creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000236269

2008年 2月
敎育學碩士(數學敎育)學位論文

정사각기둥에서의 대칭인 두 점의 표면거리에 관한 연구

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

任 停 泫

정사각기둥에서의 대칭인 두 점의 표면거리에 관한 연구

Surface distance between two symmetric points on square prism

2008年 2月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

任 停 泫

정사각기둥에서의 대칭인 두 점의 표면거리에 관한 연구

指導敎授 安 永 濬

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 제출함.

2008年 2月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

任 停 泫

任停泫의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2008년 2월

朝鮮大學校 敎育大學院

목 차

그림목차 ····· Ⅱ

ABSTRACT ····· Ⅲ

제1장 서 론 ····· 1

제2장 정사각기둥에서의 표면거리 ····· 2

제1절 높이가 2인 정사각기둥에서의 표면거리 계산 ····· 2

제2절 높이가 h인 정사각기둥에서의 표면거리 계산 ····· 18

제3장 결 론 ····· 31

참고문헌 ····· 32

그림목차

[그림 1]. 높이가 2인 정사각기둥 ····· 2

[그림 2]. 삼각형 ODD'에서 $\overline{DC}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 경우 ····· 3

[그림 3]. 높이가 2인 정사각기둥을 좌표평면상에 펼친 전개도 ····· 5

[그림 4]. ODD' 영역에서의 거리 비교 ····· 15

[그림 5]. 높이가 h인 정사각기둥 ····· 18

[그림 6]. 높이가 h인 정사각기둥을 좌표평면상에 펼친 전개도 ····· 19

[그림 7]. $h=3$일 때의 최장표면거리 ····· 28

[그림 8]. $h=6$일 때의 최장표면거리 ····· 28

[그림 9]. $h=15$일 때의 최장표면거리 ····· 29

[그림 10]. $h=100$일 때의 최장표면거리 ····· 29

ABSTRACT

Surface distance between two symmetric points on square prism

Joung Hyun Lim
Advisor : Prof. Young Joon Ahn
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education. Chosun University

This study is solving the problem surface distance between two symmetric points on square prism.

First, draw the development figure. Next, think on the coordinates plane. I compare surface distance between two symmetric points. In that order I evaluate the point that longest surface distance from the square prism height is 2 and one side of plant is 1.

Expanding it, I evaluate the point that longest surface distance from the square prism height is h and one side of plane is 1. I display point of longest surface distance is origin.

제1장 서 론

본 연구의 목적은 정다각기둥의 밑면의 꼭지점(O)에서 표면거리가 가장 먼 점에 관한 연구[4]을 바탕으로 이를 확장시켜 높이가 2인 정사각기둥에서 중심축에 대칭인 임의의 점들 중 최장표면거리를 갖는 점을 찾는 것이다.

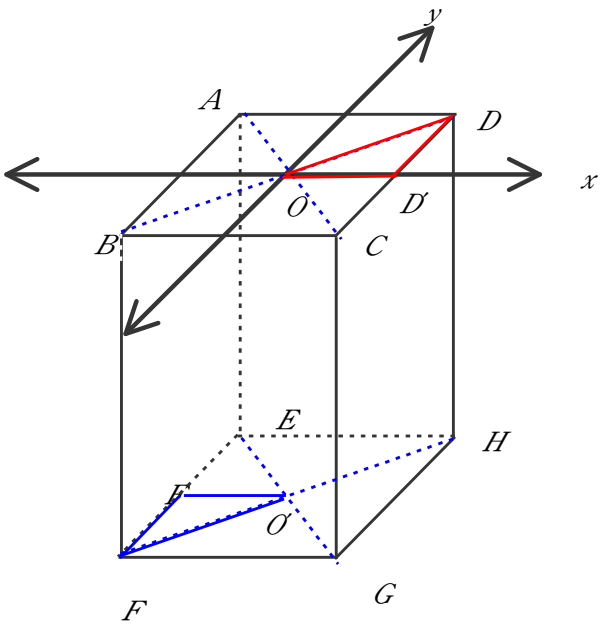
본 연구에서 사용되어지는 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리에 대한 정의를 내리면 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}$이다.[2] 그러나 대칭하는 두 점의 거리는 정사각기둥의 윗면의 어느 모서리를 지나느냐에 따라 즉, 두 점이 움직이는 경로에 따라 거리가 달라진다.

그러므로 각각의 경로에 대해 모두 생각해 보고 어떤 점에서 최장표면거리를 갖는지 찾아보자. 그리고 더 나아가 높이가 임의의 값 h로 주어질 때 최장표면거리를 갖는 점을 찾을 수 있는지 연구하고자 한다.

제2장 정사각기둥에서의 표면거리

제1절 높이가 2인 정사각기둥에서의 표면거리의 계산

밑면의 모양이 정사각형이고 한 밑변의 길이가 1, 높이가 2인 정사각기둥이 있다. 정사각기둥 위에서의 임의의 한 점에서 최장표면거리를 구하려고 한다. 여기서는 중심축 $\overline{OO'}$의 중점에 대칭하는 두 점의 최장표면거리를 생각해보자. 단, “거리”는 표면을 따라 움직인 최단길이를 나타내고[4], “최장표면거리”는 대칭하는 두 점들 사이의 거리 중 가장 큰 값을 뜻한다.

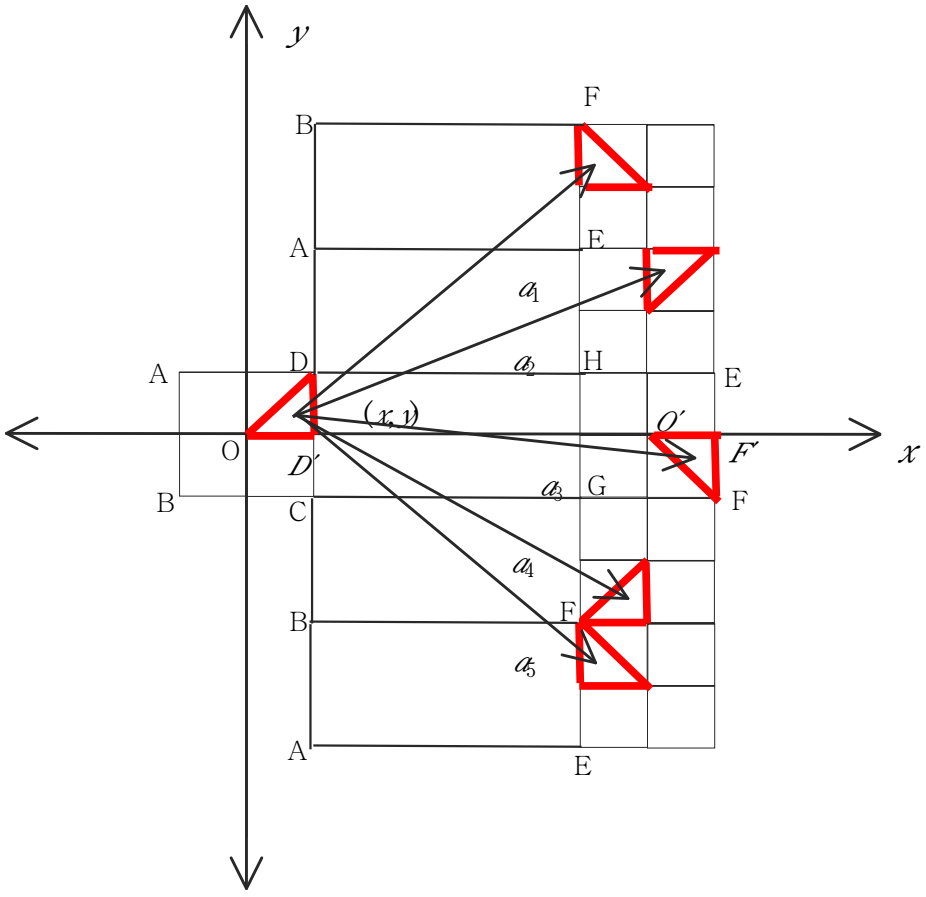


[그림 1] 높이가 2인 정사각기둥

정사각형의 영역을 좁혀 정사각기둥의 윗면을 중심으로 삼각형을 이루는 영역

ODD'의 임의의 점에서 가장 먼 거리를 살펴보기 위해 삼각형 ODD'과 선분 OO'을 기준으로 가장 먼 삼각형인 $O'FF'$을 생각해 보자.

