creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000236221

2008년 2월

敎育學碩士(數學敎育)學位論文

二 變數 베지어 多項函數의 次數減少에 관한 硏究

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

張 美 善

二 變數 베지어 多項函數의 次數減少에 관한 研究

Degree reduction of Bezier polynomials with two variables.

2008년 2월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

張 美 善

二 變數 베지어 多項函數의 次數減少에 관한 研究

指導敎授 安 永 濬

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 提出함.

2007년 10월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

張 美 善

張美善의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2007년　12월

朝鮮大學校 敎育大學院

- 목　　차-

ABSTRACT

Ⅰ. 도입 ····· 1

Ⅱ. 서론

A. 베지어 곡선 ····· 3

B. 르장드르 다항식 ····· 8

C. 체비세프 다항식 ····· 11

Ⅲ. 이 변수 다항함수의 차수 감소

A. L_2 에서 이 변수 다항함수의 차수 감소 ····· 15

B. L_∞ 에서 이 변수 다항함수의 차수 감소 ····· 27

Ⅳ. 결론 ····· 30

참고문헌 ····· 31

- 그 림 목 차 -

[그림1] 르장드르 그래프 ····· 8
[그림2] 제1형의 체비셰프 그래프 ····· 11

ABSTRACT

Degree reduction of Bezier polynomials with two variables.

Mi Seon Jang
Advisor : Prof. Young Joon Ahn Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

In this paper, we apply the method of best degree reduction of polynomial to polynomials with two variables. This study show that best degree reduction of polynomial cannot be applied to degree reduction of polynomials with two variables in $L_\infty - norm$. But it can be applied to polynomials with two variables in $L_2 - norm$.

Ⅰ. 도입

선박, 차체, 비행기와 같은 곡선과 곡면으로 이루어진 모양을 디자인하기위해 여러 가지 시도들이 있었다. 하지만, 기하학적인 모형들을 디자인하기위한 수식적인 표현은 이루어지지 않았다. 프랑스 선박 기술자 Bezier, P. E. (1910-1999)는 기하학적인 곡선들을 모형화 하기위해 곡선을 고안하였는데, 이 곡선이 베지어 곡선(Bezier curve)이다.

베지어 곡선은 그 수학적인 특성 때문에 현재, 비행기, 자동차, 배 등의 각종 제품의 설계를 위한 공학 CAGD(Computer Aided Geometric Design) 혹은 CAD/CAM에 널리 이용되고 있으며, DTP시스템 등에 사용되는 외곽선 폰트의 기술에도 이용되고 있다 [14,17]. 이처럼, 컴퓨터 그래픽 분야에 이용되는 베지어 곡선의 중요한 문제 중 하나가 곡선의 차수 감소 문제이다 [7].
곡선의 차수 감소란, 주어진 n차의 베지어 곡선의 n-1차 근사 베지어 곡선을 찾는 문제이다. 일반적으로, 차수 감소는 정확하게 행해질 수 없기 때문에 그것은 오차문제를 야기 시킨다 [1]. 최근 30년간 베지어 곡선의 차수 감소에 대한 많은 논문들이 나왔다 [9].

번스타인 다항식으로 표현되는 베지어 곡선은 번스타인 다항식의 직교적이지 않은 성질 때문에 근사문제에 있어서 그것의 적용에 많은 한계를 갖는다 [1]. 몇몇의 직교적 다항식들이 차수감소의 분야에서 소개되었다. 제1형의 체비셰프 다항식은 $L_\infty - norm$ 에서 최적 근사를 얻기 위해 사용되며, 제2형의 체비셰프 다항식은 $L_1 - norm$ 에서 최적 근사를 얻기 위해 사용된다. 르장드르 다항식은 $L_2 - norm$ 에서 최적 근사를 얻기 위해 사용 된다[3,10]. 현재까지 많은 논문들은 $L_1 - norm$, $L_2 - norm$, $L_\infty - norm$ 에서 일 변수 베지어 다항함수의 차수 감소를 다루었다.

본 연구에서 우리는 이것을 이 변수로 확장하려고 한다. 2장에서는 베지어 곡선과 르장드르 다항식 그리고, 체비셰프 다항식에 대해 설명을 하고, 특히, $L_\infty - norm$ 에서는 일 변수에 적용했던 최적 차수 감소 방법이 이 변수에서 적용되지 않음을 보이고, $L_\infty - norm$ 에서와는 다르게, $L_2 - norm$ 에서는 일 변수에 적용했던 최적 차수 감소 방법이 이 변수에서도 동일하게 증명됨을 3장에서 보일 것이다. 끝으로, 4장에서 이 논문을 결론지을 것이다.

Ⅱ. 서론

베지어 곡선은 드 카스텔죠가 처음으로 발전시킨 순환 알고리즘에 의해 정의될 수 있다. 하지만, 알고리즘의 형태보다는 비순환적인 공식의 형태에서 베지어 곡선을 나타내기위한 명백한 표현을 가질 필요가 있다. 더욱이, 이것은 이론적인 발전을 꽤 촉진시킬 것이다 [4].

A. Bezier curves

이 곡선은 컴퓨터 그래픽에서 부드러운 곡선을 만드는데 널리 사용되고 있으며, 3가지 형태가 알려져 있다.

1. 선형 베지어 곡선

점 P_0 와 P_1 이 주어지면, 선형 베지어 곡선은 단지 두 점 사이의 직선일 뿐이다. 곡선은 $B(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \quad , \quad t \in [0, 1]$ 이다.

2. 2차 베지어 곡선

함수 $B(t)$, 점 P_0, P_1, P_2 를 이용해 그려지는 경로(path)이다. 곡선은 $B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \quad , \quad t \in [0, 1]$ 이다. 트루타입 글꼴[1]은 2차 베지어 곡선으로 만들어진 베지어 스플라인(spline)을 사용한다.

