creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000236510

２００８년　８월

教育學碩士(數學教育)學位論文

高等學校 數學의 代數領域에 대한 研究

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

李　受　憙

高等學校 數學의 代數領域에 대한 研究

A study on the Algebra part in high school mathematics

2008년 8월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 受 憙

高等學校 數學의 代數領域에 대한 研究

指導敎授　朴 順 喆

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 提出함.

2008년 4월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李　受　憙

李受憙의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2008년 6월

朝鮮大學校 敎育大學院

- 목　　차-

ABSTRACT

Ⅰ. 서　론

A. 연구의 필요성과 목적 ····· 1

B. 연구의 제한점 ····· 2

C. NCTM의 수학적 구조에 관한 규준 ····· 2

Ⅱ. 대수학에서의 내용 분석

A. 군(Group)의 내용 ····· 4

B. 환(Ring)과 체(Field)의 내용 ····· 14

Ⅲ. 고등학교 수학에서의 대수 영역(제 7차 교육과정)

A. 10단계에서의 대수영역 ····· 29

B. 수Ⅰ에서의 대수영역 ····· 41

C. 수Ⅱ에서의 대수영역 ····· 47

Ⅳ. 고등학교 수학에서 대수영역지도의 올바른 지도방안

A. 7차 교육과정과 개정교육과정에서의 대수영역 비교분석 ·····51

B. 대수영역의 올바른 지도방안 ·····53

Ⅴ. 결 론·····56

참고문헌·····57

- 표 및 그림 목차 -

[표-1] 10단계에서 대수영역 체계표 ····· 29
[표-2] 수학 Ⅰ에서 대수영역 체계표 ····· 41
[표-3] 수학 Ⅱ에서 대수영역 체계표 ····· 48
[표-4] 제7차 교육과정, 개정교육과정의 고등학교 1학년 내용 비교표 ····· 51
[표-5] 제7차 교육과정, 개정교육과정의 수학Ⅰ 내용 비교표 ····· 52
[표-6] 제7차 교육과정, 개정교육과정의 수학Ⅰ 내용 비교표 ····· 53

ABSTRACT

A study on the Algebra part in high school mathematics

Lee Soo Hee
Advisor : Prof. Park, Soon-Chul, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

Every study based the concepts of the algebraic structure is the most importance in the study of mathematics.

This study is composed of a field of algebraic in 7th curriculum in high school, and we introduce the definitions with respect to the structure of groups, rings, fields. We analyze the algebraic structures and some example which are applied on mathematics textbooks in high school. The result of the study is expected to apply effective teaching methods which are concerned with algebraic concepts and structures to teacher and these help high school students to understand the algebraic concepts and structures.

Ⅰ. 서 론

A. 연구의 필요성과 목적

학교교육에서 수학교육의 목적은 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 것이다.[1]수학은 사회가 발전함에 따라 자연과학 뿐 아니라 인문, 사회과학, 경제학, 정보통신등에서도 폭 넓게 이용되고 있다. 수학은 이와 같이 다양한 분야에서 사용될 뿐만 아니라 다른 교과 학습에 기초가 되는 교과로 학교 교육에서 수학교육이 차지하는 비중이 매우 높아지고 있다.

그러나 현행 고등학교 수학교육은 지나치게 입시위주의 교육에 치중되어있어 공식의 암기와 기계적인 문제풀이 위주의 교육이 시행되고 있어 학생들로 하여금 수학적 내용을 깊이 있게 이해하고 구조화 하는 능력을 키워주지 못하고 있다. 따라서 수학적 이론의 흐름을 이해시키면서 수학적 개념을 도입하는 것이 필요하고 학교수학에서 수학 기본체계의 형식적인 측면을 이해하고 개념과 원리, 법칙에 관한 좀 더 구체적인 사실을 살펴 볼 필요가 있다고 여겨진다.

특히 수학의 분야중 대수학은 해석학, 기하학과 더불어 수학의 중요한 연구분야 중 하나이다. 이러한 대수학은 수학적 개념, 논리적인 사고, 합리적인 문제해결 능력과 태도를 갖추는데 중요한 역할을 한다. 고등학교 수학 교과서를 살펴보면, 대수학에서 다루는 여러 가지 대수적 개념과 이론이 밑바탕이 되어 교과서가 저술되어 있음을 알 수 있다. 따라서 수학교육의 목적을 이루기 위해 학생들로 하여금 대수적 구조에 대한 근본적인 이해가 선행되어야 할 것이다.

본 논문에서는 대수적 구조에 관한 개념 및 성질을 체계적으로 이해하고 활용할 수 있도록 하기 위해 대수학에서 가장 기본이 되는 군(group), 환(ring), 체(field), 정역(integral domain)이 고등학교 교육과정에서 어떻게 제시되고 있는지 예를 분석함으로써, 효과적인 교수-학습에 도움이 되고자 한다.

---

1) (교육부1998수학과 교육과정[별책8]서울: 교육부)

B. 연구의 제한점

현재 제 7차 고등학교 수학과 교육과정을 바탕으로 한 검인정 교과서 중 본 연구에서는 수학 10-가, 나 와 수학Ⅰ,수학Ⅱ를 중심으로 대한교과서, (주)지학사, (주)고려출판에서 대수적 구조와 관련된 내용을 발취하고 이들의 지도 내용을 살펴봄으로써 대수영역 지도의 방안을 모색하였다. 다만 본 논문에서는 학생들의 대수영역에 대한 학습 실태는 직접 조사하지 못했음을 밝혀둔다.

C. NCTM의 수학적 구조에 관한 규준

미국수학교사협의회(NCTM)에서 발표한 '학교수학을 위한 교육과정 및 평가 규준집(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)'의 고등학교 교육과정의 규준 1로부터 규준 14번째 규준인 [규준14 :수학적 구조]에는 다음과 같은 내용이 있다.

수학의 구조는 마치 현대적인 건물의 철골 구조와 같다. 학생들은 이러한 구조를 깨달아야 하며, 어떻게 해서 그것이 다양한 내용이 구축되는 강력한 기초를 제공하는지 또 어떻게 그것이 서로 다른 요소들을 동시에 가지고 있는지를 알아야만 한다. 예를 들어, 이러한 구조들 중에 하나는 산수, 대수, 함수, 그리고 기하학적 변환 등 다양한 수학적 대상과 연산이 내재되어있는 결합성이다. 이러한 포괄적인 구조적 원리의 의식은 학생들로 하여금 새로운 수학적 내용을 더 구성적으로 접근할 수 있게 해주며, 내용을 더 오랫동안 기억할 수 있게 하는 틀을 제공해 준다.

그 결과 학생들은

① 실수 체계와 실수의 여러 가지 하위 체계(유리수, 정수 등)를 구조적 특징에 비추어 비교하고 대조할 수 있어야 한다

② 대수적 절차의 논리를 이해할 수 있어야 한다.

③ 외견상 다르게 보이는 수학적 체계가 본질적으로 같을 수도 있다는 것을 음미할 수 있어야 한다.

④ 복소수 체계를 이해하고 복소수 계산을 잘 할 수 있어야 한다.

⑤ 군, 체와 같은 여러 가지 수학적 구조 내의 기본 정리를 증명할 수 있어

야 한다.

⑥ 공리적 체계의 성격과 목적을 이해할 수 있어야 한다.

따라서 본 논문에서는 NCTM의 규준에 따라 고등학교 수학에서 많은 비중을 차지하고 있는 대수의 구조에 대해 고찰하기로 한다.

Ⅱ. 대수학에서의 내용분석

A. 군(Group)의 내용

<u>정의1</u>. 집합 $G(\neq \varnothing)$ 위에 정의된 이항연산 $\circ$에 대해 G는 닫혀있고, 즉

$$a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$$

이고, 다음이 성립할 때, $(G, \circ)$를 군(group)이라고 한다.

G.1 (결합법칙) 모든 $a, b, c \in G$에 대하여 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

G.2 특정한 원소 $e \in G$가 존재하여, 모든 $a \in G$에 대하여

$$a \circ e = a = e \circ a$$

이 원소 e를 G의 ($\circ$에 관한) 항등원(identity)이라고 한다.

G.3 각 $a \in G$에 대하여 $a \circ x = e = x \circ a$인 원소 $x \in G$가 존재하면 원소 x를 ($\circ$에 관한) a의 역원(inverse)이라 하고, 이 x를 a^{-1}로 나타낸다.

$$\text{즉 } a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$$

<u>정의2</u>. 군 $(G, \circ)$에 대하여 다음이 성립할 때, $(G, \circ)$를 **Abel군**(Abelian Group) 또는 **가환군**(commutative group)이라고 한다.

G.4 (교환법칙) 모든 $a, b \in G$에 대하여 $a \circ b = b \circ a$이다.

Note) 연산 기호가 $\circ$ 또는 $\bullet$인 군을 **곱셈군**(multiplicative group)이라 하고 그 항등원을 e또는 1로 나타낸다. 또, 연산 기호 $+$인 Abel군을 **덧셈군** 이라고 한다.

<u>정리1</u>. 군 $(G, \circ)$에서 G의 항등원e는 단 하나 존재하고, 또 각 원소 $a \in G$에 대하여 a의 역원 $a^{-1} \in G$는 단 하나 존재한다.

그리고 항등원 e와 원소 $a, b, c \in G$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $e^{-1} = e$, $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$

$b \circ c = c \circ a \Rightarrow b = c$

(3) $a \circ a = a \Rightarrow a = c$

(4) $x \circ a = b \Rightarrow x = b \circ a^{-1}$, $a \circ x = b \Rightarrow x = a^{-1} \circ b$

(5) $x \circ a = a \Rightarrow x = e$, $a \circ x = a \Rightarrow x = a$

$x \circ a = e \Rightarrow x = a^{-1}$, $a \circ x = e \Rightarrow x = a^{-1}$

증명) 두 원소 e와 e'을 G의 항등원이라고 하면 $e' = e \circ e' = e$이므로 항등원은 단 하나 존재한다. 또, b와 c를 a의 역원이라고 하면, $c = c \circ e = c \circ (a \circ b) = (c \circ a) \circ b = e \circ b = b$ 이므로 a의 역원은 단 하나 존재한다.

(1) 먼저 $e \circ e = e$이므로 $e^{-1} = e$이다. 그리고, 위의 결과에 의하여 a^{-1}의 역원 $(a^{-1})^{-1} \in G$는 단 하나 존재하고,

또 $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$이므로 $(a^{-1})^{-1} = a$이다.

(2) 원소 a의 역원 $a^{-1} \in G$가 존재하므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a \circ b = a \circ c &\Rightarrow a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c) \\ &\Rightarrow (a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c \\ &\Rightarrow e \circ b = e \circ c \Rightarrow b = c \end{aligned}$$

마찬가지로, $b \circ a = c \circ a$이면 $b = c$이다.

(3)
$$\begin{aligned} a \circ a = a &\Rightarrow a^{-1} \circ (a \circ a) = a^{-1} \circ a \\ &\Rightarrow (a^{-1} \circ a) \circ a = a^{-1} \circ a \\ &\Rightarrow e \circ a = e \Rightarrow a = e \end{aligned}$$

(4) 원소 a의 역원 $a^{-1} \in G$가 존재하므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} x \circ a = b &\Rightarrow (x \circ a) \circ a^{-1} = b \circ a^{-1} \\ &\Rightarrow x \circ (a \circ a^{-1}) = b \circ a^{-1} \\ &\Rightarrow x \circ a = b \circ a^{-1} \Rightarrow x = b \circ a^{-1} \end{aligned}$$

마찬가지로, $a \circ x = b$이면 $x = a^{-1} \circ b$이다.

(5) 위의 (4)에 의하여 (5)가 성립한다.

<u>정리2.</u> 군 $(G, \circ)$에서 $n\,(n \geq 2)$개의 원소 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in G$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n)^{-1} = a_n^{-1} \circ \cdots \circ a_2^{-1} \circ a_1^{-1}$$

증명) 두 원소 $a_1, a_2 \in G$에 대하여 원소 $a_1 \circ a_2$의 역원 $(a_1 \circ a_2)^{-1}$는 단 하나 존재한다. 그리고

$$(a_1 \circ a_2) \circ (a_2^{-1} \circ a_1^{-1}) = [a_1 \circ (a_2 \circ a_2^{-1})] \circ a_1^{-1}$$

$$= (a_1 \circ e) \circ a_1^{-1} = a_1 \circ a_1^{-1} = e$$

이므로 $(a_1 \circ a_2)^{-1} = a_2^{-1} \circ a_1^{-1}$이다.

이제 $k \geq 2$일 때 원소 $a_1, \cdots, a_k \in G$에 대하여

$$(a_1 \circ \cdots \circ a_k)^{-1} = a_k^{-1} \circ \cdots \circ a_1^{-1}$$

이라고 가정하면, 원소 $a_1, \cdots, a_k, a_{k+1} \in G$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(a_1 \circ \cdots \circ a_k \circ a_{k+1})^{-1} &= ((a_1 \circ \cdots \circ a_k) \circ a_{k+1})^{-1} \\ &= a_{k+1}^{-1} \circ (a_1 \circ \cdots \circ a_k)^{-1} \\ &= a_{k+1}^{-1} \circ (a_k^{-1} \circ \cdots \circ a_1^{-1}) \\ &= a_{k+1}^{-1} \circ a_k^{-1} \circ \cdots \circ a_1^{-1}\end{aligned}$$

<u>정의3.</u> 군 $(G, \circ)$에서 G가 무한집합일 때 이 군을 **무한군**(infinite group)이라 하고, G가 유한집합일 때 이 군을 **유한군**(finite group)이라고 하며 특히 $|G| = n$인 경우에 n을 이 군의 **위수**(order)라고 한다.

<u>정의4.</u> 군 $(G, \circ)$에서 원소 $a \in G$와 양의 정수 n에 대하여 a^n을 다음과 같이 귀납적으로 정의한다.

$$a^1 = a \quad , \quad a^{n+1} = a^n \circ a$$

그리고 $a^0 = a$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$ 이라고 정의한다.

<u>정리3.</u> 군 $(G, \circ)$에서, 임의의 원소 $a, b \in G$와 정수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$

(2) $a^m \circ a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $a \circ b = b \circ a$이면, $(a \circ b)^n = a^n \circ b^n$이다.

<u>정의5.</u> 덧셈군 $(A, +)$에서 원소 $a \in A$와 양의 정수 n에 대하여 $n \cdot a$를 다음과 같이 귀납적으로 정의한다.

$$1 \cdot a = a \ , \qquad (n+1) \cdot a = n \cdot a + a$$

그리고 $0 \cdot a = 0$, $(-n) \cdot a = n \cdot (-a)$ 라고 정의한다.

정의6. 군 $(G, \circ)$에서 G의 부분집합 $H(\neq \varnothing)$가 G의 연산 $\circ$에 관하여 군을 이룰 때, 즉 $(H, \circ)$가 군일 때, H를 군 G의 **부분군**(subgroup)이라고 한다.

