[UCI]I804:24011-200000231838

정다각기둥에서의 표면거리에 관한 연구

A study on the surface distance of regular prism

2007년 2월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

梁 芝 僖

정다각기둥에서의 표면거리에 관한 연구

指導敎授 安 永 濬

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 제출합니다.

2006년 10월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

梁 芝 僖

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY
100373515 2007-04-09

梁芝僖의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____印

2006년　12월

朝鮮大學校 敎育大學院

목 차

그림목차 ····· ii

ABSTRACT ····· iii

Ⅰ. 서 론 ····· 1

Ⅱ. 기초지식 ····· 2

Ⅲ. 정삼각기둥, 정사각기둥에서의 표면 거리 ····· 5

Ⅳ. 정육각기둥, 정팔각기둥 ····· 11

Ⅴ. 결론 ····· 35

참고문헌

그 림 목 차

그림 1. 정삼각기둥 ····· 6

그림 2. 정사각기둥 ····· 8

그림 3. 정육각기둥 ····· 11

그림 4. 직선 l_1, l_2, l_3의 그래프 ····· 15

그림 5. $h=3$일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프 ····· 17

그림 6. $h=2.3$ 일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프 ····· 17

그림 7. $h=\frac{\pi^2}{4}-1$ 일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프 ····· 18

그림 8. $h=1.2$ 일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프 ····· 18

그림 9. 정팔각기둥 ····· 25

ABSTRACT

A study on the surface distance of a regular prism

Ji Hee Yang
Advisor : Prof. Young Joon Ahn. Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education. Chosun University

To solve the problem of the shortest distance between one vertex and another vertex of a rectangular parallelopiped, first draw the development figure. Next, think on a plane. Then use the Pythagoras theorem.

Expanding it, I evaluated the point that surface distance that is the farthest from the vertex of a base plane of regular prism using a theory that the equidistant line must meet at one point.

Ⅰ. 서 론

직육면체나 원뿔등의 입체도형에서 한 꼭지점 P에서 출발하여 꼭지점 Q에 이르는 경로 중 가장 짧은 경로를 구하는 문제는 전개도를 그려서 평면에서 생각하여 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결한다. "피타고라스 정리"는 직각삼각형 ABC에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b, 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$ 가 성립한다.

이 논문에서는 이를 확장시켜서 정다각기둥의 밑면의 꼭지점에서 표면거리가 가장 먼 점에 관한 연구이다. 여기서 "거리"는 표면을 따라 움직인 최단 길이를 나타낸다. 표면거리는 정다각기둥의 윗면의 정다각형의 어느 모서리를 지나느냐에 따라 달라질 것이므로 각각의 모서리를 따라 전개도를 이용하여 거리를 구하고, 정다각기둥이므로 밑면을 이등분하여 대칭성에 의해 한쪽만을 고려하여 연구하고자 한다.

Ⅱ. 기초지식

1. 이론적 배경

수학에서 기하학은 가장 오래된 학문이며 그 기원은 기원전 2500년경까지 거슬러 올라간다. 아메스의 파피루스나 이집트의 피라미드가 그 좋은 예이다. 이집트의 실용적 기하학은 탈레스(Thales, 640?~546? B.C.)를 중심으로 한 학파에서는 논증기하학을 발전시켜 유명한 피타고라스의 정리를 발견하였으며 평행선의 이론, 정다면체의 이론 등을 논증하였다.

기하학의 창시자로 불리우는 탈레스의 뒤를 이어 기하학을 발전시킨 사람은 고대 그리스의 철학자이자 종교지도자였던 피타고라스(Pythagoras, 572?~492? B.C.)이다. 에게 해(Aegean Sea)의 사모스(Samos) 섬에서 태어난 피타고라스는 젊은 시절 이집트에 건너가 오랜 생활을 하는 동안 고대 이집트 수학의 영향을 받은 것으로 전해지고 있다. 그 후 그리스로 돌아온 그는 그를 따르는 사람들과 함께 일종의 비밀종교단체와 같은 조직을 만들어 학파를 이루었다고 한다.

피타고라스 학파의 업적중 가장 유명한 것은 물론 피타고라스의 정리이다. 고대 이집트에서는 세 변의 길이가 3, 4, 5인 삼각형은 직각삼각형이고 $3^2+4^2=5^2$임이 알려져 있었으며, 바빌로니아, 고대 인도 및 중국에서도 유사한 성질이 알려져 있었다고 한다. 그러나 논리적인 최초의 증명은 피타고라스 학파에 의한 것으로 간주되고 있다. 그 학파가 일종의 비밀단체였으며 그들의 활동이 비공개적이었던 관계로 그 구체적인 증명법이 전해지지는 않았으며, 증명에 대한 역사상 최초의 기록은 훨씬 훗날에 유클리드가 집필한 『원론』에 실려 있다고 한다. 이외에도 피타고라스 학파는 다음과 같은 도형의 여러 성질들을 밝혔다.

- 삼각형의 내각의 크기의 합
- 황금비의 작도, 정오각형의 작도
- 정다면체의 규명(정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체)[2]

유클리드 기하학은 평면위의 두 점 사이의 거리를 보존하는 유클리드 변환에 대하여 불변인 성질들을 연구하는 기하학이다. 이러한 유클리드 변환에는 평행이동변환, 회전변환과 대칭변환이 있으며 일반적인 유클리드 변환은 이러한 세 가지 기본

변환을 합성하여 얻을 수 있다. 특히 회전변환과 대칭변환들을 통틀어 직교변환이라고 하며, 평면의 직교변환들이 이루는 군을 O_2라고 나타낸다. (직교변환은 ${}^tAA = I$를 만족하는 2×2행렬 A들이 주는 변환이다.) 유클리드 변환은 모두 대칭변환을 통하여 얻을 수 있다.

정리 평면에서 유클리드 거리를 보존하는 모든 변환은 한 개, 두 개 또는 세 개의 선대칭변환의 합성으로 나타낼 수 있다.

실제로 x축 방향으로 거리 d만큼 평행이동하는 것은 y축에 평행하며 거리가 서로 $\frac{d}{2}$만큼 떨어져 있는 두 직선에 대하여 차례로 대칭이동하는 것과 같으며, 원점에 대하여 각 θ만큼 회전하는 것은 원점에서 만나며 $\frac{\theta}{2}$의 각을 이루는 두 직선에 대하여 차례로 대칭이동한 것이다.