3. 3차 베지어 곡선

평면, 또는 3차원 공간에서 4개의 점 P_0, P_1, P_2, P_3 가 3차 베지어 곡선을

註 1) 윈도우즈에서 주로 사용하는 글꼴로 미국의 MS사와 Apple사에 의해 공동으로 개발되었으며, 글자의 외곽선 정보를 사용하기 때문에 각종 그래픽 프로그램에서 문자에 다양한 효과를 줄 수 있는 글꼴이다.

정의한다. 곡선은 P_0을 출발해 P_1 , P_2 는 거치지 않고, P_3 에 도착하며 P_0 와 P_1 사이의 거리는 P_3로 돌아서기 전 P_2 와 곡선간의 거리를 결정한다. 곡선은 $B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t\,(1-t)^2 P_1 + 3t^2 (1-t) P_2 + t^3 P_3 \quad , t \in [0\,,1]$ 이다. 이미징 시스템[2)]은 구부러진 모양을 그리는데 3차 베지어 곡선으로 만들어진 베지어 스플라인을 사용한다.

이를 일반화하면, n차의 베지어 곡선은 점 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 이 주어질 때,

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i (1-t)^{n-i} t^i \quad = b_0 (1-t)^n + \binom{n}{1} b_1 (1-t)^{n-1} t + \cdots + b_n t^n$$

이다. 즉, $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad , (i = 0, \cdots, n) \ , \ 0 \le t \le 1$

$b^n(t) = \sum_{i=o}^{n} b_i B_i^n(t) \ , \ b_i \in \mathbb{R}^d$ 로 베지어 곡선은 n차 번스타인 다항식으로 표현된다. 베지어 곡선의 성질은 다음과 같다.

***a.* 아핀 불변성** *:* 베지어 곡선의 중요한 성질은 아핀 사상 아래서 불변하다는 것이다. 베지어 곡선 $b^n(t) = \sum_{i=o}^{n} b_i B_i^n(t) \ , \ b_i \in \mathbb{R}^d$ 에서

(1) 점 $b^n(t)$ 를 계산하고 난 후, 이 점들에 아핀 사상을 준 경우.

(2) 조정 다각형에 아핀 사상을 주고 나서, 변수값 t에서 사상된 다각형 값을 구한 경우.

註 2) 80년대 후반에 광파일 시스템이라는 용어로 소개되어 95년 이후부터 이미징 시스템으로 불리 우기 시작했으며, 스캐너를 통해 종이문서나 표면 등을 컴퓨터에 입력하고 색인을 첨부해 저장, 관리하는 시스템이다. 최근에는 이미지에 주석, 음성 및 동영상 메시지 등 부가정보를 추가해 저장하고 다양한 정보를 검색해볼 수 있도록 지원되고 있다.

즉, $A:\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $b_i \in \mathbb{R}^d$, $n = 2, 3, \cdots$, $A(b^n(t)) = \sum_{i=0}^{n} Ab_i B_i^n(t)$

로서, 위 두 과정을 행한 것이 같은 결과를 얻는다는 것을 의미한다. 하지만, 이것은 원근 사상 아래에서는 불변성을 내포하지 않음에 주목한다. 곡선은 원래 곡선의 원근 이미지는 아니기 때문이다.

b. 볼록 껍질 성질(Convex hull property) : 이 성질은 주어진 조정점에 의해 정의된 베지어 곡선은 항상 그 조정점들에 의해 결정되는 볼록 껍질 안에 존재한다는 것이다. 이 성질은 베지어 곡선의 정의에 의해 사용된 블렌딩 함수 (조절점의 개수보다 차수가 하나 낮은 다항함수)가 $t \in [0,1]$

$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) = 1$ 이 되기 때문이다. 볼록 껍질 성질은 두 베지어 곡선 간에 교차점을 구할 때 매우 유용하게 사용되는데, 그 이유는 두 개의 곡선에 해당되는 볼록 껍질 간의 교차여부를 간단히 검사하여 그들 간에 겹치는 영역이 없으면 두 곡선간의 교차점 계산을 안 해도 되기 때문이다.

c. 종점 보간법 : 베지어 곡선은 b_0 에서 시작해서 b_n 에서 끝이 난다. 즉, $t=0$, $t=1$ 인 경우에 대해 $b^n(0) = b_0$, $b^n(1) = b_n$ 이다.

d. 대칭성 : 베지어 곡선 $\sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$ 와 $\sum_{i=0}^{n} b_{n-i} B_i^n(t)$ 는 반대 방향 곡선이다. 즉, 두 베지어 곡선의 조정점들을 $b_0, b_1, \ , b_n$ or $b_n, b_{n-1}, \ , b_0$ 처럼 거꾸로하여도 같은 곡선이 생성된다는 것이다. 단지 그들이 움직이는 방향만 다를 뿐이다. 따라서, 번스타인 다항식은 t 와 1-t에 대하여 대칭적이라고 말한다.

***e.* 무게중심 조합 아래서의 불변성 :** 베지어 다각형으로부터 베지어 곡선을 형성하는 과정은 무게중심 조합의 불변성을 남긴다. $\alpha+\beta=1$ 에 대하여

$$\sum_{i=0}^{n}(\alpha b_i+\beta c_i)B_i^n(t) = \alpha\sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t) + \beta\sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t)$$

을 얻는다. 우리는 곡선위에 일치하는 점들의 가중치를 얻음으로써 혹은 일치하는 조정점들의 가중치를 얻음으로써 구조화하여 곡선을 산출한다.

***f.* 선형 정밀도 :** n 개의 계수 $q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$ 를 가진 주어진 베지어 곡선 q^{n-1} 에 대하여 새로운 계수를 b_i 라 할 때,

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_i \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n} b_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

를 만족한다고 하자.

$$b_i = \frac{i}{n} q_{i-1} + \frac{n-i}{n} q_i \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

가 되어, 이 다각형으로부터 얻어진 곡선은 q_{i-1}, q_i 사이의 직선이 된다. 이러한 성질을 선형 정밀도라 한다 [4].

이러한 성질을 지닌 베지어 곡선은 안정적인 형태를 만들고, 계산하기도 쉽기 때문에 현재 널리 쓰이고 있다.