정의7. 군 $(G, \circ)$에서 G의 공집합이 아닌 부분집합 A, B에 대하여 부분집합 $A \circ B$, A^{-1}를 다음과 같이 정한다.

$$A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

정리4. 군 G에서, 원소 $a \in G$에 대하여

$$< a > = \{a^i \mid i \in Z\} = \{\cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \cdots\}$$

이라고 하면 다음이 성립한다.

(1) $< a >$는 G의 부분군이고 또 $a \in < a >$이다.

(2) G의 부분군 H에 대하여 $a \in H$이면 $< a > \subseteq H$이다.

증명) 먼저 $a \in < a > \neq \varnothing$이고, 또 임의의 $a^i, a^j \in < a >$에 대하여 $a^i(a^j)^{-1} = a^i a^{-j} = a^{i-j} \in < a >$ 이므로 $< a >$는 G의 부분군이다.

그리고, 군 G의 부분군 H에 대하여 $a \in H$이면, 모든 정수 i에 대하여 $a^i \in H$이므로 $< a > \subseteq H$이다.

정의8. 군 G에서, 원소 $a \in G$에 대하여 부분군

$$< a > = \{a^i \mid i \in Z\} = \{\cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \cdots\}$$

를 a에 의하여 **생성된**(generated) **순환부분군**(cyclic subgroup)이라고 한다.

그리고 적당한 원소 $a \in G$에 대하여 $G = < a >$일 때, 군 G를 **순환군**(cyclic group)이라 하고, a를 G의 **생성원**(generator)이라고 한다.

마찬가지로, 덧셈군 A에서 원소 $a \in A$에 대하여 부분군

$$< a > = \{a^i \mid i \in Z\} = \{\cdots, -2a, -a, 0, a, 2a, \cdots\}$$

를 a에 의하여 생성된 순환부분군이라고 한다. 또, 적당한 원소 $a \in A$에 대하여 $A = < a >$일 때, A를 **순환군** 이라 하고 a를 A의 **생성원**이라고 한다.

정의9. 군 G에서 원소 $a \in G$ 에 대하여 $a^m = e$인 양의 정수 m이 존재하는 경우에 a를 **유한 위수**(finite order)를 가진 원소라 하고, 또 $a^n = e$인

가장 작은 양의 정수 n을 a의 **위수**라고 한다.

한편, 모든 양의 정수 m에 대하여 $a^m \neq e$일 때, 즉 $a^i = e \Leftrightarrow i = 0$일 때, a는 **무한 위수**(infinite order)를 가진 원소라고 한다.

마찬가지로, 덧셈군 A에서 원소 $a \in A$에 대하여 $m \cdot a = 0$인 양의 정수 m 이 존재할 때, a를 **유한 위수**를 가진 원소라 하고

$$n \cdot a = a + \cdots + a = 0 \qquad (a\text{는 } n\text{개})$$

인 가장 작은 양의 정수 n을 a의 **위수**라고 한다. 한편, 모든 양의 정수 m에 대하여 $m \cdot a \neq 0$일 때, a는 **무한 위수**를 가진 원소라고 한다.

<u>정리5.</u> 집합 $X(\neq \varnothing)$에서 X 자신으로의 일대일 대응 $\sigma : X \to X$를 흔히 X 위의 **치환**(permutation)이라고 한다.

<u>정리6.</u> 집합 $X(\neq \varnothing)$위의 치환 전체의 집합을 $S(X)$로 나타낼 때, $S(X)$는 합성연산 $\circ$에 관하여 군을 이룬다.

군 $S(X)$를 X위의 **대칭군**(symmetric group)이라고 한다.

특히, 양의 정수 n에 대하여 집합 $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 위의 대칭군 $S(X_n)$을 S_n으로 나타내고 이 군을 n**차의 대칭군** 이라고 한다.

<u>정의10.</u> 치환 $\sigma \in S_n$가 서로 다른 r개의 문자 $i_1, i_2, i_3, \cdots, i_{r-1}, i_r$를 $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{r-1} \to i_r \to i_1$와 같이 순환적으로 변환시키고 나머지 문자는 고정시키는 치환일 때, 치환 σ를 **길이** r**인 순환치환**(cycle) 또는 r**항 순환치환**(r-cycle)이라 하고 σ를

$$(i_1 i_2 \cdots i_r),\ (i_2 \cdots i_r i_1), \cdots, (i_r i_1 \cdots i_{r-1})$$

으로 나타낸다. 특히 2항 순환치환 $(i\,j)$를 **호환**(transposition)이라고 한다.

<u>정의11.</u> 대칭군 S_n의 두 치환 σ, τ에 대하여

$$\sigma(i) \neq i \Rightarrow \tau(i) = i, \quad \tau(j) \neq j \Rightarrow \sigma(j) = j$$

일 때, σ와 τ는 **서로 소**(disjoint)인 치환이라고 한다.

<u>정의12.</u> 집합 X위의 대칭군 $S(X)$의 부분군을 X위의 **치환군**(permutation group)이라고 한다. 또, 대칭군 S_n의 부분군을 **n차의 치환군** 이라 하

고, 특히 A_n을 **n차의 교대군**(alternating group)이라고 한다.

<u>정의13.</u> 군 G에서 H가 G의 부분군일 때, 원소 $a \in G$에 대하여

$$aH = \{ ah \mid h \in H \} \quad , \quad Ha = \{ ha \mid h \in H \}$$

를 각각 G에서의 H의 **좌잉여류**(left coset), **우잉여류**(right coset)이라 하고 또 a를 그 **대표원**(representative)이라고 한다.

<u>정의14.</u> 군 G에서 부분군 H의 좌잉여류[우잉여류]가 유한 개 존재할 때, H를 **유한 지수**(finite index)를 가진 부분군이라고 한다.

특히, G에서의 H의 좌잉여류[우잉여류]가 m개 존재할 때, m을 G에서의 H의 **지수**(index of H in G)라고 하고 m을 $|G : H|$로 나타낸다.

<u>정리7.</u> (Lagrange의 정리) 유한군 G에서 G의 부분군 H에 대하여 H의 위수 $|H|$와 지수 $|G : H|$는 $|G|$의 약수이다. 다음이 성립한다.

$$|G| = |G : H||H| \quad , \quad |G : H| = \frac{|G|}{|H|}$$

그리고, 유한군 G의 각 원소 a에 대하여 a의 위수는 $|G|$의 약수이고 따라서 $a^{|G|} = e$이다.

증명) 유한군 G에서 부분군 H는 유한군이고 G에서의 H의 좌잉여류는 유한 개 존재한다. 이제 $|G : H| = m$이라고 하면 G는

$$G = a_1 H \cup \cdots \cup a_m H \quad , a_i H \cap a_j H = \varnothing \quad (1 \le i \ne j \le m)$$

와 같이 분해되고 $|a_1 H| = \cdots = |a_m H| = |H|$이므로 다음이 성립한다

$$|G| = |a_1 H| + \cdots + |a_m H| = m|H| \text{ 즉 } |G| = |G : H||H|$$

그리고 각 원소 $a \in G$의 위수는 부분군 $< a >$의 위수와 같으므로 위의 결과에 의하여 a의 위수는 $|G|$의 약수이다. 또, a의 위수가 n일 때, $|G| = nd$라고 하면 $a^{|G|} = (a^n)^d = e^d = e$이다.

<u>정의15.</u> 두 군$(G, \circ)$,$(\overline{G}, *)$에 대하여 사상 $f : G \to \overline{G}$ 가 군의 연산을 보존시킬 때, 즉 임의의 원소 $a, b \in G$에 대하여

$$f(a \circ b) = f(a) * f(b) \text{일 때,}$$

사상 f를 G에서 $\overline{G}$로의 **(군)준동형사상**(group homomorphism)이라고 한다. 특히, 준동형사상 $f : G \to \overline{G}$ 가 일대일 대응일 때, f를

G에서 $\overline{G}$위로의 **(군)동형사상**(group-isomorphism)이라고 한다.

그리고, 동형사상 $f: G \to \overline{G}$ 가 존재할 때, 두 군 $(G, \circ)$, $(\overline{G}, *)$는 서로 **동형**(isomorphic)인 군이라 하고 이 사실을 $G \cong \overline{G}$로 나타낸다.

<u>정의16.</u> 위수 n인 순환군은 모두 서로 동형이다. 이러한 의미에서 군 G가 위수n인 순환군이라는 사실을 C_n으로 나타낸다.

<u>정리8.</u> 사상 $f: G \to \overline{G}$가 군 준동형사상일 때, G의 부분군 H에 대하여 $f(H) = \{f(a) \mid a \in H\}$ 라고 하면, $f(H)$는 $\overline{G}$의 부분군이다. 특히,

$$imf = f(G) = \{f(a) \mid a \in G\}$$

는 $\overline{G}$의 부분군이고, 또 $f(H)$는 $f(G)$의 부분군이다. 여기서 imf를 f에 의한 G의 준동형상(homomorphic image)이라고 한다.

증명) 임의의 원소 $a, b \in H$에 대하여 $ab^{-1} \in H$이므로

$$f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) \in f(H)$$

이고, 따라서 $f(H)$는 $\overline{G}$의 부분군이다.

<u>정리9.</u> 각 양의 정수 n에 대하여 정수 전체의 집합 Z위에 정의된 합동관계 $a \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$는 동치관계이다. 이 동치관계에 의하여 결정되는 동치류를 법 n에 관한 **잉여류**(residue class)라고 한다.

법 n에 관하여 정수 a를 포함하는 잉여류를 $\overline{a}$로 나타내고 또 집합 Z의 법 n에 관한 잉여류 전체의 집합을 $\overline{Z_n}$으로 나타내면 다음이 성립한다.

$$\overline{Z_n} = \{\overline{a} \mid a \in Z\} \quad , \overline{a} = \{a + nx \mid x \in Z\}$$

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a \equiv b (\mathrm{mod}\, n) \Leftrightarrow a - b \in nZ$$

<u>정의17.</u> 법 n에 잉여류 전체의 집합

$$\overline{Z_n} = \{\overline{a} \mid a \in Z\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$$

에 대하여 $\overline{Z_n}$ 위의 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \ , \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$$

<u>정의18.</u> $n \geq 2$일 때, 집합 $\overline{Z_n}$에서 원소 $\overline{a} (\neq \overline{0})$에 대하여

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} = \bar{1}$

인 원소 $\bar{b} \in \overline{Z_n}$가 존재할 때, $\bar{b}$를 $\bar{a}$의 곱셈에 관한 **역원**이라 하고 $\bar{b}$를 $\bar{a}^{-1}$로 나타낸다. 즉, $\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = \bar{a}^{-1} \cdot \bar{a} = \bar{1}$이다.

<u>정의19.</u> 군 G에서 N이 G의 부분군인 동시에 모든 원소 $g \in G$에 대하여

$$gN = Ng$$

일 때, N을 G의 **정규부분군**(normal subgroup)이라 하고 이 사실을 $N \lhd G$ 또는 $G \rhd N$으로 나타낸다.

<u>정의20.</u> 군 G에서 G의 원소 g와 G의 부분집합 $S(\neq \varnothing)$에 대하여 $g^{-1}Sg$와 gSg^{-1}는 다음과 같은 정의된 부분집합이다.

$$g^{-1}Sg = \{g^{-1}xg \mid x \in S\} = g^{-1}(Sg) = (g^{-1}S)g$$
$$gSg^{-1} = \{gxg^{-1} \mid x \in S\} = (gS)g^{-1} = g(Sg^{-1})$$

<u>정의21.</u> 군 G에서 $N \lhd G$일 때, G에서의 N의 잉여류 전체의 집합

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

는 다음과 같이 정의된 상등관계와 연산에 관하여 군을 이룬다.

$$aN = bN \Leftrightarrow a^{-1}b \in N \Leftrightarrow ab^{-1} \in N$$
$$(aN) \cdot (bN) = abN$$

이 군을 G의 N에 의한 **잉여군**(factor group) 또는 **인자군** 이라 하고, 또 이 군을 G/N으로 나타낸다.

<u>정리10.</u> 사상 $f: G \to \overline{G}$가 군 준동형사상일 때 다음이 성립한다.

(1) G의 부분군 H에 대하여 $f(H) = \{f(a) \mid a \in H\}$는 $\overline{G}$의 부분군이다. 특히 $imf = f(G) = \{f(a) \mid a \in H\}$는 $\overline{G}$의 부분군이고, 또 $f(H)$는 $f(G)$의 부분군이다.

(2) $N \lhd G$이면, $f(N) \lhd f(G)$이다.

(3) $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = \bar{e}\}$라고 하면, $\ker f \lhd G$이다.
여기서 $\ker f$를 f의 핵(kernel)이라고 한다.

증명) (2) $N \lhd G$라고 하자. 이 때, $f(N)$은 $f(G)$의 부분군이고, 또 임의의 $x \in N$와 $g \in G$에 대하여 $g^{-1}xg \in N$이므로 다음이 성립한다.

$$f(g)^{-1}f(x)f(g) = f(g^{-1}xg) \in f(N)$$

따라서 $f(N) \lhd f(G)$이다.

(3) 먼저 $f(e) = \overline{e}$이므로 $e \in \ker f$이고 따라서 $\ker f \neq \phi$이다.

그리고 임의의 원소 $a, b \in \ker f$에 대하여

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = \overline{e}\,\overline{e}^{-1} = \overline{e}$$

이므로 $ab^{-1} \in \ker f$이고, 따라서 $\ker f$는 G의 부분군이다.

그리고, 임의의 $a \in \ker f$와 $x \in G$에 대하여

$$f(x^{-1}ax) = f(x)^{-1}f(a)f(x) = f(x)^{-1}\overline{e}f(x) = \overline{e}$$

이므로 $x^{-1}ax \in \ker f$이고, 따라서 $\ker f \lhd G$이다.

<u>정리11.</u> 군 준동형사상 $f: G \to \overline{G}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $imf = \overline{G}$일 때 그리고 이때에만 f는 위로의 준동형사상이다.

(2) $\ker f = \{e\}$일 때 그리고 이때에만 f는 일대일 준동형사상이다.

(3) $N = \ker f$라고 할 때, 원소 $a, b \in G$에 대하여

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^{-1}b \in N \Leftrightarrow aN = bN$$

증명) (1) 정의에 의하여 성립.

(2) 먼저 $\ker f = \{e\}$일 때,

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow f(a)^{-1}f(b) = \overline{e} \\ &\Rightarrow f(a^{-1}b) = \overline{e} \Rightarrow a^{-1}b \in \ker f \\ &\Rightarrow a^{-1}b = e \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

이므로 f는 일대일 사상이다.

역으로, f가 일대일 사상이면,

$$a \in \ker f \Rightarrow f(a) = \overline{e} = f(e) \Rightarrow a = e$$

이므로 $\ker f = \{e\}$이다.