평면의 두 점 사이의 거리는 두 점 사이의 최단거리라고도 말한다. 이 말은 주어진 두 점을 잇는 곡선들의 길이 가운데 가장 짧은 곡선(선분)의 길이가 거리라는 뜻이다. 이를 음미하여 보면 공간에서 곡선의 길이를 알 수 있으면 이로부터 거리 개념을 도출해낼 수 있음을 알 수 있다. 따라서, 곡선의 길이공식 $\int_a^b |r'(t)|\,dt$ 에서 곡선의 속도벡터의 크기 개념을 얻으면 두 점 사이의 거리 개념이 나온다는 것은 현대 기하학의 근본이 되는 사고법이다. [1],[5]

2. 관련 내용

(1) 7-나 [2]

단원	용어	용어의 뜻
Ⅱ. 도형의 기초	두 점 사이의 거리	두 점을 잇는 선 중에서 길이가 가장 짧은 선의 길이
	교점	두 직선이 만날 때 생기는 점
Ⅲ. 도형의 성질	다각형	여러개의 선분으로 둘러싸인 도형

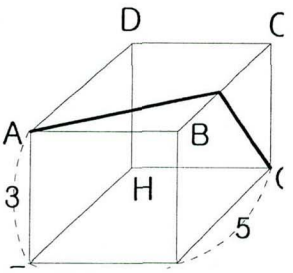
	정다각형	모든 변의 길이가 같고 모든 내각의 크기가 같은 다각형
Ⅳ. 도형의 측정	각기둥	두 밑면이 평행하고 합동인 다각형이며, 옆면이 모두 직사각형인 다면체
	정각기둥	정다각형을 밑면으로 가지는 각기둥으로 밑면에 따라 정삼각기둥, 정사각기둥...이라 한다.

(2) 9-나 [2]

피타고라스의 정리(직육면체, 원뿔등에서 최단거리 구하기)

- 직육면체의 꼭지점 A에서 출발하여 모서리 BC를 지나 꼭지점 G에 이르는 경로 중 가장 짧은 경로의 길이를 구하는 문제

⇨ 전개도를 그려서 평면에서 생각하도록 유도



(3) 10-나 [1]

도형(좌표평면위의 두 점 사이의 거리)

- 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(4) 수학Ⅱ [4]

일차변환(회전변환)

- 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 원점을 중심으로 각의 크기가 α만큼 회전이동하여 점 $P'(x', y')$으로 옮기는 이 변환을, 원점을 중심으로 하고 각의 크기가 α인 회전변환이라고 한다. 이 일차변환을 행렬을 사용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이다.

Ⅲ. 정삼각기둥, 정사각기둥에서의 표면거리

1. 정삼각기둥에서의 표면거리 계산

문제1.

모서리의 길이가 각각 1, 1, h인 정삼각기둥이 있다. 여기서 $h > 1$. 한 꼭지점 O에서 가장 거리가 먼 곳의 위치를 구하여라.(단, 여기서 "거리"는 표면을 따라 움직인 최단 길이를 나타낸다.)

O로부터 가장 거리가 먼 점은 △ABC(경계포함)안에 있다.

점 O에서 △ABC의 내부점까지 가는 길은 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 중 하나를 통과한다.

△ABC의 꼭지각(∠A)의 이등분선은 변 $\overline{BC}$를 수직이등분하므로 그 교점을 H라 하면,

△ABH의 내부점을 갈 때는, $\overline{AB}$나 $\overline{BH}$를 통과하고,

△ACH의 내부점을 갈 때는, $\overline{AC}$나 $\overline{CH}$를 통과한다.

대칭성에 의해, △ABH만 고려해도 된다.

전개도에 의해, 점 O를 (1, −h)에 대응시키면,

$\overline{AB}$를 통과할 때는, △ABC를 △(1,0)(0,0)$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에,

$\overline{BC}$를 통과할 때는 △ABC를 △$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$(0,0)(−1,0) 에 대응 시킬 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$$

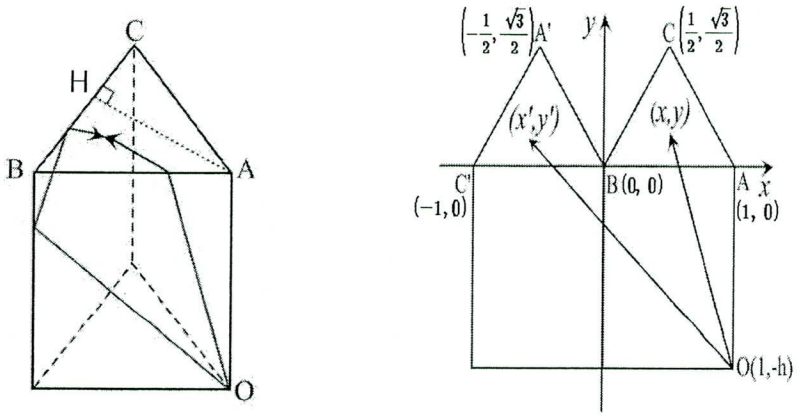


그림 1. 정삼각기둥

또한, 점 O로 부터의 거리는

$$\min\{\overline{(x,y)(1,-h)}, \overline{(x',y')(1,-h)}\}$$

$$=\{\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2},\ \sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}\} \qquad (1)$$

가 된다. 여기에서

$\sqrt{x^2+(y+h)^2}-\sqrt{x'^2+(y'+h)^2} \leqq 0$ 이면 $\overline{AB}$를 통과하는 것, 그리고

$\sqrt{x^2+(y+h)^2}-\sqrt{x'^2+(y'+h)^2} \geqq 0$ 이면 $\overline{BC}$를 통과하는 것이 최단거리이다.

식(1)을 계산하면,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2}=\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}$$

$$x^2-2x+1+y^2+2hy+h^2=x'^2-2x'+y'^2+2hy'+h^2$$

이므로,

$$x'=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y$$

를 대입하면,

$$x^2-2x+y^2+2hy$$
$$=(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2-2(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y)+(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y)^2+2h(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y)$$

이다. 이를 계산하면,

$$y = \frac{3+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}x$$

이 된다.

직선 AH의 방정식은 두 점 $(1,0)$ $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$을 지나는 직선이므로,

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다.

따라서, 직선 AH와 직선 $y = \frac{3+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}x$ 의 교점은

$$(\frac{1}{2} \cdot \frac{3h-\sqrt{3}}{3h+\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}h+3}{3h+\sqrt{3}})$$

이다.

정리 1.

정삼각기둥에서 점 O에서 표면거리가 가장 먼 점의 위치는

$$(\frac{1}{2} \cdot \frac{3h-\sqrt{3}}{3h+\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}h+3}{3h+\sqrt{3}})$$

이다.

2. 정사각기둥에서의 표면거리 계산

문제2.

모서리의 길이가 각각 1, 1, h인 정사각기둥이 있다. 여기서 $h > 1$. 한 꼭지점 O에서 가장 거리가 먼 곳의 위치를 구하여라.(단, 여기서 "거리"는 표면을 따라 움직인 최단 길이를 나타낸다.)

O로부터 가장 거리가 먼 점은 □ ABCD(경계포함)안에 있다. 점 O에서 □ ABCD의 내부점까지 가는 길은 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 중 하나를 통과한다.

△ABC의 내부점을 갈 때는, $\overline{AB}$나 $\overline{BC}$을 통과하고

△ADC의 내부점을 갈 때는, $\overline{AD}$나 $\overline{DC}$을 통과한다.

대칭성에 의해, △ABC만 고려해도 된다.

전개도에 의해, 점 O를 (1, −h)에 대응시키면,

$\overline{AB}$를 통과할 때는, △ABC를 △(1,0) (0,0) (0,1)에,

$\overline{BC}$를 통과할 때는, △ABC를 △(0,1) (0,0) (−1,0)에 대응시킬 수 있다.