지금, 다음과 같은 두 베지어 곡선을 생각하자.

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t) \quad , \quad g^m(t) = \sum_{i=0}^{m} g_i G_i^m(t)$$

$$d(b^n, g^m) = \max\{|b^n(t) - g^m(t)| \ : \ t \in [0, 1]\} = L^\infty - norm$$

로써, 이는 베지어 곡선 $b^n(t)$ 에 대한 근사 $g^m(t)$ 와의 오차거리함수를 의미한다. $L_P - norm$ 상에서의 $b^n(t)$ 와 $g^m(t)$ 의 거리는

$$\|b^n(t) - g^m(t)\|_{L_P} = \{ \int_0^1 |b^n(t) - g^m(t)|^P dt \}^{\frac{1}{P}} = L_P - norm$$

이다 [3,7,11]. 즉, 오차거리함수를 최소화하는 근사 $g^m(t)$ 를 구하는 것이 베지어 곡선의 최적차수감소방법이다. 우리는 3장에서 $L_\infty - norm$ 과 $L_2 - norm$ 에서의 차수감소에 관해 좀 더 자세히 언급하도록 할 것이다.

B. 르장드르 다항식

Adrien Marie Legendre의 이름을 따서 지어진 르장드르 함수는 르장드르 미분방정식의 해들로서 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}L(x)\right] + n(n+1)L(x) = 0$$

이 미분방정식은 주로 과학과 전문적인 분야에서 볼 수 있는데 특별히, 구면 좌표에서 Laplace 방정식을 풀 때 이용된다 [6]. 르장드르 미분방정식의 해들은 구간 $[-1,1]$ 에서 유한이며, 직교적 다항식의 수열형태를 가진 이 해들을 르장드르 다항식이라고 한다. 그래서, 르장드르 다항식은 구간 $[-1,1]$ 사이에 있는 함수들을 근사시킬 때 많이 사용하며, 베지어 곡선의 최적차수감소에도 르장드르 다항식이 쓰이는 것은 바로 이러한 이유 때문이다.

각각의 르장드르 다항식 $L_n(x)$ 은 n차 다항식으로 Rodrigues′ formula] :

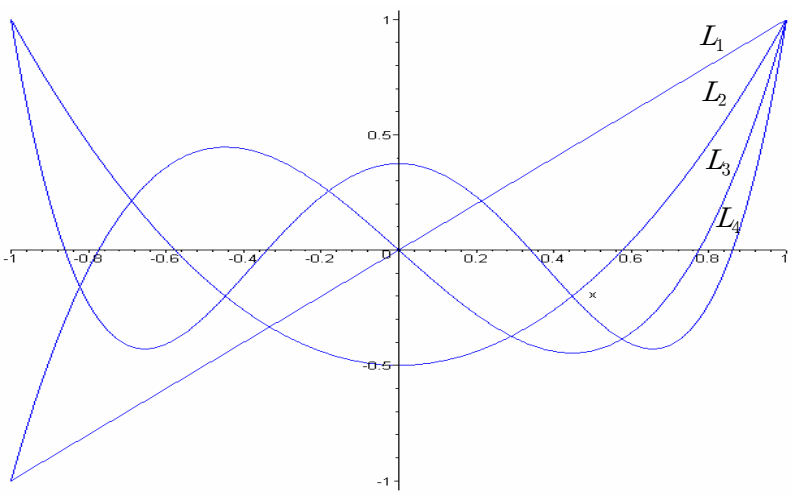
$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

로 표현될 수 있다 [2,6]. 즉,

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$
$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$
$$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$
$$L_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-35x)$$
$$\vdots$$

로서, 다음과 같은 순환 관계를 만족 한다.

$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)xL_n - nL_{n-1}$$



[그림 1 : 르장드르 그래프]

르장드르 다항식이 구간 $[-1, 1]$에서 직교성을 갖는다는 것은 이미 앞에서 언급한 바 있다. 즉, 르장드르 다항식 $L_n(x)$은 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 일 때, 구간 $[-1, 1]$에서 다음을 만족한다.

$$\int_{-1}^{1} L_m(x)L_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & , \quad m = n \end{cases}$$

또한, 르장드르 다항식의 일반화 함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

로 표현된다.

르장드르 다항식 $L_n(x)$ 에서 구간 $[0,1]$ 에 대하여 $x=2t-1$ 을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
L_0(t) &= 1 \\
L_1(t) &= 2t-1 \\
L_2(t) &= 6t^2-6t+1 \\
L_3(t) &= 20t^3-30t^2+12t-1 \\
L_4(t) &= 70t^4-140t^3+90t^2-20t+1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

여기서, 임의의 다항식 $f(t)$를 생각하자.

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + \cdots + a_n t^n \quad , \quad t \in [0,1] \quad .$$

그러면, 이 다항식의 최적 차수 감소를 $\bar{f}(t)$ 라고 할 때,

$$\bar{f}(t)=f(t)-a_n c_n L_n(2t-1) \quad , \quad c_n : \text{상수}$$

로 나타내어진다. 즉, $\alpha(t)$를 다음과 같이 놓으면,

$$\alpha(t)=f(x)-\bar{f}(t)=a_n c_n L(2t-1)$$

$\alpha(t)$ 의 L_2-norm 은

$$\|\alpha(t)\|_{L_2}=|a_n||c_n|\sqrt{\int_0^1 L_n(2t-1)^2\,dt}$$

가 되므로, 이는 오차거리함수를 의미한다. 즉, 오차거리함수를 최소화하는 근사 $\bar{f}(t)$를 구하는 것이 최적 차수 감소 방법이다. 이런 이유로, 르장드르 다항식이 최적 차수 감소를 구할 때 이용되는 것이다.