(3) $$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Leftrightarrow f(a)^{-1}f(b) = \overline{e} \\ &\Leftrightarrow f(a^{-1}b) = \overline{e} \Leftrightarrow a^{-1}b \in N \\ &\Leftrightarrow aN = bN \end{aligned}$$

<u>정리12.</u> (제 1동형정리) 사상 $f: G \to \overline{G}$가 군 준동형사상일 때, $N = \ker f$라고 하면 다음이 성립한다.

$$N \lhd G \quad , \quad G/N \cong imf = f(G)$$

사상 $\Phi: G/N \to imf \quad , \quad \Phi(aN) = f(a)$

는 동형사상이다.

증명) 정리10.에 의하여 $N \triangleleft G$이다. 정리11.에 의하여

$$aN = bN \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow \phi(aN) = \phi(bN)$$

이므로 ϕ는 잘 정의되고 일대일 사상이다. 또, 임의의 $a, b \in G$에 대하여

$$\phi((aN)(bN)) = \phi(abN) = f(ab)$$
$$= f(a)f(b) = \phi(aN)\phi(bN),$$
$$im\,\phi = \{\phi(aN) \mid a \in G\} = \{f(a) \mid a \in G\} = imf$$

이므로 ϕ는 G/N에서 imf 위로의 동형사상이고 또 $G/N \cong imf$.

<u>정의22.</u> 덧셈군 $A_1, \cdots, A_n$에 대하여, 곱집합

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \cdots, a_n \in A_n\}$$

는 다음과 같이 정의된 덧셈에 관하여 덧셈군을 이룬다.

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$

이 덧셈군을 덧셈군 $A_1, \cdots, A_n$의 **(외적인) 직합**이라 하고 이것을 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$으로 나타낸다.

<u>정의23.</u> 덧셈군 A의 두 부분군 A_1, A_2에 대하여

$$A = A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$
$$A_1 \cap A_2 = \{0\}$$

일 때, A는 두 덧셈군 A_1, A_2의 직합 $A_1 \oplus A_2$와 동형이다.

이러한 의미에서 이 경우에 덧셈군 A를 부분군 A_1, A_2의 **(내적인) 직합**이라 하고 이 사실을 $A = A_1 \dotplus A_2$ 또는 $A = A_1 \oplus A_2$로 나타낸다. 또, 덧셈군 A는 두 부분군 A_1, A_2의 **직합으로 분해**된다고 하고 또 A_1, A_2를 A의 **직합인자** 라고 한다.

특히, $A = A_1 \dotplus A_2 = A_2 \dotplus A_1$이고 $A = A \dotplus \{0\} = \{0\} \dotplus A$이다.

<u>정의24.</u> $S = \{a, b, \cdots, c\}$일 때, 부분군 $< S >$를 $< a, b, \cdots, c >$로 나타내고 이 부분군을 $a, b, \cdots, c$에 의하여 생성된 부분군이라고 한다. 특히, $< a > = \{a^m \mid m \in Z\}$이다. 군 G에서 G의 각 부분집합 $S(\neq \varnothing)$에 대하여 부분군 $< S >$를 S에 의하여 **생성된(generated)부분군**이라고 한다.

또, $G = < S >$일 때, S를 G의 생성계(system of generators)라고

한다.

정의25. 군 G에서 사상 $\sigma : G \to G$가 준동형사상일 때, 즉

$$\sigma(a\,b) = \sigma(a)\,\sigma(b) \qquad (a\,, b \in G)$$

일 때, σ를 G의 **자기준동형사상**이라고 한다.

그리고 $\sigma : G \to G$가 동형사상일 때, 즉 자기준동형사상인 동시에 일대일 대응일 때, σ를 G의 **자기동형사상**이라고 한다.

정의26. 군 G에서 원소 $g \in G$에 의하여 정의되는 자기동형사상

$$\alpha_g : G \to G\,, \quad \alpha_g(x) = g\,x\,g^{-1}$$

를 g에 의하여 정의되는 G의 **내부자기동형사상**이라 하고, 내부자기동형사상 전체로 이루어진 군 $Inn(G) = \{\alpha_g \mid g \in G\}$를 G의 **내부자기 동형군**이라고 한다.

정의27. 군 G에서 두 원소 $x\,, y$에 대하여

$$y = x^g = g^{-1}\,x\,g \text{ 또는 } y = {}^g x = g\,x\,g^{-1}$$

인 원소 $g \in G$가 존재할 때, x와 y 를 **켤레원소**라고 한다.

또 x의 켤레원소 전체의 집합 $C_x = \{x^g \mid g \in G\} = \{{}^g x \mid g \in G\}$를 G에서의 x를 포함하는 **켤레류**(conjugate class)라고 한다.

정의28. 소수 p에 대하여 유한군 G의 위수가 $|G| = p^n \ (n \geq 0)$일 때, G를 **유한p-군**(finite p-group)이라고 한다.

B. 환(Ring)과 체(Field)의 내용

정의1. 집합 $R(\neq \varnothing)$위에 덧셈 $+$과 곱셈 $\cdot$이 정의되어 있고, 즉

$$a\,, b \in R \Rightarrow a + b \in R\,, a \cdot b \in R$$

이고 또 다음이 성립할 때, $(R\,, +\,, \cdot)$를 **환**(Ring)이라고 한다.

A1. $(a+b)+c = a+(b+c)$

A2. $a+b = b+a$

A3. 특정한 원소 $0 \in R$이 존재하여, 임의의 원소 $a \in R$에 대하여 등식 $a+0 = 0+a = a$가 성립한다.

A4. 각 $a \in R$에 대하여 $a+b = b+a = 0$인 원소 $b \in R$가 존재한다. 이

러한 원소 b를 $-a$로 나타내고 이것을 b의 덧셈에 관한 역원이라고 한다.

즉, $a+(-a)=(-a)+a=0$이다.

M1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

D. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$, $(a+b) \cdot c = (a \cdot c)+(b \cdot c)$

<u>정의2.</u> 환 R에서 임의의 원소, $a, b \in R$에 대하여 다음 조건이 성립할 때, R를 **가환환**(commutative ring)이라고 한다.

M2. $a \cdot b = b \cdot a$

<u>정의3.</u> 환 R에서 다음이 성립할 때, R을 단위원(identity) **1을 가진 환** (ring with identity)이라고 한다.

M3. 특정한 원소 $1 \in R$이 존재하여, 임의의 원소 $a \in R$에 대하여 등식 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$가 성립한다.

<u>정의4.</u> 단위원 $1(1 \neq 0)$을 가진 가환환R 에서 다음이 성립할 때, R를 **정역** (intergral domain)이라고 한다.

M4. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$

<u>정의5.</u> 단위원 $1(1 \neq 0)$을 가지는 환 R에서 다음이 성립할 때, R를 **나눗셈환** (division ring)이라고 한다.

M5. 각 $a \in R$, $a \neq 0$에 대하여 $a \cdot b = b \cdot a = 1$인 원소 $b \in R$가 존재한다.

이러한 원소 b를 a의 곱셈에 관한 역원이라 하고 또 b를 a^{-1}로 나타낸다.

즉, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$이다.

그리고 가환환인 나눗셈 환을 **체**(field)라 하고, 가환환이 아닌 나눗셈 환을 **사체**(skew field)라고 한다.

Note) 앞으로, 환 R의 두 원소 a, b의 곱을 간단히 ab로 나타내기로 한다.

<u>정의6.</u> 단위원 1을 가진 환 R에서 원소 $a \in R$, $a \neq 0$에 대하여

$$ab = ba = 1$$

인 원소 $b \in R$가 존재할 때, a를 R의 **단원**(unit element)이라고 한다.
또, 이때 b를 a의 곱셈에 관한 역원이라 하고 b를 a^{-1}로 나타낸다.
즉, $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

<u>정의7.</u> 환 R에서 원소 $a \in R$, $a \neq 0$에 대하여

$$ab = 0 \text{ 또는 } ba = 0$$

인 $b \in R$, $b \neq 0$가 존재할 때, a를 R의 **영인자**(zero divisor)라고 한다.

<u>정리1.</u> 단위원 1을 가진 가환환 R에서, 다음 조건은 서로 동치이다.

(1) R는 정역이다. 즉, $ab = 0$이면, $a = 0$ 또는 $b = 0$이다.

(2) R에는 영인자가 없다. 즉, $a \neq 0$, $b \neq 0$이면, $ab \neq 0$이다.

(3) $ab = ac$, $a \neq 0$이면, $b = c$이다.

증명) (1)⇔(2)가 성립.

(1)⇔(3) 조건 (1)이 성립할 때,

$ab = ac$, $a \neq 0$이면 $a(b-c) = 0$, $a \neq 0$이므로 $b - c = 0$

즉, $b = c$이고 따라서 (3)이 성립한다.

역으로, 조건 (3)이 성립할 때,

$ab = 0$, $a \neq 0$이면 $ab = a0$, $a \neq 0$이므로 $b = 0$이고

따라서 (1)이 성립한다.

<u>정리2.</u> 단위원 1을 가진 환 R에서 단원은 영인자가 아니다. 그리고, 체는 모두 정역이기도 하다.

증명) 환 R의 원소 $a \in R$, $a \neq 0$가 단원일 때, $ab = 0$이라고 가정하면 a의 곱셈에 관한 역원 $a^{-1} \in R$가 존재하므로

$a^{-1}(ab) = a^{-1}0$, $(a^{-1}a)b = 0$, $1b = 0$ 즉 $b = 0$

이므로 a는 영인자가 아니다. 특히, F가 체일 때, 0이 아닌 원소는 모두 단원이므로 F에는 영인자가 없고 따라서 F는 정역.

<u>정의8.</u> 환 R의 부분집합 $S(\neq \varnothing)$가 환 R의 두 연산에 관하여 환을 이룰 때 S를 환 R의 **부분환**(subring)이라고 한다.

그리고 체 F의 부분집합 $S(\neq \varnothing)$가 체 F의 두 연산에 관하여 체를 이룰 때 S를 체 F의 **부분체**(subfield)라고 한다.

정리3. 환 R의 부분집합 $S(\neq \varnothing)$가 R의 부분환이기 위한 필요충분조건은 다음 두 조건이 성립하는 것이다.

(1) S는 덧셈군 $(R, +)$의 부분군이다. 즉, $a, b \in S \Rightarrow a-b \in S$

(2) $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

정리4. 체 F가 단위원 1을 가질 때 F의 부분집합 $S(\neq \varnothing)$가 F의 부분체이기 위한 필요충분조건은 다음 두 조건이 성립하는 것이다.

(1) S는 체 F의 부분환이다. 즉, $a, b \in S \Rightarrow a-b, ab \in S$

(2) $1 \in S$이고, 또 $a \in S, a \neq 0$이면 $a^{-1} \in S$이다.

정의9. 환 R에서 환 R'으로의 사상 $f: R \to R'$가 환의 두 연산을 보존시킬 때, 즉 임의의 원소 $a, b \in R$에 대하여

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad , \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

일 때, f를 R에서 R'로의 **(환)준동형사상**(ring homomorphism)이라고 한다.

또, 준동형사상 $f: R \to R'$가 일대일 대응일 때, f를 R에서 R'위로의 **(환) 동형사상**(ring isomorphism)이라고 한다.

정의10. 무한개의 원소로 이루어진 환과 체를 각각 **무한환**(infinite ring), **무한체**(infinite field)라 하고, 유한 개의 원소로 이루어진 환과 체를 **유한환**(finite ring), **유한체**(finite field)라고 한다. 또 유한환[유한체]R에서 $|R| = n$일 때, n을 R의 위수(order)라고 한다.

정리5. 유환환 R가 정역이면, R는 체이다.

증명) 가정에 의하여 $S = R - \{0\}$에 대하여 다음이 성립한다.

(i)$a, b \in S \Rightarrow ab \in S$ (ii)$ab = ac \Rightarrow b = c$

그러므로 각 $a \in S$에 대하여 $\{ab \mid b \in S\} = S$이고 또 $1 \in S$이므로 $ab = ba = 1$인 원소 $b \in S$가 존재한다. 따라서 R는 체이다.

정의11. 환 R의 원소 $a \in R$가 등식 $a^2 = a$를 만족시킬 때, a를 **멱등원**이라고 한다.

그리고, 단위원 1을 가진 환 R의 모든 원소가 멱등원일 때, R을 **Boole환**(Boolean ring)이라고 한다.

정의12. 환 R에서 R의 부분집합 $I(\neq \phi)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때 I를 R의 **이데알**(ideal)이라고 한다.

(i) I는 덧셈군 $(R, +)$의 부분군이다. 즉, $a, b \in I \Rightarrow a-b \in I$

(ii) $a \in I, r \in R \Rightarrow ra, ar \in I$

정리6. 단위원 1을 가진 가환환 R에서 원소 $a \in R$에 대하여 집합

$$aR = \{ar | r \in R\}$$

는 R의 이데알이고, 또 $a \in aR$이다. 그리고 R의 이데알 I가 a를 포함하면 $aR \subseteq I$이다.

이데알 aR를 a에 의하여 **생성된 단항이데알**(principal ideal)이라 하고 (a)로 나타낸다. 즉, $(a) = aR = \{ar \mid r \in R\}$이다.

증명) 이제 $u, v \in aR$라고 하면, 적당한 원소 $s, t \in R$에 대하여 $u = as$, $v = at$이므로 임의의 $r \in R$에 대하여 다음이 성립한다.

$$u - v = as - at = a(s-t) \in aR,$$

$$ru = ur = r(as) \in aR$$

따라서 aR는 R의 이데알이다. 또, $a = a1 \in aR$이고, R의 이데알 I가 a를 포함하면 임의의 $r \in R$에 대하여 $ar \in I$이므로 $ar \subseteq I$이다.

정의13. 단위원을 가진 가환환 R의 이데알이 모두 단항이데알 일 때, R를 **단항이데알 환**(principal ideal ring)이라고 한다.

특히, 단항이데알 환인 정역을 **단항이데알 정역**(principal ideal domain)이라 하고, 이 사실을 PID로 나타낸다.

정의14. 환 R에서 I가 이데알일 때, 집합 $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$는 다음과 같이 정의된 상등관계와 덧셈 및 곱셈에 관하여 환을 이룬다.

$$a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I$$

$$(a+I) + (b+I) = (a+b) + I$$

$$(a+I) \cdot (b+I) = ab + I$$

이와 같이 정의된 환 R/I를 환 R의 이데알 I에 의한 **잉여환** 또는 **인자환** 또는 **상환** 이라고 한다.

정의15. 가환환 R에서 R의 이데알 P가 다음 두 조건을 만족시킬 때, P를 R의 **소 이데알**(prime ideal)이라고 한다.

(i) $P \neq R$

(ii) $ab \in P \Rightarrow a \in P$ 또는 $b \in P$

정의16. 환(가환환 또는 비가환환) R에서 R의 이데알 M이 다음 두 조건을 만족시킬 때, M을 R의 **극대이데알**(maximal ideal)이라고 한다.

(i) $M \neq R$

(ii) I가 $M \subseteq I \subseteq R$인 R의 이데알이면 $I = M$또는 $I = R$이다.

