creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000236309

2008년 2월

教育學碩士(數學教育)學位論文

中學校 課程에서 圖形領域의 指導法에 관한 研究

-van Hiele 理論을 中心으로-

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

朴 智 潤

中學校 課程에서
圖形領域의 指導法에 관한 研究

-van Hiele 理論을 中心으로-

A study on the teaching method of figure
in the middle school curriculum

2008년 2월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

朴 智 潤

中學校 課程에서
圖形領域의 指導法에 관한 研究

-van Hiele 理論을 中心으로-

指導敎授 韓 承 局

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 提出함.

2007년 10월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

朴 智 潤

朴智潤의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2007년　12월

朝鮮大學校 敎育大學院

- 목　　차-

ABSTRACT

Ⅰ. 서　론

A. 연구의 필요성 및 목적 ····· 1

B. 연구문제 ····· 2

C. 연구의 범위 및 제한점 ····· 2

Ⅱ. 이론적 배경

A. van Hiele의 이론적 배경 ····· 4

B. van Hiele의 기하 학습 수준 이론 ····· 5

C. van Hiele의 기하 학습 수준 이론의 특징 ····· 8

D. van Hiele의 교수·학습 단계 ····· 9

E. van Hiele 이론의 수학 교육학적 의미 ····· 12

Ⅲ. *van Hiele* 이론에 기초한 교과서 내용 분석

A. 분석대상 ····· 14

B. 수준분석에 대한 규준 설정 ····· 15

C. van Hiele 이론에 기초한 제7차 교과서 내용 수준 분석 ····· 19

D. 일반적 수업 지도안 ····· 31

E. van Hiele 이론을 적용한 수업 지도안 ····· 33

Ⅳ. 결론 및 제언 ····· 35

참고문헌 ····· 37

ABSTRACT

A study on the teaching method of figure in the middle school curriculum

Park Ji-youn
Advisor : Prof. Han Seung-gook Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

Although geometry is used and taught in middle school course more than other classes, many students still have difficulty. van Hiele's theory is explaining the cause which students have difficult in the geometry part. The Model of the geometric thinking and the level of studying which he proposes not only reveal the advancement degree on geometric level of the students but also suggest method which will help the improvement of their level.

This study checks up the van hiele's level in the geometry part from middle school textbook and seeks the efficient teaching method by applying van Hiele's theory. Therefore, this study has a purpose that the students who have a difficulty in geometry part are interested in geometry and understand availability of the mathematics.

Ⅰ. 서　　론

A. 연구의 필요성 및 목적

수학에서 기하영역은 학문으로서 가장 오래된 역사를 가지고 있다. 기하학이 그리스 수학의 근간으로 자리 잡은 이래 20세기 이전부터 기하학은 수학교과의 핵심과목이 되었다. 수학의 발달은 기하학의 연구로부터 비롯되었다고 할 수 있다.[5] 기하학은 자연 세계에서 일어나는 현상을 연구하는 분야에서 큰 역할을 담당하게 되었을 뿐 아니라 확고한 논리적 기초를 세워 나감으로서 그리스 수학 이후 2000년이 넘게 논리적인 추론방법을 이용한 유일한 수학분야가 되어왔다. 따라서 기하교육은 논리적 사고 능력을 발달시키고 실세계의 공간에 대한 직관력을 발달시키기 위해서 이루어지는 것으로 수학적 사고를 길러주는데 가장 중요한 역할을 하게 되었다.[11]

수학교육에 있어서 도형의 영역은 실제 수업에서 다루고 있는 분량을 보아도 매우 중요한 영역이다. 하지만 학교에서의 기하교육은 학생들의 사고능력을 키워주기 보다는 주입식 교육에 치중해 있으며 학생들의 수준에 비해 지나치게 엄밀한 기하를 가르치고 있어서, 학생들은 증명을 왜 하는지 제대로 인식하지 못하고 있으며 증명과정을 이해하는 것조차 어려움을 겪고 있다.

이처럼 학생들이 기하학습에서 겪는 어려움과 문제점을 밝혀내기 위해 연구했던 van Hiele 부부는 기하학의 인지 단계를 5수준으로 나누고, 학생들은 기하학습에서 일정한 발달 단계를 거치며 전 단계를 거치지 않고는 다음 수준으로 넘어갈 수 없다고 하였다. 또, 어떻게 하면 학생들이 어떤 수준에 빨리 도달할 수 있도록 도와 줄 것인가에 대해 기하의 5단계 지도 방법을 제시하였다. 이 이론은 1960년대에 소련 수학교육자들의 집중적인 연구와 실험을 통하여 그 타당성을 인정받았으며, 기하교육과정에 적용되는 성공적인 결과

를 얻었다.

van Hiele이 제안한 기하학적 사고의 모델과 학습의 단계는 학생의 기하수준의 발달 정도를 밝혀주고 학생들의 수준 향상을 도울 방법을 시사해 준다. 학생들의 기하 수준 발달에 있어서 생물학적 성숙보다는 교수·학습이 더 중요한 요소이다. 많은 연구들이 학생들의 도형의 이해를 평가하는데 van Hiele 이론이 적합함을 강조한다. 또한, 학습 자료와 방법론이 수준에 맞게 설계되었을 때, 수준 향상을 촉진 시킬 수 있음을 보였다.[13]

본 논문은 van Hiele의 이론을 통해 중학교 수학교과서의 도형영역을 van Hiele 교수·학습 5단계에 따라 분석하여 효율적인 지도방안을 탐색하고자 한다. 그래서 도형에서 어려움을 겪는 학생들에게 흥미를 느끼게 하고 수학의 유용성을 인식하게 하는데 목적을 두고 있다.

B. 연구문제

본 논문에서 알아보고자 하는 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 제7차 수학과 교육과정의 중학교 교과서 단원 중 도형영역을 van Hiele의 이론을 근거로 하여 교과서의 수준을 분석한다.

둘째, van Hiele 의 교수·학습 5단계에 근거하여 효과적인 지도안을 제시한다.

C. 연구의 범위 및 제한점

본 논문의 연구 범위는 제 7차 교육과정의 교과서 7-나, 8-나, 9-나 중에서 도형과 측정 영역으로 하였으며 다음과 같은 제한점을 가지고 있다.

첫째로 교과서를 분석하였을 때 그 기본은 van Hiele의 사고 수준을 바탕으로 하였으나 연구자의 주관이 많이 개입되었으므로 객관성의 문제에 영향

을 줄 수 있고, 특정 교과서를 선택하여 분석하였으므로 객관성의 문제에 영향을 줄 수 있고, 다른 교과서를 선택할 때 수준의 차이가 있을 수 있다.

둘째로 본 연구는 van Hiele 이론을 적용해 고안한 교수·학습 과정안을 실제수업에 적용하지 못했으며, 학생들의 수준에 적합함을 검증하지 못했다.

셋째로 수업 방법들이 교육현장에서 충분히 활용될 수 있기에 고안한 교수·학습 과정안이 타당성이 있다고는 말할 수 없다.