C. 체비셰프 다항식

Pafunty Chebyshev 의 이름을 따서 지어진 체비셰프 다항식은 Fibonacci 또는 Lucas 숫자와 같이 반복적으로 쉽게 정의되는 Moiver의 공식 [6]과 관련된 직교적 다항식의 제1형 체비셰프 다항식의 해들이 다항식 보간법에서 노드로써 사용되어 체비셰프 노드라고 불리우기 때문에 근사 학설에서 매우 중요하다. 보간법 다항식의 결과는 Rung 현상의 문제를 최소화하고 [6], $L_\infty - norm$ 에서 최적의 근사를 제공하므로, 제1형의 체비셰프 다항식은 $L_\infty - norm$ 에서 근사할 때 사용되고, 제2형의 체비셰프 다항식은 $L_1 - norm$ 에서 근사할 때 사용 된다 [13].

제1형의 체비셰프 미분 방정식은

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

이고, 제2형의 체비셰프 미분 방정식은

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + n(n+2)y = 0$$

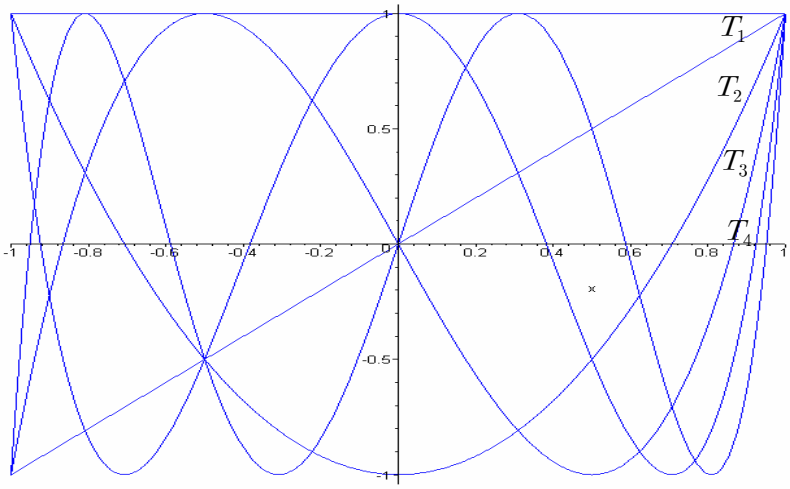
이다 [12]. 이들 방정식은 Sturm-Liouville 미분방정식의 특별한 경우이며, 체비셰프 다항식은 이들 미분방정식의 해가 되는 함수들이다 [2,6].

제1형의 체비셰프 다항식은

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^5 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

로서, 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad , \quad n = 1\,,\,2\,,\,\cdots$$



[그림2 : 제1형의 체비셰프 그래프]

또한, 이 다항식은 삼각 항등원에 의해서도 정의될 수 있다. 즉, $n = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots$ 일 때,

$$T_n(x) = (n \;\; arccos \;\; x) = cosh\,(n\,arc\,cosh\,x)$$

$$= x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}\,(x^2 - 1) + \cdots$$

$$T_n\,(cos\theta) = cos\,(n\theta)$$

이다.

제2형의 체비세프 다항식은

$$
\begin{aligned}
U_0(x) &= 1 \\
U_1(x) &= 2x \\
U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\
U_3(x) &= 8x^3 - 1 \\
U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\
U_5(x) &= 32x^5 32x^3 + 6x \\
U_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

로써, 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$U_n(x) = 2x\, U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

제2형의 체비세프 다항식 역시 삼각 항등원에 의해 정의될 수 있다. 즉, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 일 때,

$$U_n(cos\,\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

이다. 제1, 2형의 체비세프 다항식 $T_n(x)$ 와 $U_n(x)$ 도 르장드르 다항식과 마찬가지로 구간 $[-1, 1]$에서 직교적이다.

제1형의 체비세프 다항식에서는 무게함수 $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 에 대하여

$$\int_0^1 T_n(x)\,T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

이고, 이것은 $x = cos(\theta)$, $T_n(cos\theta) = cos(n\theta)$에 의해서 증명될 수 있다.

제2형의 체비셰프 다항식에서는 무게함수 $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ 에 대하여

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)\, U_m(x)\, \sqrt{1-x^2}\; dx \;= \begin{cases} 0 & : \; n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & : \; n = m \end{cases}$$

이다 [6].

Ⅲ. 이 변수 다항함수의 차수 감소

여러 다항함수의 차수감소 중에서 이 논문은 $L_\infty - norm$, $L_2 - norm$ 상에서 베지어 다항함수의 차수감소에 대해 연구를 한다. 베지어 다항함수는 제어점들이 다항식을 결정하므로, 그 제어점들을 가지고 최적 차수 감소를 행하게 되는 것이다 [15]. 일변수에서는 제어점들이 벡터형태이지만, 이 변수에서는 행렬로 표현이 된다.

즉, 일 변수에서 n차의 베지어 곡선은 점 b_0 , b_1 , $\cdots$, b_n 이 주어질 때,

$$b^n(t) = \sum_{i=o}^{n} b_i B_i^n(t) \ , \ b_i \in P$$

로서, n차 번스타인 다항식으로 표현 되고 [8,10], 이 변수에서의 n차 베지어 곡면은

$$b^n(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} B_{ij}^n(s,t) \ , \ b_{ij} \in P$$

로 표현이 된다.

정의.

$B_{ij}^n(s,t)$는 이 변수 n차 번스타인 다항식이다. 이때, $B_{ij}^n(s,t) = B_i^n(s) B_j^n(t)$ 라고 하자.

A. L_2 에서 이 변수 다항함수의 차수 감소

일 변수에서 두 르장드르 다항식 $L_i(u)$, $L_j(u)$ 은 구간 $[0,1]$ 에서 서로 직교하므로

$$\int_0^1 L_i(u)L_j(u)\,du = 0 \qquad i \neq j \quad , \quad 0 \leq i, j \leq n$$

을 만족함을 이미 알고 있다 [5,11]. 그렇다면 이 변수에서도 이 같은 성질이 동일하게 적용이 되는지 알아보자.

정의.

$L_{ij}(s,t)$ 는 이 변수 르장드르 다항식이다. 이 때, $L_{ij}(s,t) = L_i(s)L_j(t)$ 라고 하자.