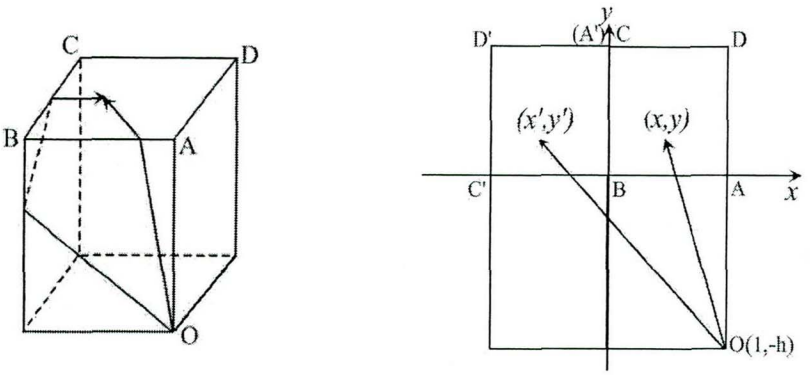


그림 2. 정사각기둥

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

이므로, 각 점

$(x,y) \in \triangle(1,0),(0,0),(0,1)$는

$(-y,x) \in \triangle(0,1),(0,0),(-1,0)$과 동일한 점이 된다.

또한, 점 O로 부터의 거리는

$$\min\{\overline{(x,y)(1,-h)},\overline{(x',y')(1,-h)}\}$$
$$=\{\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2},\ \sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}\}$$

가 된다. 여기에서,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2}=\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}$$

$$x^2-2x+1+y^2+2hy+h^2=x'^2-2x'+y'^2+2hy'+h^2$$

이므로,

$$x'=-y,\quad y'=x$$

를 대입하면,

$$x^2-2x+y^2+2hy=(-y)^2-2(-y)+x^2+2hx$$
$$=x^2+y^2+2hx+2y$$

이다. 이를 계산하면,

$$2(h-1)y=2(h+1)x$$

이 된다.

$2(h-1)y-2(h+1)x \geqq 0$ 이면 $\overline{BC}$를 통과하고,

$2(h-1)y-2(h+1)x \leqq 0$ 이면 $\overline{AB}$를 통과한다.

즉, $y \geqq \frac{h+1}{h-1}x$이면 $\overline{BC}$를 통과하는 것과,

$y \leqq \frac{h+1}{h-1}x$이면 $\overline{AB}$를 통과하는 것이 최단 거리이다.

직선 AC의 방정식은 두 점 $(1,0)(0,1)$을 지나는 직선이므로,

$$y=-x+1$$

이다.

따라서, 직선 AC와 직선 $y=\frac{h+1}{h-1}x$ 의 교점은

$$\left(\frac{h-1}{2h}, \frac{h+1}{2h}\right)$$

이다.

정리 2.

정사각기둥에서 점 O에서 표면거리가 가장 먼 점의 위치는

$$\left(\frac{h-1}{2h}, \frac{h+1}{2h}\right)$$

이다.

$h=3$일 때는 이미 결과가 알려져 있다. [3]

Ⅳ. 정육각기둥, 정팔각기둥에서의 표면거리

1. 정육각기둥에서의 표면거리 계산

문제3.

모서리의 길이가 각각 1, 1, h인 정육각기둥이 있다. 한 꼭지점 O에서 가장 거리가 먼 곳의 위치를 구하여라.(단, 여기서 "거리"는 표면을 따라 움직인 최단 길이를 나타낸다.)

O로부터 가장 거리가 먼 점은 육각형 ABCDEF(경계포함)안에 있다.

점 O에서 육각형 ABCDEF의 내부점까지 가는 길은 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$중 하나를 통과한다.

□ABCD의 내부점을 갈 때는, $\overline{AB}$나 $\overline{BC}$나 $\overline{CD}$를 통과하고,

□AFED의 내부점을 갈 때는, $\overline{AF}$나 $\overline{FE}$나 $\overline{ED}$를 통과한다.

대칭성에 의해, □ABCD만 고려해도 된다.

전개도에 의해, 점 O를 $(1, -h)$에 대응시키면,

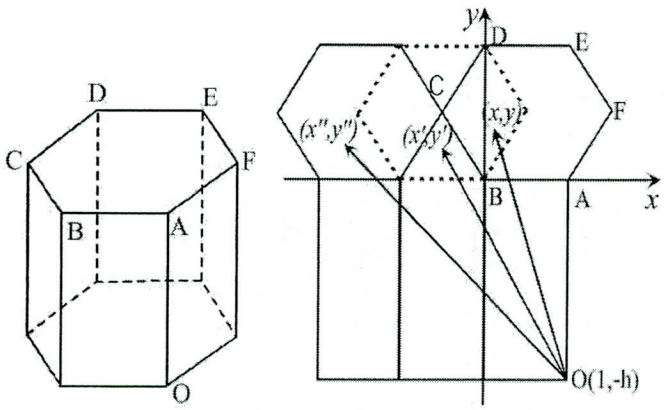


그림 3. 정육각기둥

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore x'' &= \frac{1}{2}(x'+1) - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - 1 \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y'' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x'+1) + \frac{1}{2}y' \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

또한, 점 O로 부터의 거리는

(1)

$$\begin{aligned} &\min\{\overline{(x,y)(1,-h)}, \overline{(x',y')(1,-h)}\} \\ &= \{\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2}, \sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}\} \end{aligned}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2} = \sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2hy + h^2 = x'^2 - 2x' + 1 + y'^2 + 2hy' + h^2$$

이므로,

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

를 대입하면,

$$x^2-2x+y^2+2hy$$
$$=(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2-2(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y)+(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y)^2+2h(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y)$$
$$=x^2-x+\sqrt{3}hx+y^2+\sqrt{3}y+hy$$

이다. 이를 계산하면,

$$(h-\sqrt{3})y=(1+\sqrt{3}h)x$$

가 된다.

$$\therefore y=\frac{1+\sqrt{3}h}{h-\sqrt{3}}x$$

(2)

$$\min\{\overline{(x,y)(1,-h)},\overline{(x'',y'')(1,-h)}\}$$
$$=\{\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2},\ \sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2}=\sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\}$$
$$x^2-2x+1+y^2+2hy+h^2=x''^2-2x''+1+y''^2+2hy''+h^2$$

이므로,

$$x''=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2},\quad y''=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

를 대입하면,

$$x^2-2x+y^2+2hy$$
$$=(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2})^2-2(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2})$$
$$+(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2h(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=x^2+3x+\sqrt{3}hx+y^2+\sqrt{3}y-hy+2+\sqrt{3}h$$

이다. 이를 계산하면

$$3hy-\sqrt{3}y=5x+\sqrt{3}hx+2+\sqrt{3}h$$

가 된다.

$$\therefore y = \frac{5+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}x + \frac{2+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}$$

(3)

$$\min\{\overline{(x',y')(1,-h)}, \overline{(x'',y'')(1,-h)}\}$$
$$=\{\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2},\ \sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2} = \sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\}$$
$$x'^2 - 2x' + 1 + y'^2 + 2hy' + h^2 = x''^2 - 2x'' + 1 + y''^2 + 2hy'' + h^2$$

이므로,

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

와,

$$x'' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}, \quad y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

를 대입하면,

$$(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 - 2(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y) + (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 + 2h(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$$
$$= (-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2})^2 - 2(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2})$$
$$+ (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 2h(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

이다. 이를 계산하면,

$$x^2 - x + \sqrt{3}hx + y^2 + \sqrt{3}y + hy$$
$$= x^2 + 3x + \sqrt{3}hx + y^2 + \sqrt{3}y - hy + 2 + \sqrt{3}h$$

이므로,

$$2hy = 4x + 2 + \sqrt{3}h$$

가 된다.

$$\therefore y = \frac{2}{h}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{h}$$

정리 3.

