으로 그 앞에는 377소절이, 그 뒤에는 233소절로 구성되어, 두 번째 주제구가 황금 분할점임을 알 수 있다. [3]



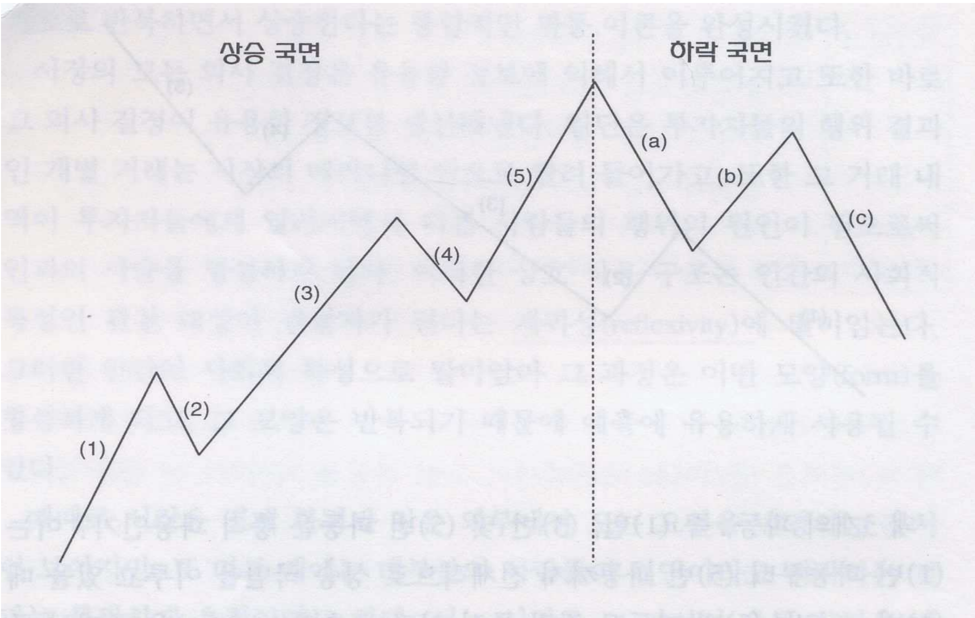
<그림24> 황금분할을 볼 수 있는 베토벤의 '운명'

이처럼 미술이나 음악과 같은 예술 분야에서도 피보나치 수나 황금비를 이용한 작품들을 많이 발견할 수 있다. 무수한 예술가들이 피보나치 수와 황금비를 의식적으로 이용했는지 아닌지는 알 수 없다. 하지만, 중요한 것은 인류가 그 속에서 신비로움과 안정감을 찾았으며, 그것을 이용해 아름다움을 창조했다는 것이다.

C. 주식시장에서의 응용

피보나치 수열의 예는 주식시장에서도 찾을 수 있다. 1930년 엘리어트는 미국 주식 시장의 변화를 주의 깊게 살폈다. 당시 미국의 다우존스는 중요 기업 30개의 주식 가격을 이용하여 평가를 내리고 있었는데, 이 때 그는 주식시장의 변화는 자연계에서 나타나는 것과 같이 조화로운 변화가 있다는 것을 알아냈다. 그 후, 1939년 엘리어트는 자신의 이론을 체계화하여 소위 '엘리어트 파동(Elliot Wave) 이론'을 발표하였다.

그의 이론에 따르면, 주가의 움직임은 아래 그림과 같이 8개의 파동으로 완전한 주기를 형성하면서 전개된다는 것이다.

