[UCI]I804:24011-200000233088

2006년 8월

教育學碩士(數學教育)學位論文

二次函數의 效率적인 指導방안 硏究

- 9단계를 중심으로 --

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

金 玲 良

二次函數의 效率적인 指導方案 硏究

- 9단계를 중심으로 -

A study on an efficient teaching method for quadratic functions

2006年 8月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 玲 良

二次函數의 效率적인 指導方案 硏究

- 9단계를 중심으로 -

指導敎授 韓 承 局

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 제출합니다.

2006년 4 월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 玲 良

金玲良의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長　朝鮮大學校　敎授 _____ 인

審 査 委 員　朝鮮大學校　敎授 _____ 인

審 査 委 員　朝鮮大學校　敎授 _____ 인

2006 년　　6 월

朝 鮮 大 學 校　敎 育 大 學 院

목 차

표 목차 ····· ii
ABSTRACT ····· iii
Ⅰ. 서론
1. 연구의 필요성 및 목적 ····· 1

Ⅱ. 함수 개념
1. 함수의 개념 ····· 3
2. 제7차 교육과정에서의 함수도입의 차이 ····· 4
3. 규칙성과 함수단원에 관한 내용개요 ····· 5

Ⅲ. 중학교과정의 함수 단원 내용
1. 중학교 7-가, 8-가, 9-가 함수단원 ····· 7
2. 제7차 교육과정에서의 이차함수지도 ····· 11

Ⅳ. 설문지 분석에 따른 이차함수의 효율적인 지도 방안
1. 설문조사 및 연구의 대상 ····· 15
2. 문제의 구성과 결과 처리방법 ····· 15
3. 연구의 실제 ····· 16

Ⅴ. 결론 및 제언 ····· 24

참고문헌 ····· 26

표 목 차

<표1> 6차함수 단원과 7차의 규칙성과 함수단원 내용체계 ····· 6
<표2> 단원의 계통도 ····· 11
<표3> 학습구조차트 ····· 14

A B S T R A C T

A study on an efficient teaching method for quadratic functions

Lyeong Yang Kim

Advisor : Prof. Seung Gook Han, Ph.D.

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

The purpose of this thesis is helping students to understand basic concepts and definition of quadratic function when they meet it first.

For this it is necessary for us to have teaching methods for motivating students through various examples and boosting their interests.

It follows from this reason that we suggest the reformative and effective teaching methods for function unit.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

함수의 본질은 크게 종속성과 대응관계로 볼 수 있다. 학교 수학에서 함수를 도입하는 방법은 함수의 본질을 무엇으로 보느냐에 따라 달라져 왔다. 수학의 구조를 체계적으로 이해하기 위해서는 함수 개념의 올바른 이해가 매우 중요하다. 교사는 학생들이 사물을 올바르게 인식하고 문제를 능률적으로 해결하는 능력을 기르도록 하며 수학에 관한 기초적인 지식과 지능을 바탕으로 일상생활에서 일어나는 모든 일을 과학적으로 규명하는 습관을 갖도록 지도하여야 한다.

함수단원의 지도에서 가장 중요하게 생각되어야 하는 것은 기본적인 함수개념의 지도라 하겠다. 기계적인 반복학습을 통한다면 학생들이 문제를 잘 풀 수 있겠지만 “왜 그렇게 하여야 하는지?” 에 대해서는 모르게 되기 때문이다. 현재의 학습은 교육여건상 문제해결 위주의 반복학습에 의존하고 가장 중요하게 다루어져야 할 개념지도는 충분하게 다루어지지 않고 있다. 이를 극복하기 위해서는 실생활에서 일어나는 여러 가지 현상을 도입한 개념지도가 필요하고 이해하기 쉬운 벤 다이어그램 등에서 그래프나 식, 언어나 기호를 사용하는 단계까지 확장시키는 개념 지도를 통해 학생들이 학습내용을 다양한 형태로 바꾸어 표현하도록 지도하는 것이 필요하다. 또한 새로운 내용을 지도함에 앞서서는 미리 선행학습과 연대관계를 통해 단계적인 학습지도가 이루어지도록 학습 자료와 교재가 준비되어야 한다. [1)]

함수개념의 지도에서는 그래프 활용이 중요하다. 문제를 풀기 위해서는 대충 지도하는 단계를 벗어나 그래프와 식을 잘 이해할 수 있도록 체계적인 지도가 필요하다. 함수단원은 중학교 1, 2, 3 학년 학생들에게는 대부분 어려워하는 단원이다. 그렇기 때문에 교사는 학생들이 흥미를 잃지 않게 수업을 진행해 갈 수 있는 능력이 요구되며 교사 자신만의 특별한 지도방법을 연구하여야 한다. 또한 성적이 부진

1) 정혜일 (2003) 「함수의 개념과 함수 지도 방안 연구」,연세대학교 석사 학위 논문

한 학생들은 더욱 흥미를 잃기 쉬우므로 동기부여 등 흥미 유발을 위한 학습지도 방법이 필요하다.