먼저 정사각기둥을 정사각형 $ABCD$을 중심으로 펼치면 다음과 같은 모양의 [그림2]를 얻을 수 있다. 삼각형 ODD'에서 삼각형 $O'FF'$으로 가는 거리가 정사각형 $ABCD$의 어느 방향으로 갈 때 가장 단거리인지 생각해 보기로 하자.



[그림 2] 삼각형 ODD'에서 $\overline{DC}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 경우

[그림 2]에서 본 것처럼 정사각형 $ABCD$의 삼각형 ODD'영역에서 삼각형 $O'FF'$으로 갈 수 있는 방향은 크게 선분 $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$을 지나는 경우이다.

먼저 선분 $\overline{DC}$로 지나가는 경우를 자세히 살펴보면

직선a_1 은 $\overline{DC} \rightarrow \overline{DH} \rightarrow \overline{AE} \rightarrow \overline{EF}$을 지나가는 경우

직선a_2 은 $\overline{DC} \rightarrow \overline{DH} \rightarrow \overline{EH}$을 지나가는 경우

직선a_3 은 $\overline{DC} \rightarrow \overline{HG}$을 지나가는 경우

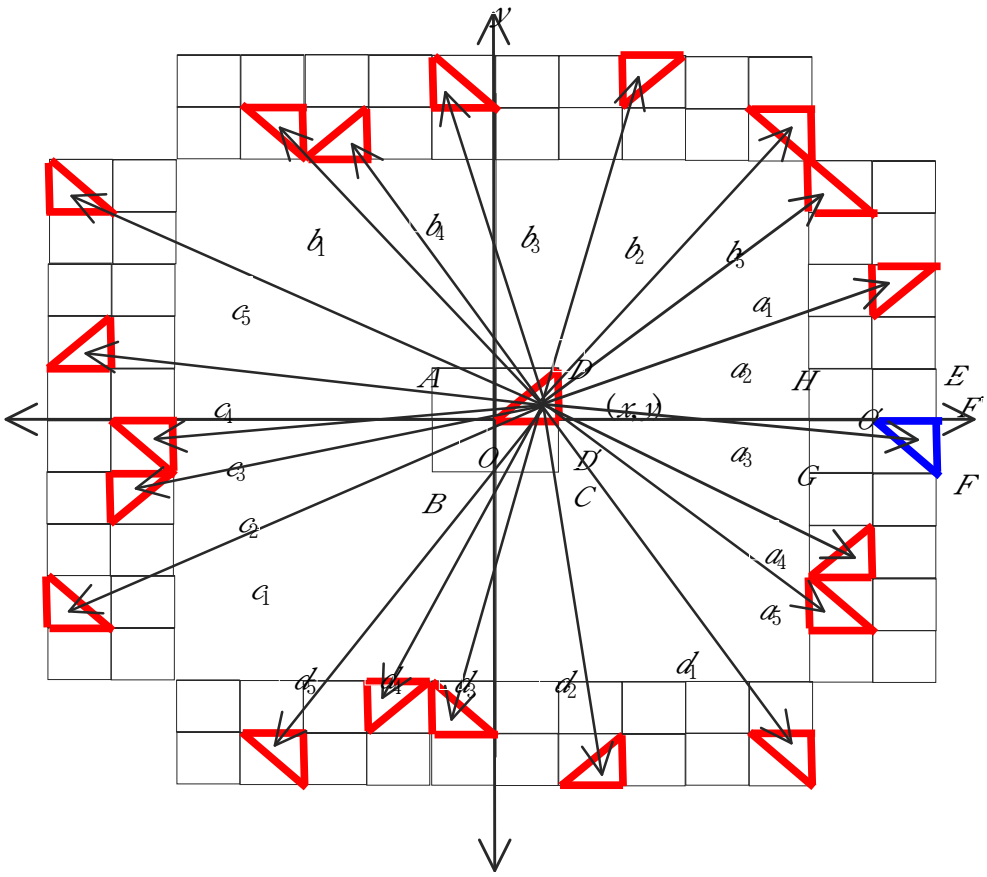
직선a_4 은 $\overline{DC} \rightarrow \overline{CG} \rightarrow \overline{GF}$을 지나가는 경우

직선a_5 은 $\overline{DC} \rightarrow \overline{CG} \rightarrow \overline{BF} \rightarrow \overline{EF}$을 지나가는 경우

모두 5가지의 경우이다.

이와 같은 방법으로 정사각형 $ABCD$의 삼각형 ODD'영역에서 갈 수 있는 방향의 모든 경우의 수를 구해보면 각 선분을 지나가는 방법이 모두 5가지의 경우가 있어 총 20가지의 경우를 생각할 수 있다.

삼각형 ODD'에서 선분 DC를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 직선을 a_1에서 a_5로 표현한 것처럼 선분 AD, 선분 AB, 선분 BC를 지나는 직선을 각각 b, c, d로 표현하면 [그림 3]과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 [그림 3]은 정사각형 $ABCD$안의 삼각형 ODD'에서 삼각형 $O'FF'$로 가는 경로를 평면좌표 상에 전개도로 나타낸 것이다. 입체도형의 전개도에 관한 내용은 참고문헌[1, Jin Akiyama 외 3인, Convex development of a regular tetrahedron, Computational Geometry 34, 2-10, 2006]에 잘 정리되어 있다.



[그림 3] 높이가 2인 정사각기둥을 좌표평면상에 펼친 전개도

그러면 삼각형 ODD'에서 삼각형 $O'FF'$로 가는 경우에 대하여 하나씩 생각해 보자.

1. 삼각형 ODD'에서 $\overline{DC}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 직선의 경우

먼저 삼각형 $O'FF'$영역안의 점을 $(x+3, -y)$ 이라하면 직선 a_3의 길이의 제곱은

$$a_3(x,y) = (x+3-x)^2 + (-y-y)^2 = 9+4y^2$$

이다. 두 직선의 길이의 크기 비교는 길이를 제곱하여도 크기의 대소 관계는 불변하므로 이제부터는 길이의 제곱을 직선의 길이로 생각하고 비교하겠다.

이제 차례로 직선 a_1, a_2, a_4, a_5의 길이를 구해보자. [그림 2]에서 직선 a_1는 삼각형 $O'FF'$안의 점을 π만큼 회전시킨 위치까지의 거리이므로 먼저 삼각형 $O'FF'$을 점 O'가 점 O에 오도록 평행이동을 시킨 후 π만큼 회전시킨 다음 x는 3만큼, y는 2만큼 평행이동을 시키면 된다.[4]

삼각형 OFF'영역안의 점을 구하면 직선 a_1에 해당하는 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x+3 \\ -y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -x+3 \\ y+2 \end{pmatrix}$$

이고, 여기서 직선 a_1의 길이를 구하면

$$a_1(x,y) = (-x+3-x)^2 + (y+2-y)^2 = (2x-3)^2 + 4$$

이다. 이와 같은 과정을 거쳐 직선 a_2, a_4, a_5에 해당하는 점의 위치를 각각 구해보면 직선 a_2에 해당하는 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\pi & -\sin\frac{1}{2}\pi \\ \sin\frac{1}{2}\pi & \cos\frac{1}{2}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y+3 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

이고, 직선 a_4에 해당하는 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{3}{2}\pi & -\sin\frac{3}{2}\pi \\ \sin\frac{3}{2}\pi & \cos\frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -y+3 \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

이며, 직선 a_5에 해당하는 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -x+3 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

이다. 직선 a_2, a_4, a_5의 길이를 구해보면

$$a_2(x,y) = (y+3-x)^2+(x+1-y)^2=(x-y-3)^2+(x-y+1)^2$$

$$a_4(x,y) = (-y+3-x)^2+(-x-1-y)^2=(x+y-3)^2+(x+y+1)^2$$

$$a_5(x,y) = (-x+3-x)^2+(y-2-y)^2=(2x-3)^2+4$$

이다. 여기서 직선들의 길이를 비교해보니

$$a_1 = a_5$$

의 결과를 얻을 수 있다.