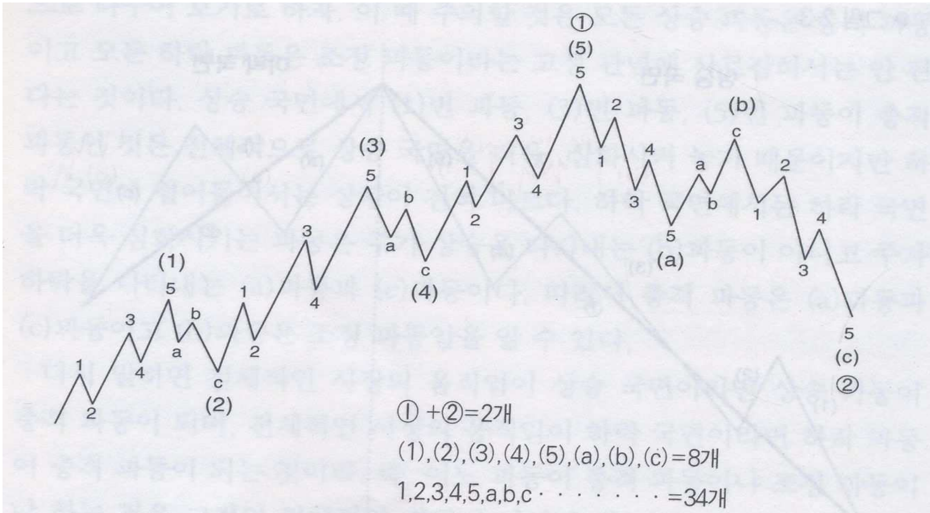


<그림25> 엘리어트 이론의 기본적인 파동 패턴

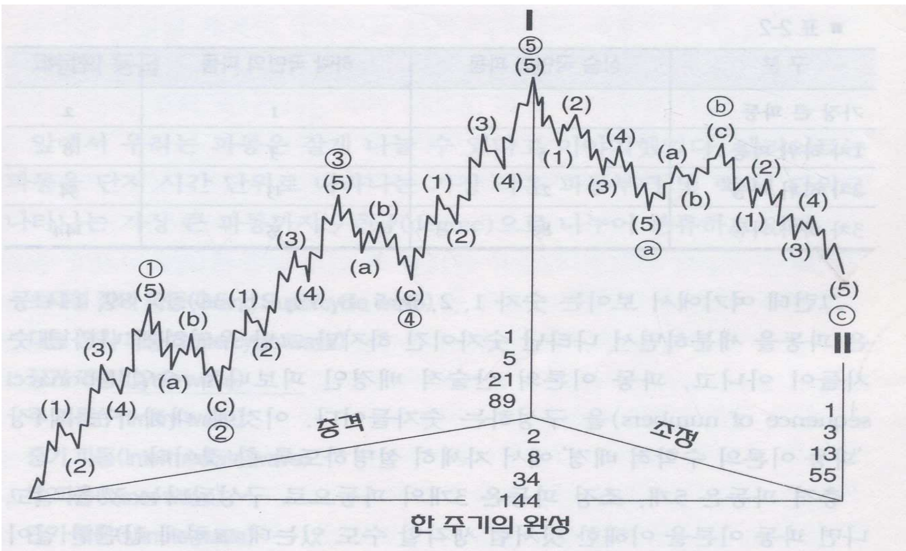
엘리어트 이론의 기본적인 파동 패턴의 한 사이클은 상승 국면의 5개의 파동과 하락 국면의 3개의 파동으로 구성된다. 상승 국면에서의 5개의 파동은 각각 1번에서 5번까지의 파동으로 분류할 수 있는데, 상승하는 파동인 1번, 3번, 5번 파동은 충격파동(impulse wave)이라고 한다. 반대로 2번, 4번은 조정파동(corrective wave)이라고 한다. 또한 하락 국면의 3개의 파동은 a파동에서 시작하여 c파동으로 끝나는 전체적인

움직임이 하락 움직임이므로, a파동과 c파동이 충격파동이 되는 것이고, b파동은 조정 파동이 된다.

파동은 아래 그림과 같이 더 세분될 수 있거나 더 큰 파동의 부분이 될 수 있다.



<그림26> 기본 파동을 1차 세분했을 때의 패턴



<그림27> 기본 파동을 2차 세분했을 때의 패턴

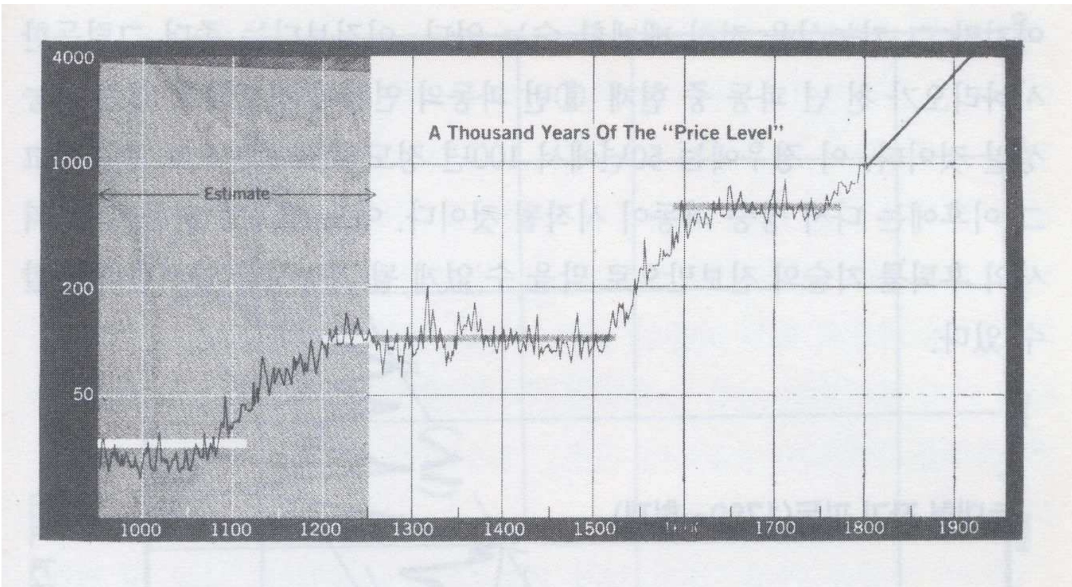
파동을 한 단계씩 세분해서 생기는 파동들의 수를 요약하여 정리하면 다음과 같다.