Ⅱ. 이론적 배경

*A. van Hiele*의 이론적 배경

1950년대 네덜란드 Lycèe의 초임 부부 수학교사인 Pierre Marie van Hiele과 Dina van Hiele Geldof는 교사인 자신이 증명을 열심히 지도함에도 불구하고 학생들이 증명을 이해하지 못하는 상황을 분석하였다. 1957년에 van Hiele 부부는「기하 교수-학습에서 직관(Intuition)의 역할」과「기하 교수법(Didactics)」이라는 연구 논문을 기초로 Pierre van Hiele은 1959년 그들의 이론을 체계화한 「The Child's Thought and Geometry」라는 논문을 발표하였다. 이 논문에서 기하학적 인지 발전과정에서의 5단계 수준을 주장하는 van Hiele 이론을 전개하고 있다. 1957년 Utrecht대학에 제출한 박사학위 논문에서 기하영역의 인지발달 수준에 관한 van Hiele 이론의 골격이 제시되었는데 그 기본적인 아이디어는 학습활동이 낮은 수준에서 분석에 맡겨지고 또 어떤 수준에서 문제해결의 수단 즉 고찰의 수단이 그 다음 수준에서 새로이 고찰의 대상이 되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로 비약하는 과정을 반복하는 것이다. 다시 말해서 van Hiele은 고찰 수단의 대상화를 수학적 사고는 시각적 인식수준, 기술적/분석적 인식수준, 관계적/추상적 인식 수준, 형식적 연역 수준, 엄밀한 수학적 수준으로 발달된다고 하고 이 사고 수준을 기하영역 뿐만 아니라 모든 수학영역에 적용된다고 주장하였다.

van Hiele의 수학 학습수준 이론은 무엇보다도 이러한 수학적 사고의 본성에 대한 통찰을 바탕으로 하여 전개된, 말하자면 '실용적인 이론'으로 현장 수학교사에게 있어서는 그 의미가 큰 것으로 생각된다.

흔히 수학교사들은 여러 해 동안 수학을 가르치면서 그것이 곧 학생들의 수학적 사고를 개발하는 것이라고 생각하고 과도한 양의 시간을 수학내용을

가르치는데 소비하고 있으면서도 수학적 사고 과정에는 거의 주목하지 않고 있다. van Hiele 부부의 통찰에 따르면 수학적 사고의 활동이란 경험의 세계를 단계적으로 추상화하여 조직화하는 활동이며 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식화되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 사고의 비약을 하게 된다. van Hiele은 이러한 수학적 사고 활동의 사이클을 재발명해 가도록 지도함으로써 수학적 사고 교육이 가능하다고 본 것이다.

van Hiele은 Piaget의 이론을 바탕으로 수학 학습 사고 수준의 체계를 바탕으로 지도하는 것만이 이와 같은 점을 해결할 수 있는 방안이라고 생각하였다. 그는 종전의 기하 학습에서 학생들에게 제시되는 문제나 과제가 그들의 사고 수준을 넘어서는 용어 사용이나 성질 규명 요구를 포함하고 있음을 발견하고, 학습지도가 아동의 사고 수준을 넘어서게 되면 그 학습은 아동에게 의미가 없어지게 된다는 것을 알아냈다. van Hiele은 자신들이 가르쳤던 학생들이 기하 학습에 곤란을 갖고 있음에 주목하고 다음과 같은 기하학적 개념 이해 수준에 관한 이론을 전개했다.[7]

*B. van Hiele*의 기하 학습 수준 이론

1. 제1수준 : 시각적 인식 수준(recognition)

제1수준은 시각적 인식 수준으로서 이 수준의 학생들은 전체적인 모양새로 도형을 인식하며 도형의 성질에 주목하지 않는다. '이 도형이 왜 정사각형일까요?'라는 질문에 대해 이 수준의 학생들은 '정사각형처럼 보이니까요'라고 대답한다. 학생들은 도형을 시각적 전체로 인식하며 따라서 시각적 이미지로서의 도형을 정신적으로 표상할 수 있다. 그러나 학생들은 도형의 성질에 주목하지 않는다. 즉, 도형은 그 성질에 의해 결정되는데도 불구하고 제1수준의 학생들은 도형의 성질을 인식하지 못한다. 시각적 인식 수준에서의 사고의

대상은 시각적으로 '같은 모양'으로 인식되는 여러 모양이다. 예컨대 '이 도형은 마름모이다'라는 문장은 '이 도형은 내가 마름모로 부르도록 배웠던 것과 같은 모양이다'라는 의미이다. 이러한 제1수준의 시각적 사고의 마지막 산물은 도형의 성질에 대한 분명한 인식에 근거한 도형의 개념화이다. 학생들이 제1수준인 시각적 수준에서 제2수준인 분석적 수준으로 이행하는 동안, 시각적 대상으로서의 도형은 그 성질들과 결합하기 시작한다.

2. 제2수준 : 기술적/분석적 인식 수준(analysis)

제2수준은 기술적/분석적 인식 수준으로서 학생들은 도형의 성질에 주목하며 도형의 성질을 분석할 수 있다. 학생들은 시각적으로 지각되는 모양을 분석함으로써 도형의 성질을 알게 되고 결과적으로 도형을 성질에 의해 인식하고 특징짓는다. 학생들은 도형을 전체적으로 바라보지만 시각적 형태로서가 아닌 성질의 집합으로서 고려하게 되며, 시각적 이미지는 배경으로 물러나게 된다. 따라서 각 도형은 그 도형을 특징짓는 데 필요한 성질들의 집합이 된다. 예컨대 마름모를 네 변의 길이가 같은 도형으로 생각하게 되며, '마름모'라는 용어는 '마름모라고 부르도록 배웠던 성질의 집합'을 의미한다. 그러나 학생들은 도형들 사이의 포함관계를 모호하게 인식하며, 도형에 대한 개인적 특성화에 의해 포함관계를 거부하기도 한다. 이 수준에서의 사고 대상은 성질의 집합으로서의 도형이다.

3. 제3수준 : 관계적/추상적 인식 수준(ordering)

제3수준은 관계적/추상적 인식 수준으로서, 도형의 성질이나 도형자체가 논리적으로 정렬된다. 학생들은 개념에 대한 추상적 정의를 형성하고, 개념의 성질에 대한 필요조건과 충분조건을 구분하며, 기하 영역에서 논리적으로 논쟁하기도 한다. 도형의 성질의 일부는 도형의 정의로 채택되고 나머지 성질은 논리적 방법으로 정리되며, 학생들은 여러 도형 사이의 관계와 한 도형의 여러 성질 사이의 관계를 이해한다. 학생들은 도형들의 성질을 정렬함으로써

도형들을 위계적으로 분류할 수 있고 자신들의 도형 분류를 정당화하기 위하여 비형식적 논증을 제시한다. 예컨대, 이 수준의 학생들에게 있어서 정사각형은 마름모인 동시에 직사각형이고 평행사변형이며 사다리꼴이다.

제3수준의 학생들은 다양한 성질을 발견함에 따라 그 성질들을 조직할 필요성을 느낀다. 한 성질은 다른 성질의 전체가 된다는 것을 인식하는 논리적 사고는 연역적 추론을 향한 첫 걸음이라고 할 수 있다. 그러나 학생들은 연역적 추론(형식적 증명)을 완전히 이해하지는 못하며, 연역적인 체계 전체를 파악하는 정도에는 이르지 못한다. 이 수준의 학생들에게 연역적 추론은 소규모로 또는 국소적으로 파악된다. 예컨대, 학생들은 사각형이 두 개의 삼각형으로 분해될 수 있고 한 삼각형의 내각의 합은 180°이므로, 사각형의 내각의 합이 360°라는 사실을 이끌어 낼 수 있다.

4. 제4수준 : 형식적 연역 수준(dedution)

제4수준은 형식적 연역 수준으로서, 연역의 의의가 전반적으로 이해된다. 학생들은 기하학의 이론 전체를 구성하며 전개시키는 공리적 방법의 의의를 이해하게 된다. 학생들은 공리적 체계 내에서 정리를 확립할 수 있으며, 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식한다. 또한 학생들은 연역적 추론을 이해하며 형식적 증명을 구성할 수 있다. 다시 말해서 학생들은 '제시된 조건'의 결과로서의 결론을 논리적으로 정당화하는 일련의 명제를 만들어 낼 수 있다.