2. 삼각형 ODD'에서 $\overline{AD}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 직선의 경우

앞의 경우와 같이 먼저 직선 b_3에서의 점을 구하면 $(-x, y+3)$이다. 이점을 회전을 시켜서 직선 b_1, b_2, b_4, b_5을 구할 수 있다.

먼저 직선 b_3의 길이는

$$b_3(x, y) = (-x-x)^2 + (y+3-y)^2 = 4x^2 + 9$$

이다. 이제 차례로 직선 b_1, b_2, b_4, b_5의 길이를 구해보자.

직선 b_1, b_2, b_4, b_5안의 점을 각각 구해보면, 직선 b_1에서의 점의 위치는

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x-0.5-1.5 \\ -y+0.5+2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ -y+3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

이고, 직선 b_2에서의 점의 위치는

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\frac{3}{2}\pi & -\sin\frac{3}{2}\pi \\ \sin\frac{3}{2}\pi & \cos\frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y-0.5+1.5 \\ x-0.5+3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x+3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

이며, 직선 b_4에서의 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\pi & -\sin\frac{1}{2}\pi \\ \sin\frac{1}{2}\pi & \cos\frac{1}{2}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -y+0.5-1.5 \\ -x+0.5+2.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y-1 \\ -x+3 \end{pmatrix}$$

이다. 직선 b_5에서의 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x-0.5+2.5 \\ -y+0.5+2.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2 \\ -y+3 \end{pmatrix}$$

이므로, 직선 b_1, b_2, b_4, b_5의 길이를 구해보면

$$b_1(x,y) = (x-2-x)^2+(-y+3-y)^2 = 4+(2y-3)^2$$

$$b_2(x,y) = (y+1-x)^2+(x+3-y)^2 = (x-y-1)^2+(x-y+3)^2$$

$$b_4(x,y) = (-y-1-x)^2+(-x+3-y)^2 = (x+y+1)^2+(x+y-3)^2$$

$$b_5(x,y) = (x+2-x)^2+(-y+3-y)^2 = 4+(2y-3)^2$$

이다. 여기서도 $b_1 = b_5$이므로 앞으로는 각 선분에 대하여 같은 경우를 제외한 4가지 경우에 대해서만 생각하기로 하겠다.

3. 삼각형 ODD'에서 $\overline{AB}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 직선의 경우

여기서부터는 구하는 과정은 생략하고 각 경우에 따른 직선의 거리에 대한 결과 값

들만을 보이면

$$c_1(x,y) = (-x-3-x)^2+(y-2-y)^2 = (2x+3)^2+4$$

$$c_2(x,y) = (y-3-x)^2+(x-1-y)^2 = (x-y+3)^2+(x-y-1)^2$$

$$c_3(x,y) = (x-3-x)^2+(-y-y)^2 = 9+4y^2$$

$$c_4(x,y) = (-y-3-x)^2+(-x+1-y)^2 = (x+y+3)^2+(x+y-1)^2$$

이다.

4. 삼각형 ODD'에서 $\overline{BC}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 직선의 경우

여기서도 각 경우에 따른 직선의 거리에 대한 결과 값들만을 보이면

$$d'_1(x,y) = (x+2-x)^2+(-y-3-y)^2 = 4+(2y+3)^2$$

$$d'_2(x,y) = (-y+1-x)^2+(-x-3-y)^2 = (x+y-1)^2+(x+y+3)^2$$

$$d'_3(x,y) = (-x-x)^2+(y-3-y)^2 = 4x^2+9$$

$$d'_4(x,y) = (y-1-x)^2+(x-3-y)^2 = (x-y+1)^2+(x-y-3)^2$$

이다.

위의 계산결과들을 열거해보면 다음과 같이 16가지의 직선의 길이의 값을 얻을 수 있다.

$$a_1(x,y) = (-x+3-x)^2+(y+2-y)^2 = (2x-3)^2+4$$

$$a_2(x,y) = (y+3-x)^2+(x+1-y)^2 = (x-y-3)^2+(x-y+1)^2$$

$$a_3(x,y) = (x+3-x)^2+(-y-y)^2 = 9+4y^2$$

$$a_4(x,y) = (-y+3-x)^2+(-x-1-y)^2 = (x+y-3)^2+(x+y+1)^2$$

$$b_1(x,y) = (x-2-x)^2+(-y+3-y)^2 = 4+(2y-3)^2$$

$$b_2(x,y) = (y+1-x)^2+(x+3-y)^2 = (x-y-1)^2+(x-y+3)^2$$

$$b_3(x,y) = (-x-x)^2+(y+3-y)^2 = 4x^2+9$$

$$b_4(x,y) = (-y-1-x)^2+(-x+3-y)^2 = (x+y+1)^2+(x+y-3)^2$$

$$c_1(x,y) = (-x-3-x)^2+(y-2-y)^2 = (2x+3)^2+4$$

$$c_2(x,y) = (y-3-x)^2+(x-1-y)^2 = (x-y+3)^2+(x-y-1)^2$$

$$c_3(x,y) = (x-3-x)^2+(-y-y)^2 = 9+4y^2$$

$$c_4(x,y) = (-y-3-x)^2+(-x+1-y)^2 = (x+y+3)^2+(x+y-1)^2$$

$$d_1(x,y) = (x+2-x)^2+(-y-3-y)^2 = 4+(2y+3)^2$$

$$d_2(x,y) = (-y+1-x)^2+(-x-3-y)^2 = (x+y-1)^2+(x+y+3)^2$$

$$d_3(x,y) = (-x-x)^2+(y-3-y)^2 = 4x^2+9$$

$$d_4(x,y) = (y-1-x)^2+(x-3-y)^2 = (x-y+1)^2+(x-y-3)^2$$

이제 각각의 거리의 크기를 비교하면

$$a_2(x,y) = d_4(x,y),\ a_3(x,y) = c_3(x,y),\ a_4(x,y) = b_4(x,y)$$

$$b_2(x,y) = c_2(x,y),\ b_3(x,y) = d_3(x,y),\ c_4(x,y) = d_2(x,y)$$

이므로 위의 6가지 경우와 각각의 직선 a_1, b_1, c_1, d_1의 4가지 경우, 총 10가지 경우에 대해서만 삼각형 ODD'의 임의의 한 점에서 삼각형 $O'FF'$의 대응점까지의 최단거리를 생각해 볼 수 있다. 임의의 두 점 사이의 거리는 여러 가지 경로 중 가장단거리이므로 이제 10가지 계산결과들의 크기를 비교하여 거리를 구하도록 하자.

단, 여기서 $ODD' = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 0.5,\ 0 \le y \le x\}$이다.

$c_1(x,y)$와 $a_1(x,y)$의 거리를 비교하면

$$c_1(x,y) - a_1(x,y) = (2x+3)^2 + 4 - (2x-3)^2 - 4 = 24x \ge 0\ (\because x \ge 0)$$

따라서 $c_1(x,y) \ge a_1(x,y)$ 이다. 그러므로 $c_1(x,y)$는 제외한다.