본 연구의 목적은 중학교 수학의 여러 단원 중에서도 학생들이 다른 단원에 비해 어렵게 생각하는 함수 단원을 선정하여 학생들이 어려워하는 부분이 무엇인지, 어떤 이유로 어려워하는지를 파악하여 학생들을 쉽게 이해시킬 수 있는 지도방법이 무엇인지를 고찰하여 함수단원의 보다 효율적인 지도 방법이 무엇인지를 고찰하여 함수단원의 보다 효율적인 지도방법을 제시함으로써 학생들을 지도하는데 도움을 주고자 하였다. 7차 교육 과정에 따라 함수개념을 학습한 고등학교 1학년 학생들에게 함수의 정의와 함수와 관련된 여러 가지 질문들을 해보았고 학생들의 문제점이 무엇인지 파악하여 9단계 함수 단원의 효율적인 지도 방안을 제시하여 함수 개념을 정확하고 체계적으로 지도할 수 있도록 하는데 그 목적을 두고 있다. [2)]

2) 서현주 (1998)「이차함수의 효율적인 지도방안」,조선대학교 석사 학위 논문

Ⅱ.함수 개념

1. 함수의 개념

고대의 수학을 보면 아라비아에서는 운동에 관한 수학적 연구가 없었으며, 그리스에서는 속도의 개념조차 없었다. 그 뒤, 갈릴레이 등에 의한 운동학의 연구에서 비롯된 두 변량 사이의 관계를 추구하는 것이 함수 개념을 낳게 한 계기가 되었다.

함수(function)라는 용어가 처음으로 씌어진 것은 1692년 라이프니츠의 논문에서였다. 이 때의 개념은 지금의 함수의 개념과 판이하다. 이 당시의 함수는 두 변수 사이의 관계로서 한 변수의 합, 곱 등의 대수적 연산에서 규칙에 의해 결정되는 것이었다. 오일러는 1734년에 "변수와 상수로서 조립된 해석적인 식", 즉 그래프가 매끄러운 한 연속곡선으로 나타나는 것에 대하여 함수라는 말을 썼다. 함수 개념의 근원은 고대 바빌로니아 시대까지 거슬러 올라간다. 기원전 5세기경의 바빌로니아 사람들은 천문학을 연구하면서 만든 수표로 함수를 나타냈다. 그들은 천체의 위치의 주기성을 발견하고 경험적 자료를 바탕으로 천체의 운동을 나타내는 경로를 추정하였다. 기울기나 그림자의 길이와 관련되어 자연스럽게 제기된 탄젠트의 기원도 바빌로니아다. 그리고 일차함수, 이차함수, 삼차함수도 의식적으로 다루어지지 않았지만 바빌로니아 수학에서 그 기원을 찾을 수 있다.

개념화된 함수는 17세기에 이르러 역학에서 물체의 운동을 곡선으로 나타내어 연구하는 가운데 시간과 거리와 같은 변량사이의 관계로서 수학에 도입되었다. 함수 개념은 문맥에 따라 역동적인 변화현상 가운데 종속 관계를 기술하고 해석하고 예언하기 위한 수단으로서의 변수 측면과 그 규칙성을 나타내는 식과 그래프의 표현, 다양한 대응 관계적 측면을 포함한다. 따라서 수학 내적, 외적인 제 현상을 이해하고 조직할 수 있는 수단으로 작용할 때에만 그 진정한 개념적 힘을 발휘할 수 있게 된다.

해석기하학의 발달과 함께 여러 가지 곡선이 방정식으로 표현되면서 변량 사이의 함수 관계가 하나의 방정식으로 나타내어지게 되었다. 오일러는 그러한 상황을 일반적인 것으로 인식하고 변량 사이의 관계를 나타내는 해석적인 표현, 곧 식을 함수라고 정의하였다.

함수는 고전적으로 독립변수와 종속변수사이의 관계를 의미하는 것이다. 함수 개념의 역사적 발달은 비례관계, 종속변수, 특수한 대응관계의 순서로 점진적으로 형식화되어 왔는바 역사 발생의 순서에 따라 지도하는 것이 보다 자연스러운 순서이다. 집합 A에서 집합 B로의 함수는 정적이고 추상적인 형식이라 할 수 있고 그 전의 함수개념은 역동적이고 변화현상과 관련성이 풍부하다. 따라서 7차 교육과정 <7-가>단계에서는 비례관계로 함수를 도입하고 있다. 이는 함수가 단지 서구문명에서 시작되었다는 것을 의미한다기보다는 함수가 수학의 발전에 지대한 영향을 끼치고 있으며, 수학의 어떤 개념 못지않게 중요하다는 사실을 말해주고 있는 것이다.

학교 수학에 함수가 도입된 것은 20세기 초 독일의 Klein이 수학교육 개혁을 주장하면서부터이다. Klein은 함수적 사고 교육의 중요성을 강조하고 미적분 지도의 필요성을 주장하였다. 또 함수적 사고는 대수와 기하를 관련지어 주고 응용 수학을 포함하여 수학적 사고 전체의 바탕에 놓여 있는 기본적인 핵심적 관점이라 판단하였다.

이런 이유에 의해서 제 7차 수학과 교육과정에서는 함수 개념의 도입을 변화하는 현상과의 관련성이 풍부한 실생활 문제의 변화관계를 이용하여 다루고 있다.

2. 제 *7*차 교육과정에서의 함수 도입의 차이

함수는 두 집합 X, Y와 이 두 집합 사이의 관계 f의 세 요소에 의해 결정된다. 즉, 정의역을 X, 공역을 Y로 가지는 함수 f가 바로 $f: X \rightarrow Y$이다. 이 개념을 중학교 학생

에게 맞도록 수학적 엄밀성을 배제하고 직관적으로 도입하고자 하는 것이 제 7차 교육과정의 정신이다. 제 6차 교육과정에서는 함수를 대응 관계로 도입함으로써 수학적 엄밀성은 보전하였으나 다소 어려운 감이 있었다. 이제 제 7차 교육과정에서는 함수를 정비례, 반비례 관계와 같이 규칙적인 변화로 표현되는, 즉 한 값에 따라 다른 한 값이 결정되는 것으로 이해시키려 하고 있다. 특히, 공역이란 용어는 사용하되 엄밀하게 취급하지 않음으로써 '공역은 치역을 포함하는 적당한 집합' 이라고 소개하고 있다. 즉 실제로 함수는 정의역, 공역, 관계식의 3가지 요소에 의해서 결정되나 중학교에서는 '공역을 모든 수들의 집합으로 생각함으로써 함수는 정의역과 관계식에 의해 유일하게 결정된다는 정도의 수준으로 지도해야 하는 것이다.