정의17. 단위원 1을 가진 가환환 R와 부정원 x에 대하여, 다음과 같은 꼴의 형식적인 무한합(formal infinite sum)을 환 R위의 (x에 관한)다항식(polynomial)이라고 한다.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n \cdots\cdots \ (a_i \in R)$$

(유한개를 제외한 모든 i에 대하여 $a_i = 0$)

을 R위의 (x에 관한) **다항식**(polynomial)이라 하고, $a_0, a_1, \cdots, a_n$을 다항식 $f(x)$의 **계수**(coefficient)라고 한다.

또, R위의 (x에 관한) 다항식 전체의 집합을 $R[x]$로 나타낸다.

다항식 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots$에서, 모든 $i > n$에 대하여 $a_i = 0$일때, 이 다항식을 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n$으로 나타내고, a_0, $a_1 x$, $a_2 x^2, \cdots, a_n x^n$을 다항식 $f(x)$의 **항(term)**이라 하며, a_0을 특히 **상수항**이라 한다. 또, 상수항을 제외한 계수가 모두 0인 다항식을 **상수 다항식**이라 하고, 특히 모든 계수가 0인 다항식을 **영 다항식**이라고 한다.

정리7. 단위원 1을 가진 가환환 R에 대하여, R 위의 부정원 x에 관한 다항식 전체의 집합 $R[x]$는 덧셈과 곱셈에 관하여 단위원을 가진 가환환을 이룬다.

가환환 $R[x]$를 환 R 위의 **다항식환**(polynomial ring)이라고 한다.

정의18. 가환환 D가 정역 또는 체일 때, 다항식환 $D[x]$는 정역이다.

이 정역의 분수체를 $D(x)$로 나타낸다. 즉,

$$D(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x)\,,\, g(x) \in D[x]\,,\, g(x) \neq 0 \right\}$$

분수체 $D(x)$를 D위의 x에 관한 **유리식 체**라 하고, $D(x)$의 각 원소

$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (\, f(x)\,,\, g(x) \in D[x]\,,\, g(x) \neq 0\,)$$

를 (x에 관한) **유리식**(rational expression)이라고 한다.

<u>정의19.</u> 환 $R_1, \cdots, R_n$에 대하여, 곱집합

$$R_1 \times \cdots \times R_n = \{\, (x_1, \cdots, x_n) | x_1 \in R_1, \cdots, x_n \in R_n \,\}$$

는 다음과 같이 정의된 덧셈과 곱셈에 관하여 환을 이룬다.

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n),$$

$$(a_1, \cdots, a_n) \cdot (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$$

이 환을 $R_1, \cdots, R_n$의 **(외적인)직합**(external direct sum)이라고 하고 이 환을 $R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$로 나타낸다.

<u>정의20.</u> 환 R의 이데알 I_1, I_2에 대하여 $R = I_1 + I_2$, $I_1 \cap I_2 = \{0\}$일 때, R을 두 이데알 I_1, I_2의 **(내적인)직합**(internal direct sum)이라 하고 이 사실을

$$R = I_1 \dot{+} I_2 \text{ 또는 } R = I_1 \oplus I_2$$

로 나타낸다.

그리고 이 경우에 R는 두 이데알 I_1, I_2의 직합으로 분해된다고 하고 I_1, I_2를 R의 **직합인자**(direct summand)라고 한다.

<u>정의21.</u> 체 F 위의 두 다항식 $f(x), g(x) \in F[x]$에 대하여

$$f(x) = g(x)h(x)$$

인 $h(x) \in F[x]$가 존재할 때, $g(x)$를 $f(x)$의 **약수** 또는 **인수**라 하고 $f(x)$를 $g(x)$의 **배수**라고 하며 이 사실을 $g(x) \mid f(x)$로 나타낸다.

<u>정의22.</u> 체 F 위의 다항식 $f(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$에 대하여

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$

일 때, a_n을 $f(x)$의 **최고차 항의 계수**(leading coefficient)라고 한다.

특히, $a_n = 1$일 때, $f(x)$를 **모닉**(monic)**다항식**이라고 한다.

정의23. 체 F 위의 다항식환 $F[x]$에서, 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 다항식 $d(x) \in F[x]$를 $f(x), g(x)$의 **최대공약수**라 하고 이것을 $d(x) = \gcd\{f(x), g(x)\}$로 나타낸다.

(i) $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$

(ii) $e(x) \mid f(x)$, $e(x) \mid g(x) \Rightarrow e(x) \mid d(x)$

그리고 다음 두조건을 만족시키는 다항식 $l(x) \in F[x]$를 $f(x), g(x)$의 **최소공배수**라 하고 이것을 $l(x) = lcm\{f(x), g(x)\}$로 나타낸다.

(i)' $f(x) \mid l(x)$, $g(x) \mid l(x)$

(ii)' $f(x) \mid c(x)$, $g(x) \mid c(x) \Rightarrow l(x) \mid c(x)$

정의24. 체 F 위의 두 다항식 $f(x), g(x)$의 최대공약수가 1일 때, 이 두 다항식은 **서로 소**(relatively prime)라고 한다.

정의25. 체 F가 체 K의 부분체일 때, K를 F의 **확대체**(extension field)라고 한다.

정의26. 체 K가 체 F의 확대체일 때, 체 F위의 다항식

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[x]$$

와 원소 $u \in K$에 대하여 $f(u)$는 다음과 같은 K의 원소를 나타낸다.

$$f(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0 \in K$$

특히, $f(u) = 0$일 때, 즉

$$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0 = 0$$

일 때, u를 K안에서의 다항식 $f(x)$의 **근**(root) 또는 방정식 $f(x) = 0$의 근이라 하고 근을 **영점**(zero)이라고도 한다.

정리8. 체 K가 체 F의 확대체일 때, 원소 $u \in K$에 대하여 사상

$$\phi_u : F[x] \to K \ , \ \phi_u(f(x)) = f(u)$$

는 환 준동형사상이다.

증명) 임의의 $f(x), g(x) \in F[x]$에 대하여

$$\phi_u(f(x) + g(x)) = f(u) + g(u) = \phi_u(f(x)) + \phi_u((g(x)),$$

$$\phi_u((f(x)g(x)) = f(u)g(u) = \phi_u(f(x))\phi_u(g(x))$$

이므로 ϕ_u는 환 준동형사상이다.

<u>정리9.</u> (나머지 정리) 체 K가 체 F의 확대체일 때, 체 F 위의 다항식 $f(x) \in F$와 원소 $u \in K$에 대하여

$$f(x) = (x-u)q(x) + f(u)$$

인 다항식 $q(x) \in K[x]$가 존재한다.

증명) 다항식환 $K[x]$에서 나눗셈 알고리즘에 의하여

$$f(x) = (x-u)q(x) + r$$

인 다항식 $q(x) \in K[x]$와 $r \in K$가 존재한다.

그런데 $f(u) = (u-u)q(u) + r$ (정리6 에 의하여)이므로 $f(u) = r$ 이다.

<u>정리10.</u> (인수 정리) 체 K가 체 F의 확대체일 때, F위의 다항식 $f(x) \in F[x]$에 대하여, $u \in K$가 $f(x)$의 근이기 위한 필요충분조건은

$$f(x) = (x-u)g(x)$$

인 다항식 $g(x) \in K[x]$가 존재하는 것이다.

<u>정의27.</u> 체 F 위의 다항식 $p(x) \in F[x]$, $\deg p(x) \geq 1$의 약수가

$$f(x) = a \text{ 또는 } f(x) = a \cdot p(x) \quad (a \in F^*)$$

뿐일 때, $p(x)$를 체 F 위의 **기약다항식**(irreducible polynomial)이라 하고 또, $p(x)$는 체 F 위에서 **기약**(irreducible over F)이라고 한다.

그리고 다항식 $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) \geq 1$가 기약다항식이 아닐 때, 즉, $f(x) = g(x)h(x)$,

$$1 \leq \deg g(x) < \deg f(x) \ , \ 1 \leq \deg h(x) < \deg f(x)$$

인 다항식 $g(x), h(x) \in F[x]$가 존재할 때, $f(x)$를 $F[x]$의 **가약다항식**(reducible polynomial)이라 하고, 또는 체 F 위에서 **가약**이라고 한다.

<u>정리11.</u> (유일 인수분해 정리) 체 F 위의 다항식환 $F[x]$에서 임의의 다항식 $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) \geq 1$는 다음과 같은 꼴로 인수분해된다.

$$f(x) = a p_1(x) \cdots p_k(x)$$

($a \in F$이고 , $p_1(x), \cdots, p_k(x) \in F[x]$는 모닉 다항식)

또, 기약다항식 $p_1(x), \cdots, p_k(x)$의 곱의 순서를 무시한다면 이와 같은

인수분해는 단 한 가지뿐이다.

$f(x)$의 서로 다른 모닉인 기약인수(기약인 인수) 전체가 $p_1(x), \cdots p_r(x)$일 때, $f(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x) = ap_1(x)^{n_1} \cdots p_r(x)^{n_r} \qquad (n_1 \geq 1, \cdots, n_r \geq 1)$$

이러한 인수분해를 $f(x)$의 **표준분해**(standard decomposition)라고 한다.

<u>정리12.</u> 정수를 계수로 가지는 n차의 다항식

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x], \ n \geq 1$$

가 유리근(유리수인 근, rational root) $\frac{b}{a}$(a, b는 서로 소인 정수)를 가지면, $a|a_n$, $b|a_0$이다.

특히, $a_n = 1$일 때, $f(x)$의 유리근은 모두 정수근(정수인 근)이다.

증명) 가정에 의하여

$$0 = f(\frac{b}{a}) = a_0 + a_1(\frac{b}{a}) + \cdots + a_n(\frac{b}{a})^n$$

이므로 $a_0 a^n + a_1 b a^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b^{n-1} a + a_n b^n = 0$

이고 따라서 두 다음 등식이 성립한다.

$$a(a_0 a^{n-1} + a_1 b a^{n-2} + \cdots + a_{n-1} b^{n-1}) = -a_n b^n,$$

$$b(a_1 a^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b^{n-2} a + a_n b^{n-1}) = -a_0 a^n$$

그런데 위의 두 등식은 각각 $a \mid a_n b^n$, $b \mid a_0 a^n$임을 뜻한다. 한편, 가정에 의하여 $(a, b) = 1$이므로 $(a, b^n) = 1, (b, a^n) = 1$이고 따라서 위의 결과에 의하여 $a|a_n, b|a_0$이다.

<u>정의28.</u> 단위원 1을 가진 가환환 R에서 적당한 양의 정수 m에 대하여 $m \cdot 1 = 0$인 경우에

$$n \cdot 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = 0 \qquad (1\text{이 } n\text{개})$$

인 가장 작은 양의 정수 n을 R의 **표수**(characteristic)라고 한다. 또, 모든 양의 정수 m에 대하여 $m \cdot 1 \neq 0$일 때, R를 **표수 0인 환**이라고 한다.

<u>정의29.</u> 체 K에서 단위원 1에 의하여 생성된 부분체 P를 체 K의 **素體**

(prime field)라고 한다.

<u>정의30.</u> 소수 p와 양의 정수 m에 대하여 $q=p^m$이라고 할 때, q개의 원소를 가진 유한체는 모두 동형이다. 이러한 의미에서 q개의 원소를 가진 유한체를 위수 q인 **갈루아 체**(Galois field)라 하고 이 체를

$$\mathrm{F}_q \text{ 또는 } GF(q)$$

로 나타낸다. 특히 $F_p = Z_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$이다.

여기서, $F_p \subseteq F_q$이고 Galois 체 F_q의 표수는 p이다.

<u>정의31.</u> 소수 p와 양의 정수 m에 대하여 $q=p^m$이라고 하자.

이 때, 갈루아 체 F_q의 곱셈군 $F_q^* = F_q - \{0\}$는 위수 $q-1$인 순환군이다. 갈루아 체 F_q의 원소 α가 순환군 F_q^*의 생성원일 때, 즉

$$F_q^* = \langle a \rangle = \{1, \alpha, \cdots, \alpha^{q-2}\}, \ \alpha^{q-1} = 1$$

일 때, α를 체 F_q의 **원시원소**(primitive element)라고 한다.

또, $\alpha \in F_q^*$가 F_q의 원시원소일 때, α를 근으로 가지는 체 F_q위의 모닉인 m차의 기약다항식 $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m$를 체 F_q위의 m차의 **원시다항식**(primitive polynomial)이라고 한다.

<u>정의32.</u> Galois 체 F_q에서 α가 원시원소일 때,

$$F_q^* = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \cdots \alpha^{q-2}\}, \alpha^{q-1} = 1$$

$$a^i = a^j \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{q-1}$$

이므로 각 원소 $u \in F_q^*$에 대하여

$$u = \alpha^i, \quad 0 \le i \le q-2$$

인 정수 i를 (α를 밑으로 가지는) u의 **이산로그**(discrete logarithm) 또는 **지수**(index)라 하고 이것을 $ind_{\alpha} u$로 나타낸다.

<u>정의33.</u> 체 F위의 다항식 $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) \ge 1$가 체 F의 적당한 확대체 K 안에서 근 $u \in K$를 가질 때,

$$f(x) = (x-u)^m g(x), \ g(u) \ne 0$$

인 정수 $m\,(m \ge 1)$과 다항식 $g(x) \in K[x]$가 존재한다. 이 때, m을 근 u의 **중복도**(multiplicity)라 하고 u를 $f(x)$의 **m 중근**이라고 한다.

특히, $m=1$일 때 u를 $f(x)$의 **단근**(simple root)이라 하고, $m \geq 2$ 일 때, u를 $f(x)$의 **중근**(multiple root)이라고 한다.

<u>정의34.</u> 체 F 위의 n차의 다항식 $f(x)$가 체 F의 확대체 K안에서 중복을 허락하여 n개의 근 $u_1, \cdots u_n$을 가질 때, 다음과 같은 D를 다항식$f(x)$ 또는 방정식 $f(x)=0$의 **판별식**(discriminant)이라고 한다.

$$D=\prod_{i<j}(u_i-u_j)^2=\begin{array}{l}\{(u_1-u_2)(u_1-u_3)\cdots(u_1-u_n)\\ \qquad (u_2-u_3)\cdots(u_2-u_n)\\ \qquad\qquad \cdots\\ \qquad\qquad (u_{n-1}-u_n)\}^2\end{array}$$

<u>정리13.</u> (이차다항식의 근의 공식) 복소수를 계수로 가지는 이차다항식 $f(x)=x^2+bx+c$는 복소수체 $\mathbb{C}$ 안에서 두 근 u_1, u_2를 가진다.

여기서 $u_1+u_2=-b$, $u_1u_2=c$이며, $f(x)$의 판별식은

$$D=(u_1-u_2)^2=(u_1+u_2)^2-4u_1u_2=b^2-4c$$

이고 $f(x)$의 두 근은 $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2}$이다.

<u>정의35.</u> 체F 위의 다항식 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$에 대하여

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n} ia_ix^{i-1}=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\in F[x]$$

를 다항식 $f(x)$의 **형식적 미분**(formal derivative)이라고 한다.