정육각기둥에서 모든 등거리 직선은 한 점에서 만난다.

증명.

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{3}h}{h-\sqrt{3}}x$$

$$f_2(x) = \frac{5+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}x + \frac{2+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}$$

$$f_3(x) = \frac{2}{h}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{h}$$

직선 l_1, l_2, l_3 는 각각 $f_1(x) = f_2(x)$, $f_2(x) = f_3(x)$, $f_1(x) = f_3(x)$를 만족하는 점들의 모임이다. 이 세 직선들은 어느 두 직선도 평행하지 않으며, 만약 한 점에서 만나지 않으면 그림과 같은 영역이 존재한다. 그 영역은 $f_1 < f_2$, $f_2 < f_3$, $f_3 < f_1$을 만족하므로 모순이 발생한다.

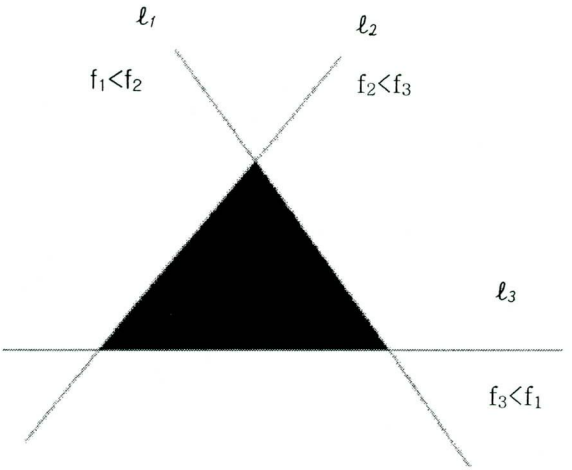


그림 4. 직선 l_1, l_2, l_3의 그래프

따라서 세 직선은 항상 한 점에서 만난다. □

실제로 f_1, f_2, f_3의 교점을 구해보면,

$$P_0\left(\frac{\sqrt{3}h^2-h-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h^2-2h+4\sqrt{3}}, \frac{3h^2+3\sqrt{3}h+2}{2\sqrt{3}h^2-2h+4\sqrt{3}}\right)$$

이 된다.

f_1, f_2, f_3의 교점이 □ABCD 의 내부에 존재하려면

$$y \leqq -\sqrt{3}x+\sqrt{3},\ y \leqq \sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

을 만족해야 한다.

이때, h의 범위를 구해보자.

$$\left(\frac{\sqrt{3}h^2-h-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h^2-2h+4\sqrt{3}}, \frac{3h^2+3\sqrt{3}h+2}{2\sqrt{3}h^2-2h+4\sqrt{3}}\right)$$

을 각각의 식에 대입하면

i) $y \leqq -\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 일 때는 $h \leqq \frac{4\sqrt{3}}{3}$이고,

ii) $y \leqq \sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 일 때는 $h \geqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 또는 $h \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

i)과 ii)의 공통범위를 구하면

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq h \leqq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이다.

따라서, f_1, f_2, f_3의 교점이 □ABCD 의 내부에 존재하는 h의 범위는

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq h \leqq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이다.

h의 값을 변형시키면서 그래프를 그리면 다음과 같다.

① $h=3$ 일 때

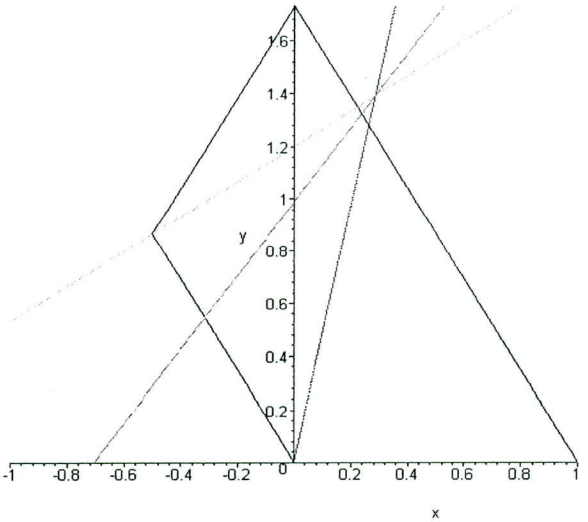


그림 5. $h=3$일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프

② $h=2.3$ 일 때

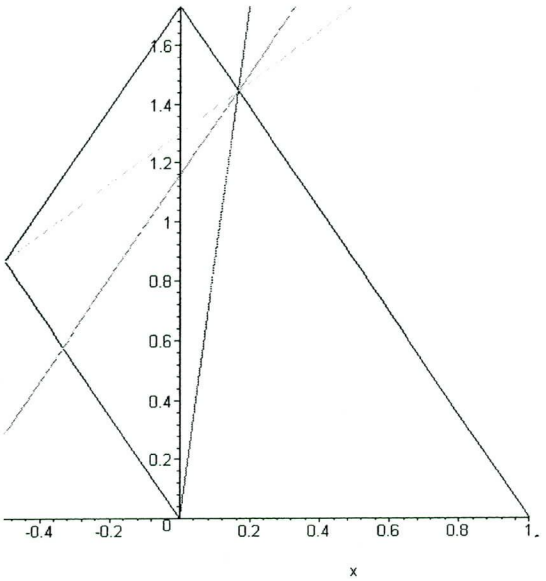


그림 6. $h=2.3$ 일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프

③ $h = \frac{\pi^2}{4} - 1$ 일 때

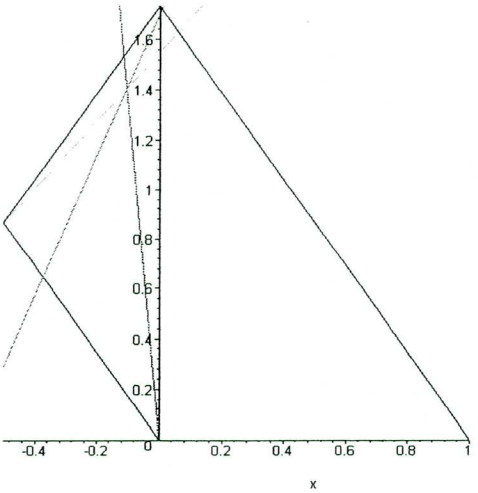


그림 7. $h = \frac{\pi^2}{4} - 1$ 일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프