3. 규칙성과 함수 단원의 내용 개요

제 7차 수학과 교육과정 상에는 함수에 관한 내용의 단원이 '함수'에서 '규칙성과 함수' 단원으로 변경 되었다. 단원명이 의미하는 바와 같이 제 7차 수학과 교육과정에서의 함수 개념 지도에 있어서 규칙성이 더욱 중요시 되었다. 여기서는 제 6차에서의 '함수' 단원과 제 7차에서의 '규칙성과 함수' 단원의 내용을 알아보고 차이점을 알아본다.

제 6차 수학과 교육 과정 에서의 함수의 개념을 대응 관계로 인식하여 집합 x의 각 원소에 대하여 집합 y의 원소를 대응시키는 것으로 도입하였다. '집합 x에서 집합 y로의 대응'을 이해하게 한 후 특수한 대응으로 집합 x의 각 원소에 대하여 집합 y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 함수라고 하여 도입하였다. 이 때 함수의 뜻은 함수라는 용어의 의미를 설명하기보다는 함수가 되는 대응과 함수가 되지 않는 예를 들면서 이해하도록 하였다. 이와 같이 제 6차와 제 7차가 단원명이 바뀌었다는 차이점 이외에 가장 큰 차이점은 함수의 도입을 두 집합의 원소 사이의 대응으로 하던 것을 비례 관계를 이용하여 두 양의 변화관계로서 함수를 이해하게 하는 것이다. 초등에서 이동해 온 정비례, 반비례 관계를 이용하여 함수의 개념을 도입하고, 마찬가지로 일차함수, 이차함수, 대응이라는 말을 사용하지 않고 실생활의 변화 현상으로부터 도입하였다.

다음 표는 제 6차의 '함수' 단원과 제 7차의 '규칙성과 함수' 단원의 내용체계를 비교한 것이다. <표1> [3]

단계	제 6차 교육과정	제 7차 교육과정	비고
7단계	함수 · 두 집합의 원소 사이의 대응 · 함수의 뜻	규칙성과 함수 · 정비례와 반비례 · 함수의 뜻	· 영역명 변경 · 초등에서 이동 · 함수개념을 변화관계로 도입
8단계	함수 · 일차함수의 활용	규칙성과 함수 · 일차함수를 나타내는 식과 일차방정식의 관계	· 영역명 변경 · 약화-직선의 방정식 구하기를 함수의 식 구하기로 통합
9단계	함수 · 이차방정식과 이차함수의 관계	규칙성과 함수 · 이차함수의 그래프 성질	· 영역명 변경 · 삭제

3) 강옥기 (2002) 「중학교 수학 9-가 교사용 지도서」,(주) 두산

Ⅲ. 중학교 과정의 함수 단원 내용

1. 중학교 단원의 함수 단원 *4)*

1) 7-가 단계

(1) 학습 내용

① 실생활 소재를 이용하여 정비례, 반비례를 이해하고, 그 관계를 식으로 나타낼 수 있다.

· 정비례 관계와 반비례 관계를 이해하고 그 관계를 식으로 나타낼 수 있다.

· 정비례와 반비례, 비례 상수의 뜻을 이해하게 하고, 정비례와 반비례의 관계를 식으로 나타낼 수 있게 한다.

· 실생활 소재를 이용하여 도입하고 개념의 이해에 중점을 두는 것이 바람직하다.

② 비례관계를 이용하여 변화하는 두 양의 관계로서 함수의 뜻을 이해한다.

· 함수의 뜻을 이해하게 하고 간단한 함수의 식을 구할 수 있게 한다.

③ 순서쌍과 자료를 이해하여 $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$ 등의 그래프를 그릴 수 있다.

· 평면위에서 점의 위치를 좌표로 나타낼 수 있게 한다.

④ 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

· 그래프의 뜻을 이해하게 하고 간단한 함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

<7-가 단계> 수준에서의 정의역 수 전체의 집합은 실수 전체의 집합이 아니라 유리수 전체의 집합이기 때문에 그 그래프가 연속이 되지는 않지만 유리수의 조밀성을 이용하여 그래프가 연속으로 나타낸다는 것을 직관적으로 이해하게 한다.

① 함수를 실생활 문제에 활용할 수 있다: 실생활의 간단한 소재로 함수를 활용할 있도록 한다.

---

4) 교육부 (1997)「수학과 교육 과정,교육부 고시 제 1997-15[별책8]」교육부

(2) 용어와 기호

· 정비례, 반비례, 함수, 정의역, 공역, 함수값, 치역, 변수, 좌표, 순서쌍, x좌표, y좌표, 원점, 좌표축, x축, y축, 좌표평면, 제 1, 2, 3, 4 사분면, 함수의 그래프, $y=f(x)$

(3) 학습 지도상의 유의점

· 생활 장면 에서 변화하는 두 양을 조사하여 비례관계를 이해하게 한다.

· 함수 개념의 도입은 비례 관계를 이용한다.

(4) 심화과정

· 실생활의 다양한 소재에서 함수관계가 되는 것을 찾아보고, 이를 식으로 나타낼 수 있다.

2) 8-가 단계

(1) 학습내용

① 일차함수의 뜻을 이해하고 일차함수를 그릴 수 있다.