5. 제5수준 : 엄밀한 수학적 수준(rigor)

제5수준은 엄밀한 수학적 수준으로서, 대상의 구체적 성질이나 그 성질들 사이의 관계의 구체적 의미가 사상된다. 즉 여러 가지 구체적 해석을 떠나서 발전하는, 여러 수학 체계에 대하여 형식적으로 추론할 수 있는 수준이다. 이 수준에서는 모델을 참고하지 않고 기하를 연구할 수 있으며, 공리, 정의, 정리 등의 문장을 형식적으로 다룸으로써 추론할 수 있다. 다양한 공리 체계와

논리체계에 대한 논의의 가치를 이해할 수 있으며, 다양한 수학 체계 안에서 가장 엄밀한 방식으로 추론할 수 있다. 이 수준에서는 기하학의 이론이 추상적인 연역적 체계로서 구성된다. 수학적 구조를 잘 이해하며, 구조에 관한 고차원적 수준의 명제를 정당화할 수 있는 등 전문적인 수학자의 수준이라고 할 수 있다. 이러한 추론의 결과는 공리적인 여러 기하 체계들을 확립하여 정렬시키는 동시에 유클리드 기하, 비유클리드 기하와 같은 여러 기하 체계를 비교하는 것이다.

*C. van Hiele*의 기하 학습 수준 이론의 특징

van Hiele의 학습 수준 이론의 특징은 다음과 같이 크게 다섯 가지로 살펴볼 수 있다.(Clements & Battista, 1992).

첫째, 사고는 상대적인 수준이 있는 불연속적인 활동으로서 수학학습에서 하위 수준을 통과하지 않고 상위 수준에 도달할 수 없으며, 수학적 사고는 모든 수준을 순차적으로 거쳐서 발달하게 된다는 것이다. 즉 학생들은 n-1 수준을 통과하지 않고는 n 수준에 도달할 수 없다.

둘째, 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하는 것은 아니며, 수준의 이행은 적절한 학습 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적절한 지도 때문에 지연될 수도 있다는 것이다. 한 수준에서 다음 수준으로의 발달은 나이나 신체의 성숙보다 교육의 내용이나 방법에 더 많이 의존한다.

셋째, 더 높은 수준에서는 낮은 수준에서의 행동이 분석의 대상이 된다는 것이다. 다시 말해서, 전 수준에서는 사고의 수단이었던 것이 다음 수준에서는 사고의 대상이 되며, 전 수준에서 암묵적으로 이해된 개념이 그 다음 수

준에서는 분명하게 이해된다.

다시 말해서, 제1수준은 주변 사물이라는 대상을 도형이라는 수단에 의해 파악하는 단계이며, 제2수준은 도형이라는 대상을 도형의 성질이라는 수단에 의해 사고하는 단계이다. 제3수준은 도형의 성질이 사고 대상이 되고, 그러한 도형의 성질을 명제라는 수단으로 파악하는 단계이다. 제4수준에서는 명제가 사고의 대상이 되고 논리를 수단으로 그러한 명제들을 파악하며, 제5수준에서는 논리 그 자체가 연구의 대상이 된다.

<표-1> 기하 학습 수준에서 사고의 대상과 사고의 수단

	제1수준	제2수준	제3수준	제4수준	제5수준
사고의 대상	주변사물	도형	성질	명제	논리
사고의 수단	도형	성질	명제	논리	

넷째, 각 수준이 그 자체의 언어적 상징(symbol)과 그 상징들을 연결하는 관계 체계를 가지고 있음을 의미한다. 따라서 수준의 상승은 언어의 확장과 관계된다.

다섯째, 서로 다른 수준에서 추론하는 두 사람은 서로를 이해할 수 없다는 것이다. 이것은 교사와 학생 사이에서 자주 발생하는 현상이며 학습 지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다.

*D. van Hiele*의 교수·학습 단계

van Hiele은 기하 학습에서 학생들이 한 수준에서 다음 수준으로 잘 이행할 수 있기 위해서는 다음의 5 단계 교수·학습 단계가 적절하다고 제안하고

있다.

1. 1단계 : 질의/안내 단계

질의/안내 단계에서는 교사와 학생 사이의 대화를 통해서 새로운 학습 주제를 소개한다. 학생은 제시된 자료와 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 앞으로 공부할 과제의 방향이 무엇인지 배운다. 교사는 학습할 주제에 관한 학생의 선행지식이 무엇인지를 파악하여 학생이 새로운 주제를 이해하도록 도움을 주고 질문을 하며 관찰을 수행한다.

2. 2단계 : 안내된 탐구 단계

안내된 탐구 단계에서 학생은 신중하게 계열화된 활동을 통해 새로운 학습 주제의 특징에 익숙해진다. 학생은 교사가 제공하는 자료를 통해 학습 주제를 탐구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구 분야의 구조를 점진적으로 파악한다. 교사는 학습 주제를 탐구하는 활동에 학생이 능동적으로 참여하도록 하기 위하여 조심스럽게 설명해 나간다. 이 때 교사의 역할은 학생의 행동을 적절한 탐구로 이끌면서 학생활동을 지시하는 것이다. 여기에서의 대부분의 활동은 특별한 반응을 유도하는 단일 단계의 과제이다.

3. 3단계 : 발전/명료화 단계

발전/명료화 단계에서 학생은 교사의 개입이 최소인 상태에서 자신의 개념화와 어휘를 정렬시킨다. 이 단계에서는 안내된 탐구 단계에서 익숙해진 새로운 과제를 표현하는 활동을 통하여 그것을 명확히 하며 전문적인 용어를 학습한다. 학생은 예전의 경험과 교사로부터 얻은 최소한의 힌트를 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며, 관계를 형성하기 시작한다.

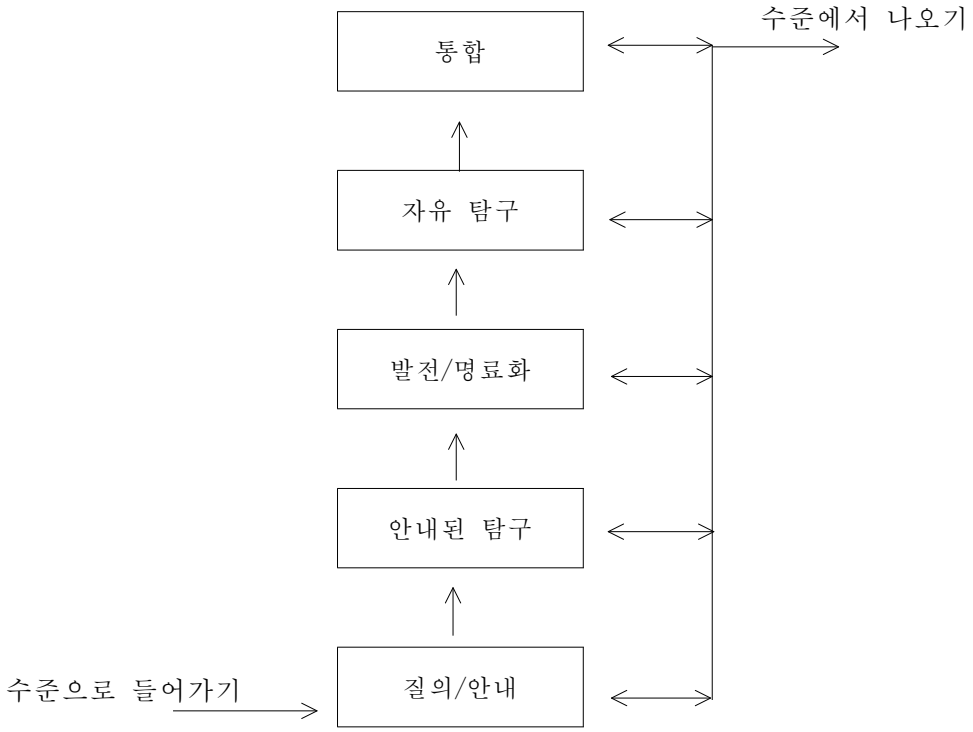
4. 4단계 : 자유 탐구 단계

자유 탐구 단계에서 학생은 문제해결적 성격을 갖는 보다 복잡한 과제에 도전하게 된다. 학생은 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 되며, 그 과제를 완성한 후에 공부한 그 영역 안에서 스스로 자신의 나아갈 바를 정해서 새로운 관련성을 찾는다. 학생은 다중 단계의 과제나 여러 가지 방식으로 완수될 수 있는 과제와 접하면서 자신만의 방식을 찾는 경험을 하게 되며, 그럼으로써 탐구 대상 사이의 많은 관계들이 학생들에게 더욱 명확해진다.