정리 *3.1*

이 변수 르장드르 다항식 $L_{ij}(s,t)$ 와 $L_{km}(s,t)$ 는 구간 $[0,1]$ 에서 서로 직교한다. 즉,

$$\int_0^1\int_0^1 L_{ij}(s,t) \cdot L_{km}(s,t)\ ds\,dt \quad = 0$$

$0 \leq i, j \leq 1$, $0 \leq k, m \leq 1$, $(i,j) \neq (k,m)$ 이다.

증명.

이 변수 르장드르 다항식 $L_{ij}(s,t)$ 와 $L_{km}(s,t)$ 는

$$L_{ij}(s,t) = L_i(s,t)L_j(s,t)$$
$$L_{km}(s,t) = L_k(s,t)L_m(s,t)$$

로 정의되므로, $L_{ij}(s,t) \cdot L_{km}(s,t)$ 는

$$L_{ij}(s,t) \cdot L_{km}(s,t) = L_i(s)L_j(t) \cdot L_k(s)L_m(t)$$

로 표현된다.

$$\int_0^1\int_0^1 L_{ij}(s,t)\cdot L_{km}(s,t)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^1 L_i(s)L_j(t)\cdot L_k(s)L_m(t)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^1 L_i(s)L_k(s)\cdot L_j(t)L_m(t)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^1 L_i(s)L_k(s)\,ds\,dt\cdot\int_0^1\int_0^1 L_j(t)L_m(t)\,ds\,dt$$

$$=0 \qquad (i\ ,\ j)\neq(k,m) \qquad \square$$

n 차 다항식의 르장드르 형태에서 근사의 구조와 번스타인 형태로의 변환은 효율성과 정확성을 제공한다. $t\in[0,1]$ 에서 n 차 번스타인과 르장드르 기저로 표현된 n 차 다항식 $b(t)$ 를 생각하자.

$$b(t)=\sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)=\sum_{i=0}^{n} l_i L_i(t)$$

위 식에서 르장드르 계수 $l_0, l_1, \cdots, l_n$ 에서 번스타인 계수 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 로의 사상이 되고, 그 역도 성립한다.

$$M_n\begin{pmatrix} l_0\\ l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\quad,\quad \begin{pmatrix} l_0\\ l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}=M_n^{-1}\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

여기서, M_n 은 르장드르-번스타인 변환 행렬이다. 따라서, n차 다항식 $b(t)$ 는 르장드르-번스타인 변환 행렬 M_n 을 사용하여 다음과 같이 최적차수감소 $\overline{b}(t)$ 를 구할 수 있다.

$$b(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i L_i(t) \qquad \rightarrow \qquad l = (l_0\ ,\ \cdots\ ,\ l_n)^t = M_n^{-1} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\downarrow I_n$$

$$\bar{b}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{l}_i L_i(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i B_i^{n-1}(t) \quad \leftarrow \quad \begin{pmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1} \end{pmatrix} = M_{n-1} \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \end{pmatrix}$$

여기서, 최적차수감소 행렬을 T라고 할 때, 위의 표현을 다시 다음과 같이 나타내 보면,

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} & \xrightarrow{I_n} & \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \end{pmatrix} \\ M_n^{-1} \uparrow & & M_{n-1} \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} & \xrightarrow{T} & \begin{pmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

가 되어, 최적차수감소 행렬은 $T_n = M_{n-1} I_n M_n^{-1}$ 로 구해짐을 알 수 있다. 여기서, I_n 은 마지막 제어점을 제거하는 행렬로써 $(n) \times (n+1)$ 행렬이다. 즉,

$$I_1 = (1\ \ 0)\ ,\ \ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \cdots$$

르장드르-번스타인 변환 행렬 M_n 의 원소들은

$$M_n = M_n(j,k) = \frac{1}{\binom{n}{j}} \sum_{i=\max(0,j+k-n)}^{\min(j,k)} (-1)^{k+i} \binom{k}{i}\binom{k}{i}\binom{n-k}{j-i} \quad 0 \le j\,,\, k \le n$$

또는

$$M_n(j,k) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=\max(0,\,j+k-n)}^{\min(j,k)} (-1)^{k+i} \binom{j}{i}\binom{k}{i}\binom{n-j}{k-i}$$

으로 표현이 된다 [5].

예제 *1.* $n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots$ 에 대하여, 르장드르-번스타인 변환 행렬 M_n 은 다음과 같이 나타내어진다.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & -3 & 5 \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & 2 & -10 \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 2 & 10 \\ 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \cdots$$

르장드르-번스타인 변환 행렬 M_n 의 역행렬 M_n^{-1} 의 원소들은

$$M_n^{-1}(j,k) = \frac{2j+1}{n+j+1}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j+i}\frac{\binom{j}{i}\binom{j}{i}}{\binom{n+j}{k+i}}$$

으로 표현된다 [5].

예제 *2.* $n = 1, 2, 3, \cdots$ 에 대하여, 르장드르-번스타인 변환 행렬의 역행렬 M_n^{-1} 은 다음과 같이 나타내어진다.

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$M_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix},$$

$$M_4^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{70} & -\frac{2}{35} & \frac{3}{35} & -\frac{2}{35} & \frac{1}{70} \end{pmatrix}, \cdots$$

예제 3. $n = 1, 2, 3, \cdots$ 에 대하여, 최적차수감소 행렬 T_n 은 다음과 같이 나타내어진다 [12].

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{19}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{19}{20} \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} \frac{69}{70} & \frac{2}{35} & -\frac{3}{35} & \frac{2}{35} & -\frac{1}{70} \\ -\frac{53}{210} & \frac{106}{105} & \frac{17}{35} & -\frac{34}{105} & \frac{17}{210} \\ \frac{17}{210} & -\frac{34}{105} & \frac{17}{35} & \frac{106}{105} & -\frac{53}{210} \\ -\frac{1}{70} & \frac{2}{35} & -\frac{3}{35} & \frac{2}{35} & \frac{69}{70} \end{pmatrix}, \cdots$$

정리 *3.2.*

$b(t)$는 $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$을 제어점으로 갖는 주어진 n차 베지어 다항함수이다. $\bar{b}(t)$는 $(\bar{c}_0, \bar{c}_1, , \bar{c}_{n-1})$을 제어점으로 갖는 $n-1$차 베지어 다항함수이다. $T_n(c_0, c_1, \cdots, c_n)^t = (\bar{c}_0, \bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_{n-1})^t$ 가 될 때, L_2-norm에서 $\bar{b}(t)$는 $b(t)$의 최적 차수 감소이다.