· 일차함수의 뜻을 이해하게 한다.

② 일차함수의 그래프의 성질을 이해한다.

· 변화표를 이용하여 일차함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

③ 일차함수를 나타내는 식과 일차방정식의 관계를 이해하고 두 일차함수의 그래프를 통하여 연립일차방정식의 해를 이해한다.

④ 일차함수를 활용하여 여러 가지 문제를 풀 수 있다.

· 일차함수로 나타낼 수 있는 상황에서 그 관계식을 구하고 이를 활용할 수 있게 한다.

(2) 용어와 기호

· 일차함수, 기울기, x절편, y절편, 평행이동

(3) 학습지도상의 유의점

· 두 일차함수의 그래프를 통한 연립 일차방정식의 해에 대한 지도는 연립 일차방정식의 해가 두 교점임을 이해시키는 정도로 다룬다.

· 일차함수의 식을 구할 때

$$y-y_1=m(x-x_1)\ ,\ y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)$$

과 같은 공식은 사용하지 않는다.

(4) 심화과정

· 일차함수를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

3) 9-가 단계

(1) 학습내용

① 구체적인 예를 통하여 이차함수의 뜻을 알고, 이차함수의 그래프를 그릴 수 있다.

② 이차함수의 그래프의 성질을 이해한다.

· 이차함수의 $y=ax^2$ 그래프를 그리고, 그 성질을 알게 한다.

· 변화표를 이용하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그려 봄으로써 $y=x^2$의 그래프의 성질을 알게 한다.

· 이차함수 $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=-x^2$, $y=-2x^2$ 등의 그래프를 그려 보게 함으로써 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 귀납적으로 이해하게 한다.

· $y=ax^2$그래프는 이차함수의 그래프의 기본이므로 이에 대한 지도가 철

저히 이루어져야 한다.

· 이차함수의 $y=ax^2+q$그래프를 그리고, 그 성질을 알게 한다.

· 이차함수의 $y=a(x-p)^2+q$그래프를 그리고, 그 성질을 알게 한다.

· 이차함수를 $y=ax^2+bx+c$을 $y=a(x-p)^2+q$꼴로 고쳐, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

· 이차함수의 최대값과 최소값을 구할 수 있게 한다.

(2) 용어와 기호

· 이차함수, 포물선, 축, 꼭지점, 최대값, 최소값

(3) 학습지도상의 유의점

· 이차함수와 이차방정식의 관계는 다루지 않는다.

· 이차함수의 최대값, 최소값을 구할 때에는 $y=ax^2+bx+c$에서 x의 값은 수 전체로 하고, 제한된 범위에서는 다루지 않는다.

(4) 심화과정

· 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형을 보고 a, b, c의 부호를 알 수 있다.

4) 단원의 계통도 <표2> [5]

학습한 내용		본 단원의 내용		학습할 내용
▶<7-가> 단계 · 함수의 뜻 · 함수의 그래프 ▶<8-가> 단계 · 일차함수와 그래프 · 일차함수의 활용 ▶<9-가> 단계 · 다항식의 계산 · 이차방정식	⇨	1. 이차함수와 그 그래프 · 이차함수의 뜻 · 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 · 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프 · 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 2. 이차함수의 그래프의 성질 · 이차함수의 최대값과 최소값 · 이차함수의 그래프 성질	⇨	▶ 공통수학 · 역함수 · 합성함수 · 분수함수 · 무리함수 · 삼각함수 ▶ 수학Ⅰ · Ⅱ · 지수함수 · 로그함수 · 극한 · 미분법 · 적분법 ▶ 실용수학 ▶ 이산수학

2. 제7차 교육과정에서의 이차함수의 지도

어떤 것을 이차함수라고 하는지 이차함수의 기본 개념을 설명한 후에는 그래프를 통해 이해할 수 있도록 지도한다.

먼저 이차함수의 그래프를 잘 이해시킨 후 이차함수의 그래프를 평행이동을 통해 그리도록 한 후 꼭지점, 축 등의 용어를 설명하여 각각 이차함수의 그래프에서 평행 이동시키면 어떻게 변화하는지 여러 가지 예를 통해 스스로 발견하도록 한다.

5) 박두일 (2001) 「중학교 수학 교사용 지도서 8-가」,교학사

또한 이차함수의 그래프는 일차함수와는 달리 x가 증가하면서 y가 증가하는 부분과 x가 증가하면 y가 감소하는 부분을 공유하고 있으며 그 기준이 되는 점, 즉 꼭지점은 그래프가 증가 하다가 감소하는지, 감소 하다가 증가 하는지에 따라 최대값, 최소값이 되고 있음을 형식적인 정의가 아닌 그래프에서의 여러 가지 예를 통해 스스로 이해하며 양 끝 값이 주어진 경우 최대값, 최소값 문제를 해결함에 있어서 양 끝점과 꼭지점의 관계에 따라 어떻게 변해 가는지 알아가도록 유도해 준다. 즉 이차함수 단원의 지도에서는 학생들에게 결과를 미리 알려 주어 문제 해결 방법이 아닌 여러 가지 경우의 그래프를 통하여 원하는 결과를 스스로 알아내도록 유도해 주고 이러한 학습을 통해 후에는 일일이 대응표를 만들지 않고도 이차함수의 그래프를 a의 부호와 절대값의 크기, 꼭지점의 좌표, y절편 축의 방정식 x절편 등을 이용하여 그래프의 형태를 알 수 있어야 하겠으며 그래프를 보고 식으로 바꿀 수 있게 지도해야 하겠다.