④ $h = 1.2$ 일 때

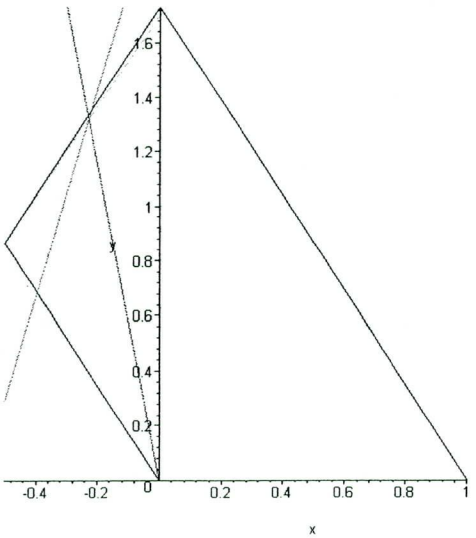


그림 8. $h = 1.2$ 일 때 f_1, f_2, f_3의 그래프

(4) 직선 DA의 방정식은 두 점 $(1,0)(0,\sqrt{3})$을 지나는 직선이므로,

$$y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

이다.

(a) $f_1(x)$과 직선 DA의 교점은

$$y=\frac{1+\sqrt{3}h}{h-\sqrt{3}}x, \quad y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

의 교점이므로

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}h-3}{h-\sqrt{3}}, \frac{3h+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h-2}\right)$$

이다.

따라서 점 $\mathrm{O}(1,-\mathrm{h})$와 $P_1\left(\frac{\sqrt{3}h-3}{h-\sqrt{3}}, \frac{3h+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h-2}\right)$와의 거리는

$$d_1=\frac{\sqrt{(h^2+1)(3h^2+\sqrt{3}h+1)}}{\sqrt{3}h-1}$$

이다.

(b) $f_2(x)$와 직선 DA의 교점은

$$y=\frac{5+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}x+\frac{2+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}, \quad y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

의 교점이므로

$$P_2\left(\frac{2\sqrt{3}h-5}{4\sqrt{3}h+2}, \frac{6h+7\sqrt{3}}{4\sqrt{3}h+2}\right)$$

이다.

따라서 점 $\mathrm{O}(1,-\mathrm{h})$와 $P_2\left(\frac{2\sqrt{3}h-5}{4\sqrt{3}h+2}, \frac{6h+7\sqrt{3}}{4\sqrt{3}h+2}\right)$와의 거리는

$$d_2=\frac{\sqrt{(3h^2+\sqrt{3}h+7)(4h^2+4\sqrt{3}h+7)}}{2\sqrt{3}h+1}$$

이다.

(c) $f_3(x)$과 직선 DA 의 교점은

$$y=\frac{2}{h}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{h},\quad y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

의 교점이므로

$$P_3\left(\frac{\sqrt{3}h-2}{2\sqrt{3}h+4},\ \frac{3h+6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h+4}\right)$$

이다.

따라서 점 $\mathrm{O}(1,\ -\mathrm{h})$ 와 $P_3\left(\frac{\sqrt{3}h-2}{2\sqrt{3}h+4},\ \frac{3h+6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h+4}\right)$와의 거리는

$$d_3=\frac{\sqrt{(h^2+4)(3h^2+7\sqrt{3}h+13)}}{\sqrt{3}h+2}$$

이다.

(d) 점 $\mathrm{O}(1,\ -\mathrm{h})$ 과 세 등거리 직선의 교점

$P_0\left(\frac{\sqrt{3}h^2-h-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}h^2-2h+4\sqrt{3}},\ \frac{3h^2+3\sqrt{3}h+2}{2\sqrt{3}h^2-2h+4\sqrt{3}}\right)$와의 거리는

$$d_0=\frac{\sqrt{(h^2+4)(h^2+1)(3h^2+\sqrt{3}h+7)}}{\sqrt{3}h^2-h+2\sqrt{3}}$$

이다.

$h\geq\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 일 때, P_2는 선분 P_1P_3위에 있으므로 P_2의 표면거리는 P_1의 표면거리와 P_3의 표면거리의 최대값보다 작다.

(5) 직선 CD 의 방정식은 두 점 $(-1,0)(0,\ \sqrt{3})$을 지나는 직선이므로,

$$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

이다.

(a) $f_1(x)$과 직선 CD 의 교점은

$$y=\frac{1+\sqrt{3}h}{h-\sqrt{3}}x,\quad y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

의 교점이므로

$$Q_1\left(\frac{\sqrt{3}h-3}{4}, \frac{3h+\sqrt{3}}{4}\right)$$

이다.

따라서 점 O(1, −h)와 $Q_1\left(\frac{\sqrt{3}h-3}{4}, \frac{3h+\sqrt{3}}{4}\right)$와의 거리는

$$e_1 = \frac{\sqrt{13(h^2+1)}}{2}$$

이다.

(b) $f_2(x)$와 직선 CD의 교점은

$$y = \frac{5+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}x + \frac{2+\sqrt{3}h}{3h-\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

의 교점이므로

$$Q_2\left(\frac{2\sqrt{3}h-5}{8-2\sqrt{3}h}, \frac{3\sqrt{3}}{8-2\sqrt{3}h}\right)$$

이다.

(c) $f_3(x)$과 직선 CD의 교점은

$$y = \frac{2}{h}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{h}, \quad y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

의 교점이므로 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$를 60° 회전시키면

$$Q_3(-1, 0)$$

이다.

따라서 점 O(1, −h)와 $Q_3(-1,0)$와의 거리는

$$e_3 = \sqrt{h^2+4}$$

이다.

(d) 직선 DA와 직선 CD의 교점은

$$Q_0(0, \sqrt{3})$$

이다.

따라서 점 $O(1, -h)$와 $Q_0(0, \sqrt{3})$와의 거리는

$$e_0 = \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h + 4}$$

이다.

$1 < h \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, P_2는 선분 P_1P_3위에 있으므로 P_2의 표면거리는 P_1의 표면거리와 P_3의 표면거리의 최대값보다 작다.

정리 4.

(1) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq h \leqq \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 인 h에 대하여 정육각기둥의 점 O에서 표면거리가 가장 먼 점은 P_2이고 그 거리는

$$\frac{\sqrt{(3h^2 + \sqrt{3}h + 7)(4h^2 + 4\sqrt{3}h + 7)}}{2\sqrt{3}h + 1}$$

이다.

(2) $h \geqq \frac{4\sqrt{3}}{3}$인 h에 대하여 정육각기둥의 점 O에서 표면거리가 가장 먼 점은 P_3이고 그 거리는

$$\frac{\sqrt{3h^4 + 7\sqrt{3}h^3 + 25h^2 + 28\sqrt{3}h + 52)}}{\sqrt{3}h + 2}$$

이다.

(3) $1 < h \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 인 h에 대하여 정육각기둥의 점 O에서 표면거리가 가장 먼 점은 Q_0이고 그 거리는

$$\sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h + 4}$$

이다.

증명.