증명.

$\bar{b}(t)$는 $(\bar{c}_0, \bar{c}_1, , \bar{c}_{n-1})$을 제어점으로 갖는 $n-1$차 베지어 다항함수이므로. $b(t)$가 다음과 같이 르장드르 기저의 표현식을 갖는다고 하면,

$$b(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i L_i(t)$$

$$b(t) = \sum_{i=0}^{n} l_i L_i(t) = l_0 L_0(t) + l_1 L_1(t) + \quad + l_{n-1} L_{n-1}(t) + l_n L_n(t)$$

$$b(t) - l_n L_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i L_i(t) = \sum_{i=o}^{n-1} \bar{c}_i L_i^{n-1}(t) = \bar{b}(t)$$ 을 만족한다.

그럼, 이제 L_2-norm에서 $\bar{b}(t)$가 $b(t)$의 최적 차수 감소임을 보이자.

모든 $b^{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$에 대하여 $b^{n-1}(t)$가 $b^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i^{n-1} L_i(t)$ 의 르장드르 기저 표현식을 갖는다고 하면,

$$\|b(t) - b^{n-1}(t)\|_{L_2} = \left\| \sum_{i=0}^{n} l_i L_i(t) - \sum_{i=0}^{n-1} l_i^{n-1} L_i(t) \right\|_{L_2}$$

여기서, $l_i^* = l_i - l_i^{n-1}$ $(0 \le i \le n)$ 이라고 놓으면,

$$\|b(t)-b^{n-1}(t)\|_{L_2} = \|l_0{}^* L_0(t) + l_1^* L_1(t) + \cdots + l_{n-1}^* L_{n-1}(t) + l_n L_n(t)\|_{L_2}$$
$$\geq \|l_n L_n(t)\|_{L_2} = \|b(t) - \bar{b}(t)\|_{L_2}$$

따라서, $\|b(t)-\bar{b}(t)\|_{L_2} = min\ \{\|b(t)-b^{n-1}(t)\|_{L_2} : b^{n-1} \in P_{n-1}\}$ 을 만족하므로, L_2-norm 에서 $\bar{b}(t)$ 는 $b(t)$ 의 최적 차수 감소이다. □

보조 정리 *3.3.*

n 차의 이 변수 다항함수 $b(s,t)$ 는 다음과 같이 번스타인과 르장드르를 기저로 하는 표현식을 갖는다.

$$b(s,t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} b_{ij} B_i^n(s) B_j^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} l_{ij} L_i(s) L_j(t)$$

여기서, $(l_{ij}) = M^{-1}(b_{ij})(M^{-1})^t$ 이다.

증명.

$b(s,t) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} b_{ij} B_i^n(s) B_j^n(t)$ 이 $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} l_{ij} L_i(s) L_j(t)$ 가 됨을 보이자.

$$b(s,t) = \sum_{j=o}^{n}\sum_{i=0}^{n} b_{ij} B_i^n(s) B_j^n(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} l_{ij}^* L_i^n(s) B_j^n(t) \quad , \quad l_{ij}^* = M^{-1} b_{ij} \quad \text{모든 } 0 \leq j \leq n$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} l_{ij}^* B_j^n(t) L_i^n(s)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} l_{ij} L_j^n(t) L_i^n(s) \quad , \quad l_{ij} = M^{-1} l_{ij}^* \quad \text{모든 } 0 \leq i \leq n$$

하지만, $l_{ij} = M^{-1} l_{ij}^{*}$ 에서 행렬$M^{-1} l_{ij}$ 를 계산할 수 없으므로

행렬 l_{ij} 의 행벡터를 b^{*} 라고 하면,

$$(M^{-1}(b^{*})^{t})^{t} = (b^{*})^{t^{t}} (M^{-1})^{t} = b^{*} (M^{-1})^{t}$$

이 되므로

$$(l_{ij}) = M^{-1} (l_{ij}{}^{*}) = M^{-1} b^{*} (M^{-1})^{t}$$

가 된다. □

일 변수에서는 르장드르에서 번스타인으로의 변환행렬이 M_n^{-1} 이었지만 이 변수에서는 $M_n^{-1} b^{*} (M_n^{-1})^{t}$ 로써 일 변수의 변환행렬과는 다름을 알 수 있었다. 그렇다면, 일 변수에서의 최적차수감소 방법이 이 변수에서도 동일하게 적용되는지를 알아보자.

정리 *3.4.*

$b(s,t)$ 는 $C = (c_{ij})$, $0 \le i, j \le n$ 를 제어점으로 갖는 주어진 이 변수 n차 베지어 다항함수이다. $\bar{b}(s,t)$는 TCT^{t} 를 제어점으로 갖는 이 변수 $(n-1)$ 차 다항함수이면, L_2-norm 에서 $\bar{b}(s,t)$는 $b(s,t)$ 의 최적 차수 감소이다.

즉, $\left\| b(s,t) - \bar{b}(s,t) \right\|_{L_2} = min \left\{ \left\| b(s,t) - b^{n-1}(s,t) \right\|_{L_2} : b^{n-1} \in P_{n-1} \right\}$

증명.

$\bar{b}(s,t)$ 는 TCT^{t} 를 제어점으로 갖는 이 변수 $(n-1)$ 차 다항함수이다.

$b(s,t)$ 가 다음과 같이 르장드르 기저의 표현식을 갖는다고 하면,

$$b(s,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} B_{ij}^{n}(s,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} l_{ij} L_{ij}(s,t)$$

$\bar{b}(s,t) = b(s,t) - (\sum_{j=0}^{n} l_{nj} L_{nj}(s,t) + \sum_{i=0}^{n-1} l_{in} L_{in}(s,t))$ 을 만족한다.