문제 해결에 꼭 필요한 정의만을 지도하도록 하고 모든 경우 그래프에서 이해하도록 함이 바람직하다 하겠고 앞 단원인 이차방정식 단원에서 많은 연습을 하여 이차함수의 완전제곱식으로 고치고, 해 즉, x절편을 구하는 방법에도 숙달되어 있는 것이 문제 풀이에 도움이 되겠다.

이 단원에서는 일차함수를 바탕으로 이차함수의 뜻을 알고, 일차함수의 그래프를 그리고 그래프의 성질을 이해할 수 있도록 한다. 또한 이차함수의 최대값, 최소값을 구하고 계수가 변함에 따라 이차함수의 그래프가 어떻게 변화하는지를 관찰하도록 한다.

함수개념은 수학에서 중요한 통합적 아이디어 중의 하나이다. 두 집합의 원소 사이의 특수한 관계를 나타내는 함수는 산술, 대수학, 기하에서 확률에 이르기까지 교육과정 전체의 공통된 주제일 뿐만 아니라, 실생활이나 자연현상에서 찾아볼 수 있는 많은 수학적 표상이기도 하다. 함수에 대한 학습은 변화표를 만들어 그래프

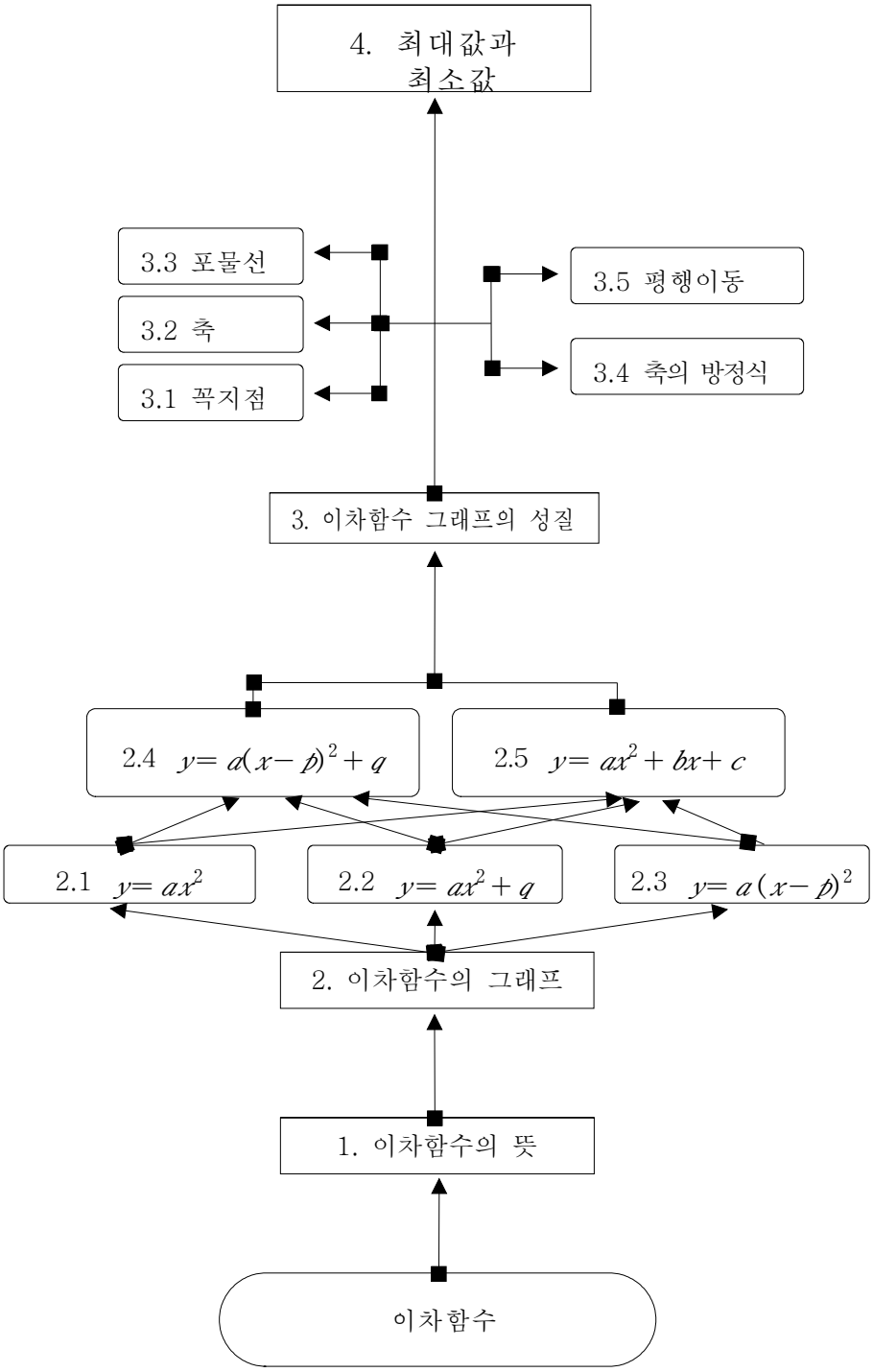
를 그려 보거나 함수의 성질을 조사하는 등 이미 생성된 산물로서 지식을 전달하는 방법에 국한할 것이 아니라, 실생활의 소재로부터 사물을 수학적 모델로 바꾸어 두 변량 사이의 관계로 관찰함으로써 함수 개념을 학습 하도록 해야 한다.

이 단원의 주된 지도내용은 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리고 a값이 변함에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지를 관찰하도록 하며, 점차적으로 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그리고 그 성질을 알게 하는 것이다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행 이동하여 얻어진 것을 알게 한다. 이차함수의 최대값, 최소값을 구하는 문제는 주어진 이차방정식을 완전제곱식으로 변형하고, 그래프를 그려서 꼭지점을 찾아 구하도록 한다.