(1) $$d_0=\frac{\sqrt{(h^2+4)(h^2+1)(3h^2+\sqrt{3}h+7)}}{\sqrt{3}h^2-h+2\sqrt{3}},\ d_2=\frac{\sqrt{(3h^2+\sqrt{3}h+7)(4h^2+4\sqrt{3}h+7)}}{2\sqrt{3}h+1}$$

에서

$$d_2^2-d_0^2=\frac{(6h^3+7\sqrt{3}h^2+9h+10\sqrt{3})(3h^2+\sqrt{3}h+7)(-3h+4\sqrt{3})}{3(2\sqrt{3}h+1)^2(3h^2-h+2\sqrt{3})^2}$$

이다.

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq h\leqq\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 일 때,

$6h^3+7\sqrt{3}h^2+9h+10\sqrt{3}>0,\ 3h^2+\sqrt{3}h+7>0,\ -3h+4\sqrt{3}\geqq 0$ 이므로

$d_2^2-d_0^2\geqq 0$ 이다. 따라서, $d_2>d_0$이고, 점 O로부터의 표면거리가 가장 먼 점은 P_2이고 그 거리는

$$\frac{\sqrt{(3h^2+\sqrt{3}h+7)(4h^2+4\sqrt{3}h+7)}}{2\sqrt{3}h+1}$$

이다.

(2)

$$d_1=\frac{\sqrt{(h^2+1)(3h^2+\sqrt{3}h+1)}}{\sqrt{3}h-1},\ d_3=\frac{\sqrt{(h^2+4)(3h^2+7\sqrt{3}h+13)}}{\sqrt{3}h+2}$$

에서

$$d_3^2-d_1^2=\frac{18\sqrt{3}(3h-4\sqrt{3})(3h^2+3\sqrt{3}h-2)}{(3h+2\sqrt{3})^2(3h-\sqrt{3})^2}$$

이다.

$h\geqq\frac{4\sqrt{3}}{3}$일 때,

$3h-4\sqrt{3}\geqq 0,\ 3h^2+3\sqrt{3}h-2>0$이므로, $d_3^2-d_1^2\geqq 0$이다. 따라서, $d_3>d_1$이고, 점 O로부터의 표면거리가 가장 먼 점은 P_3이고 그 거리는

$$\frac{\sqrt{3h^4+7\sqrt{3}h^3+25h^2+28\sqrt{3}h+52)}}{\sqrt{3}h+2}$$

이다.

(3) $$e_0 = \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h + 4},\ e_1 = \frac{\sqrt{13(h^2+1)}}{2}\ ,\ e_3 = \sqrt{h^2+4}$$

에서

$$e_0^2 - e_1^2 = \frac{(9h+\sqrt{3})(-h+\sqrt{3})}{4}\ ,\ e_0^2 - e_3^2 = 2\sqrt{3}h$$

이다.

$1 < h \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $e_0^2 - e_1^2 > 0$ 이므로, $e_0 > e_1$ 이다. 또한 $e_0^2 - e_3^2 > 0$ 이므로, $e_0 > e_3$ 이다.

따라서, 점 O 로부터의 표면거리가 가장 먼 점은 Q_0이고 그 거리는

$$e_0 = \sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h + 4}$$

이다.

2. 정팔각기둥에서의 표면거리 계산

모서리의 길이가 각각 1, 1, h인 정팔각기둥이 있다. 한 꼭지점 O에서 가장 거리가 먼 곳의 위치를 구해보자.(단, 여기서 "거리"는 표면을 따라 움직인 최단 길이를 나타낸다.)

O로부터 가장 거리가 먼 점은 팔각형 ABCDEFGH(경계포함)안에 있다.
점 O에서 팔각형 ABCDEFGH까지 가는 길은 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HA}$ 중 하나를 통과한다.
오각형ABCDE의 내부점을 갈 때는, $\overline{AB}$나 $\overline{BC}$나 $\overline{CD}$나 $\overline{DE}$를 통과하고,
오각형AHGFE의 내부점을 갈 때는, $\overline{AH}$나 $\overline{HG}$나 $\overline{GF}$나 $\overline{FE}$를 통과한다.
대칭성에 의해, 오각형ABCDE만 고려해도 된다.

전개도에 의해, 점 O를 $(1,-h)$에 대응시키면,

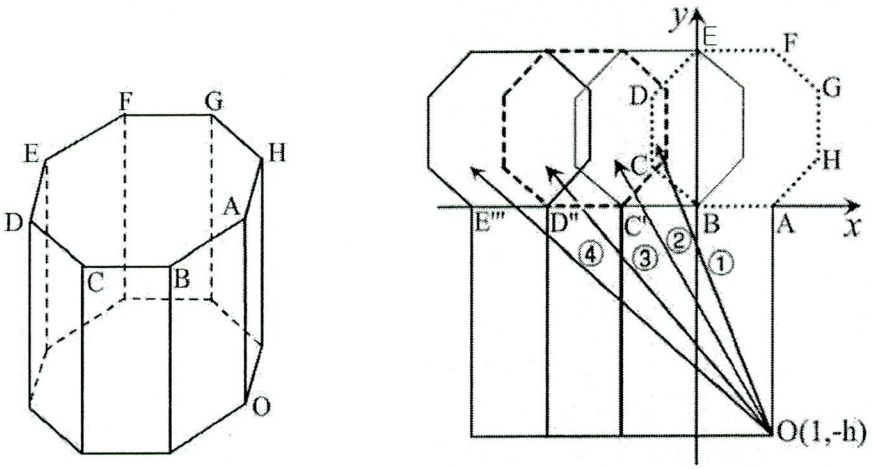


그림 9. 정팔각기둥

여기서 ①, ②, ③, ④는 (x,y), (x',y'), (x'',y''), (x''',y''') 을 의미한다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+1-y') - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+1-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\} - 1$$

$$= -y + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\therefore y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+1+y') = \frac{\sqrt{2}}{2}\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+1+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\}$$

$$= x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''+2 \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''+2 \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x''' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x''+2-y'') - 2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1+2-x-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-x-y+1) - 2$$

$$\therefore y''' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x''+2+y'') = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1+2+x+\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1) + 1$$

또한, 점 O로 부터의 거리는

(1)

$$\min\{\overline{(x,y)(1,-h)}, \overline{(x',y')(1,-h)}\} = \{\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2}, \sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}\}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2} = \sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}\}$$

$$x^2-2x+1+y^2+2hy+h^2 = x'^2-2x'+1+y'^2+2hy'+h^2$$

이므로,

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

를 대입하면,

$$\begin{aligned} & x^2-2x+y^2+2hy \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x-y)^2-2(\frac{\sqrt{2}}{2})(x-y)+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x+y)^2+2h(\frac{\sqrt{2}}{2})(x+y) \\ &= x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}hx+y^2+\sqrt{2}y+\sqrt{2}hy \end{aligned}$$

이를 계산하면,

$$(2h-\sqrt{2}h-\sqrt{2})y = (2-\sqrt{2}+\sqrt{2}h)x$$

$$y = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}h}{2h-\sqrt{2}h-\sqrt{2}}x$$