$d_1(x,y)$와 $b_1(x,y)$의 거리를 비교하면

$$d_1(x,y) - b_1(x,y) = 4 + (2y+3)^2 - 4 - (2y-3)^2 = 24y \ge 0\ (\because y \ge 0)$$

이므로 $d_1(x,y) \ge b_1(x,y)$이다. 따라서 $d_1(x,y)$는 제외한다.

이제 $b_2(x,y)$ 와 $a_2(x,y)$의 거리를 비교하면

$$\begin{aligned} b_2(x,y) - a_2(x,y) &= (x-y-1)^2 + (x-y+3)^2 - (x-y-3)^2 - (x-y+1)^2 \\ &= 8(x-y) \ge 0\ (\because x \ge y) \end{aligned}$$

따라서 $b_2(x,y) \ge a_2(x,y)$이다. 그러므로 $b_2(x,y)$ 는 제외한다.

또, $b_3(x,y)$와 $a_3(x,y)$의 거리를 비교하면

$$b_3(x,y) - a_3(x,y) = 4x^2 + 9 - 9 - 4y^2$$
$$= 4(x+y)(x-y) \geq 0 \ (\because x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \geq y)$$

이므로 $b_3(x,y) \geq a_3(x,y)$이다. 그러므로 $b_3(x,y)$도 제외할 수 있다.

$c_4(x,y)$와 $a_4(x,y)$의 거리를 비교하면

$$c_4(x,y) - a_4(x,y) = (x+y+3)^2 + (x+y-1)^2 - (x+y-3)^2 - (x+y+1)^2$$
$$= 8(x+y) \geq 0 \ (\because x \geq 0,\ y \geq 0)$$

$c_4(x,y) \geq a_4(x,y)$ 이므로 $c_4(x,y)$는 제외한다.

이번에는 $b_1(x,y)$와 $a_1(x,y)$의 거리는 비교하면

$$b_1(x,y) - a_1(x,y) = 4 + (2y-3)^2 - (2x-3)^2 - 4$$
$$= 4(y-x)(y+x-3) \geq 0 (\because x \geq y,\ y+x \leq 1)$$

$b_1(x,y) \geq a_1(x,y)$이다. 그러므로 $b_1(x,y)$의 거리도 제외할 수 있다.

이제 남은 4가지 경우 즉, $a_1(x,y)$, $a_2(x,y)$, $a_3(x,y)$, $a_4(x,y)$의 거리를 살펴보도록 하자.

먼저 $a_2(x,y)$와 $a_4(x,y)$의 거리를 비교하면

$$a_2(x,y) - a_4(x,y) = (x-y-3)^2 - (x-y+1)^2 - (x+y-3)^2 - (x+y+1)^2$$
$$= -8y(x-1) \geq 0 \ (\because y \geq 0,\ x-1 < 0)$$

따라서 $a_2(x,y) \geq a_4(x,y)$이므로 $a_2(x,y)$의 거리까지 제외할 수 있다.

처음 생각했던 20가지의 경우들에서 최종적으로 남은 세 개의 거리들에 대하여 생각

해보기로 하자. 여기서는 $a_1(x,y)$, $a_3(x,y)$, $a_4(x,y)$에 대하여 각각의 거리가 같을 때 그때의 x, y을 비교하여 삼각형 ODD'영역을 살펴보고 영역에 따른 거리를 생각하려고 한다.

먼저 $a_1(x,y) = a_3(x,y)$, $a_1(x,y) = a_4(x,y)$, $a_3(x,y) = a_4(x,y)$일 때의 x값을 같게 했을 때 y값을 구해보면 $a_1(x,y) = a_3(x,y)$의 y의 값은

$$\sqrt{x^2-3x+1}\ ,\ -\sqrt{x^2-3x+1}$$

이고, $a_1(x,y) = a_4(x,y)$의 y의 값은

$$-x+1+\frac{\sqrt{8x^2-24x+10}}{2}\ ,\ -x+1-\frac{\sqrt{8x^2-24x+10}}{2}$$

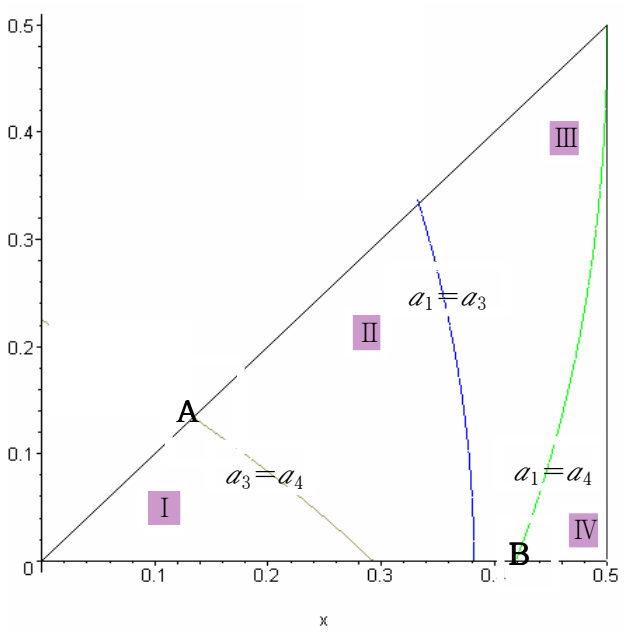
이며, $a_3(x,y) = a_4(x,y)$의 y의 값은

$$x-1+\frac{\sqrt{8x^2-16x+6}}{2}\ ,\ x+1-\frac{\sqrt{8x^2-16x+6}}{2}$$

이다.

여기서 y의 영역은 $\{\ y|0 \le y \le 0.5\}$이므로 $a_1(x,y) = a_3(x,y)$의 y의 값은 $\sqrt{x^2-3x+1}$이고, $a_1(x,y) = a_4(x,y)$의 y의 값은 $-x+1-\frac{\sqrt{8x^2-24x+10}}{2}$, $a_3(x,y) = a_4(x,y)$의 y의 값은 $x-1+\frac{\sqrt{8x^2-16x+6}}{2}$라 할 수 있다.

다음 장의 [그림 4]는 삼각형 ODD'영역에서의 영역별로 최단거리를 갖는 경우를 나누어 나타낸 것이다.



[그림 4] ODD'영역에서의 거리 비교

이제 각각의 영역의 임의의 x, y의 값을 대입을 하여 거리의 크기를 비교해보면 제Ⅰ영역에서는 $a_3 < a_4 < a_1$이고 제Ⅱ영역에서는 $a_4 < a_3 < a_1$, 제Ⅲ영역에서는 $a_4 < a_1 < a_3$이며 제Ⅳ영역에서는 $a_1 < a_4 < a_3$일을 알 수 있다.

즉, 제Ⅰ영역에서 임의의 두 점 사이의 거리는 $a_3(x, y)$의 값을 구하면 되고, 제Ⅱ,Ⅲ영역에서는 $a_4(x, y)$의 값, 제Ⅳ영역에서의 거리 값은 $a_1(x, y)$의 값을 구하면 된다. 그리고 이들 값 중 최대값이 나오는 점을 선택하면 된다.

그러므로 각각의 영역에 따른 최대값을 비교하여 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

[정리1] 높이가 2인 정사각기둥에서 중심축의 중점에 점의 대칭성을 이용하여 최장표면거리를 갖는 점을 구하면 점 $(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2})$이다.

(증명) [그림 4]에서 제Ⅰ영역에서 임의의 두 점 사이의 거리는 $a_3(x,y)=9+4y^2$의 값 이므로 y의 값이 클수록 두 점 사이의 거리가 크게 된다. 따라서 그림의 Ⅰ영역 중에서 가장 큰 거리 값을 가지는 점의 위치는 점 A이다.