5. 5단계 : 통합 단계

통합 단계에서 학생은 자신의 관찰을 재검토하고 요약하며, 대상과 관계의 새로운 그물망을 형성하기 위해 그 동안 배운 새로운 개념과 관련성을 통합한다. 결국 학생은 탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다. 교사는 전혀 새롭거나 자연스럽지 못한 아이디어를 내놓지 않도록 주의해야 하며, 학생이 이전의 활동을 반성하고 관찰한 것을 명로하게 정리할 수 있도록 전체적인 개관을 제시하면서 돕는다.

이와 같은 교수·학습 단계를 통해 수준의 비약이 가능하도록 하기 위해서는 교사의 일방적인 설명이 아니라 학습자 스스로의 탐구 활동이 가장 중요한 요인이라고 할 수 있다. van Hiele의 교수·학습의 다섯 단계를 직접 교수에 적용하는 데 있어서, 교사는 학생들의 필요에 따라 몇 시간 동안을 계속해서 특별한 단계에 머무를 수도 있고, 또한 여러 단계를 몇 번이고 되풀이할 수 있다. 아래의 <그림-1>은 한 수준에서 다음 수준으로 진행하는데 있어서 여러 교수·학습 단계의 활용을 나타내고 있다.[16]



<그림-1> van Hiele의 교수·학습 단계

E. van Hiele 이론의 수학교육학적 의미

J. Dewey(1933)는 '지식을 모으고 발견하고 창안하는 능동적인 과정은 단순한 지적 활동의 산물인 지식의 기록을 수용하는 것과 구별되어야 한다'고 했고, J. S. Bruner(1978) 역시 '어떤 교과를 가르치는 것은 그 교과에 대한 살아있는 도서관을 만들어 내려는 것이 아니라 스스로 수학적으로 사고하고 역사가 하듯이 사건을 다루며 지식을 획득하는 과정에 참여하도록 하려는 것이다. 안다는 것은 과정이지 산물이 아니다.'고 하여 과정으로서의 교육의 중요성을 강조했다. 이처럼 학습자의 구성적 활동 및 재발견 과정이 되어야 한

다는 것은 이미 현대 수학교육의 흐름이자 곧 목표가 되었다.

Piaget에 의하면 수학적 사고 활동의 본질은 조작적 scheme이며 이는 행동이나 보다 낮은 차원의 조작에서 반영적 추상화를 통해 질적인 수준의 비약을 반복하면서 재구성되어 간다는 것이다. 이러한 측면에서 보면 수학적 사고 교육은 n-1수준의 조작적 scheme이 n수준의 대상이 되는 조작적 scheme으로 재구성되어 가면서 n-1수준의 조작이 n수준의 대상이 되는 나선적 과정이 되풀이 되어야 하며, 결국 과정적 목표를 강조하는 수학의 학습 및 지도는 제수준의 수학화 곧 국소적 조직화의 형태가 되어야 하는 것이다.

또한, 활동주의 수학교육자의 한사람인 Freudenthal은 소위 교수학적 현상학을 제기하고 있다. 교수학적 현상학의 핵심은 '현상'과 '본질'이다. 여기서 본질이란 수학적 개념, 수학적 구조 등 수학의 연구 대상을 말한다. 인간은 기하학적 도형에 의해서 모양이란 현상의 세계에 질서를 창조하며, 수에 의해서 양의 세계에 질서를 창조한다. 보다 높은 수준에서 인간은 기하학적 작도와 증명에 의해서 기하학적 도형이란 현상에 질서를 창조한다. 또한 십진법에 의하여 자연수라는 현상에 질서를 창조하며 더 나아가 광범한 추상화에 의해 서로 닮은 수학적 현상이 군, 체 등의 개념으로 파악된다. 이와 같이 하여 인간은 수학을 발전시켜 간다는 것이다. 여기서 주목할 것은 본질과 현상과의 관계가 절대적이 아닌 상대적이라는 것, 즉 어떤 수준에서 본질이었던 것이 그보다 고차의 수준에서는 현상으로 파악된다는 것이다.

기하 사고 수준 이론은 이러한 조작적 구성주의 및 활동주의 수학과 그 맥을 같이 하고 있다. van Hiele의 이론에 있어서 수학적 사고 활동이란 경험의 세계를 조직화 하는 활동으로 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되고, 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로 비약하는 과정을 반복하는 것이다. 따라서 수학의 학습 및 지도는 그러한 사이클을 재 발명해 가도록 되어야 한다는 것이고, 이것이 바로 van Hiele의 기하 사고 수준 이론의 기본적인 아이디어인 것이다.[13]

Ⅲ. *van Hiele* 이론에 기초한 교과서 내용 분석

A. 분석대상

교과서 수준분석의 판단도구로는 van Hiele의 이론을 적용하였으며, 분석의 대상은 현재 사용되고 있는 중학교 교과서로 한정하였다. 2007년 현재 1학년, 2학년, 3학년 모두 제 7차 교육과정에 따라 국민공통 교육과정 중 7-가 단계, 7-나 단계, 8-가 단계, 8-나 단계, 9-가 단계, 9-나 단계로 나누어져 있다.

1학년은 두산(강옥기 외 2인)의 【중학교 수학 7-나】 교과서(2000), 2학년은 금성출판사(양승갑 외 6인)의 【중학교 수학 8-나】 교과서(2001), 3학년은 중앙교육진흥연구소(강행고 외 8인)의 【중학교 수학 9-나】 교과서(2002)를 대상으로 분석하고자 한다.

<표-2> 제 7차 수학과 교육과정

단계 / 영역	7-나 단계	8-나 단계	9-나 단계
도형	· 점, 선, 면, 각 · 점, 직선, 평면의 위치 관계 · 평행선의 성질 · 간단한 작도 · 삼각형의 합동조건 · 다각형 · 중심, 중심각, 부채꼴, 호, 현의 뜻, 중심각과 호의 관계 · 원과 직선의 위치관계 · 다면체, 회전체	· 삼각형과 사각형의 성질 · 도형의 닮음 · 닮은 도형의 성질 · 삼각형의 닮음조건 · 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 · 닮음의 응용	· 피타고라스의 정리와 그 활용 · 원과 직선 · 원주각
측정	· 다각형과 각의 크기 · 부채꼴의 넓이와 호의 길이 · 입체도형의 겉넓이와 부피		· 삼각비 · 삼각비의 활용

B. 수준분석에 대한 규준 설정

교과서 내용의 구체적인 van Hiele 수준을 분석하기 위한 van Hiele의 사고 수준에 대한 판별규준은 다음과 같이 정하였다.

첫째, van Hiele의 기하 학습 수준 5단계와 관련된 내용이 교과 내용에 존재하는지 살펴보았다.

둘째, 교과서 분석과 임상 면담에 의한 학생들 반응에 대한 van Hiele 수준을 정하기 위하여 만든 평가도구인 van Hiele descriptors (Fuys & Geddes, 1988)를 통해 학생들의 관점에서 그 수준을 분석해 보았다.

두 번째 규준인 van Hiele descriptors를 소개하면 다음과 같다.

1. 제1수준

a. 기본반응

도형들(예를 들어 정사각형들, 삼각형들)과 다른 기하적 형태들(예를 들어 직선들, 각들 등)을 겉모양에 따라서 확인하고 조작한다.

b. 학생들의 구체적 반응

(1) 전체적인 겉모양에 의해 도형을 인식한다.

(2) 도형을 작도한다.