우선, $b(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij} B_{ij}^{n}(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} l_{ij} L_{ij}(s,t)$ 르장드르 기저의 표현식을 갖을 때, $\bar{b}(s,t) = b(s,t) - (\sum_{j=0}^{n} l_{nj} L_{nj}(s,t) + \sum_{i=0}^{n-1} l_{in} L_{in}(s,t))$ 의 제어점이 TCT^t 가 됨을 보이자.

최적 차수감소 행렬을 T 라 할 때, $T_n = M_{n-1} I_n M_n^{-1}$ 로 구해진다는 것은 이미 앞에서 설명하였다. TCT^t 에 $T_n = M_{n-1} I_n M_n^{-1}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} TCT^t &= M_{n-1} I_n M_n^{-1} C (M_{n-1} I_n M_n^{-1})^t \\ &= M_{n-1} I_n M_n^{-1} C (M_n^{-1})^t I_n^t M_{n-1}^t \end{aligned}$$

위 식에서 $M_n^{-1} C (M_n^{-1})^t = M_n^{-1} c_{ij} (M_n^{-1})^t = (l_{ij})$ 로써 n 차 르장드르 제어점이 되므로, $b(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij} B_{ij}^{n}(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} l_{ij} L_{ij}(s,t)$ 이 성립한다.

$$\begin{aligned} TCT^t &= M_{n-1} I_n M_n^{-1} C (M_n^{-1})^t I_n^t M_{n-1}^t \\ &= M_{n-1} I_n (l_{ij}) I_n M_{n-1}^t \end{aligned}$$

이 되어, $I_n (l_{ij}) I_n^t = (l_{ij})^{n-1}$, $0 \le i,j \le n-1$ 로써, $(n-1)$ 차 르장드르 제어점이 되므로, $b^{n-1}(s,t) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} l_{ij}^{n-1} L_{ij}(s,t)$ 이 성립한다.

$$\begin{aligned} TCT^t &= M_{n-1} I_n (l_{ij}) I_n M_{n-1}^t \\ &= M_{n-1} (l_{ij})^{n-1} M_{n-1}^t \\ &= (\bar{b}_{ij}) \end{aligned}$$

$(n-1)$ 차 번스타인 제어점이 되어, $\bar{b}(s,t) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \bar{b}_{ij} B_{ij}^{n-1}(s,t)$ 이 성립한다. 즉, $\bar{b}(s,t)$ 의 제어점은 TCT^t 임을 알 수 있다.

그럼 이제, L_2-norm 에서 $\bar{b}(s,t)$가 $b(s,t)$ 의 최적 차수 감소임을 보이자. 모든 $b^{n-1}(s,t) \in \mathbb{P}_{n-1}$ 에 대하여 $b^{n-1}(s,t) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} l_{ij}^{n-1} L_{ij}(s,t)$ 의 르장드르 기저 표현식을 갖는다고 하면,

$$\|b(s,t)-b^{n-1}(s,t)\|_{L_2} = \left\|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} l_{ij} L_{ij}(s,t) - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} l_{ij}^{n-1} L_{ij}(s,t)\right\|_{L_2}$$

이다. 여기서, $l_{ij}^{\ *} = l_{ij} - l_{ij}^{\ n-1}$ $(0 \le i, j \le n)$ 이라고 놓으면,

$$\begin{aligned}
\|b(s,t)-b^{n-1}(s,t)\|_{L_2} = \|& l_{00}^{*}L_{00}(s,t) + l_{10}^{*}L_{10}(s,t) + \cdots + l_{n0}L_{n0}(s,t) \\
& l_{01}^{*}L_{01}(s,t) + l_{11}^{*}L_{11}(s,t) + \cdots + l_{n1}L_{n1}(s,t) \\
& \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& l_{0n}L_{0n}(s,t) + l_{1n}L_{1n}(s,t) + \cdots + l_{nn}L_{nn}(s,t)\|_{L_2} \\
\ge & \left\|\sum_{j=0}^{n} l_{nj}L_{nj}(s,t) + \sum_{i=0}^{n-1} l_{in}L_{in}(s,t)\right\|_{L_2} \\
= & \|b(s,t)-\bar{b}(s,t)\|_{L_2}
\end{aligned}$$

$\|b(s,t)-\bar{b}(s,t)\|_{L_2} = min\left\{\|b(s,t)-b^{n-1}(s,t)\|_{L_2} : b^{n-1} \in P_{n-1}\right\}$을 만족하므로, L_2-norm 에서 $\bar{b}(s,t)$는 $b(s,t)$ 의 최적 차수 감소이다. □

B. L_∞ 에서 이 변수 다항함수의 차수 감소

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i=o}^{n} B_i^n(t) b_i & \rightarrow & (b_i) \\ & & \downarrow T \\ \sum_{i=o}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \bar{b}_i & \leftarrow & (\bar{b}_i) \end{array}$$

< 최적 차수감소 방법 >

위의 그림은 일 변수 베지어 함수의 최적 차수감소 방법으로 기존의 조정점 b_i 행렬에 최적 차수감소 행렬 T를 곱해서 새로운 조정점 $\bar{b}_i$ 를 얻어 최적 차수감소를 구하는 방법이다. 일 변수 베지어 다항함수의 차수 감소 행렬 T는 다음과 같이 이미 잘 알려져 있다 [16].

$$T_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \qquad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{31}{32} & \frac{3}{32} & -\frac{3}{32} & \frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{32} & -\frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{31}{32} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} \frac{127}{128} & \frac{1}{32} & -\frac{3}{64} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{128} \\ -\frac{33}{128} & \frac{33}{32} & \frac{29}{64} & -\frac{29}{96} & \frac{29}{384} \\ \frac{29}{384} & -\frac{29}{96} & \frac{29}{64} & \frac{33}{32} & -\frac{33}{128} \\ -\frac{1}{128} & \frac{1}{32} & -\frac{3}{64} & \frac{1}{32} & \frac{127}{128} \end{pmatrix} \quad , \cdots$$

자, 이제 이 방법이 이 변수 베지어 곡면에도 동일하게 적용이 되는가를 알아보자.