이제 제Ⅱ,Ⅲ영역을 살펴보면,

$$a_4(x,y)=(x+y-3)^2+(x+y+1)^2=2(x+y-1)^2+8$$

은 $x+y$의 값이 작을수록 큰 값을 가지게 된다. 왜냐하면 $0\le x+y\le 1$이기 때문이다. 따라서 제Ⅱ,Ⅲ영역의 점 들 중 가장 큰 거리 값을 가지는 점의 위치는 점 A이다.

또, Ⅳ영역에서 임의의 두 점 사이의 거리는 $a_1(x,y)=(2x-3)^2+4$이므로 x의 값이 작을수록 값이 크게 되기 때문에 제Ⅳ영역에서 가장 큰 거리 값을 가지는 점은 점 B이다.

이제 점 A에서의 거리와 점 B에서의 거리를 비교하여 높이가 2인 정사각기둥에서 최장표면거리를 갖는 점을 찾으면 된다.

먼저 점 A는 $y=x$와 $y=x-1+\frac{\sqrt{8x^2-16x+6}}{2}$의 교점이므로 교점을 구하면 $(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2})$이다. 점 B는 $y=0$과 $y=-x+1-\frac{\sqrt{8x^2-24x+10}}{2}$의 교점이므로 교점을 구하면 $(\frac{4-\sqrt{10}}{2}, 0)$이다.

점 A일 때의 거리를 구해보면

$$a_3(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2})=9+4y^2 = 9+4(1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \fallingdotseq 9.072$$

이다. 즉, 점 A에서 정사각기둥의 중심축의 중점에 대칭인 점까지의 거리가 약 9.072

가 되는 것이다.

또, 점 B일 때의 거리를 구해보면

$$a_1\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}, 0\right) = (2x-3)^2 + 4 = \left(2 \times \frac{4-\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 4 \fallingdotseq 8.675$$

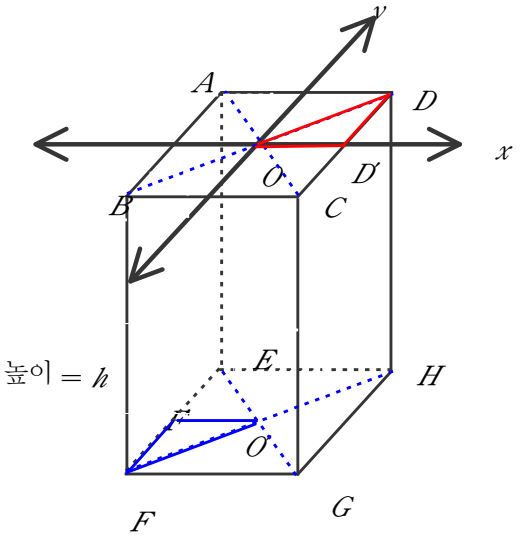
이다. 즉, 점 B에서 정사각기둥의 중심축의 중점에 대칭인 점까지의 거리가 약 8.675 되는 것이므로 점 A의 거리가 점 B의 거리보다 더 길다는 것을 알 수 있다.

따라서 결과로부터 [그림 4]의 영역에서 높이가 2인 정사각기둥에서 최장표면거리를 갖는 점을 구하면 A점이라는 것을 알 수 있고 이 점은 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

■

제2절 높이가 h인 정사각기둥에서의 표면거리의 계산

이번에는 밑면의 모양이 정사각형이고 한 밑변의 길이가 1, 높이가 h인 정사각기둥이 있다. 이 때 정사각기둥 윗면의 한 점에서 최장표면거리를 구하려고 한다. 여기서도 중심축 $\overline{OO'}$의 중점에 대칭하는 두 점의 표면거리를 구할 것이다.



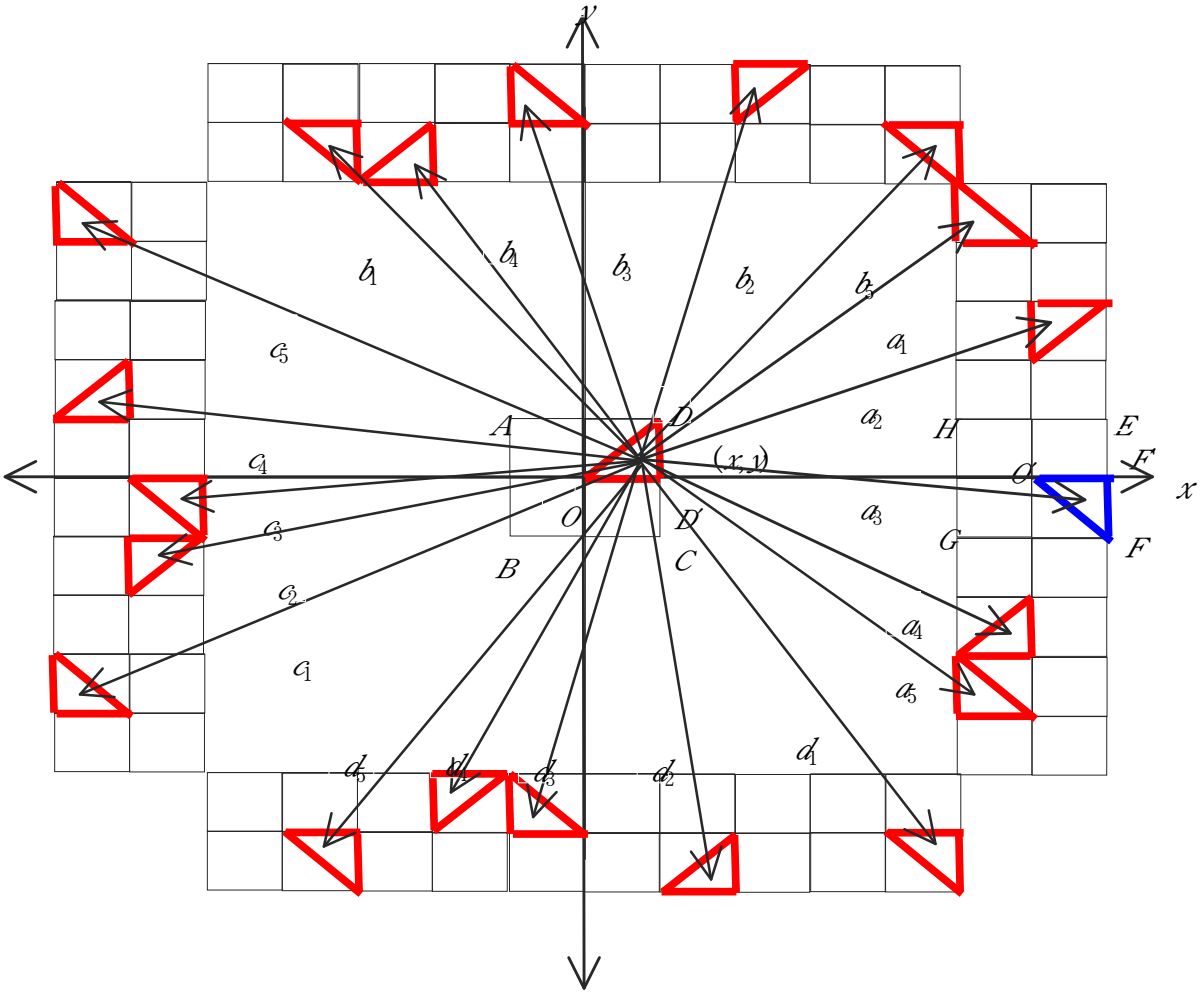
[그림 5] 높이가 h인 정사각기둥

영역을 좁혀서 삼각형 ODD'에서 삼각형 $O'FF'$로 가는 경우에 대하여 하나씩 생각해 보자.

앞에 언급한 내용을 바탕으로 정사각기둥을 펼쳐서 삼각형 ODD'에서 삼각형 $O'FF'$로 가는 경우를 모두 생각해보면 모두 20가지이고

$$a_1 = a_5,\ b_1 = b_5,\ c_1 = c_5,\ d_1 = d_5$$

이므로 여기서는 16가지에 대해서만 생각을 하겠다.