(3) 도형과 다른 기하적 형태에 이름을 붙이는데, 이때 표준적인 호칭과 비표준 호칭을 적절히 사용한다.

(4) 전체적인 겉모습에 기초해서 도형들을 비교하고 분류한다. 그러나 그것의 구성 요소에 의하여 도형을 분석하지 않는다.

(5) 일반적으로 적용하는 성질들을 사용하기보다는 직접 조작해 봄으로써 정형 문제를 푼다.

(6) 도형들의 특성을 묘사할 때 성질들을 생각하지 않는다.

(7) 도형들에 대해 일반화하거나 관련된 언어를 사용하지 않는다.

2. 제2수준

a. 기본반응

도형의 구성요소들과 구성 요소들 사이의 관계에 의해 도형을 분석하고, 도형의 성질들을 경험적으로 확증하고, 문제들을 풀기 위하여 성질들을 사용한다.

b. 학생들의 구체적 반응

(1) 도형의 구성 요소들 사이의 관계를 관찰과 실험을 통해 확인한다.

(2) 구성 요소들과 관계들에 대한 적합한 어휘를 상기하고 사용한다.

(3) 그것들의 구성 요소들 사이의 관계에 따라서 또는 성질에 따라서 도형들을 분류한다.

(4) 규칙들에 대한 언어적이거나 기호적인 문장을 해석하고, 그것들을 적용 한다.

(5) 특정한 도형들의 성질을 경험적으로 발견하고, 도형들의 종류에 대한 성질들을 일반화한다.

(6) 친숙하지 않은 도형들에 대한 성질들을 발견한다.

(7) 도형들에 대해 알려진 성질들을 사용하거나 또는 통찰력 있는 접근에 의해 기하 문제들을 푼다.

(8) 교사/자료에 의해 지도받거나, 또는 자발적으로 개발한 도형들의 성질에 대하여 일반화를 명확하게 말하고, 관련된 언어를 사용한다.

(9) 도형의 성질들이 어떻게 서로 관련되어 있는지를 설명하지 못한다.

(10) 형식적 정의를 형성하거나 사용하지 못한다.

(11) 성질들 사이의 부분집합 관계를 설명하지 못한다.

(12) 경험적으로 발견된 일반화의 논리적 설명 또는 증명에 대한 필요를 알지 못하고, 관련된 언어를 정확히 사용하지 못한다.

3. 제3수준

a. 기본반응

정의를 사용하고, 전에 발견된 성질에 순서를 주는 비형식적인 연역적 논증을 제시한다.

b. 학생들의 구체적 반응

(1) 도형의 종류를 특징짓는 성질들을 확인하고, 이것들이 충분함을 시험한다.

(2) 도형을 특징지을 수 있는 성질들의 최소 집합들을 확인 한다.

(3) 도형들의 종류에 대한 정의를 형성하고 사용한다.

(4) (다이어그램, 오려진 도형, 또는 다른 자료들을 사용하여) 스스로 비형식적인 연역적 논증을 한다.

(5) 성질에 의해 도형들을 배열하고 부분집합 관계를 설명한다.

(6) 연역적 방법에 의해 새로운 성질들을 발견한다.

(7) 계보에 여러 가지 성질들을 상호 관련시킨다.

(8) 어떤 것을 증명하기 위해 한 개 이상의 설명을 주고, 계보를 사용해서 이 설명들을 증명한다.

(9) 명제와 그 역 사이의 차이를 비형식적으로 인식한다.

(10) 문제를 풀기 위해 전략들 또는 통찰력 있는 추론들을 확인하고 사용한다.

(11) 수학의 공리적 의미로 연역의 의미를 이해하지 못하고, 가정에서 결론으로 이끌어 가는 논리적인 순서를 파악하지 못한다.

4. 제4수준

a. 기본반응

공리적 체계, 정리와 정리들의 상호 관계 안에서 증명한다.

b. 학생들의 구체적 반응

(1) 정의되지 않은 용어들, 정의들, 기초적인 가설들(예를들어, 공준들)에 대한 필요를 인식한다.

(2) 형식적 정의의 특성(예를 들어, 충분조건들)과 정의들의 동등성을 인식 한다.

(3) 공리적 관계를 증명한다.

(4) 정리와 관계된 명제들(예를 들어, 역, 이. 대우)사이의 상호관계를 증명한다.

(5) 정리들의 관계망 사이의 상호관계를 증명한다.

(6) 정리들에 대한 여러 증명들을 비교하고 대조한다.

(7) 논리적 결과에서 초기의 정의 또는 공준을 바꾼 결과들을 설명한다.

(8) 몇 가지의 다른 정리들을 통합한 일반적인 원리를 증명한다.

(9) 논증을 뒷받침하기 위한 모델을 사용하면서, 단순한 공리의 집합으로부터 자주적으로 증명을 창출한다.

(10) 형식적인 연역적 논증을 한다. 그러나 스스로 공리적 체계를 조사하거나 비교하지는 않는다.

5. 제5수준

a. 기본반응

여러 공준 체계에서 정리들을 엄밀히 증명하고, 이 체계들을 분석/비교한다.

b. 학생들의 구체적 반응

(1) 여러 공리적 체계들로 정리들을 엄밀히 증명한다.(예를 들어 기하의 기초에 대한 Hilbert의 접근)

(2) 공리적 체계를 비교한다.(예를 들어 유클리드와 비유클리드 기하) : 공리들 중 변화가 결과적인 기하에 어떻게 영향을 주는지를 자발적으로 탐구한다.

(3) 문제들을 풀기 위하여 일반화된 방법을 생각해 낸다.

(4) 수학적 증명/원리가 적용될 가장 넓은 문맥을 찾는다.

(5) 새로운 관점을 개발하고, 논리적 추리에 접근하기 위하여 주제에 대한 깊이 있는 학습을 한다.[11]

*C. van Hiele*이론에 기초한 제7차 교과서 내용 수준 분석

1. 중학교 *1*학년 *(7-*나 단계*)*

두산(강옥기 외 2인)의 【중학교 수학 7-나】교과서(2000)를 분석해 본 결과 다음 <표-3> 로 정리 할 수 있다.

<표-3> 중학교 1학년 수학교과서 기하영역의 van Hiele 수준

대단원	중단원	소단원	v-H수준
Ⅱ. 기본 도형과 작도	1. 기본 도형	1. 점, 선, 면, 각 2. 평면에서의 위치관계 3. 공간에서의 위치 관계	2 2,3 2
	2. 작도와 합동	1. 간단한 도형의 작도 2. 삼각형의 작도와 결정조건 3. 합동인 도형의 성질과 삼각형의 합동조건	2 2 2,3
Ⅲ. 도형의 성질	1. 평면 도형	1. 다각형 2. 원과 부채꼴	2,3 2
	2. 입체 도형	1. 다면체 2. 회전체	2 2,3
Ⅳ. 도형의 측정	1. 평면도형의 측정	1.다각형의 각의 크기 2. 부채꼴의 호의 크기와 넓이	2,3 2
	2. 입체도형의 측정	1. 기둥의 겉넓이와 부피 2. 뿔의 겉넓이와 부피 3. 구의 부피와 겉넓이	2,3 2,3 2,3

다음에 제시된 내용들은 중학교 1학년 기하영역의 van Hiele 수준을 소단원별 세부 목표로 나누어 좀 더 자세히 살펴본 것이다.

a. 기본 도형과 작도

(1) 기본 도형

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 점, 선, 면, 각	① 점, 선, 면의 간단한 성질을 안다.	2
	② 직선, 선분, 반직선에 대하여 안다.	2
	③ 각의 성질을 안다.	2
2. 평면에서의 위치관계	① 한 평면 위에 있는 두 직선의 위치 관계를 안다.	2
	② 맞꼭지각의 뜻과 성질을 안다.	2
	③ 점과 직선 사이의 거리를 안다.	3
	④ 동위각과 엇각을 찾을 수 있다.	2
	⑤ 평행선과 동위각의 관계를 안다.	2
	⑥ 평행선과 엇각의 관계를 안다.	2
3. 공간에서의 위치 관계	① 평면의 성질을 안다.	2
	② 공간에서 두 직선의 위치 관계를 안다.	2
	③ 공간에서 직선과 평면의 위치 관계를 안다.	2
	④ 평면과 평면의 위치 관계를 안다.	2