<u>정의36.</u> 집합V가 체 F에 대하여 다음 두 조건을 만족시킬 때, V를 F위의 **벡터공간**(vector space) 또는 $F-$**벡터공간**이라고 한다.

(1) V위의 덧셈 $+$가 정의되어 있고, 이 덧셈에 관하여 덧셈군을 이룬다.

(2) 스칼라 곱셈(scalar multiplication)

$$F\times V\to V,\ (a, v)\mapsto a\cdot v$$

가 정의되어 있고 임의의 $v, w\in V$ 와 $a, b\in F$에 대하여 다음이 성립한다

SM1: $a\cdot(v+w)=a\cdot v+a\cdot w$

SM2: $(a+b)\cdot v=a\cdot v+b\cdot v$

SM3: $(ab)\cdot v=a\cdot(b\cdot v)$

SM4: $1 \cdot v = v$

<u>정의37.</u> 체F 위의 벡터공간 V에서 V의 부분집합 $W(\neq \varnothing)$가 V에서의 덧셈과 스칼라 곱셈에 관하여 체 F 위의 벡터공간을 이룰 때, W를 V의 **부분 공간**(subspace)이라고 한다.

<u>정의38.</u> 체 F 위의 벡터공간 V에서 $v_1, \cdots v_n \in V$라고 하자.
적어도 하나는 0이 아닌(not all zero)$a_1, \cdots, a_n \in F$ 이 존재하여

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

일 때, 벡터 $v_1, \cdots, v_n$은 **일차종속**(linearly dependent)이라고 한다.
한편, 벡터 $v_1, \cdots, v_n$이 일차종속이 아닐 때, 즉

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \ (a_1, \cdots a_n \in F) \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

일 때, 벡터 $v_1, \cdots, v_n$은 **일차독립**(linearly independent)이라고 한다.

<u>정의39.</u> 집합 A에 대하여 다음 세 조건이 성립할 때, A를 체 F위의 **다원환**(algebra) 또는 **F-다원환**이라고 한다.
(i) A는 곱셈에 관하여 단위원 1을 가진 환이다.
(ii) A는 덧셈과 스칼라 곱셈에 관하여 체 F위의 벡터공간이다.
(iii) 모든 $a \in F$와 $x, y \in A$에 대하여 $a(xy) = (ax)y = x(ay)$이다.
특히, 다원환 A가 체 F위의 벡터공간으로서 n차원 벡터공간일 때, A를 체F 위의 n**차원 단원환**이라고 한다.

<u>정의40.</u> 체 F위의 벡터공간 V, W에 대하여, 사상 $T: V \to W$가 벡터공간의 덧셈과 스칼라 곱셈을 보존시킬 때, 즉 다음 두 조건이 성립할 때, T를 V에서 W로의 **선형사상**(linear map) 또는 **F-준동형**(F-homomorphism)이라고 한다.
(i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \qquad (v_1, v_2 \in V)$
(ii) $T(av) = aT(v) \qquad (a \in F, v \in V)$
특히, V에서 V자신으로의 선형사상 $T: V \to V$를 V위의 **선형변환**(linear transformation) 또는 **선형작용소**(linear operator)라고 한다.
선형사상 $T: V \to W$가 일대일 대응일 때, T를 (**벡터공간**) **동형사상** 또는 **F-동형사상**이라고 한다. 또, V에서 W위로의 동형사상이 존재

할 때, V와 W는 **동형**인 벡터공간이라 하고 이 사실을 $V \cong W$로 나타낸다.

정의41. 체F 위의 n차원 벡터공간 V에서 $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$가 V의 순서 기저일 때, 각 벡터 $v \in V$는 단 한 가지 방법으로

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \qquad (a_1, \cdots, a_n \in F)$$

의 꼴로 나타내어진다. 이 때, $(a_1, \cdots, a_n) \in F^n$을 기저 B에 관한 v의 **좌표벡터**(coordinate vector)라 하고 이를 $(v)_B$로 나타낸다.

$$(v)_B = (a_1, \cdots a_n) \Leftrightarrow v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

정의42. 체K 가 체F의 확대체일 때, K를 체F 위의 벡터공간으로 생각하여 K가 체 F 위의 유한차원 벡터공간인 경우에 K를 F의 **유한 확대체**(finite extension) 또는 **유한차원 확대체**라고 한다. 또 $\dim_F K = n$일 때, n을 K의 F 위에서의 **차수**(degree)라 하고 이를 $[K:F]$로 나타낸다.

정의43. 체F 의 확대체 K에서 원소 $u \in K$가 체 F위의 영 다항식이 아닌 다항식 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \in F[x]$의 근일 때, 즉 적어도 하나가 0이 아닌 원소 $a_0, a_1, \cdots, a_m \in F$에 대하여

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_m u_m = 0$$

일 때, u를 체 F 위의 **대수적 원소**(algebraic element)라 하고 또 u는 체 F 위에서 **대수적**이라고 한다.

한편, $u \in K$가 체 F 위에서 대수적이 아닐 때, 즉 영다항식이 아닌 모든 다항식 $f(x) \in F[x]$에 대하여 $f(u) \neq 0$일 때 u를 F위의 **초월적 원소**(transcendental element)라 하고 u는 F 위에서 **초월적**이라고 한다.

특히, 복소수 $u \in \mathbb{C}$가 유리수체 $\mathbb{Q}$위에서 대수적일 때 u를 대수적수(algebraic number)라 하고 $\mathbb{Q}$위에서 초월적일 때 **초월수**라고 한다.

정의44. 체 K가 체 F의 확대체일 때, 원소 $u \in K$에 대하여 체 $F(u)$를 F에 u를 **첨가하여**(by adjoining) **얻은 확대체**라고 한다.

그리고 적당한 원소 $u \in K$에 대하여 $K = F(u)$일 때, K를 체 F의 **단순 확대체**(simple extension)라고 한다.

<u>정의45.</u> 체F 의 확대체 K에서, K의 모든 원소가 F위에서 대수적일 때, K를 F의 **대수적 확대체**(algebraic extension)이라고 한다.

<u>정의46.</u> 체 K 위의 사상 $\sigma : K \to K$가 동형사상일 때, σ를 K의 **자기동형사상**(automorphism)이라고 한다.

<u>정의47.</u> 체 K가 F의 확대체일 때, 원소 $u, v \in K$가 체 F위의 동일한 기약다항식 $p(x) \in F[x]$의 근인 경우에 u와 v를 체 F위에서 **대수적 켤레 원소**(algebraic conjugate element)라고 한다.

Ⅲ. 고등학교 수학에서의 대수영역

이 장에서는 교과서 (주)지학사의 내용, 대한교과서를 중심으로 대수학의 내용이 현 고등학교 교과서에서 어떻게 서술되었는지 분석해보았다.

A. 10단계에서의 대수영역

현 고등학교 교육과정 중 10단계(10-가, 10-나)를 중심으로 대수학의 내용과 고등학교 교과서의 내용을 비교 분석해 보았다.

1. 7차 수학교육과정 내용체계

a. <표 1> 10단계에서 대수영역 체계표

단계	영역	단원	내용
10단계	(가)수와 연산	1. 집합	1-1. 집합의 연산법칙
		2. 명제	2-1. 명제의 참, 거짓 2-2. 명제 사이의 관계
		3. 실수	3-1. 실수의 연산에 대한 성질
		4. 복소수	4-1. 복소수 4-2. 복소수의 연산에 대한 성질
	(나)문자와 식	5. 다항식과 연산	5-1. 다항식의 덧셈과 뺄셈 5-2. 다항식의 곱셈과 나눗셈
		6. 나머지정리	6-1. 항등식의 성질 6-2. 나머지정리와 인수정리
		7. 인수분해, 약수와배수	7-1. 인수분해 7-2. 약수와 배수
		8. 유리식과 무리식	8-1. 유리식의 계산 8-2. 무리식의 계산
		9. 방정식	9-1. 이차방정식 9-2. 삼차방정식과 사차방정

			식 9-3. 연립방정식
		10. 부등식	10-1. 부등식의 성질 10-2. 이차부등식과 연립이차 부등식 10-3. 절대부등식의 증명

b. 내 용

(가) 수와 연산

[1] 집합의 연산법칙

① 집합의 연산법칙을 이해한다.

[2] 명 제

① 명제의 뜻을 알고, 참, 거짓을 판별할 수 있다.

② 명제의 역, 이, 대우를 이해한다.

③ 필요조건과 충분조건을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

[3] 실 수

① 실수의 연산에 관한 성질을 이해한다.

② 실수의 대소 관계를 이해한다.

[4] 복소수

① 복소수의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.

② 복소수의 기본 성질을 이해한다.

(나) 문자와 식

[1] 다항식과 그 연산

① 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

② 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.

[2] 나머지정리

① 항등식을 이해한다.

② 나머지정리를 이해하고, 이를 문제 해결에 활용할 수 있다.

[3] 인수분해

① 인수분해를 익숙하게 할 수 있다.

[4] 약수와 배수

① 식의 약수와 배수의 뜻을 알고, 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있다.

[5] 유리식과 무리식

① 유리식과 무리식의 뜻을 알고, 그 계산을 할 수 있다.

[6] 방정식

① 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.

② 이차방정식에서 판별식, 근과 계수의 관계를 이해한다.

③ 간단한 삼차방정식, 사차방정식을 풀 수 있다.

④ 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

[7] 부등식

① 부등식의 성질을 이해한다.

② 절대값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

③ 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.

④ 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

2. 10단계 교과서에서의 대수영역 내용 분석

단원	3. 실수 3-1. 실수의 연산에 대한 성질
교과서 내용	[예제1-1] 임의의 실수 a ,b에 대하여 연산 ※을 $a※b=a+b-ab$ 와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하여라. (1) $(2※3)※5$의 값을 구하여라. (2) $a※b=b※a$가 성립함을 밝혀라. (3) 임의의 실수 a에 대하여 등식 $a※e=a$를 만족하는 실수 e의 값을 구하여라. 풀이) (1) $2※3=2+3-2\times3=-1$이므로 $(2※3)※5=(-1)※5=(-1)+5-(-1)\times5=9$ (2) $a※b=a+b-ab$ $=b+a-ba$ (덧셈과 곱셈의 교환법칙) $=b※a$ (3) $a※e=a$에서 $a+e-ae=a$ $\therefore e(1-a)=0$ 임의의 실수 a에 대하여 성립하므로 $e=0$.

	[예제1-2] 두 실수 a, b에 대하여 다음을 증명하여라. $ab=0$ 이면 $a=0$또는 $b=0$이다. 증명) $a \neq 0$일 때, 곱셈에 대한 역원 $\frac{1}{a}$이 존재하므로 $ab=0$의 양변에 $\frac{1}{a}$을 곱하면 $\frac{1}{a} \cdot (ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$ $(\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = 0$ (결합법칙) $1 \cdot b = 0$ (곱셈에 대한 역원) $\therefore b = 0$ (곱셈에 대한 항등원)
대수학 내용	<u>정의</u>. 집합 $R(\neq \varnothing)$위에 덧셈 $+$과 곱셈 $\cdot$이 정의되어 있고, 즉 $a, b \in R \Rightarrow a+b \in R, a \cdot b \in R$ 이고 또 다음이 성립할 때, $(R, +, \cdot)$를 **환**(Ring)이라고 한다. A1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ A2. $a+b = b+a$ A3. 특정한 원소 $0 \in R$이 존재하여, 임의의 원소 $a \in R$에 대하여 등식 $a+0=0+a=a$가 성립한다. A4. 각 $a \in R$에 대하여 $a+b=b+a=0$인 원소 $b \in R$가 존재한다. 이러한 원소 b를 $-a$로 나타내고 이것을 b의 덧셈에 관한 역원이라고 한다. 즉, $a+(-a)=(-a)+a=0$이다. M1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ D. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ <u>정의</u>. 환 R에서 임의의 원소, $a, b \in R$에 대하여 다음 조건이 성립할 때, R를 **가환환**(commutative ring)이라고 한다. M2. $a \cdot b = b \cdot a$ <u>정의</u>. 환 R에서 다음이 성립할 때, R을 단위원(identity) **1을 가진 환**(ring with identity)이라고 한다. M3. 특정한 원소 $1 \in R$이 존재하여, 임의의 원소 $a \in R$에 대하

	여 등식 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$가 성립한다. 정의. 단위원 $1(1 \neq 0)$을 가진 가환환R 에서 다음이 성립할 때, R를 **정역**(intergral domain)이라고 한다. M4. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$ 정의. 단위원 $1(1 \neq 0)$을 가지는 환 R에서 다음이 성립할 때, R를 **나눗셈환**(division ring)이라고 한다. M4. 각 $a \in R$, $a \neq 0$에 대하여 $a \cdot b = b \cdot a = 1$인 원소 $b \in R$가 존재한다. 이러한 원소 b를 a의 곱셈에 관한 역원이라 하고 또 b를 a^{-1}로 나타낸다. 즉, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$이다. 그리고 가환환인 나눗셈 환을 **체**(field)라 하고, 가환환이 아닌 나눗셈 환을 **사체**(skew field)라고 한다.
분석 및 지도상의 유의점	· 학교 수학 교육과정은 대수학에서 일반적인 집합 R을 실수 집합 $\mathbb{R}$로 제한하여 체의 기본성질을 지도하고 있다.

단원	5. 다항식과 그 연산 5-1. 다항식의 덧셈과 뺄셈 5-2. 다항식의 곱셈과 나눗셈
교과서 내용	[예제1-3] 세 다항식 A, B, C에 대하여 다음을 계산하여라. $A = 2x^2y - xy^2 + y^3$, $B = -2xy^2 + 2y^3$, $C = x^3 + y^3$ (1)$A + B$ 풀이) (1)$A + B = (2x^2y - xy^2 + y^3) + (-2xy^2 + 2y^3)$ $= 2x^2y + (-1-2)xy^2 + (1+2)y^3$ $= 2x^2y - 3xy^2 + 3y^3$ [예제1-4] $(x^2 + y)(x^2 - 2y)$ $= x^2(x^2 - 2y) + y(x^2 - 2y)$ (분배법칙) $= x^4 - x^2 \cdot 2y + yx^2 - y \cdot 2y$ (분배법칙) $= x^4 - 2x^2y + x^2y - 2y^2$ (교환법칙)

	$= x^4 - x^2 y - 2y^2$
대수학 내용	<u>정의</u>. R을 단위원 1을 가진 환이라 하고 x를 부정원이라 하자. 형식적인 무한합 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n \cdots\cdots \ (a_i \in R)$ (유한개를 제외한 모든 i에 대하여 $a_i = 0$) 을 R위의 (x에 관한) **다항식**(polynomial)이라 하고, $a_0, a_1, \cdots, a_n$을 다항식 $f(x)$의 **계수**(coefficient)라고 한다. 또, R위의 (x에 관한) 다항식 전체의 집합을 $R[x]$로 나타낸다. 다항식 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots$에서, 모든 $i > n$에 대하여 $a_i = 0$일때, 이 다항식을 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n$ 으로 나타내고, a_0, $a_1 x$, $a_2 x^2, \cdots, a_n x^n$을 다항식 $f(x)$의 **항**(term)이라 하며, a_0을 특히 **상수항**이라 한다. 또, 상수항을 제외한 계수가 모두 0인 다항식을 **상수다항식**이라 하고, 특히 모든 계수가 0인 다항식을 **영 다항식**이라고 한다. <u>정리</u>. R을 단위원 1을 가진 환이라고 할 때, R위의 다항식 전체의 집합 $R[x]$는 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의한다. $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$일때, $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$ $f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots c_n x^n \quad (c_i = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i})$ <u>정리</u>. 단위원 1을 가진 가환환R에 대하여, R위의 부정원x에 관한 다항식 전체의 집합 $R[x]$는 덧셈과 곱셈에 관하여 단위원을 가진 가환환을 이룬다. 가환환 $R[x]$를 환 R위의 **다항식환** 이라고 한다.
분석 및 지도상의 유의점	· 다항식의 집합의 대수적 구조는 정수의 집합과 같으며, 덧셈, 곱셈에 관하여 가환환을 이루고 있다는 것을 학생들에게 다항식의 연산 법칙을 수를 대입하여 알 수 있도록 지도 한다.