<표5> 기본 파동을 세분했을 때 생기는 파동의 숫자

구분	상승국면의 파동	하락국면의 파동	합계
기본적인 파동	1	1	2
1차 세분시	5	3	8
2차 세분시	21	13	34
3차 세분시	89	55	144

즉, 주식시장의 상승과 하락은 피보나치 수열을 따라 이루어지고 있음을 알 수 있다. 파동은 늘어나거나 줄어들 수도 있다. 그리고 다양한 변칙들로 앞에 있는 것을 뒤집어 엎기도 한다. 그러나 기초가 되는 원형은 일정하다. [7]

주식시장은 아니지만, 엘리어트 이론을 뒷받침해줄 한 예로서 영국의 천 년 파동에 대해서 살펴보겠다. 현재 이용 가능한 가장 오래된 파동은 천 년 파동(millennium wave)인데, 이것은 과거 영국의 물가 동향을 조사하여 만든 파동이다.



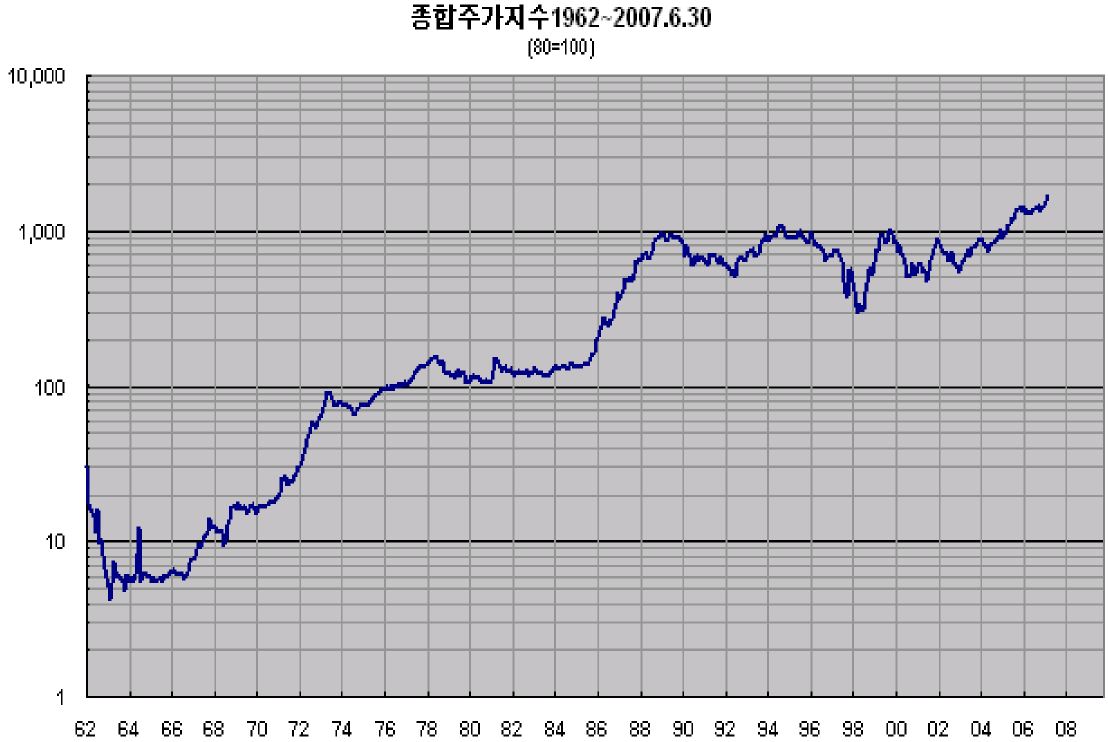
<그림28> 영국의 1000년 물가 지수 파동

 영국의 브라운 교수와 홉킨스 교수는 950년부터 1954년까지 과거 1000년 동안의 영국에서의 가격 동향을 조사하여 가격 지수를 산출했다. 이렇게 산출한 가격 지수를 미국의 주가 통계 자료가 시작되는 1789년까지 오려 붙이고 그 이후는 직선으로 나타내었다. 이것은 천 년 파동을 나타내는 것인데, 여기에서도 엘리어트 파동 이론에서 나타나는 상승 5파가 뚜렷이 드러남을 알 수 있다.

 천 년 파동에서 가격의 상승은 몇 세기에 걸친 상업 및 산업의 팽창기에 이루어졌다. 476년 로마 제국이 멸망한 이후 500년 동안은 문명의 암흑기였다. 상업 혁명은 Ⅰ번 장기 파동의 진행을 가져왔으며, 1350년부터 1520년까지는 Ⅱ번 파동으로서 조정을 보이고 있다. 초대형 장기 파동 Ⅲ번은 영국 역사에서 가장 찬란한 시기였던 엘리자베스 여왕 시대와 거의 일치한다. 여왕이 즉위할 때 영국은 가난했었으나, 유럽의 강대국들을 차례로 물리치고 세계 최강국이 되어 번영을 누리게 되었다. 1650년에 가격은 정점을 기록한 뒤 횡보하면서 Ⅳ번 파동을 형성하였다. 초대형 장기 파동 Ⅴ번은 1760년에 시작되었다. 천 년 파동의 마지막 상승 파동인 Ⅴ번 파동은 산업 혁명으로 촉진된 폭발적인 생산성 증대와 함께 진행하면서 현재에 이르게 된다.