(2) 작도와 합동

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 간단한 도형의 작도	① 자와 컴퍼스를 사용하여 선분의 수직이등분선을 그릴 수 있다.	2
	② 주어진 각과 크기가 같은 각을 작도할 수 있다.	2
	③ 각의 이등분선을 작도할 수 있다.	2

2. 삼각형의 작도와 결정조건	① 세 변이 주어졌을 때, 삼각형을 작도할 수 있다. ② 두 변과 그 끼인각이 주어졌을 때, 삼각형을 작도할 수 있다. ③ 한 변과 그 양 끝 각이 주어졌을 때, 삼각형을 작도할 수 있다.	2 2 2
3. 합동인 도형의 성질과 삼각형의 합동조건	① 합동인 도형의 성질을 안다. ② 삼각형의 합동조건을 안다.	2 3

b. 도형의 성질

(1) 평면도형

소단원	세부목표	v-H 수준
1.다각형	① 다각형에 대하여 안다. ② 다각형의 대각선의 총수를 구할 수 있다.	2 3
2. 원과 부채꼴	① 원과 부채꼴에 대하여 안다. ② 중심각과 부채꼴의 호의 길이, 넓이 사이의 관계를 안다. ③ 원과 직선의 위치 관계를 안다.	2 2 2

(2) 입체도형

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 다면체	① 다면체의 뜻을 안다. ② 각뿔대의 뜻과 성질을 안다. ③ 정다면체의 뜻과 성질을 안다. ④ 정다면체의 전개도와 다면체의 성질을 안다.	2 2 2 2
2. 회전체	① 회전체의 성질을 안다. ② 회전체를 평면으로 자른 단면에 대하여 안다. ③ 회전체의 전개도에 대하여 안다.	2 2 3

c. 도형의 측정

(1) 평면도형의 측정

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 다각형의 각의 크기	① 삼각형의 내각과 외각의 성질을 안다. ② 다각형의 내각의 크기의 합을 구할 수 있다. ③ 다각형의 외각의 크기의 합을 구할 수 있다.	2 2,3 2,3
2. 부채꼴의 호의 크기와 넓이	① 원주율 π 에 대하여 안다. ② 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있다.	2 2

(2) 입체도형의 측정

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 기둥의 겉넓이와 부피	① 기둥의 겉넓이를 구할 수 있다. ② 기둥의 부피를 구할 수 있다.	2,3 2,3
2. 뿔의 겉넓이와 부피	① 뿔의 겉넓이를 구할 수 있다. ② 뿔의 부피를 구할 수 있다.	2,3 2,3
3. 구의 부피와 겉넓이	① 구의 부피와 겉넓이를 구할 수 있다. ② 실생활 도형의 넓이, 부피를 구할 수 있다.	3 2,3

2. 중학교 2학년 (8-나 단계)

금성출판사(양승갑 외 6인)의 【중학교 수학 8-나】 교과서(2001)를 분석해 본 결과 다음 <표-4>로 정리 할 수 있다.

<표-4> 중학교 2학년 수학교과서 기하영역의 van Hiele 수준

대단원	중단원	소단원	v-H수준
Ⅱ. 삼각형과 사각형의 성질	1. 명제와 정리	1. 명제 2. 정의와 정리	2 2,3
	2. 삼각형의 성질	1. 이등변삼각형 2. 직각삼각형 3. 삼각형의 외심 4. 삼각형의 내심	2,3,4 3,4 2,3 2,3
	3. 사각형의 성질	1. 평행사변형 2. 여러 가지 사각형	3,4 3,4
Ⅲ. 도형의 닮음	1. 도형의 닮음	1. 닮은 도형의 성질 2. 삼각형의 닮음조건 3. 닮음의 중심	2,3 3 3
	2. 평행선과 선분의 길이의 비	1. 삼각형과 비 2. 평행선과 비 3. 삼각형의 중점연결정리 4. 삼각형의 무게중심	3 3,4 3,4 2,3,4
	3. 닮음의 응용	1. 닮은 도형의 넓이와 부피 2. 닮음의 응용	3 3,4

다음에 제시된 내용들은 중학교 2학년 기하영역의 van Hiele 수준을 소단원별 세부 목표로 나누어 좀 더 자세히 살펴본 것이다.

a.삼각형과 사각형의 성질

(1) 명제와 정리

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 명제	① 명제의 뜻을 알 수 있다. ② 참인 명제와 거짓인 명제를 찾을 수 있다.	2 2

2. 정의와 정리	① 용어의 정의에 대하여 알 수 있다. ② 정리와 증명에 대하여 알 수 있다.	2 3

(2) 삼각형의 성질

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 이등변삼각형	① 이등변삼각형의 뜻을 알 수 있다. ② 이등변삼각형의 성질을 증명을 통하여 이해한다. ③ 이등변삼각형이 될 조건을 알 수 있다. ④ 꼭지각의 이등분선은 밑면을 수직 이등분함을 알 수 있다.	2 3 3 3,4
2. 직각삼각형	① 삼각형의 합동조건을 이용하여 직각삼각형의 합동조건을 알 수 있다. ② 직각삼각형의 합동조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.	3 4
3. 삼각형의 외심	① 삼각형의 외심에 대하여 알 수 있다. ② 삼각형의 외심의 성질을 알 수 있다.	2 3
4. 삼각형의 내심	① 삼각형의 내심에 대하여 알 수 있다. ② 삼각형의 내심의 성질을 알 수 있다.	2 3

(3) 사각형의 성질

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 평행사변형	① 평행사변형의 성질을 알 수 있다. ② 평행사변형이 될 조건을 알 수 있다.	3 3

	③ 평행사변형의 성질과 관련된 문제를 해결할 수 있다.	4
2. 여러 가지 사각형	① 직사각형의 성질을 알 수 있다. ② 마름모의 성질을 알 수 있다. ③ 정사각형의 성질을 알 수 있다. ④ 평행선과 넓이에 대하여 알 수 있다.	3 3 3 3,4

b. 도형의 닮음

(1) 도형의 닮음

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 닮은 도형의 성질	① 닮음의 뜻을 알 수 있다. ② 평면도형의 닮음의 성질을 알 수 있다. ③ 입체도형에서 닮음의 성질을 알 수 있다.	2 3 3
2. 삼각형의 닮음 조건	① 두 삼각형의 닮음조건을 알 수 있다. ② 삼각형의 닮음조건을 활용하여 여러 가지 도형의 성질을 알 수 있다. ③ 직각삼각형에서의 닮음조건을 알 수 있다.	3 3 3
3. 닮음의 중심	① 닮음의 위치와 닮음의 중심을 알 수 있다.	3

(2) 평행선과 선분의 길이의 비

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 삼각형과 비	① 삼각형의 한 변에 평행한 선분의 길이의 비를 알 수 있다.	3

	② 평행선으로 잘린 선분의 길이의 비를 알 수 있다.	3
2. 평행선과 비	① 여러 개의 평행선으로 잘린 선분의 길이의 비를 알 수 있다.	3,4
3. 삼각형의 중점 연결정리	① 삼각형의 중점연결 정리를 알고 이를 활용할 수 있다. ② 삼각형의 중점연결 정리의 역에 대하여 알고 이를 활용할 수 있다.	3,4 3,4
4. 삼각형의 무게 중심	① 삼각형의 무게중심의 뜻을 알 수 있다. ② 삼각형의 무게중심의 성질을 알 수 있다. ③ 삼각형의 무게중심의 성질을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	2 3 3,4

(3) 닮음의 응용

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 닮은 도형의 넓이와 부피	① 닮은 도형에서 닮음비와 넓이 사이의 관계를 알 수 있다. ② 닮은 도형에서 닮음비와 부피 사이의 관계를 알 수 있다.	3 3
2. 닮음의 응용	① 닮은 도형의 성질을 이용하여 여러 가지 문제를 풀 수 있다.	3,4

3. 중학교 3학년 (9-나 단계)

중앙교육진흥연구소(강행고 외 8인)의 【중학교 수학 9-나】교과서(2002)를 분석해 본 결과 다음 <표-5>로 정리 할 수 있다.