단원	6. 나머지정리 6-2. 나머지정리와 인수정리

교과서 내용	[나머지정리] x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때의 나머지를 R라 하면$R=f(\alpha)$이다. [인수정리] x에 대한 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)=0$이다. [예제1-5] 다항식 $f(x)=x^3-2x^2+5x-4$를 일차식 $x-3$으로 나눌 때의 나머지를 구하여라. 풀이) 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눌 때의 나머지는 나머지 정리로부터 $f(3)$과 같으므로 $f(3)=3^3-2\times3^2+5\times3-4=20$ [예제1-6] 다항식 $f(x)=x^3-8x+a$가 $x-3$으로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하여라. 풀이) $f(x)=x^3-8x+a$가 $x-3$으로 나누어떨어지려면 인수정리에 의하여 $f(3)=0$이어야 한다. 그런데 $f(3)=3^3-8\times3+a=3+a$이므로$3+a=0$ $\therefore a=-3$
단원	7. 인수분해, 약수와 배수 7-1. 인수분해 7-2. 약수와 배수
교과서 내용	[예제1-7] 이차항의 계수가 모두 1인 두 이차식의 최대공약수가 $G=x-2$이고 최소공배수가 $L=(x+1)(x-2)(x-3)$인 두 이차식을 구하여라. 풀이) 구하는 두 이차식을 A, B라고 하면 $A=aG=a(x-2)$, $B=bG=b(x-2)$ (단, a, b는 서로소) 그런데 $L=abG$이므로 $ab=L\div G=(x+1)(x-2)(x-3)\div(x-2)$ $=(x+1)(x-3)$ 여기서, A, B가 이차식이므로 a, b는 일차식이다. 따라서, 구하는 두 다항식은 $(x+1)(x-2)$, $(x-3)(x-2)$
대수학 내용	정리. 체F 위의 다항식환 $F[x]$는 다음 성질을 가진 정역이다. (1) 다항식 $f(x), g(x)\in F[x]$에 대하여 다음이 성립한다. $\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$ (2) (나눗셈 알고리즘) 다항식 $f(x), g(x)\in F[x]$, $g(x)\neq0$에 대하여

	$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$ $$r(x) = 0 \text{또는 } 0 \le \deg r(x) < \deg g(x)$$ 인 다항식 $q(x), r(x) \in F[x]$가 단 하나 존재한다. 이 두 다항식 각각 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 **몫**, **나머지**라고 한다. <u>정의</u>. 체 F위의 두 다항식 $f(x), g(x) \in F[x]$에 대하여 $$f(x) = g(x)h(x)$$ 인 $h(x) \in F[x]$가 존재할 때, $g(x)$를 $f(x)$의 약수 또는 인수라 하고 $f(x)$를 $g(x)$의 배수라고하며 이 사실을 $g(x) \mid f(x)$로 나타낸다. <u>정의</u>. 체 F위의 다항식환 $F[x]$에서, 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 다항식 $d(x) \in F[x]$를 $f(x), g(x)$의 **최대공약수**라 하고 이것을 $d(x) = \gcd\{f(x), g(x)\}$로 나타낸다. (i) $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$ (ii) $e(x) \mid f(x)$, $e(x) \mid g(x) \Rightarrow e(x) \mid d(x)$ 그리고 다음 두 조건을 만족시키는 다항식 $l(x) \in F[x]$를 $f(x), g(x)$의 **최소공배수**라 하고 이것을$l(x) = lcm\{f(x), g(x)\}$로 나타낸다. (i)' $f(x) \mid l(x)$, $g(x) \mid l(x)$ (ii)' $f(x) \mid c(x)$, $g(x) \mid c(x) \Rightarrow l(x) \mid c(x)$ <u>정리</u>. (나머지 정리) 체 K가 체 F의 확대체일 때, 체 F위의 다항식 $f(x) \in F$와 원소 $u \in K$에 대하여 $$f(x) = (x-u)q(x) + f(u)$$ 인 다항식 $q(x) \in K[x]$가 존재한다. <u>정리</u>. (인수정리) 체 K가 체 F의 확대체일 때, F 위의 다항식 $f(x) \in F[x]$에 대하여, $u \in K$가 $f(x)$의 근이기 위한 필요충분조건은 $$f(x) = (x-u)\,g(x)$$ 인 다항식 $g(x) \in K[x]$가 존재하는 것이다.
분석 및 지도상	· 수의 약수와 배수는 자연수에서만 생각할 것이 아니라, 주어진 전체집합에서 구하도록 지도한다. · 대수학의 나머지 정리와 인수정리는 학생들에게 항등식임을 이용

의 유의점	하여 이해할 수 있도록 지도한다.

단원	8. 유리식과 무리식 8-1. 유리식의 계산 8-2. 무리식의 계산
교과서 내용	[유리식의 덧셈과 뺄셈] A , $B(B \neq 0)$, C가 다항식일 때 (1) $\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$ (2) $\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$ [유리식의 곱셈과 나눗셈] A, B, C, D가 다항식일 때 (1) $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$ (단, $B\neq 0$, $D\neq 0$) (2) $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$ (단, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$) [예제1-7] 분모를 유리화하여 무리식 $\frac{3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}$을 간단히 하여라. 풀이) 분모, 분자에 각각 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}$을 곱하면 $(\text{준식})=\frac{3(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}$ $=\frac{3(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-1})^2}=\frac{3(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})}{(x+2)-(x-1)}$ $=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}$
대수학 내용	<u>정리</u>. 정역 D에 대하여, 집합 $E=\{(a,b)\|a,b\in D, b\neq 0\}$위에 다음과 같이 정의된 관계 ~는 동치관계이다. $(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$ 이 동치관계~에 관하여 원소 $(a,b)\in E$를 포함하는 동치류를 $\frac{a}{b}$로 나타내고 이들 동치류 전체의 집합을 F로 나타내자. 즉, $F=\left\{\frac{a}{b}\mid a, b\in D, b\neq 0\right\}$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$

	이 때, 집합 F는 다음과 같이 정의된 덧셈 $+$와 곱셈 $\cdot$에 관하여 체를 이루고 체 F의 영원과 단위원은 각각 $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$이다. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ 이와 같이 정의된 체 F를 정역 D의 **분수체** 라고 한다. <u>정의</u>. 가환환 D가 정역 또는 체일 때, 다항식환 $D[x]$는 정역이다. 이 정역의 분수체를 $D(x)$로 나타낸다. 즉, $D(x)=\left\{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x)\in D[x], g(x)\neq 0\right\}$ 분수체 $D(x)$를 D위의 x에 관한 **유리식 체**라 하고, $D(x)$의 각 원소 $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad (f(x), g(x)\in D[x], g(x)\neq 0)$ 를 (x에 관한) **유리식**(rational expression)이라고 한다. $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{h(x)}{k(x)} \Leftrightarrow f(x)k(x)=g(x)h(x)$ $\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{h(x)}{k(x)}=\frac{f(x)k(x)+g(x)h(x)}{g(x)k(x)}$ $\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{k(x)}=\frac{f(x)h(x)}{g(x)k(x)}$ <u>정리</u>. 한 문자 x에 관한 식 중에서, $\sqrt[3]{x}$, $x^2+\sqrt{x^2+x}$, $\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2+1}}+x$, $\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+1}$ 와 같이 수나 미지수에 관한 거듭제곱과 거듭제곱근을 더하고 빼거나 곱하고 나누어 만든 식을 x에 관한 **무리식**이라 하고, 또 유리식과 무리식을 통틀어 **대수적 식**이라고 한다.
분석 및 지도상의 유의점	· 유리식의 집합의 대수적 구조는 유리수의 집합과 똑같으며, 덧셈, 곱셈에 관하여 체를 이루고 있고, 무리식의 성질은 제곱근의 근호 안이 양의실수인 경우의 무리수와 똑같은 구조를 가지고 있음을 직접 연산을 하는 것으로 이해할 수 있도록 지도한다.

단원	9. 방정식

	9-1. 이차방정식 9-2. 삼차방정식과 사차방정식 9-3. 연립방정식
교과서 내용	[이차방정식의 근과 계수와의 관계] 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ [삼차방정식과 사차방정식의 풀이 방법] x에 대한 다항식 $f(x)$의 차수가 삼차, 사차일 때, 방정식 $f(x)=0$을 각각 x에 대한 **삼차방정식, 사차방정식**이라고 한다. [예제1-8] 삼차방정식 $x^3+1=0$을 풀어라. 풀이) 좌변을 인수분해하면 $(x+1)(x^2-x+1)=0$ $\therefore x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$ 따라서, 구하는 근은 $x=-1$또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ [예제1-9] 사차방정식 $x^4-4x^3+9x^2-10x+4=0$을 풀어라. 풀이) $f(x)=x^4-4x^3+9x^2-10x+4$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 $f(x)=(x-1)(x^3-3x^2+6x-4)$ $g(x)=x^3-3x^2+6x-4$로 놓으면 $g(1)=0$이므로 $g(x)=(x-1)(x^2-2x+4)$ 그러므로 주어진 방정식은 $(x-1)^2(x^2-2x+4)=0$ $\therefore (x-1)^2=0$ 또는 $x^2-2x+4=0$ 따라서, $x=1$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}\,i$
대수학 내용	정의. 체 K가 체 F의 확대체일 때, 체 F위의 다항식 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$ 와 원소 $u\in K$에 대하여 $f(u)$는 다음과 같은 K의 원소를 나타낸다 $f(u)=a_nu^n+a_{n-1}u^{n-1}+\cdots+a_1u+a_0\in K$ 특히, $f(u)=0$일 때, 즉 $a_nu^n+a_{n-1}u^{n-1}+\cdots+a_1u+a_0=0$ 일 때, u를 K 안에서의 다항식 $f(x)$의 **근**(root) 또는 방정식

	$f(x)=0$의 근이라 하고 근을 **영점**(zero)이라고도 한다. <u>정의</u>. 체 F위의 다항식 $f(x)\in F[x]$, $\deg f(x)\geq 1$가 체 F의 적당한 확대체 K안에서 근 $u\in K$를 가질 때, $f(x)=(x-u)^m g(x)$, $g(u)\neq 0$ 인 정수 $m\,(m\geq 1)$과 다항식 $g(x)\in K[x]$가 존재한다. 이 때, m을 근 u의 **중복도**(multiplicity)라 하고 u를 $f(x)$의 **m 중근**이라고 한다 특히, $m=1$일 때 u를 $f(x)$의 **단근**(simple root)이라 하고, 또 $m\geq 2$일 때, u를 $f(x)$의 **중근**(multiple root)이라고 한다. <u>정의</u>. 체 F 위의 n차의 다항식 $f(x)$가 체 F의 확대체 K안에서 중복을 허락하여 n개의 근 $u_1, \cdots u_n$을 가질 때, 다음과 같은 D를 다항식 $f(x)$또는 방정식 $f(x)=0$의 **판별식**(discriminant)이라고 한다. $D=\prod_{i<j}(u_i-u_j)^2=\{(u_1-u_2)(u_1-u_3)\cdots(u_1-u_n)(u_2-u_3)\cdots(u_2-u_n)\cdots(u_{n-1}-u_n)\}^2$ <u>정리</u>. (이차다항식의 근의 공식) 복소수를 계수로 가지는 이차다항식 $f(x)=x^2+bx+c$는 복소수체 C안에서 두근 u_1, u_2를 가진다. 여기서, $u_1+u_2=-b$, $u_1u_2=c$이며, $f(x)$의 판별식은 $D=(u_1-u_2)^2=(u_1+u_2)^2-4u_1u_2=b^2-4c$ 이고 $f(x)$의 두 근은 $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2}$이다.
분석 및 지도상의 유의점	· 지도 시 방정식은 계수가 실수인 경우만 다루도록 한다.(계수가 복소수인 경우는 고등학교에서는 다루지 않는다.) · 방정식의 해를 복소수 범위까지 확장하여 다루도록 한다. · 삼차방정식과 사차방정식은 계수가 주로 정수이며, 유리수 범위에서 인수분해 되는 것만을 대상으로 다루도록 한다. · 부등식의 성질은 실수의 대소 관계의 기본 성질을 이용하여 이해하도록 지도한다. · 이차방정식의 근의 공식은 단순한 암기가 아니라 완전제곱식을 이용하여 유도할 수 있도록 한다.

	· 판별식은 이차방정식의 계수가 모두 실수일 때만 적용할 수 있음을 알게 한다. · 대수학의 기본 정리에 의하여 삼차방정식은 3개의 근, 사차방정식은 4개의 근이 존재하지만 학생들에게는 삼차방정식은 실근이 반드시 1개 이상 존재하지만, 사차방정식은 실근이 하나도 존재하지 않는 경우도 있다고 지도해야 한다.

B. 수학Ⅰ에서의 대수영역

고등학교 교육과정 중 '수학 Ⅰ'의 지수와 로그에서는 지수, 로그, 행렬에서는 행렬과 그 연산, 연립이차방정식과 행렬, 수열에서는 등차수열과 등비수열, 여러 가지 수열, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도에 대한 내용들을 현 고등학교 교과서에서 대수학의 내용이 어떻게 서술되었는지 비교 분석해 보았다.

1. 7차 수학교육과정 내용체계

a. <표 2> 수Ⅰ에서 대수영역 체계표

단계	영역	단원	내용
수학Ⅰ	대 수	1. 지수와 로그	1-1. 지수
			1-2. 로그
		2. 행 렬	2-1. 행렬과 그 연산
			2-2. 연립일차방정식과 행렬
		3. 수 열	3-1. 등차수열과 등비수열
			3-2. 여러 가지 수열
			3-3. 수학적귀납법
			3-4. 알고리즘과 순서도

b. 내 용

(가) 지수와 로그

[1] 지 수

① 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

② 지수가 유리수까지 확장될 수 있음을 이해한다.