 천 년 파동이 이제 거의 끝나 간다면 다음에는 약 500년에 걸쳐 3개의 초대형 장기 파동(2개는 하강, 1개는 상승)에 의해 조정을 받게 될 것이다. 현실적으로 그렇게 긴 기간 동안 성장이 없다고 생각하는 것은 어려운 일이지만 그 가능성을 전혀 배제할 수는 없다. 이것보다는 좀 더 그럴듯한 시나리오가 천 년 파동 중 현재 Ⅲ번 파동의 연장이 진행되고 있는 가능성일 것이다. 이 경우에는 50년에서 100년 정도의 조정만으로 충분하고 그 이후에는 다시 상승 파동이 시작될 것이다. 어느 경우든 다음에 올 역사의 후퇴를 기술의 진보만으로 막을 수 없게 될 가능성을 암시한다고 할 수 있다. [8]

 마지막, 한국의 종합주가지수에서도 엘리어트 이론에 따른 흐름이 나타나는지 살펴보고 앞으로의 전망이 어떻게 될지 예측을 해 보겠다. 아래 그림은 한국의 종합주가지수를 1962년 초부터 2007년 5월말까지 매월 말일의 종가를 연결하여 그린 그래프이다.



<그림29> KOSPI 지수의 장기적 흐름(하상주의 투자 칼럼 참고)

큰 흐름을 중심으로 위의 파동을 살펴보자. 1962년부터 1978년까지를 Ⅰ번 초대형 장기 파동으로 보면, 1978년부터 1986년까지는 조정하는 Ⅱ번 파동으로 볼 수 있다. 1986년부터 1989년까지는 Ⅲ번 충격파동으로, 1989년부터 1998년까지는 Ⅳ번 조정파동, 1998년부터 2007년까지는 Ⅴ번 충격파동으로 추측할 수 있다.

엘리어트 파동 이론을 적용할 때, 주가의 시작점과 최고점을 볼 수 있는 눈이 가장 중요한데, 이것은 보는 사람마다 다를 거라 생각된다. 2007년에 종합주가지수가 2000 포인트만큼 올라간 적이 있다. 본 연구에서는 2007년을 최고점이라 생각하고 주가를 예측한 것이다. 상승하고 있는 Ⅴ번 파동이 언제까지 지속될지는 알 수 없지만, 장기적으로 볼 때, 한국의 증시는 조만간 하락 국면으로 접어들 것이라는 것을 예측할 수 있다.