<표-5> 중학교 3학년 수학교과서 기하영역의 van Hiele 수준

대단원	중단원	소단원	v-H수준
Ⅱ. 피타고라스의 정리	1. 피타고라스의 정리	1. 피타고라스의 정리 2. 피타고라스의 정리의 역	2,3,4 3,4
	2. 피타고라스의 정리의 활용	1. 평면도형에서의 활용 2. 입체도형에서의 활용	3,4 4
Ⅲ. 원의 성질	1. 원과 직선	1. 원의 중심과 현 2. 원의 접선	4 2,3,4
	2. 원주각	1. 원주각 2. 원과 사각형 3. 접선과 현이 이루는 각 4. 원과 비례	3,4 3 3 3
Ⅳ. 삼각비	1. 삼각비	1. 삼각비 2. 삼각비의 값	3 3
	2. 삼각비의 활용	1. 거리 구하기 2. 넓이 구하기	3,4 3,4

다음에 제시된 내용들은 중학교 3학년 기하영역의 van Hiele 수준을 소단원별 세부 목표로 나누어 좀 더 자세히 살펴본 것이다.

a. 피타고라스의 정리

(1) 피타고라스의 정리

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 피타고라스의 정리	① 피타고라스의 정리를 알 수 있다. ② 피타고라스의 정리를 증명할 수 있다.	2 3,4

2. 피타고라스의 정리의 역	① 피타고라스의 정리의 역이 성립함을 알 수 있다. ② 피타고라스의 정리의 역을 이용하여 세변의 길이가 주어진 삼각형이 직각삼각형인지 아닌지 판단할 수 있다.	4 3

(2) 피타고라스의 정리의 활용

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 평면도형에서의 활용	① 직사각형의 대각선의 길이를 구할 수 있다. ② 정삼각형의 높이를 구할 수 있다. ③ 한 내각의 크기가 45°인 직각삼각형과 한 내각의 크기가 60°인 직각삼각형의 세변의 길이의 비를 각각 알 수 있다. ④ 모눈 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	3 3 3 3,4
2. 입체도형에서의 활용	① 직육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있다. ② 원뿔이나 사각뿔 등의 높이를 구할 수 있다.	4 4

b. 원의 성질

(1) 원과 직선

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 원의 중심과 현	① 한 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하고, 그 역도 성립함을 알 수 있다. ② 한 원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같고, 그 역도 성립함을 알 수 있다.	4 4

2. 원의 접선	① 접선과 반지름에 대한 정리를 알 수 있다. ② 접선의 길이에 대한 정리를 증명하고, 이를 활용할 수 있게 한다.	2,3 3,4

(2) 원주각

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 원주각	① 원주각과 중심각, 호사이의 관계를 알 수 있다. ② 원에 내접하는 사각형의 성질을 알 수 있다. ③ 접선과 현이 이루는 각에 대하여 알 수 있다. ④ 원에서 비례 관계를 알 수 있다.	3 3 3,4 3
2. 원과 사각형	① 원에 내접하는 사각형의 성질을 알 수 있다. ② 내접사각형의 내대각의 성질을 알 수 있다. ③ 사각형이 원에 내접하기 위한 조건을 알 수 있다.	3 3 3
3. 접선과 현이 이루는 각	① 접선과 현이 이루는 각의 성질을 알 수 있다.	3
4. 원과 비례	① 원에서의 비례 관계를 알 수 있다. ② 원의 접선과 할선 사이의 비례 관계를 알 수 있다. ③ 네 점이 한 원위에 있을 조건을 알 수 있다.	3 3 3

c. 삼각비

(1) 삼각비

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 삼각비	① 삼각비의 뜻을 알 수 있다.	3

	② 삼각비의 값을 구할 수 있다. ③ 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 구할 수 있다. ④ 예각의 삼각비의 값을 구하는 방법을 이해하고, 삼각비의 표를 이용하여 예각의 삼각비의 값을 구할 수 있다.	3 3 3
2. 삼각비의 값	① 30°, 45°, 60°에 대한 삼각비의 값을 알 수 있다. ② 임의의 예각의 삼각비의 값을 구하는 방법을 알 수 있다. ③ 0°, 90°에 대한 삼각비의 값을 알 수 있다. ④ 삼각비의 표에서 삼각비의 값을 구할 수 있다.	3 3 3 3

(2) 삼각비의 활용

소단원	세부목표	v-H 수준
1. 거리 구하기	① 삼각비를 이용하여 거리를 구할 수 있다.	3,4
2. 넓이 구하기	① 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 삼각형의 넓이를 삼각비를 이용하여 구할 수 있다.	3,4

D. 일반적 수업 지도안

<*8*-나 단계, 금성출판사>

<table>
<tr><td>단
원
명</td><td colspan="3">대단원 : Ⅱ. 삼각형과 사각형의 성질
중단원 : 3. 사각형의 성질
소단원 : 2. 여러 가지 사각형</td></tr>
<tr><td>학습
목표</td><td colspan="3">· 평행사변형에 어떤 조건을 추가하면 마름모, 직사각형, 정사각형이 되는지 관찰할 수 있도록 한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">단계</td><td rowspan="2">학습내용</td><td colspan="2">교수-학습 활동</td></tr>
<tr><td>교사</td><td>학생</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>· 선수학습확인
· 학습목표확인</td><td>-지난시간에 배운 직사각형, 마름모, 정사각형에 대하여 복습한다.

-학습목표를 제시한다.</td><td>-지난시간에 배운 내용을 떠올려본다.

-이번시간의 학습목표를 인지한다.</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>· 학습내용이해
· 학습내용적용</td><td>-사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 포함관계를 그려주어 포함관계를 이해하게 한다.

-교과서문제를 설명해준다.

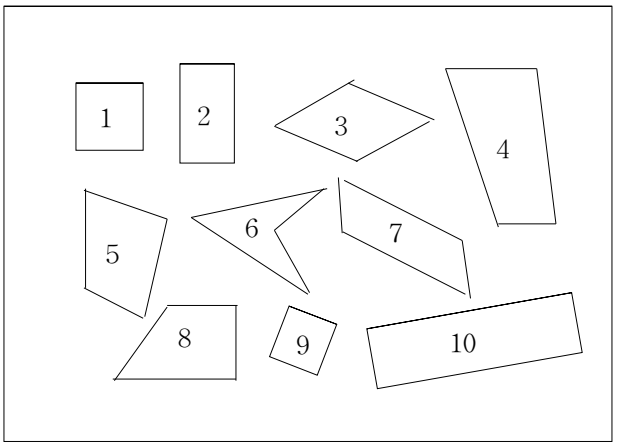
-유사한 문제를 풀어 보게 한다.</td><td>-선생님 설명에 집중 한다.

-문제를 노트에 풀어본다.</td></tr>
</table>

정리	· 본시학습확인 · 형성평가제시 · 과제제시	-학습목표가 무엇이었는지 상기시킨다. -형성평가문제를 풀게 한다. -수준별 문제를 주고 가정에서 풀어오도록 한다.	-학습목표를 읽어본다. -배운 것을 떠올리며 형성평가에 집중한다. -과제 확인한다.