이 단원을 지도하는데 유의할 점은 이차함수와 이차방정식의 관계는 학생들에게 혼동을 주기 때문에 다루지 않도록 하며, 이차함수의 최대값, 최소값을 구할 때는 $y=ax^2+bx+c$에서 x의 값(정의역)은 실수 전체로 하되, 제한된 범위에서는 다루지 않는다. 그래프의 대칭성을 가볍게 알아보는 것은 무방하나 x축, y축, 원점에 대칭인 함수와 그래프의 관계는 학생들이 어렵게 느낄 수 있기 때문에 학생들의 수준을 고려하여 지도하도록 하고, 이차식의 계수의 부호를 알면 그래프가 어떤 개형이 되는지 직관적으로 짐작할 수 있을 정도만 지도한다. 현 중학교 3학년에 이차함수 구조를 보면 다음과 같다.

학습구조 차트 <3>


4. 최대값과 최소값
3.3 포물선
3.2 축
3.1 꼭지점
3.5 평행이동
3.4 축의 방정식
3. 이차함수 그래프의 성질
2.4 $y=a(x-p)^2+q$
2.5 $y=ax^2+bx+c$
2.1 $y=ax^2$
2.2 $y=ax^2+q$
2.3 $y=a(x-p)^2$
2. 이차함수의 그래프
1. 이차함수의 뜻
이차함수

Ⅳ. 설문지 분석에 따른 이차함수의 효율적인 지도방안

1. 설문조사 및 연구의 대상

1) 연구의 대상

함수라는 단원은 대부분 학생들이 싫어하는 단원 중에 하나이다. 그리고 남녀 성별을 보면 특히 여학생들이 함수를 더 싫어하는 것으로 알려져 있다. 중학교 함수 단원에서 어떤 부분에서 어려워하는지 찾아내고 그것을 분석하여 효율적인 지도 방안을 제시하려고 한다. 먼저 연구의 대상은 이차함수이므로 현 중학교 3학년에게는 아직 배우지 않은 관계로 중학교 3학년 때 학습한 현 고등학생에게 설문조사를 실시하게 되었다. 영암에 있는 Y여자고등학교 1학년 75명 학생들을 실시하였다.

2. 문제의 구성과 결과 처리 방법

1) 문제의 구성

각 단원의 내용에서 기본 개념과 원리의 활용에 관한 문제를 선정하여 난이도 중간수준의 문제로 문항을 구성하였다.

2) 문제의 내용

이차함수의 개념정의, 기본형에서 꼭지점과 축의 방정식, 표준형의 최대값 , 최소값, 이차함수의 활용 등등을 실시하였다.

3) 정답의 분석 및 대책

문제의 이해도를 나타내고, 이해하지 못한 학생들의 답안지 작성에서 나타나는 것을 분석하여 그 이유를 알아보았다.

문제의 오답률을 근거로 하여 문제를 해결하는데 필요한 기본 개념과 오답의 형태에서 오답의 원인을 제거하는데 필요한 사항을 제시 하였다.

3. 연구의 실제

먼저 본 연구 단원의 어려움 정도를 다른 단원과 비교하여 보기 위하여 1학년 학생들에게 문제를 풀기 전에 먼저 어렵게 느끼는 단원이 무엇인가 질문을 해 보았다.

<문제1> 학생이 가장 어렵게 느끼는 단원은 어떤 단원입니까?
① 수와연산 ② 문자와식 ③ 규칙성과 함수 ④ 확률과 통계 ⑤ 도형 ⑥ 측정

구분 / 설 문	단 원	인 원
학습자가 가장 어렵게 느끼는 단원은?	수와 연산	5
	문자와 식	8
	규칙성과 함 수	24
	확률과 통 계	6
	도 형	17
	측 정	15

위 표에서와 같이 규칙성과 함수 영역의 함수 단원은 학습자가 어렵게 느끼는 단원이다. 이는 교사가 대충 몇 개의 그래프나 그림을 그려 설명하는 관계로 개념 이해가 잘 되어 있지 않기 때문이다.

<문제2> 이차함수란 무엇이라고 생각합니까?

문제의 내용	잘 알고 있다	약간 알고 있다	모르고 있다
이차함수의 정의	19	40	16

≪오답의 원인 분석≫

· 중학교 함수 단원을 할 때 마다 정확하게 함수가 뭔지 정확한 용어 정의를 알지 못하고 학기 마지막 부분에 함수가 학생들도 선생님도 소홀해지기 쉬운 단원이다. 학생들은 함수가 그저 어려운 부분이라고 미리 선입견을 갖고 생각해서인지 함수를 알 것 같으면서도 정확하게 답변하는 걸 어려워했다. 대부분 학생들은 함수란 그저 x에서 y로 가는 정도 그 정도의 대답이 많았다. 전혀 알지 못하겠다는 학생들은 이차함수가 포물선이라는 개념조차 모르는 학생들도 있었다.

≪지도 방법≫

· 수학에서 사용되는 용어는 그 뜻을 명확하게 지도하여야 한다. 일차함수 정의부터 다시 지도하고 함수가 정확하게 무엇인지부터 설명을 해주고 일차함수 그리고 이차함수를 지도해 줘야 학생들이 알기 쉽게 복습을 시키고 지도해야 할 것이다.

· 이차함수의 여러 가지 예를 들어 이차함수를 많이 접하게 해준다.

· ICT 활용을 충분히 해서 학생들이 시각적으로 직접 그려보게 하고 참여하는 수업을 유도한다.