③ 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 직관적으로 이해한다.

④ 지수의 법칙을 이해하고 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

[2] 로 그

① 로그의 뜻과 그 성질을 이해한다.

② 상용로그의 뜻을 알고, 지표와 가수의 성질을 이해하며 이를 활용할 수 있다.

(나) 행 렬

[1] 행렬과 그 연산

① 수량을 직사각형 모양으로 나타낼 수 있는 경우를 찾아보고, 행렬의 뜻을 이해한다.

② 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 정의를 알고, 그 연산을 할 수 있다.

③ 두 행렬의 곱이 단위행렬이 되는 경우를 찾아보고, 역행렬의 뜻을 안다.

④ 이차정사각행렬의 역행렬을 구할 수 있다.

[2] 연립일차방정식과 행렬

① 미지수가 2개인 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있다.

② 역행렬을 이용하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있다.

(다) 수 열

[1] 등차수열과 등비수열

① 등차수열의 뜻을 알고 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.

② 등비수열의 뜻을 알고 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.

[2] 여러 가지 수열

① $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

② 여러 가지 수열의 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.

③ 여러 가지 수열에 관한 문제를 해결할 수 있다.

[3] 수학적 귀납법

① 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.

② 수학적 귀납법을 이용하여 자연수 n에 관하여 참인 명제를 증명할

수 있다.

[4] 알고리즘과 순서도

① 알고리즘과 순서도의 뜻을 알고, 그 필요성을 이해한다.

② 간단한 문제 해결을 위한 알고리즘을 작성하여 순서도를 만들 수 있다.

2. 수학Ⅰ 교과서에서의 대수영역 내용 분석

단원	1. 지수와 로그 1-1. 지수 1-2. 로그
교과서 내용	[지수법칙(실수 지수)] $a>0$, $b>0$이고 x , y가 실수 일 때 (1) $a^x b^y = a^{x+y}$ (2) $(a^x)^y = a^{xy}$ (3) $(ab)^x = a^x b^x$ (4) $a^x \div a^y = a^{x-y}$ [로그의 정의] $a>0$, $a \neq 1$이고 $b>0$일 때 $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ [로그의 성질] $a>0$, $a \neq 1$, $x>0$, $y>0$이고 k가 임의의 실수일 때 (1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ (2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (4) $\log_a x^k = k\log_a x$
대수학 내용	정의. Galois 체 F_q에서 α가 원시원소일 때, $F_q{}^* = <\alpha> = \{\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \cdots \alpha^{q-2}\}$, $\alpha^{q-1} = 1$ 이므로 각 원소 $u \in F_q{}^*$에 대하여 $u = \alpha^i$, $0 \le i \le q-2$ 인 정수 i를 (α를 밑으로 가지는) u의 **이산로그**(discret logarithm) 또는 지수(index)라 하고 이것을 $ind_{\alpha} u$로 나타낸

	다.
분석 및 지도상의 유의점	· $n \geq 3$인 자연수일 때, a의 n제곱근 중에는 실수 뿐 만 아니라 허수도 있음을 유의하도록 한다. · 거듭제곱근의 성질은 $a>0$, $b>0$일 때에만 성립함을 유의하도록 한다. · 상용로그는 상용로그표를 이용하여 수치 계산을 할 필요성은 많지 않으므로 복잡한 계산 기능의 숙달보다 계산 원리를 이해하는 데에 초점을 두어 지도하도록 한다.

단원	2. 행렬 2-1. 행렬과 그 연산 2-2. 역행렬과 연립일차방정식
교과서 내용	<u>[행렬의 덧셈의 성질]</u> 같은 꼴의 행렬 A, B, C에 대하여 (1) 교환법칙 $A+B=B+A$ (2) 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$ (3) $A+O=O+A=A$ (O는 덧셈에 대한 항등원) (4) $A+(-A)=(-A)+A=O$ ($-A$는 A의 덧셈에 대한 역원) (5) $A+(-B)=A-B$ <u>[행렬의 곱셈의 성질]</u> 합과 곱이 정의되는 행렬 A, B, C에 대하여 (1) 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$ (2) 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ (3) 곱의 실수배 $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ (단 k는 실수) <u>[행렬의 영인자]</u> 정사각행렬 A, B에 대하여 $A \neq O, B \neq O$이면서 $AB \neq O$ 인 경우가 있다. 즉, 행렬에서는 $AB=O$이지만 A와 B가 모두 영행렬이 아닌 경우가 있다. <u>[이차 정사각행렬의 역행렬]</u> 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 A^{-1}는 다음과 같다. (1) $ad-bc \neq 0$이면 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

	(2) $ad-bc=0$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다. [예제B-1] 이차 정사각행렬 A, B, P가 있다. P의 역행렬이 존재하고 $B=PAP^{-1}$일 때, 다음이 성립함을 증명하여라. $$B^3=PA^3P^{-1}$$ 증명) $B^3=(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})$ $=PA(P^{-1}P)A(P^{-1}P)AP^{-1}$ $=PAEAEAP^{-1}$ $=PAAAP^{-1}$ $=PA^3P^{-1}$
대수학 내용	<u>정리</u>. 단위원 1을 가진 가환환 R 위의 n차의 행렬 전체의 집합을 $Mat_n(R)$라고 할 때, $Mat_n(R)$는 다음과 같이 정의된 덧셈과 곱셈에 관하여 단위원 I를 가진 환을 이룬다. $[a_{ij}]_{n\times n}=[b_{ij}]_{n\times n} \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}\ (1\le i, j\le n)$, $[a_{ij}]_{n\times n}+[b_{ij}]_{n\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times n}$ $[a_{ij}]_{n\times n}[b_{ij}]_{n\times n}=[c_{ij}]_{n\times n}$ 여기서 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 환 $Mat_n(R)$를 R위의 n차의 전 행렬 환(full matrix ring)이라고 한다. 그리고 $Mat_n(R)$의 부분환을 R위의 n차의 행렬 환 이라고 한다. <u>정의</u>. 단위원을 가진 가환환 R위의 행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$에 대하여 다음과 같이 정의된 $\det A$을 행렬 A의 **행렬식**(determinant)이라고 한다. $$\det A=\sum_{\sigma}(sgn\,\sigma)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$ 여기서 $\sum$은 모든 치환 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\in S_n$전체에 대한 합을 나타내고 또 σ가 우치환이면 $sgn\,\sigma=1$이고 σ가 기치환이면 $sgn\,\sigma=-1$이다. 행렬 A의 행렬식 $\det A$를 $\lvert A\rvert$로 나타내기도 한다. <u>정의</u>. 단위원을 가진 가환환 R위의 행렬 $A\in Mat_n(R)$에 대하여 $$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

	인 행렬 $A^{-1} \in Mat_n(R)$가 존재할 때, 즉 A가 $Mat_n(R)$의 단원일 때, A를 **정칙행렬**이라 하고 A^{-1}를 A의 **역행렬**이라고 한다. 정의. 체 F위의 n차의 두 행렬 A , $B \in Mat_n(F)$에 대하여 $B = P^{-1}AP$ 인 정칙행렬 $P \in Mat_n(F)$가 존재할 때, A와 B는 서로 **닮은 행렬**(similar matrix)이라고 한다.
분석 및 지도상의 유의점	· 행렬의 곱셈의 성질에는 수의 곱셈의 성질과 다른 점이 있음을 이해하게 하고, 이를 통해 연산에 대한 이해의 폭을 넓히도록 한다. · 행렬의 연산은 덧셈, 뺄셈, k배에 대하여 정의되어 있으므로 하나의 벡터 공간을 이루지만 교환법칙이 성립하지 않으므로 가환군이 아님을 학생들에게 수를 대입하여 직접 계산해서 알 수 있도록 한다. · 실수의 집합에는 영인자가 없으나, 행렬의 집합에는 영인자가 있다는 것을 행렬을 직접 연산해서 알 수 있도록 지도 한다.

단원	3. 수열 3-1. 등차수열과 등비수열 3-2. 여러 가지 수열 3-3. 수학적 귀납법 3-4. 알고리즘과 순서도
교과서 내용	[계차수열을 이용한 수열 $\{a_n\}$의 일반항] 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$이라고 하면 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$ [예제B-2] 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라. $3, 4, 7, 12, 19, \cdots$ 풀이) 주어진 수열의 계차수열 $\{b_n\}$은 $1, 3, 5, 7, \cdots$이므로 일반항 b_k가 $b_k = 2k-1$인 등차수열이다. 따라서 주어진 수열의 일반항 a_n은 $a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 3 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$

	$= n^2 - 2n + 4 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$
대수학 내용	<u>정의</u>. 단위원 1을 가진 가환환 R와 부정원 x에 대하여 $$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$ 과 같은 꼴을 R위의 (x에 관한) 형식적 멱급수(formal power series)라 하고 이러한 R위의 형식적 멱급수 전체의 집합을 $R[[x]]$로 나타낸다. <u>정리</u>. 단위원 1을 가진 가환환 R에 대하여 집합 $R[[x]]$는 다음과 같이 정의된 덧셈과 곱셈에 관하여 단위원을 가진 가환환을 이룬다. $$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$ $$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$ $$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \text{ ,여기서 } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$ 가환환 $R[[x]]$를 R 위의 **형식적 멱급수 환** 이라고 한다.
분석 및 지도상의 유의점	· $\sum$의 계산에서 $\sum_{k=1}^{n} (a_k b_k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ $\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots b_n)$이므로, $\sum_{k=1}^{n} (a_k b_k) \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k$임을 이해하도록 설명한다.

C. 수학 Ⅱ에서의 대수영역

‘수학 Ⅱ’의 내용은 ‘대수’영역에서 방정식과 부등식, ‘해석’ 영역에서 함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법과 적분법, ‘기하’ 영역에서 이차곡선, 공간도형, 공간좌표, 벡터 등으로 구성된다. 이 장에서는 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생들이 이수하기에 알맞은 과목인 ‘수학 Ⅱ’가 실제 대학에서 배우는 대수학의 내용이 고등학교 교과서에서 어떻

게 서술되었는지 분석해 보았다.

1. 7차 수학교육과정 내용체계

a. <표 3> 대수영역 체계표

단계	영역	단원	내용
수학Ⅱ	대 수	1. 방정식	1-1. 분수방정식
			1-2. 무리방정식
		2. 부등식	2-1. 삼차부등식과 사차부등식
			2-2. 분수부등식

b. 내 용

(가) 방정식

[1] 분수방정식

① 분수방정식의 뜻을 알고, 이를 풀 수 있다.

② 분수방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

[2] 무리방정식

① 무리방정식의 뜻을 알고, 이를 풀 수 있다.

② 무리방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

(나) 부등식

[1] 삼차부등식과 사차부등식

① 간단한 삼차부등식과 사차부등식을 풀 수 있다.

[2] 분수부등식

① 분수부등식을 풀 수 있다.

② 분수부등식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

2. 수학 Ⅱ에서의 대수영역 내용 분석

단원	1. 방정식과 부등식 1-1. 방정식 1-2. 부등식
교과서	[예제C-1] 다음 분수방정식을 풀어라.

내용	$$\frac{1}{x-3}-1=\frac{6}{x^2-9}$$ 풀이) 주어진 분수방정식의 양변에 분모의 최소공배수 x^2-9를 곱하고 정리하여 풀면 다음과 같다. $$x+3-(x^2-9)=6 \quad , \quad x^2-x-6=0$$ $$\therefore\ x=3 \text{ 또는 } x=-2$$ 그런데 $x=3$은 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하므로 근이 될 수 없다. 따라서 구하는 해는 $x=-2$이다. [예제C-2] 부등식 $x^3-6x+11x-6>0$을 풀어라. 풀이) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$이라고 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면 다음과 같다. $$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$ 여기서 방정식 $f(x)=0$의 근 $x=1$, $x=2$, $x=3$을 경계로 하여 구간을 나눈 다음 $f(x)$의 부호를 조사하면 주어진 부등식을 만족시키는 x값의 범위는 다음과 같다. $$\therefore\ 1<x<2 \text{또는 } x>3$$
대수학 내용	<u>정리</u>. (삼차다항식의 근의 공식 , Cardano 의 공식) 복소수를 계수로 가지는 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에 대하여 $g(x)=f(x-\frac{a}{3})$라 하고 또 D를 이 두 다항식의 판별식이라고 하자. 이 때, $$g(x)=x^3+qx+r \quad (q=b-\frac{a^2}{3}\ ,\ r=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c)$$ $$D=-4q^3-27r^2$$ 이고, 복소수체 C안에서 $g(x)$의 세 근이 u_1, u_2, u_3이면 $f(x)$의 세 근은 $u_1-\frac{a}{3}$, $u_2-\frac{a}{3}$, $u_3-\frac{a}{3}$이다. 그리고 $d=-\frac{D}{108}=\frac{q^3}{27}+\frac{r^2}{4}$이라 하고 두 복소수 α, β를 $$\alpha\beta=-\frac{q}{3}\ ,\ \alpha^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{d}\ ,\ \beta^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{d}$$ 가 되도록 α, β를 택하면, $g(x)$의 세 근은 다음과 같다. $$\alpha+\beta\ ,\ \alpha\omega+\beta\omega^2\ ,\ \alpha\omega^2+\beta\omega \qquad (\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2})$$

	<u>정리</u>. (사차다항식의 근의 공식) 복소수를 계수로 가지는 사차다항식 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여 $g(x)=f(x-\frac{a}{4})$라고 하면, $g(x)$는 $g(x)=x^4+qx^2+rx+s$와 같은 꼴이고 또 복소수체 C안에서 $g(x)$가 네 근 u_1, u_2, u_3, u_4를 가지면 $f(x)$는 네 근 $u_1-\frac{a}{4}$, $u_2-\frac{a}{4}$, $u_3-\frac{a}{4}$, $u_4-\frac{a}{4}$를 가진다.
분석 및 지도상의 유의점	· 분수방정식, 무리방정식을 변형한 정방정식이 항상 무연근을 가지는 것은 아니며, 무연근이 나오는 이유와 무연근을 제외하는 과정을 강조하여 지도하도록 한다. · 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해가 되는 간단한 삼차방정식, 삼차부등식, 사차방정식, 사차부등식만을 다루도록 한다.

Ⅳ 고등학교 수학에서 대수영역지도의 올바른 지도방안

A. 7차 교육과정과 개정교육과정에서의 대수영역 비교분석

현행 교육과정과 기본적인 틀이 다르나, 현행 '수학Ⅰ' 및 '확률과 통계'와 개정안 '수학Ⅰ' 및 '미적분과 통계기본'이 비교가능하고, 현행 '수학Ⅰ','수학Ⅱ'와 '미분과 적분' 및 '확률과 통계'를 통합한 내용은 개정안 '수학Ⅰ','수학Ⅱ','적분과 통계','기하와 벡터'를 통합한 내용과 비교가능하다.