문제. $L_\infty - norm$ 에서 일 변수 베지어 다항함수의 최적 차수감소 행렬이 T 일 때, 이 변수 베지어 곡면의 최적 차수감소 행렬은 TbT^t 인가?

풀이.

n차 베지어 곡면은 $b_n(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} B_{ij}^n(s,t)$, $b_{ij} \in P$ 이므로

여기서, $n=1$인 경우를 살펴보자.

그러면, 1차 베지어 곡면은 다음과 같이 표현이 되고

$$b_1(s,t) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=o}^{1} B_{ij}^1(s,t) b_{ij}$$

그 제어점들은

$$b = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j) \neq (1,1) \\ 1 & (i,j) = (1,1) \end{cases} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다.

일 변수 1차 베지어 곡선에서는 제어점이 2개이므로, 최적 차수감소 행렬이 $T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 가 되어,

$$
\begin{aligned}
T\,b\,T^t &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= (0, \frac{1}{2})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= (\frac{1}{4})
\end{aligned}
$$

이 된다. 하지만, $\bar{b}(s,t)$ 는

$$\max\{|b(s,t) - b_{n-1}(s,t)|, \quad s,t \in [0,1]\}$$

를 최소화하는 $b_{n-1} \in \mathbb{P}_1$ 로서, $b(s,t)$ 의 치역이 $[0,1]$ 이므로

$\bar{b}(s,t) = \frac{1}{2}$ 이 된다. 따라서,

$$T\,b\,T^t = (\frac{1}{4}) \quad \neq \quad \bar{b}(s,t) = (\frac{1}{2})$$

가 되어, $L_\infty - norm$ 에서 일 변수 베지어 다항함수의 최적 차수 감소 방법이 이 변수 베지어 곡면의 최적 차수 감소 방법으로는 동일하게 적용되지 않음을 알 수 있었다. □

Ⅳ. 결론

현재까지 많은 논문들은 L_1-norm , L_2-norm , $L_\infty-norm$ 에서 일 변수 베지어 다항함수의 차수 감소에 대해서만 증명이 되었다. 그래서, 본 연구에서는 일 변수 베지어 다항함수를 이 변수로 확장하여 일 변수의 최적 차수 방법을 이 변수에 적용했을 때, 동일하게 증명되는지를 알아보고자 하였다. 그 결과 $L_\infty-norm$ 에서는 일 변수의 최적 차수 감소 방법이 이 변수에서 적용되지 않았음을 보였고, $L_\infty-norm$ 에서와는 다르게, L_2-norm 에서는 일 변수의 최적 차수 감소 방법이 이 변수에서도 동일하게 증명됨을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Y. J. Ahn, B. G. Lee, Y. B. Park, J. C. Yoo, Constrained polynomial degree reduction in the L_2-norm equals best weighted Euclidean approximation of bezier coefficients, Computer Adied Geometric Design, 2004, pp. 181-191

[2] P. Davis, Interpolation and approximation, Dover pulication, PP. 373

[3] M. Eck, Least squares degree reduction, Computer-Aided Design, 1995, pp. 845-851

[4] G. Farin, Curves and surfaces for CAGD, 3rd ed., Academic Press, Boston, 1993, pp. 435

[5] R. T. Farouki, Legendre-Bernstein basis transformations, J. comp. Appl. Math. 2000, pp. 145-160

[6] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd ed., Wiley & Sons, 1999, pp. 103

[7] H. J. Kim, Degree reduction and computation of the maximum error of Bezier curves, J. KIOA, 1999, pp. 25-33

[8] H. O. Kim, J. H. Kim, S. Y. Moon, Degree reduction of Bezier curves and filter banks, Comp. Math. Appl., 1996, pp. 23-30

[9] H. S. Kim, Y. J. Ahn, Constrained degree reduction of polynomials in Bernstein-Bezier form over simplex domain, J. Comp. Appl. Math., 2006,

[10] B. G. Lee, Y. B. Park, The distance for the Bezier curves and degree reduction, Comp. Math. 1997, pp. 507-515

[11] B. G. Lee, Y. B. Park, J. C. Yoo, Application of Legendre-Bernstein basis transformations to degree reduction elevation and degree reduction, Computer Aided Geometric Design, 2002, pp. 709-718

[12] D. Lutterkort, J. Peters, U. Reif. Polynomial degree reduction in

L_2-norm equals best Euclidean approximation of Bezier coefficients, Computer Aided Geometric Design, 1999, pp. 607-612

[13] L. Lu, G. Wang, Application of ChebyshevⅡ-Bernstein basis transformations to degree reduction of Bezier curves, Jounal of Computational and Applied Mathematics, 2007, pp. 21

[14] Y. B. Park, U. J. Choi, Degree reduction of Bezier curves and Its error analysis Comp. Math. Appl., 1995, pp. 399-413

[15] J. Peters, U. Reif, Least squares approximation of Bezier coefficients provides best degree reduction in the L_2-norm, J. Appr. Theo., 2000, pp. 90-97

[16] A. Rababababh, B. G. Lee, J. Yoo, A simple matrix from for degree reduction of Bezier curves using Chebyshev-Bernstein basis transformations, Comp. Math. Appl., 2006, pp. 310-318

[17] B. Szafnicki, A unified approach for degree reduction of the polynomials in the Bernstein basis Part I: Real polynomials , J. Comp. Appl. Math. 2002, pp. 287-312

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20058063	과 정	석사
성 명	한글: 장미선 한문: 張 美 善 영문: Jang Mi-Seon				
주 소	광주 광역시 남구 주월동				
연락처	062-654-0421 E-MAIL: pearlms@nate.com				
논문제목	한글 : 이 변수 베지어 다항함수의 차수감소에 관한 연구 영문 : Degree reduction of Bezier polynomials with two variables				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2007 년 월 일

저작자: 장 미 선 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하