<문제3> 위의 이차함수 $y=-3x^2$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) (□ , □) 이 꼭지점이다.

(2) □ 축에 대하여 대칭이다.

문제의 내용	잘 알고 있다	약간 알고 있다	모르고 있다
$y=ax^2$ ($y=-3x^2$)	18	38	19

≪오답의 원인 분석≫

· 이차함수에서 그래프를 그리는 부분이 가장 어렵다고 여긴다. 배울 때는 기억이 나지만 그래프 유형 5가지를 섞어서 따로따로 그려 보기에는 혼동이 생긴다고 한다. 대부분 학생들이 꼭지점을 제대로 찾지 못했다. 그래서 어떤 학생들은 축의 방정식 이라는 용어도 알지 못했다. 당연히 그래프를 그리는게 되지 않으므로 꼭지점과 축의 방정식을 찾지 못했다.

≪지도 방법≫

· 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 그릴 때 정의역을 정수의 집합에서 출발하여 대응표를 만들고 반드시 그래프 칠판을 이용하여 좌표평면에 대응점을 찾게 한다.

· 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 $y=-x^2$의 그래프를 그린 후 비교하여 이차함수 그래프가 $y=ax^2$의 그래프가 a의 부호에 따라 어떻게 다른지 비교하여 설명해서 알게 한다.

· 축의 방정식이 뭔지 그래프를 그려 보면서 축의 방정식과 꼭지점을 상세히 지도해 준다.

다음 문제 [4, 5, 6] 빈 칸을 채우시오.

<문제4> 다음 빈 칸을 채워보시오.

이차함수 $y = 2x^2 + 1$의 그래프는 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프를 y축 방향으로 □ 만큼 평행 이동한 것이고, 꼭지점의 좌표는 (□ , □)이다.

.

<문제5> 다음 빈 칸을 채워보시오.

(1) 이차함수 $y=2(x-3)^2$ 의 그래프는 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프를 x축 방향으로 □만큼 평행이동한 것이고, 꼭지점의 좌표는 (□ , □) 이다.

<문제6> 다음 빈 칸을 채워보시오.

(1) 이차함수 $y = 2(x-2)^2 + 1$ 의 그래프는 $y=2x^2$ 의 그래프를 x축 방향으로 □만큼, y축 방향으로 □만큼 평행이동한 것으로, 꼭지점의 좌표는 (□ , □)이다.

문제의 내용	잘 알고 있다	약간 알고 있다	모르고 있다
$y = ax^2 + q$ $(y = 2x^2 + 1)$	17	25	33
$y = a(x-p)^2$ $(y=2(x-3)^2)$	18	20	37
$y = a(x-p)^2 + q$ $(y = 2(x-2)^2 \mathbf{+1})$	15	23	37

≪오답의 원인 분석≫

· 이차함수의 그래프의 기본형인 $y=ax^2$의 그래프를 잘 그릴 수 없는 학생들이 마찬가지로 이번 문제에서 많이 혼동을 느낌을 알 수 있다.

· 이번 문제도 마찬가지로 $y=ax^2$문제가 제대로 이해가 되지 않는 상태에서 여러 가지 유형을 푸는데 어려움이 따른다고 본다.

≪지도 방법≫

· 먼저 기본형인 $y=ax^2$그래프를 그리고 나서 a부호에 따라 위로 볼록 아래로 볼록한 것을 좀 더 자세히 설명해 준다.

· $y=ax^2+q$, $y=a\ (x-p)^2$, $y=a\,(x-p)^2+q$그래프는 대응표를 만들어 그래프를 좌표평면 위에 그려 $y=ax^2$의 그래프를 평행 이동 시켜 간편하게 그리도록 지도해 주고 꼭지점, 축의 방정식 위로 볼록 아래로 볼록 등을 자세히 지도하여 주고 모둠 수업을 통해서 각자가 그려보게 한다. 그리고 인터넷 등을 찾아서 이런 유형 그래프를 찾아보게 하고 학생들이 많이 그려보게 해야 한다. 기본 개념 없이는 어떠한 그래프도 그릴 수 가 없다는 것을 염두에 두고 천천히 지도해 주어야 한다.

<문제7 > 이차함수 $y=2x^2+4x+8$을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 나타내시오.

<문제8> $y=-2x^2+5x-4$ 의 그래프를 꼭지점과 최대값을 구하시오.

문제의 내용	잘 알고 있다	약간 알고 있다	모르고 있다
표준형으로 고치기 $y=2x^2+4x+8$	19	28	28
최대값 최소값 구하기 $y=-2x^2+5x-4$	18	30	27

≪오답의 원인 분석≫

· 먼저 이차함수의 표준형으로 고치는 문제를 이차방정식 완전제곱식으로 고치는 문제와 많이 혼동을 느낀다. 그리고 학생들이 가장 많이 어려워하는 부분이기도 한다. 최대값과 최소값도 대부분 학생들은 표준형으로 고치는 부분이 안 되기 때문에 최대값과 최소값을 구할 수 없으며 꼭지점과 관련지어서 잘 알지 못했다.

≪지도 방법≫

· 이차방정식과 이차함수의 관계를 충분히 설명해 준다.

· 표준형으로 고치는 문제를 이해해야 최대값, 최소값을 쉽게 구할 수가 있음을 설명해 준다.

· $a>0$인 경우는 최소값을 가지고 $a<0$인 경우는 최대값을 가짐을 설명해 준다.

· 앞에서 배운 꼭지점을 충분히 설명해 주고 거기에서 최대값과 최소값이 나옴을 충분히 지도해준다.