Ⅷ. 결론

본 논문에서는 피보나치의 생애와 업적, 피보나치 수열의 역사적 배경 및 피보나치 수열의 발견과 응용에 대해서 살펴보았다. 이를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 피보나치의 생애를 통해서 그 당시 수학 발전의 배경을 알 수 있었고, 그의 저서인『산반서』, 『제곱근서』 등이 수학의 발전에 많이 기여했음을 알 수 있었다.

둘째, 피보나치 수열의 정의, n번째 피보나치 수를 구하는 방법, 피보나치 수열의 성질을 살펴보았다.

셋째, 가장 아름다운 비율인 황금비에 대하여 살펴보고, 황금비와 피보나치 수열 사이의 관계에 대하여 알아보았다.

넷째, 꿀벌의 가계도, 식물의 가지와 잎의 배열, 꽃잎의 수와 꽃씨의 배열, 솔방울 등 자연에서 관찰되는 피보나치 수열에 대해서 살펴보았다.

다섯째, 예술과 건축, 주식시장에서 적용되어지는 피보나치 수열의 모습을 조사해 보았다.

지금까지 살펴본 1, 1, 2, 3, 5, 8, …와 같은 피보나치 수열은 어떻게 보면 아주 간단한 규칙인데, 생각지도 못한 많은 것들과 연관이 있다는 것을 알게 되었다. 자연 속에서 관찰된 피보나치 수는 자연과 수학의 신비한 관계를 느낄 수 있게 하였고, 주변을 볼 때 좀 더 세밀하게 볼 수 있는 눈을 가지도록 도움을 줄 것이다. 또한, 주식시장에 사용된 피보나치 수는 단순한 수학 개념이 경제 이론의 밑바탕이 되고, 그러한 경제이론을 실제로 적용함으로써 수학의 유용함을 느낄 수 있게 할 것이다.

학생들이 수학에 흥미를 가지게 하기 위해서는 무엇보다 교사들 먼저 시험을 위한 수학이 아니라, 수학 자체의 중요성을 인식하도록 노력해야 할 것이다. 주어진 틀에 맞추어진 단순한 지식 주입의 교육에서 벗어나 이제는 교사들이 학생들에게 수학의 아름다움을 볼 수 있는 안목을 제공하여야 한다. 또, 입시 때문에 억지로 하는 수학이 아니라, 수학의 중요성을 느껴서 학생들이 수학을 즐길 수 있도록 지도하여야 한다.

참 고 문 헌

[1] 마이클 슈나이더, 자연, 예술, 과학의 수학적 원형, 2002, 경문사

[2] David M. Burton, Elementary Number Theory, 6th, 2002, McGraw Hill

[3] 이광연, 자연의 수학적 열쇠 : 피보나치 수열, 2006, 웅진씽크빅

[4] 마이클J. 브래들리, 달콤한 수학사1, 2007, 일출봉

[5] 오혜정, 피보나치가 들려주는 피보나치수열 이야기, 2008, (주)자음과 모음

[6] 이언 스튜어트, 눈송이는 어떤 모양인가?, 2004, 한승

[7] 김중근, 엘리어트 파동이론 : 자연의 법칙과 증권 시장, 1994, 사계절

[8] 이광희, 엘리어트 파동이론과 한국증시전망, 1998, 새날

[9] 오시봉, 피보나치 수열과 황금비에 관한 연구, 제주대학교 교육대학원 석사학위논문, 1999

[10] 박숙, 피보나치 수열에 대하여 : 수열의 역사와 응용 그리고 현대적 해석과 현장수업을 중심으로, 한남대학교 교육대학원 석사학위논문, 2000

[11] 정희령, 피보나치 수열에 대하여 : 수학사와 생활 속의 발견을 통한 흥미유발, 서강대학교 교육대학원 석사학위논문, 2004

[12] 장효진, 피보나치 수와 황금비를 활용한 교수-학습 지도 자료 개발 연구, 전남대학교 교육대학원 석사학위논문, 2002

[13] 교육부 고시 제1997-15호[별책8], 『수학과 교육 과정』

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20058240	과 정	석사
성명	한글: 김현진 한문: 金炫珍 영문: Hyun-jin Kim				
주소	광주광역시 남구 월산4동 981-26				
연락처	016-636-6097 E-MAIL: ahloha@nate.com				
논문제목	한글 : 생활 속에서 발견된 피보나치 수열에 대하여 영문 : On the Fibonacci sequence discovered in life				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

\- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억 장치에의 저장, 전송 등을 허락함.
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음.
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2008 년 8 월 일

저작자: 김현진 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하