<표 4> 제7차 교육과정, 개정교육과정의 고등학교 1학년 내용 비교표

제 7차 교육과정-10단계			개정교육과정-고등학교1학년	
영역	내 용		영역	내 용
수와 연산	집합의 연산 법칙	▸집합의 연산법칙	수와 연산	▸집합의 연산법칙 ▸명제와 조건 ▸명제의 역, 이, 대우 ▸필요조건과 충분조건 ▸실수의 연산 성질, 대소 관계 ▸복소수의 뜻과 기본 성질 ▸복소수의 사칙계산
	명제	▸명제의 뜻과 참, 거짓의 판별 ▸명제의 역, 이, 대우 ▸필요조건과 충분조건		
	실수	▸실수의 연산에 관한 성질 ▸실수의 대소 관계		
	복소수	▸복소수의 뜻과 연산 ▸복소수의 기본 성질		
문자와 식	다항식과 그 연산	▸다항식의 덧셈과 뺄셈 ▸다항식의 곱셈과 나눗셈	문자와 식	▸다항식의 연산, 항등식, 나머지정리 ▸다항식의 인수분해, 약수와 배수 ▸유리식, 무리식의 계산 ▸이차방정식의 판별식, 근과 계수와의 관계 ▸간단한 삼차방정식과 사차방정식 ▸연립방정식
	나머지 정리	▸항등식 ▸나머지 정리		
	인수분해	▸인수분해		
	약수와 배수	▸식의 약수와 배수, ▸최대공약수와 최소공		

		배수		
	유리식과 무리식	▸유리식과 무리식의 뜻과 계산		
	방정식	▸이차방정식의 실근과 허근 ▸이차방정식에서 판별식, 근과 계수의 관계 ▸간단한 삼차방정식과 사차방정식 ▸미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식		▸부등식의 성질과 활용 ▸절댓값을 포함한 일차부등식 ▸이차부등식과 연립이차부등식 ▸절대부등식
	부등식	▸부등식의 성질 ▸절대값을 포함한 일차부등식 ▸이차부등식과 연립이차부등식 ▸간단한 절대부등식		

<표 5> 제7차 교육과정, 개정교육과정의 수학Ⅰ 내용 비교표

제 7차 교육과정-수학Ⅰ			개정교육과정-수학Ⅰ	
영역	내 용		영역	내 용
대수	지수와 로그	▸지수 ▸로그	지수함수와 로그함수	▸지수 ▸지수함수와 그 그래프 ▸지수방정식과 지수부등식
				▸로그 ▸로그함수와 그 그래프 ▸로그방정식과 로그부등식
	행렬	▸행렬과 그 연산 ▸연립일차방정식과 행렬	행렬과 그래프	▸행렬과 그 연산 ▸연립일차방정식과 행렬 ▸그래프와 행렬

	수열	▸등차수열과 등비수열 ▸여러 가지 수열 ▸수학적 귀납법 ▸알고리즘과 순서도	수열	▸등차수열과 등비수열 ▸여러 가지 수열 ▸수학적 귀납법 ▸알고리즘과 순서도
-이산수학의 그래프 이론을 도입하여 행렬과 그래프로 변경(내용의 적정화) -대수영역과 해석영역에 각각 제시된 내용을 통합하여 지수함수와 로그함수라는 영역으로 변경함.(내용의 연계성)				

<표 6> 제7차 교육과정, 개정교육과정의 수학Ⅱ 내용 비교표

제 7차 교육과정-수학Ⅱ			개정교육과정Ⅱ	
영역	내 용		영역	내 용
대수	방정식	▸분수방정식 ▸무리방정식	방정식	▸분수방정식 ▸무리방정식
	부등식	▸삼차부등식과 사차부등식 ▸분수부등식	부등식	▸삼차부등식과 사차부등식 ▸분수부등식

B. 대수영역의 올바른 지도방안

이제 까지 대수적 구조인 군, 환, 체에 대한 개념과 현 고등학교 수준에서는 그러한 대수적 구조가 어떻게 표현되어 제시되었는지 교과서를 비교하여 구체적인 예를 고등학교 수학교과서에 수록된 예제들을 중심으로 제시하였다. 교과서에서 수록된 예제들을 통하여 알 수 있듯이 고등학교 학생들은 군, 환, 체 등의 대수적 구조에 대한 직접적인 용어는 학습하지 않았지만 실제로 군, 환, 체 등이 이루고 있는 대수적 구조를 학습하고 있는 것을 알 수 있었다.

고등학교 수학 교과내용에서는 대수적 구조에 대하여 연산에 대하여 닫혀있음, 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙, 항등원, 역원 등의 내용에서 학생들로 하여금 일반화된 연산이 아닌 사칙연산으로 일의적인 연산에 관해서만 다루는 것으로 지도 되고 있음을 알 수 있었다. 또한 대수적 구조는 교과서 내용에서는 연계성이 많이 제시되고 있었지만 현행 고등학교 수학교육이 입시 위주의 교육이다 보니 기본 개념이나 원리, 전체적인 수학적 구조를 파악하는 교육은 소홀해지고 문제를 풀이할 수 있는 공식화된 문제해결능력과 문제 유형만을 암기하고 풀이하는 교육이 되어버려 현행 고등학교 수학 교과 내용이

대학에서의 대수학 분야와 전혀 다른 것처럼 알고 있다. 교사 역시 많은 학생들에게 구조를 이해하게 하고 단지 암기가 아닌 여러 방법을 통한 문제 해결을 하기에는 대학입시 위주의 교육에서 진도 상의 문제 때문에 어쩔 수 없이 문제 풀이 위주의 수업진행을 하게 되는 경우가 많다. 이것은 대수학 분야에서 뿐만 아니라 다른 수학 분야에서도 마찬가지의 문제점이 발생하고 있다.

학생들은 실제로 초등학교에서부터 고등학교까지 수학에서의 구조를 자연스럽게 익혀왔다. 초등학교에서 자연수와 분수를 배움으로써 유리수를 배우고 사칙연산에 대한 계산력 향상을 위한 연습을 하고 중학교과정인 7단계에서야 수학적 구조를 가장 작은 집합에서부터 학습하기 시작한다. 그리고 10단계까지 수에 대한 전체적인 구조를 배운 뒤 연산에 대하여 닫혀있음과 연산법칙에 대하여 배우게 된다. 하지만 학생들은 이미 배운 집합들과 자연스럽게 익혀온 연산에 대한 법칙을 새삼스레 증명하고 점검하는 것이 익숙하지 않고 또 그것이 시험에 출제되지 않아 대수롭지 않게 넘겨버려 실제로 그것이 중요한 수학적 구조 요소가 된다는 사실을 전혀 인지하지 못하는게 대부분이다.

다음은 위의 문제점을 해결하는데 도움이 되고자 교육과정 해설서에 따라 대수적 구조의 지도방안과 지도상의 유의점을 제시한다.

<지도 방안>

첫째, 교육과정에서 주로 다루는 연산은 사칙연산에 한하여 제시하지만, 다른 종류의 연산들을 교사가 보여줌으로써 연산에 대한 일반화를 알게 하는 것도 대수적 이해에 도움이 될 것이다.

둘째, 연산에 대하여 실수, 복소수, 유리수, 무리수 집합 등 연산에 관하여 성립하는 닫혀있음, 연산법칙을 비교하여 스스로 판단할 수 있게 지도하고 새로운 집합을 주어줘 기존의 알고 있는 대수적 구조와 비교하여 새로운 집합의 대수적 구조를 스스로 파악할 수 있게 한다.

셋째, 대수적 구조에서 군의 구조를 이용하여 간단한 일차방정식의 해를 구할 수 있는 원리를 제시하여 항등원과 역원이 방정식의 풀이에 활용되는 중요성에 대하여 이해할 수 있게 한다.

넷째, 정수의 소인수분해와 다항식의 인수분해가 같은 성질을 가지고 있다는 것을 지도하여 정수의 집합과 다항식의 집합이 모두 정역의 대수적 구조를 갖고 있으므로 학생들에게 두 집합의 유사한 대수적 구조를 이해할 수 있도록 한다.

다섯째, 행렬은 다른 집합과 같이 덧셈, 뺄셈, 곱셈이 정의되지만 수집합의 경우와 달리 교환법칙이 성립하지 않는 구조를 확실하게 숙지시켜야 한다.

<지도상의 유의점>

첫째, 학생들이 수학적 개념들간의 상호 관련성이 있다는 것을 알게 하고, 정의와 용어의 뜻을 정확히 이해할 수 있게 한다.

둘째, 대수적 구조를 단계적으로 이해시켜 수학내의 대수학 외의 분야와의 연계성을 이해 할 수 있게 한다.

셋째, 생활주변이나 수학외의 다른 교과에서 접할 수 있는 대수학과 관련된 문제를 통해 수학에 대한 흥미와 관심을 갖게 하고, 수학에 대한 현실적인 필요성을 느낄 수 있도록 적절한 예를 제시하도록 한다.

넷째, 수 또는 식 체계 지도 시 직관적인 예만을 강조하거나 대수적 구조를 지나치게 강조하지 않도록 하고 대수적 구조를 이해시키되, 고등학교의 수학교육의 목표를 벗어나지 않는 범위에서 수학적 사고를 할 수 있도록 한다.

따라서 기본개념과 구조적인 부분을 이해하기 위해서는 구체적이고 간단한 예를 제시하여 구조적인 부분의 중요성을 언급하고 실생활에 적용할 수 있는 다양한 문제들과 함께 실생활에서 그러한 수학적 구조의 역할을 설명한다면 학생들로 하여금 실제 수학을 공부하는데 있어서 구조를 단순히 암기하기 보다는 이해하고 구조에 대한 중요성을 인식할 수 있을 것이다.

또한 2009학년도부터 시행되는 7차 수정 고시안에서의 수학교과 내용에서도 대수영역은 7차와 큰 차이를 보이지 않고, 7차 수정 고시안의 목표에 따라 수학 학습부담 경감을 하려 하였기 때문에 과도한 수학적인 내용보다는 전체적인 흐름과 학년에 따라 구조화된 수학적 사고를 토대로 한 새로운 구조를 이해할 수 있게 지도하여야 할 것이다.

Ⅴ. 결 론

본 논문은 제 3차 교육과정 때부터 강조되었던 수학적 구조에 대해 그 본래의 의미를 되새겨 보고자, 대학에서의 대수학 부분과 제 7차 교육과정의 고등학교 교과과정에서 나타나는 대수적 구조를 비교하여 살펴보았다.

본문에 밝힌 바와 같이 고등학교에서 배우는 수학의 내용은 대수적 구조와 많은 연계성을 가지고 있다. 하지만 대다수의 학생들은 교과서의 내용을 배울 때 정의를 바탕으로 하여 개념을 파악하기보다는, 대수의 여러 규칙과 절차를 암기하여 공식에 대입하고 기계적인 학습을 하고 있다. 하지만 7차 교육과정에서 중요시 하는 문제제기와 문제 해결력의 신장을 위해서는 기본 개념과 원리를 이해하고, 그 위에서 문제를 해결하는 능력을 키우는 것이 필수적으로 요구된다. 만약, 기본개념과 원리를 이해하지 못하고 단순히 암기에 의존하는 방법으로 문제를 해결한다면 특정한 경우의 문제는 해결할 수 있을지 모르지만, 새로운 문제에 부딪혔을 때 이전의 문제 해결 경험을 바탕으로 하여 그 문제를 분석하고 구조를 파악하는 등의 일은 거의 불가능 할 것이다. 또한 실생활에서의 수학적 사고가 필요한 문제 역시 이러한 구조를 이해하지 못하고 있다면 해결을 한다하더라도 폭넓은 사고를 통하여 많은 문제를 해결해 내진 못할 것이다.

이를 조금이나마 해결하고자 대수 영역을 지도함에 있어서 구체적인 제안을 하면 실제 수업지도 시, 단원 학습에 들어가기 전에 앞으로 배울 수학적 구조와 전 단계에서 배웠던 수학적 구조를 비교하여 지도한다면 앞으로 배울 소단원 학습에 더욱 흥미를 가지고 수학적 구조를 인지하는데 도움이 될 것이다. 또한 단원 학습이 마무리 되고 난 뒤에는 그 단원의 수학적 구조가 실제 어떻게 적용 되었는지 확인한다면 학생들이 전반적인 수학적 구조 파악을 하는데 한층 도움이 될 것이다.

지금까지 고등학교 학생들이 수학 교과에서 학습해야 할 내용에 대하여, 효율적이고 체계적으로 학습할 수 있도록 하기 위해, 도움이 되는 지도 방안을 모색해 보았다. 교과서 저자나 교사들의 계속적인 노력과 연구가 진행되어 수학교육이 개선되고 실제 고등학교 학생들이 올바른 수학을 배우고 수학적 구조를 이해하는데 더욱 힘써야 되겠다.

참고 문헌

교육부. 『제 7차 수학과 교육과정』교육부 고시 제 1997-15호[별책8호]

김혜경. “제 7차 수학과 교육과정에서의 대수적 구조에 대한 지도 방안 연구” 단국대학교 교육대학원 석사학위논문, 2006.

김순원. “대수영역의 분석 및 학습지도에 관한 고찰-10단계를 중심으로” 조선대학교 교육대학원 석사학위논문, 2006.

박성수. “고등학교 수학 교과과정에서 대수영역의 지도방안 및 연구”-대학과정에서 대수적 구조를 학습하기 위한 올바른 고등학교 수학 교육을 위한 제언- 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문, 2006.

박승안. 김응태. 『현대대수학』제 6판, 서울: 경문사, 2006.

박혜향. 『박혜향과 함께하는 수학교육론 이야기』제 3판, 서울: 열린교육, 2008.

신은정. “고등학교 수학 교과의 대수적 구조 지도연구” 홍익대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2002.

이강섭외. 『10-가』서울:(주)지학사, 2003.

이강섭외. 『수학Ⅰ』서울:(주)지학사, 2003.

이강섭외. 『수학Ⅱ』서울:(주)지학사, 2003.

이강섭외. 『미분과 적분』서울:(주)지학사, 2003.

우성수외. 『10-가』서울: 대한교과서,

우성수외. 『수학Ⅰ』서울: 대한교과서,

우성수외. 『수학Ⅱ』서울: 대한교과서,

최상기외. 『10-가 교사용 지도서』서울: 고려출판, 2002.

최상기외. 『수학Ⅰ 교사용 지도서』서울: 고려출판, 2002.

최상기외. 『수학Ⅱ 교사용 지도서』서울: 고려출판, 2002.

황혜정외. 『수학교육학신론』서울: 문음사,2007.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20058243	과 정	석사
성 명	한글: 이 수 희 한문: 李 受 憙 영문: Lee Soo-Hee				
주 소	광주광역시 남구 백운2동 대주아파트 101동 303호				
연락처	E-MAIL: dltngml35@nate.com				
논문제목	고등학교 수학의 대수영역에 대한 연구 영문 :A Study on the Algebra part in high school mathematics				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2008년 8월 일

저작자: 이 수 희 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하