[그림 6] 높이가 h인 정사각기둥을 좌표평면상으로 펼친 전개도

먼저 기준이 되는 직선 a_3, b_3, c_3, d_3에서의 점의 위치를 구하면

$a_3(x,y)$에서의 점 $=(x+h+1,\ -y)$, $b_3(x,y)$에서의 점 $=(-x,\ y+h+1)$

$c_3(x,y)$에서의 점 $=(x-h-1,\ -y)$, $d_3(x,y)$에서의 점 $=(-x,\ y-h-1)$

이다. 이 점들을 기준으로 각 직선들에 대한 거리를 구하도록 하자.

1. 삼각형 ODD'에서 $\overline{DC}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 직선의 경우

먼저 삼각형 $O'FF'$영역안의 점은 $(x+h+1,\ -y)$이므로 직선 a_3의 길이의 제곱은

$$a_3(x,y)=(x+h+1-x)^2+(-y-y)^2=(h+1)^2+4y^2$$

이다. 두 직선의 길이의 크기 비교는 길이를 제곱하여도 크기의 대소 관계는 불변하므로 여기서도 길이의 제곱을 직선의 길이로 생각하고 비교하겠다.

이제 차례로 직선 a_1, a_2, a_4, a_5의 길이를 구해보자. 직선 a_1는 삼각형 $O'FF'$안의 점을 π만큼 회전시킨 위치까지의 거리이므로 먼저 삼각형 $O'FF'$을 점 O'가 점 O에 오도록 평행이동을 시킨 후 π만큼 회전시킨 다음 x는 $h+1$만큼, y는 2만큼 평행이동을 시키면 된다.[4]

이제 삼각형 OFF'영역안의 점을 구하면, 직선 a_1에서의 점의 위치는

$$\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}h+1\\ 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h+1\\ 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-x+h+1\\ y+2\end{pmatrix}$$

이고, 여기서 직선 a_1의 길이를 구하면

$$a_1(x,y) = (-x+h+1-x)^2 + (y+2-y)^2 = (2x-h-1)^2 + 4$$

이다.

이와 같은 과정을 거쳐 직선 a_2, a_4에서의 점의 위치를 각각 구해보면, 직선 a_2에서의 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\pi & -\sin\frac{1}{2}\pi \\ \sin\frac{1}{2}\pi & \cos\frac{1}{2}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y+h+1 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

이고, 직선 a_4에서의 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{3}{2}\pi & -\sin\frac{3}{2}\pi \\ \sin\frac{3}{2}\pi & \cos\frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -y+h+1 \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

이다.

따라서 직선 a_2, a_4의 길이를 각각 구하면

$$a_2(x,y) = (y+h+1-x)^2 + (x+1-y)^2 = (x-y-h-1)^2 + (x-y+1)^2$$

$$a_4(x,y) = (-y+h+1-x)^2 + (-x-1-y)^2 = (x+y-h-1)^2 + (x+y+1)^2$$

이다.

2. 삼각형 ODD'에서 $\overline{AD}$를 지나 삼각형 $O'FF'$로 가는 직선의 경우

앞의 경우와 같이 직선 b_3에서의 점을 구하면 $(-x,\ y+h+1)$이므로 이점을 회전을 시켜서 직선 b_1, b_2, b_4, b_5을 구할 수 있다.

직선 b_3의 길이는

$$b_3(x,y)=(-x-x)^2+(y+h+1-y)^2=4x^2+(h+1)^2$$

이다.

이제 차례로 직선 b_1, b_2, b_4에서의 점의 위치를 구해보자.

직선 b_1, b_2, b_4에서의 점의 위치를 각각 구해보면, 직선 b_1에서의 점의 위치는

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-x\\ y+h+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-0.5\\ h+1.5\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}-1.5\\ h+0.5\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x+0.5\\ y-0.5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1.5\\ h+0.5\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}x-0.5-1.5\\ -y+0.5+h+0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\ -y+h+1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

이고, 직선 b_2에서의 점의 위치는

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\cos\frac{3}{2}\pi & -\sin\frac{3}{2}\pi\\ \sin\frac{3}{2}\pi & \cos\frac{3}{2}\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x+0.5\\ y-0.5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1.5\\ h+1.5\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x+0.5\\ y-0.5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1.5\\ h+1.5\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}y-0.5+1.5\\ x-0.5+h+1.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+1\\ x+h+1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

이다.

또, 직선 b_4에서의 점의 위치는

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\pi & -\sin\frac{1}{2}\pi \\ \sin\frac{1}{2}\pi & \cos\frac{1}{2}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1.5 \\ h+0.5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x+0.5 \\ y-0.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1.5 \\ h+0.5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -y+0.5-1.5 \\ -x+0.5+h+0.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y-1 \\ -x+h+1 \end{pmatrix}$$

이다.

이제 직선 b_1, b_2, b_4의 길이를 구해보면

$$b_1(x,y) = (x-2-x)^2+(-y+h+1-y)^2 = 4+(2y-h-1)^2$$

$$b_2(x,y) = (y+1-x)^2+(x+h+1-y)^2 = (x-y-1)^2+(x-y+h+1)^2$$

$$b_4(x,y) = (-y-1-x)^2+(-x+h+1-y)^2 = (x+y+1)^2+(x+y-h-1)^2$$

이다.

이와 같은 과정을 반복하여 모든 경우에 대하여 다 구하면 다음과 같다.

$$a_1(x,y) = (-x+h+1-x)^2+(y+2-y)^2 = (2x-h-1)^2+4$$

$$a_2(x,y) = (y+h+1-x)^2+(x+1-y)^2 = (x-y-h-1)^2+(x-y+1)^2$$

$$a_3(x,y) = (x+h+1-x)^2+(-y-y)^2 = (h+1)^2+4y^2$$

$$a_4(x,y) = (-y+h+1-x)^2+(-x-1-y)^2 = (x+y-h-1)^2+(x+y+1)^2$$

$$b_1(x,y) = (x-2-x)^2+(-y+h+1-y)^2 = 4+(2y-h-1)^2$$
$$b_2(x,y) = (y+1-x)^2+(x+h+1-y)^2 = (x-y-1)^2+(x-y+h+1)^2$$
$$b_3(x,y) = (-x-x)^2+(y+h+1-y)^2 = 4x^2+(h+1)^2$$
$$b_4(x,y) = (-y-1-x)^2+(-x+h+1-y)^2 = (x+y+1)^2+(x+y-h-1)^2$$

$$c_1(x,y) = (-x-h-1-x)^2+(y-2-y)^2 = (2x+h+1)^2+4$$
$$c_2(x,y) = (y-h-1-x)^2+(x-1-y)^2 = (x-y+h+1)^2+(x-y-1)^2$$
$$c_3(x,y) = (x-h-1-x)^2+(-y-y)^2 = (h+1)^2+4y^2$$
$$c_4(x,y) = (-y-h-1-x)^2+(-x+1-y)^2 = (x+y+h+1)^2+(x+y-1)^2$$

$$d_1(x,y) = (x+2-x)^2+(-y-h-1-y)^2 = 4+(2y+h+1)^2$$
$$d_2(x,y) = (-y+1-x)^2+(x-h-1-y)^2 = (x+y-1)^2+(x-y-h+1)^2$$
$$d_3(x,y) = (-x-x)^2+(y-h-1-y)^2 = 4x^2+(h+1)^2$$
$$d_4(x,y) = (y-1-x)^2+(x-h-1-y)^2 = (x-y+1)^2+(x-y-h-1)^2$$

이제 각각의 거리에 대한 계산값을 비교해보면

$$a_2(x,y) = d_4(x,y),\ a_3(x,y) = c_3(x,y),\ a_4(x,y) = b_4(x,y)$$
$$b_2(x,y) = c_2(x,y),\ b_3(x,y) = d_3(x,y),\ c_4(x,y) = d_2(x,y)$$

이므로 위의 6가지 경우와 각각의 직선 a_1, b_1, c_1, d_1의 4가지 경우, 총 10가지 경우에 대해서만 삼각형 ODD' 임의의 한 점에서 삼각형 $O'FF'$까지의 최단거리를 생각해 볼 수 있다. 임의의 두 점까지의 거리를 측정하는데 있어 여러 가지 경로 중 가장 단거리를 거리라 하므로 이제 10가지 계산결과들의 크기를 비교하여 거리를 구하도록

하자.