E. van Hiele 이론을 적용한 수업 지도안

<8-나 단계, 금성출판사>

단원명	대단원 : Ⅱ. 삼각형과 사각형의 성질 중단원 : 3. 사각형의 성질 소단원 : 2. 여러 가지 사각형	
학습목표	· 평행사변형에 어떤 조건을 추가하면 마름모, 직사각형, 정사각형이 되는지 관찰할 수 있도록 한다.	
단계	교수-학습 활동	학습자료 및 유의점
1단계 질의/안내	 · 선수 학습내용 상기 - 두 쌍의 대변이 평행한 사각형은? - 두 대각선의 길이가 같은 사각형은? - 네 각의 크기가 같은 사각형은? - 네 변의 길이가 같은 사각형은?	· 파워포인트 이용. · 정답에 관계없이 자유로이 말하게 한다. · 부정확한 용어와 개념을 체크한다.

	· 학습할 과제의 방향 제시 - 정사각형은 마름모가 될까? - 직사각형이 정사각형이 되기 위해서 어떤 조건을 추가하여야 하는가? - 마름모가 정사각형이 되기 위해서 어떤 조건을 추가 하여야 하는가?	
2단계 안내된 탐구	· 다음 활동을 소개한다. <활동내용> 모눈종이에서 사각형을 사다리꼴로, 사다리꼴을 평행사변형, 평행사변형을 직사각형으로 변화시켜 본다.	· 변환된 도형은 그 이전의 성질을 모두 갖고 있고, 새로운 성질이 추가된 것임을 인식할 수 있도록 한다.
3단계 발전/명료화	· 토론의 사회를 보면서 합의에 도달하도록 돕는다. <토론내용> 각 사각형을 변환 할 때 추가해야 하는 조건은 무엇인가?	
4단계 자유탐구	· 과제제시 - 직사각형이 정사각형이 되기 위해서 어떤 조건을 추가하여야 하는가? - 마름모가 정사각형이 되기 위해서 어떤 조건을 추가 하여야 하는가?	
5단계 통합	· 학습활동을 요약정리	

Ⅳ. 결론 및 제언

본 논문은 중학교 수학에서 도형의 영역이 타 영역에 비해 실제 수업에서 많이 다루고 있음에도 불구하고 학생들은 증명을 왜 하는지 제대로 인식하지 못하고 있으며 증명과정을 이해하는 것조차 어려움을 겪고 있다. 이를 주목하고 이에 대한 원인을 분석하고 이를 개선시킬 수 있는 교수·학습 방법의 필요성에서 시작되었다.

van Hiele의 이론은 학생들이 기하에서 어려움을 겪고 있는 원인을 잘 설명하고 있다. 그가 제안한 기하학적 사고의 모델과 학습의 단계는 학생들의 기하수준의 발달 정도를 밝혀줄 뿐만 아니라 학생들의 수준 향상을 도울 방법을 시사해준다.[13] 따라서 van Hiele의 이론을 기초로 제 7차 수학과 교육과정의 중학교 교과서 단원 중 기하영역을 분석하고, 이를 바탕으로 효과적인 지도안을 제시하였다. 그 결과로 도형영역에 자신감을 잃고 도형부분을 멀리하고 이해하지 않고 단순 암기하는 학생들에게 흥미를 느끼게 하고 수학의 유용성을 인식하게 하는데 목적을 두고 있다.

본 논문에서는 8-나 '삼각형과 사각형의 성질' 단원의 일반적 지도안과 van Hiele의 이론을 바탕으로 한 지도안을 예시로 제시했다. van Hiele의 이론에 따른 지도는 일반적인 지도보다 구체적인 활동을 시작으로 스스로 탐구하고 토론하면서 수학을 학습하는 태도를 몸에 붙이게 될 것이다. 그렇게 하여 수학이 지적인 호기심을 자극하고 학습동기를 부여할 수 있을 것이다.

마지막으로 van Hiele의 교수·학습 5단계를 적용한 수업지도안을 도형 수업에 적용함으로써, 학생들의 보다 향상된 수준의 수학적 사고를 경험하도록 하기 위하여 본 논문의 결론을 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 기하학습에 있어서 학생들의 부정확한 용어사용과 개념이해의 어려움 및 선수학습의 부재는 기하 수준의 발전을 지연시키는 경향이 있다. 따라서 학습자의 다양성을 인식하고 각 학생들의 기하개념 이해에 대한 van Hiele의

기하 학습수준에 대한 측정이 먼저 이루어져야 한다.

둘째, 현행 제 7차 교육과정의 기하단원의 구성은 학습자의 활동을 중시하고 구체적 조작물을 학습 도구로 활용하는데 개정 방향을 설정하고 있다. 이에 따라 본 논문에서 제시한 단원뿐만 아니라 좀 더 폭넓은 단원에서 van Hiele의 교수·학습 5단계에 맞추어 수업에 적용하는 후속연구가 다양하게 이루어져야 할 것이다.

셋째, 도형영역지도에 있어서 다양한 도구와 매체를 적용시키면 흥미를 유발시키기에 유리하다. 그러므로 새로운 자료를 위한 끊임없는 개발 연구가 필요하다고 할 수 있겠다. van Hiele의 이론을 바탕으로 공간 시각화 활동에 따른 자료, 컴퓨터 공학 이용에 관한 자료, 기하의 실세계 적용의 탐구에 관한 자료를 수집하고 다양한 프로그램 개발하여 도형 수업에 적용한다면 보다 더 개선되고 효과적인 도형 수업이 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] 강옥기 외 2인, 『중학교 수학 7-나』, (주)두산 (2000)
[2] 강옥기,『수학과 학습지도와 평가론』, 경문사 (2003)
[3] 강행고 외 8인, 『중학교 수학 9-나』, (주)중앙교육진흥연구소 (2002)
[4] 교육인적자원부,『수학과 교육과정 제 7차 교육과정』, 교육부 고시 제 1997-15호 [별책8]
[5] 김도상 외, 『수학과 교재론』경문사 (1990)
[6] 데이비드 톨 저, 류희찬, 조완영 역, 『고등수학적 사고』, 경문사 (2003)
[7] 박은정, 『van Hiele 이론에 기초한 중등기하 개선방향 연구』, 아주대학교 교육대학원 석사학위 논문 (2001)
[8] 양승갑 외 6인, 『중학교 수학 8-나』, (주)금성출판사 (2001)
[9] 우정호, 『van Hiele의 수학학습 수준이론에 대한 소고』, 서울대학교 사범대학교 논총 제 33집 (1986)
[10] 우정호, 『수학학습-지도원리와 방법』, 서울대학교 출판부 (2000)
[11] 이금주,『van Hiele 이론에 기초한 교과서 분석과 효과적인 기하 학습에 관한 연구』, 중앙대학교 교육대학원 석사학위 논문 (2007)
[12] 이다정,『van Hiele 이론에 근거한 제 7차 중등수학교과서 내용분석』, 충남대학교 교육대학원 석사학위 논문 (2006)
[13] 임은형,『van Hiele 이론을 기초로 한 중학교 기하단원의 지도방안 연구』, 조선대학교 교육대학원 석사학위 논문 (2004)
[14] 진무숙,『van Hiele의 교수학습 5단계를 활용한 증명지도 방법』, 한국교원대학교 석사학위 논문 (1996)
[15] 최혜정,『van Hiele이론을 통한 기하학의 개념 이해 및 문제풀이 연구』, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문 (1990)
[16] 황혜정 외 5인,『수학교육학신론』, 문음사 (2001)

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	200114023	과 정	석사
성 명	한글: 박 지 윤 한문: 朴 智 潤 영문: Park Ji-Youn				
주 소	광주광역시 북구 매곡동 대주피오레 105동 302호				
연락처	E-MAIL: wldbsdlwl@hanmail.net				
논문제목	중학교 과정에서 도형영역의 지도법에 관한 연구 -van Hiele이론을 중심으로- 영문 : A study on the teaching method of figure in the middle school curriculum				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2008년 2월 일

저작자: 박 지 윤 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하