이므로

$$\therefore y = g_1(x) = \frac{\sqrt{2}+h-1}{\sqrt{2}h-h-1}x$$

(2)

$$\begin{aligned} & \min\{\overline{(x,y)(1,-h)}, \overline{(x'',y'')(1,-h)}\} \\ & = \{\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2}, \sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\} \end{aligned}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2} = \sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\}$$

$$x^2-2x+1+y^2+2hy+h^2 = x''^2-2x''+1+y''^2+2hy''+h^2$$

이므로,

$$x'' = -y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \quad y'' = x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 대입하면,

$$x^2-2x+y^2+2hy$$
$$=(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2-2(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)+(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2h(x+\frac{\sqrt{2}}{2})$$
$$=x^2+\sqrt{2}x+2hx+y^2+4y-\sqrt{2}y+4-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h$$

이를 계산하면,

$$(2h-4+\sqrt{2})y=(2h+2+\sqrt{2})x+(\sqrt{2}h+4-2\sqrt{2})$$

가 된다.

$$\therefore y=g_2(x)=\frac{2h+2+\sqrt{2}}{2h-4+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}h+4-2\sqrt{2}}{2h-4+\sqrt{2}}$$

(3)

$$\min\{\overline{(x,y)(1,-h)},\overline{(x''',y''')(1,-h)}\}$$
$$=\{\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2},\ \sqrt{(x'''-1)^2+(y'''+h)^2}\}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+h)^2}=\sqrt{(x'''-1)^2+(y'''+h)^2}\}$$
$$x^2-2x+1+y^2+2hy+h^2=x'''^2-2x'''+1+y'''^2+2hy'''+h^2$$

이므로,

$$x'''=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x-y+1)-2,\ y'''=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)+1$$

을 대입하면,

$$x^2-2x+y^2+2hy$$
$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(-x-y+1)^2-2\sqrt{2}(-x-y+1)+4-2\{\frac{\sqrt{2}}{2}(-x-y+1)-2\}$$
$$+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x-y+1)^2+\sqrt{2}(x-y+1)+1+2h\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)+1\}$$
$$=x^2+4\sqrt{2}x+\sqrt{2}hx+y^2-2y+2\sqrt{2}y-\sqrt{2}hy+10-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h+2h$$

이다. 이를 계산하면,

$$2y-2\sqrt{2}y+2hy+\sqrt{2}hy=2x+4\sqrt{2}x+\sqrt{2}hx+10-2\sqrt{2}+2h+\sqrt{2}h$$

이므로,

$$(2-2\sqrt{2}+2h+\sqrt{2}h)y=(2+4\sqrt{2}+\sqrt{2}h)x+(10-2\sqrt{2}+2h+\sqrt{2}h)$$

가 된다.

$$\therefore y = g_3(x) = \frac{h+4+\sqrt{2}}{h+\sqrt{2}h+\sqrt{2}-2}x + \frac{h+\sqrt{2}h-2+5\sqrt{2}}{h+\sqrt{2}h+\sqrt{2}-2}$$

(4)

$$\min\{\overline{(x',y')(1,-h)}, \overline{(x'',y'')(1,-h)}\}$$
$$=\{\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2},\ \sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2} = \sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}\}$$
$$x'^2-2x'+1+y'^2+2hy'+h^2 = x''^2-2x''+1+y''^2+2hy''+h^2$$

이므로,

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

와

$$x'' = -y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \quad y'' = x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 대입하면,

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x-y)^2-2(\frac{\sqrt{2}}{2})(x-y)+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x+y)^2+2h(\frac{\sqrt{2}}{2})(x+y)$$
$$=(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2-2(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)+(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2h(x+\frac{\sqrt{2}}{2})$$

이다. 이를 계산하면,

$$x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}hx+y^2+\sqrt{2}y+\sqrt{2}hy$$
$$=x^2+\sqrt{2}x+2hx+y^2+4y-\sqrt{2}y+4-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h$$

이므로,

$$2\sqrt{2}y+\sqrt{2}hy-4y = 2\sqrt{2}x+2hx-\sqrt{2}hx+4-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h$$
$$(2\sqrt{2}+\sqrt{2}h-4)y = (2\sqrt{2}+2h-\sqrt{2}h)x+(4-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h)$$
$$(2+h-2\sqrt{2})y = (2+\sqrt{2}h-h)x+(2\sqrt{2}-2+h)$$

가 된다.

$$\therefore y = g_4(x) = \frac{\sqrt{2}h-h+2}{h+2-2\sqrt{2}}x + \frac{h-2+2\sqrt{2}}{h+2-2\sqrt{2}}$$

(5)

$$\min\{\overline{(x',y')(1,-h)}, \overline{(x''',y''')(1,-h)}\}$$
$$=\{\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2},\ \sqrt{(x'''-1)^2+(y'''+h)^2}\}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x'-1)^2+(y'+h)^2}=\sqrt{(x'''-1)^2+(y'''+h)^2}\}$$
$$x'^2-2x'+1+y'^2+2hy'+h^2=x'''^2-2x'''+1+y'''^2+2hy'''+h^2$$

이므로,

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\quad y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

와

$$x'''=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x-y+1)-2,\ y'''=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)+1$$

을 대입하면,

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x-y)^2-2(\frac{\sqrt{2}}{2})(x-y)+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x+y)^2+2h(\frac{\sqrt{2}}{2})(x+y)$$
$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(-x-y+1)^2-2\sqrt{2}(-x-y+1)+4-2\{\frac{\sqrt{2}}{2}(-x-y+1)-2\}$$
$$+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x-y+1)^2+\sqrt{2}(x-y+1)+1+2h\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)+1\}$$

이므로,

$$x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}hx+y^2+\sqrt{2}y+\sqrt{2}hy$$
$$=x^2+4\sqrt{2}x+\sqrt{2}hx+y^2-2y+2\sqrt{2}y-\sqrt{2}hy$$
$$+10-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h+2h$$

이를 계산하면,

$$2y-\sqrt{2}y+2\sqrt{2}hy=5\sqrt{2}x+10-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h+2h$$

이므로,

$$(2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}h)y=5\sqrt{2}x+(10-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h+2h)$$

가 된다.

$$\therefore y=g_5(x)=\frac{5}{2h+\sqrt{2}-1}x+\frac{h+\sqrt{2}h-2+5\sqrt{2}}{2h+\sqrt{2}-1}$$

(6)

$$\min\{\overline{(x'',y'')(1,-h)},\overline{(x''',y''')(1,-h)}\}$$
$$=\{\sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2},\sqrt{(x'''-1)^2+(y'''+h)^2}\}$$

가 된다.

$$\sqrt{(x''-1)^2+(y''+h)^2}=\sqrt{(x'''-1)^2+(y'''+h)^2}$$
$$x''^2-2x''+1+y''^2+2hy''+h^2=x'''^2-2x'''+1+y'''^2+2hy'''+h^2$$
$$x''=-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\quad y''=x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

와

$$x'''=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x-y+1)-2,\ y'''=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)+1$$