단, 여기서 $ODD' = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 0.5,\ 0 \le y \le x\}$이고 높이 $h > 1.5$이다.

$c_1(x,y)$와 $a_1(x,y)$의 거리를 비교하면

$$c_1(x, y) - a_1(x, y) = (2x + h + 1)^2 + 4 - (2x - 3)^2 - 4$$

$$= 8x(h + 1) \ge 0\ (\because x \ge 0,\ h > 0)$$

따라서 $c_1(x,y) \ge a_1(x,y)$ 이다. 그러므로 $c_1(x, y)$는 제외한다.

$d_1(x, y)$와 $b_1(x, y)$의 거리를 비교하면

$$d_1(x, y) - b_1(x, y) = 4 + (2y + h + 1)^2 - 4 - (2y - 3)^2$$

$$= 8y(h + 1) \ge 0\ (\because y \ge 0,\ h > 0)$$

이므로 $d_1(x,y) \ge b_1(x,y)$ 이다. 그러므로 $d_1(x, y)$는 제외한다.

이제 $b_2(x, y)$ 와 $a_2(x, y)$의 거리를 비교하면

$$b_2(x, y) - a_2(x, y)$$

$$= (x - y - 1)^2 + (x - y + h + 1)^2 - (x - y - h - 1)^2 - (x - y + 1)^2$$

$$= 4(x - y)h \ge 0\ (\because x \ge y,\ h > 0)$$

이고, 따라서 $b_2(x, y) \ge a_2(x, y)$ 이다. 그러므로 $b_2(x, y)$ 는 제외한다.

$b_3(x, y)$와 $a_3(x, y)$의 거리를 비교하면

$$b_3(x,y) - a_3(x,y)$$
$$= 4x^2 + (h+1)^2 - (h+1)^2 - 4y^2$$
$$= 4(x+y)(x-y) \geq 0 \ (\because x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \geq y)$$

$b_3(x,y) \geq a_3(x,y)$ 이다. 그러므로 $b_3(x,y)$는 제외한다.

$c_4(x,y)$와 $a_4(x,y)$의 거리를 비교하면

$$c_4(x,y) - a_4(x,y)$$
$$= (x+y+h+1)^2 + (x+y-1)^2 - (x+y-h-1)^2 - (x+y+1)^2$$
$$= 4(x+y)h \geq 0 (\because x \geq 0,\ y \geq 0,\ h \geq 0)$$

$c_4(x,y) \geq a_4(x,y)$ 이다. 그러므로 $c_4(x,y)$는 제외한다.

여기서 $b_1(x,y)$와 $a_1(x,y)$의 거리는 비교하면

$$b_1(x,y) - a_1(x,y) = 4 + (2y-h-1)^2 - (2x-h-1)^2 - 4$$
$$= 4(y-x)(y+x-h-1) \geq 0 (\because x \geq y,\ y+x \leq 1)$$

$b_1(x,y) \geq a_1(x,y)$ 이다. 그러므로 $b_1(x,y)$의 거리도 제외할 수 있다.

이제 남은 4가지 경우 즉, $a_1(x,y)$, $a_2(x,y)$, $a_3(x,y)$, $a_4(x,y)$의 거리를 살펴보도록 하자.

여기서 $a_2(x,y)$와 $a_4(x,y)$의 거리를 비교하면

$$a_2(x,y) - a_4(x,y)$$
$$= (x-y-h-1)^2 + (x-y+1)^2 - (x+y-h-1)^2 - (x+y+1)^2$$
$$= -4y(2x-h) \geq 0 (\because y \geq 0,\ 2x-h \leq 0)$$

$a_2(x,y) \geq a_4(x,y)$이므로 $a_2(x,y)$의 거리까지 제외할 수 있다.

남은 세 개의 거리들에 대하여도 생각해보기로 하자. $a_1(x,y)$, $a_3(x,y)$, $a_4(x,y)$에 대하여 각각의 거리가 같을 때 그때의 x, y을 비교하여 삼각형 ODD'영역을 분석하여 영역에 따른 거리를 생각하려고 한다.

즉, $a_1(x,y) = a_3(x,y)$, $a_1(x,y) = a_4(x,y)$, $a_3(x,y) = a_4(x,y)$일 때의 x값을 같게 했을 때 y값을 구해보면

$a_1(x,y) = a_3(x,y)$의 y의 값은 $\sqrt{x^2 - xh - x + 1}$, $-\sqrt{x^2 - xh - x + 1}$

이며, $a_1(x,y) = a_4(x,y)$의 y의 값은

$$-x + \frac{h}{2} + \frac{\sqrt{8x^2 - 8xh + h^2 - 8x + 6}}{2},\ -x + \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{8x^2 - 8xh + h^2 + 6}}{2}$$

이고, $a_3(x,y) = a_4(x,y)$의 y의 값은

$$-\frac{h}{2} + x + \frac{\sqrt{8x^2 - 8xh + h^2 + 2}}{2},\ -\frac{h}{2} + x - \frac{\sqrt{8x^2 - 8xh + h^2 + 2}}{2}$$

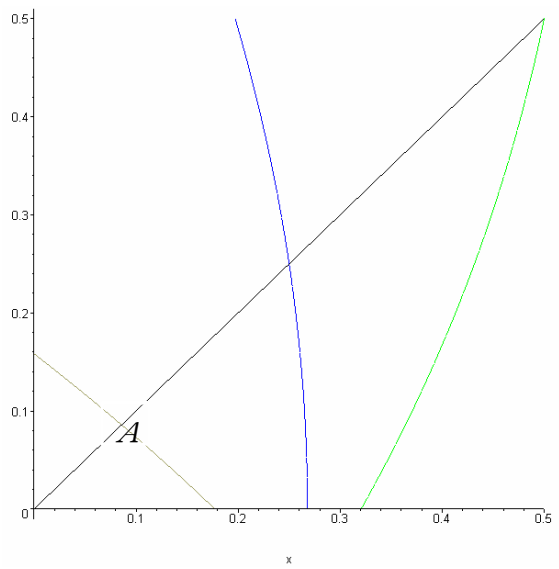
이다.

여기서 y의 영역은 $\{ y | 0 \le y \le 0.5 \}$이고, $h > 1.5$이므로

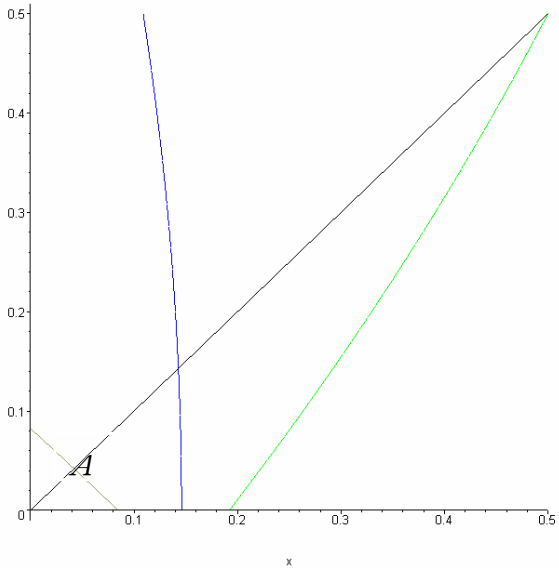
$b_1(x,y) = b_3(x,y)$의 y의 값은 $\sqrt{x^2 - xh - x + 1}$, $b_1(x,y) = b_4(x,y)$의 y의 값은 $-x + \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{8x^2 - 8xh + h^2 + 6}}{2}$, 그리고 $b_3(x,y) = b_4(x,y)$의 y의 값은 $-\frac{h}{2} + x + \frac{\sqrt{8x^2 - 8xh + h^2 + 2}}{2}$ 라 할 수 있다.