을 대입하면,

$$(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2-2(-y+\frac{\sqrt{2}}{2}-1)+(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2h(x+\frac{\sqrt{2}}{2})$$
$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(-x-y+1)^2-2\sqrt{2}(-x-y+1)+4-2\{\frac{\sqrt{2}}{2}(-x-y+1)-2\}$$
$$+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x-y+1)^2+\sqrt{2}(x-y+1)+1+2h\{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)+1\}$$

이므로,

$$x^2+\sqrt{2}x+2hx+y^2+4y-\sqrt{2}y+4-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h$$
$$=x^2+4\sqrt{2}x+\sqrt{2}hx+y^2-2y+2\sqrt{2}y-\sqrt{2}hy$$
$$+10-2\sqrt{2}+\sqrt{2}h+2h$$

이다. 이를 계산하면,

$$6y-3\sqrt{2}y+\sqrt{2}hy=4\sqrt{2}x-2hx+\sqrt{2}hx+6+2h$$

이므로,

$$(6-3\sqrt{2}+\sqrt{2}h)y=(4\sqrt{2}-2h+\sqrt{2}h)x+(6+2h)$$

이고,

$$y=g_6(x)=\frac{h-\sqrt{2}h+3}{h+3\sqrt{2}-3}x+\frac{\sqrt{2}h+3\sqrt{2}}{h+3\sqrt{2}-3}$$

가 된다.

(7) 직선 EA의 방정식은 두 점 $(1,0), (0,1+\sqrt{2})$을 지나는 직선이므로,

$$y=(-1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})$$

이다.

(a) (1)과 직선 EA의 교점은

$$y=\frac{h+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}h-h-1}x,\ y=(-1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})$$

의 교점이므로,

$$\left(\frac{h-1-\sqrt{2}}{2h-2}, \frac{h+\sqrt{2}h+1}{2h-2}\right)$$

이다.

(b) (2)와 직선 EA의 교점은

$$y=\frac{2h+2+\sqrt{2}}{2h-4+\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}h+4-2\sqrt{2}}{2h-4+\sqrt{2}},\ y=(-1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})$$

의 교점이므로,

$$\left(\frac{2h+\sqrt{2}h-6-\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h-2\sqrt{2}}, \frac{4h+3\sqrt{2}h+4+5\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h-2\sqrt{2}}\right)$$

이다.

(c) (3)과 직선 EA의 교점은

$$y=\frac{h+4+\sqrt{2}}{h+\sqrt{2}h+\sqrt{2}-2}x+\frac{h+\sqrt{2}h-2+5\sqrt{2}}{h+\sqrt{2}h+\sqrt{2}-2},\ y=(-1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})$$

의 교점이므로

$$\left(\frac{2h+\sqrt{2}h+2-6\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h+4}, \frac{4h+3\sqrt{2}h+8+8\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h+4}\right)$$

이다.

(d) (4)와 직선 EA의 교점은

$$y=\frac{\sqrt{2}h-h+2}{h+2-2\sqrt{2}}x+\frac{h-2+2\sqrt{2}}{h+2-2\sqrt{2}},\ y=(-1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})$$

의 교점이므로,

$$\left(\frac{h-2}{2h}, \frac{h+\sqrt{2}h+2+\sqrt{2}}{2h}\right)$$

이다.

(e) (5)와 직선 EA의 교점은

$$y=\frac{5}{2h+\sqrt{2}-1}x+\frac{h+\sqrt{2}h-2+5\sqrt{2}}{2h+\sqrt{2}-1},\ y=(-1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})$$

의 교점이므로,

$$\left(\frac{h+\sqrt{2}h+3-5\sqrt{2}}{2h+2\sqrt{2}h+6}, \frac{3h+2\sqrt{2}h+13+8\sqrt{2}}{2h+2\sqrt{2}h+6}\right)$$

이다.

(f) (6)과 직선 EA의 교점은

$$y=\frac{h-\sqrt{2}h+3}{h+3\sqrt{2}-3}x+\frac{\sqrt{2}h+3\sqrt{2}}{h+3\sqrt{2}-3},\ y=(-1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})$$

의 교점이므로,

$$\left(\frac{h+3-3\sqrt{2}}{2h+6}, \frac{h+\sqrt{2}h+9+6\sqrt{2}}{2h+6}\right)$$

이다.

정리 5.

정팔각기둥에서 대각선 EA와 등거리 직선들 $y=g_k(x)$, $k=1,\cdots,6$과의 교점은 순서대로

$$\left(\frac{h-1-\sqrt{2}}{2h-2}, \frac{h+\sqrt{2}h+1}{2h-2}\right),\ \left(\frac{2h+\sqrt{2}h-6-\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h-2\sqrt{2}}, \frac{4h+3\sqrt{2}h+4+5\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h-2\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\frac{2h+\sqrt{2}h+2-6\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h+4}, \frac{4h+3\sqrt{2}h+8+8\sqrt{2}}{4h+2\sqrt{2}h+4}\right),\ \left(\frac{h-2}{2h}, \frac{h+\sqrt{2}h+2+\sqrt{2}}{2h}\right),$$

$$\left(\frac{h+\sqrt{2}h+3-5\sqrt{2}}{2h+2\sqrt{2}h+6}, \frac{3h+2\sqrt{2}h+13+8\sqrt{2}}{2h+2\sqrt{2}h+6}\right),$$

$$\left(\frac{h+3-3\sqrt{2}}{2h+6}, \frac{h+\sqrt{2}h+9+6\sqrt{2}}{2h+6}\right)$$

이다.

V. 결 론

본 논문은 정다각기둥의 밑면의 꼭지점 O에서 표면거리가 가장 먼 점에 관한 연구이다. 점O에서 정다각기둥의 윗면의 한 점 사이의 거리는 그 정다각기둥의 윗면의 정다각형의 어느 모서리를 지나느냐에 따라 달라진다. 각각의 모서리를 따라 잰 거리의 등거리직선이 만나는 점을 이용하여 표면거리가 가장 먼 점을 구하였다. 등거리직선은 점O$(1, -h)$에서 점(x,y)를 적당한 각으로 회전시켜서 생긴 점 (x',y') 까지의 거리가 같은 점들이 이루는 직선이다.

즉, $\overline{(x,y)(1,-h)} = \overline{(x',y')(1,-h)}$ 이다. 특히, 정육각기둥은 세 등거리 직선이 반드시 한 점에서 만난다는 것도 증명하였다. 정삼각기둥, 정사각기둥, 정육각기둥, 정팔각기둥의 등거리 직선의 방정식을 이용하여 고정된 한점에서 표면거리가 가장 먼 점에 관하여 연구하였다.

참고 문헌

[1] 이강섭 외 6인 (2002), 고등학교 수학 10-나, 교사용 지도서, (주)지학사

[2] 이준열 외 4인 (2001), 중학교 수학 7-나, 중학교 수학 8-나, 중학교 수학 9-나, 교사용 지도서, (주)도서출판 디딤돌

[3] 제 1회 아주수학 콩쿠르 (2000)

[4] 정광식 외 2인 (2005), 고등학교 수학Ⅱ, (주)동아서적

[5] 최봉대 외 6인 (2002), 고등학교 수학 10-나, 교사용 지도서, (주)중앙교육진흥연구소