그러나 여기서는 제2장의 제1절의 경우처럼 높이가 주어지지 않았기 때문에 하나의 점으로 단정 짓는데 어려움이 발생한다. 따라서 이해를 돕기 위해 높이에 임의의 값을 대입하여 [그림 4]처럼 표현을 하여 주어지는 높이 값들에 따라 변하하는 최장표면거리를 표현하는 영역들을 생각해보기로 하자.

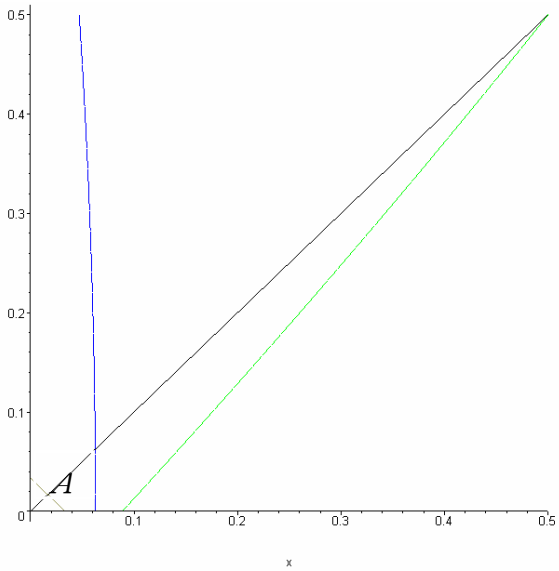
다음은 Maple 8을 이용[3, 5]하여 ODD'영역에서 최장표면거리를 갖는 영역을 그래프로 표현한 것이다.



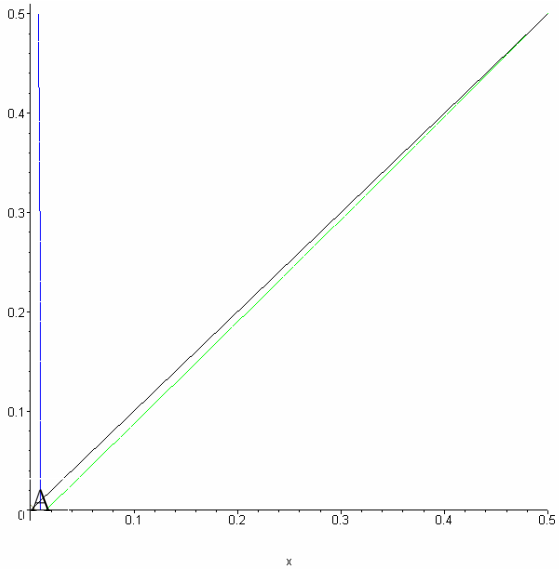
[그림 7] $h=3$일 때의 최장표면거리



[그림 8] $h=6$일 때의 최장표면거리



[그림 9] $h = 15$일 때의 최장표면거리



[그림 10] $h = 100$일 때의 최장표면거리

앞의 그림들로부터 정사각기둥의 높이를 키워 갈수록 정사각기둥에서의 최장표면거리를 갖는 두 점은 원점과 즉, $O(0,0)$와 중심축의 중점에 대칭하는 대칭점이라는 것을 생각해 볼 수 있고 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

[정리2] 높이가 h인 정사각기둥에서 중심축의 중점에 점의 대칭성을 이용하여 최장표면거리를 갖는 점을 구하면 점 $\left(\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}, \frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}\right)$이다. 또, h의 값을 한없이 키우면 그 점은 원점이 된다.

(증명) 제2장 제1절에서 이미 증명한 것처럼 이 영역에서 최장표면거리를 갖는 점은 점 A가 된다. 점 A는 $y=x$와 $a_3=a_4$의 교점이므로 앞에서 계산한 $y=-\frac{h}{2}+x+\frac{\sqrt{8x^2-8xh+h^2+2}}{2}$와 $y=x$의 교점을 구하도록 하자.

$x=-\frac{h}{2}+x+\frac{\sqrt{8x^2-8xh+h^2+2}}{2}$이므로 x를 구하면 $x=\frac{h\pm\sqrt{h^2-1}}{2}$이고 x의 범위 $0\le x\le 0.5$ 안에서 x의 값을 구하면 $x=\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}$이다.

따라서 높이가 h일 때 최장표면거리를 갖는 점은 $\left(\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}, \frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}\right)$이다.

또, x의 값에서 여기서 h의 값을 한없이 키우면

$$\lim_{h\to\infty}\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}=\lim_{h\to\infty}\frac{h^2-(h^2-1)}{2(h+\sqrt{h^2-1})}=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{2(h+\sqrt{h^2-1})}=0$$

이고, 따라서 최장표면거리를 갖는 점은 $(0,0)$이 된다.

이것을 직선 $a_3(x,y)$에 대입하면 $a_3(0,0)=(h+1)^2+4y^2=(h+1)^2$가 되고, 한 변의 길이가 1인 정사각형을 윗면으로 갖는 정사각기둥에서 높이를 무한히 키우면 대칭인 두 점 사이의 거리도 무한이 된다. ■

제3장 결론

본 논문은 한 변의 길이가 1인 정사각형을 윗면으로 가지는 정사각기둥에서의 중심축의 중점에 대칭하는 임의의 두 점이 어느 점에서 최장표면거리를 갖는지를 비교하여 높이가 2일 때와 높이가 h일 때의 최장표면거리를 갖는 점을 찾는 연구이다.

먼저 정사각기둥의 밑변의 길이가 1이고 높이가 2일 때, 윗면인 정사각형$ABCD$의 영역을 삼각형 ODD'로 제한하고, 정사각형 $ABCD$의 각각의 선분을 지날 때의 거리를 하나하나 비교하여 거리를 구하면, 최장표면거리는 갖는 점은 $(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이다.

그리고 정사각기둥의 밑변의 길이가 1이고 높이가 h일 때, 최장표면거리를 갖는 점은 $(\frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2}, \frac{h-\sqrt{h^2-1}}{2})$이고, 높이 h를 한없이 키우면서 최장표면거리를 갖는 대칭인 두 점을 찾으면 이 점은 정사각형의 무게중심 다시 말해, [그림 6]과 같이 펼칠 때 원점이 됨을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] Jin Akiyama 외 3인, Convex development of a regular tetrahedron, Computational Geometry 34, 2-10, 2006

[2] 박윤범 외 5인, 고등학교 수학 10-나, (주)대한교과서 p12, 2005.

[3] 신진아. 중학교 수학과 교육과정의 공간도형에 관한 고찰, 부경대 교육대학원, 2003.

[4] 양지희, 정다각기둥에서의 표면거리에 관한 연구, 조선대학교 교육대학원, 2006.

[5] 이기홍, 중등교육을 위한 Maple 활용 방안 연구, 홍익대학교 교육대학원, 2004.

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20058062	과 정	석사
성명	한글: 임 정 현 한문: 任 停 泫 영문: Joung Hyun Lim				
주소	광주광역시 동구 동명동 101-35 선우빌 205호				
연락처	017-609-5788 E-MAIL: ruru6043@hanmail.net				
논문제목	한글 : 정사각기둥에서의 대칭인 두 점의 표면거리에 관한 연구 영문 : Surface distance between two symmetric points on square prism				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억 장치에의 저장, 전송 등을 허락함.
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음.
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2008년 2월 일

저작자: 임정현 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하