· 이차함수 $y=2x^2+4x+8$ 을 $y=a(x-p)^2+q$로 나타낼 때, 우변의 식을 2로

나누어 $y=x^2+2x+4$에서 $y=(x+1)^2+3$으로 나타내는 실수를 많이 한다. 이 때, 이차함수는 이차방정식의 완전제곱식과는 다르다는 것을 확실히 이해시키고, a의 값이 변하지 않음을 강조하도록 한다.

· 이차함수는 일반적으로 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 의 꼴로 나타낼 수 있다. 그러나 이것은 그래프가 y절편이 c이고 a부호에 따라 아래로 볼록한지 위로 볼록한지 밖에 알 수 없다.

· 이차함수의 그래프를 그리기 위해서는 꼭지점의 좌표를 아는 것이 필수적이다. 그러므로 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치는 것이 그래프를 그리거나 최대값 또는 최소값을 구하는 것과 같은 응용문제를 푸는 데 유리하다. 이 개념을 충분히 지도한다.

<문제 9 > 다음 중 폭이 가장 좁은 이차함수를 고르고 그 이유를 설명하시오.

문제의 내용	잘 알고 있다	약간 알고 있다	모르고 있다
폭이 가장 좁은 것	28	29	18

≪오답의 원인 분석≫

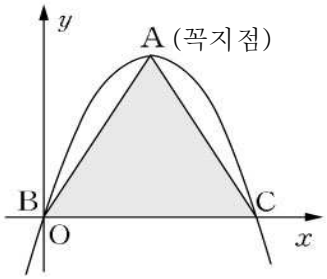
일차함수에서도 a값을 구하는 문제도 이해하지 못한데다 숫자가 커지면 좁아진다는 개념을 전혀 알지 못했다.

≪지도 방법≫

· 몇 개의 그래프를 그려보면서 절대 값이 크면 이차함수에는 폭이 좁아진다는 걸 그래프를 그려보면서 지도한다.

· 인터넷 활용을 많이 하고 학생들이 이해를 많이 못하고 있다고 생각하고 꼼꼼히 지도를 해야 할 것이다.

<문제 10> 오른쪽 그림은 이차함수 $y=-x^2+4x$ 의 그래프이다. $\triangle$ABC 의 넓이를 구해보시오.



문제의 내용	잘 알고 있다	약간 알고 있다	모르고 있다
이차함수의 활용	18	23	34

≪오답의 원인 분석≫

· 먼저 이차함수의 표준형으로 고치는 문제를 이차방정식 완전제곱식으로 고치는 문제와 많이 혼동을 느낀다. 학생들의 상당수가 x절편을 구하는 게 어렵다고 느낀다. 꼭지점은 구하는데 밑변의 길이를 구하는데 x절편을 이용해서 구한다는 걸 잘 이해하지 못했다.

≪지도 방법≫

· 이차방정식과 이차함수의 관계를 충분히 설명해준다.

· 표준형으로 고치는 문제를 이해해야 최대값, 최소값을 쉽게 구할 수가 있음을 설명해 준다.

· x절편과 y절편을 구하는 방법을 충분히 설명한다.

· $a>0$인 경우는 최소값을 가지고 $a<0$인 경우는 최대값을 가짐을 설명해 준다.

· 앞에서 배운 꼭지점을 충분히 설명해 주고 거기에서 최대값과 최소값이 나옴을 충분히 지도해준다.

V. 결론 및 제언

수학은 단계형 교육과정인 만큼 단원의 시기를 놓친다면 수학의 흥미와 자신감까지 놓치게 된다. 함수 영역은 <7-가>단계의 일차함수에서 학생들이 함수의 기본적인 개념을 처음 접하게 된다. 하지만 이 단계에서 함수의 기본 개념을 충분히 이해하게 된다고 할지라도 한 단계 발전된 형태인 <9-가>단계의 이차함수 단원을 제대로 이해하지 못한다면 <10-나>단계의 이차함수를 학습하는데 많은 어려움을 겪게 될 것은 당연한 이치일 것이다. 하지만 설문에서도 알 수 있듯이 대부분의 학생들은 함수 단원은 무조건 어렵다는 선입견을 가지고 있었으며, 고등학교 1학년을 대상으로 한 설문이었음에도 불구하고 <9-가>단계 중에서도 이차함수의 기초적인 문제를 해결하는 것조차 많은 어려움을 겪고 있었다.

이는 <9-가>단계에서 이차함수를 학습하는데 있어 충분한 개념정리가 되지 못한데서 그 이유를 찾을 수 있을 것이며, 거기에 앞서 우리의 주입식 수학교육이 수학에 대한 흥미를 떨어뜨린데 있다고 또한 볼 수 있을 것이다. 이렇게 학생들이 이차함수를 학습하는데 있어 어려움을 겪고 있는 것에 대하여 쉽게 이차함수를 이해하는데 도움이 되고자 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 이차함수의 정의와 개념과 용어를 지도할 때는 학생들이 알기 쉽게 이해할 수 있도록 여러 가지 예를 들어서 설명한다. 개념 정의가 되어있지 않다면 수학은 계속 연관이 있는 단원이므로 그 시기를 놓친다면 흥미를 잃고 수학에 자신감이 없을 것이다. 반드시 지도할 때는 충분한 설명과 이해가 되었는지 반드시 확인하고 다음 단계를 나가야 할 것이다.

둘째, 함수 그래프를 그릴 때는 반드시 모눈종이를 이용하게 하고 그래프가 기본형에서 평행이동이 어떻게 되는지 이해를 시켜야 할 것이다. 그냥 주입식이 아니라 기본형에서 변화되는 관계를 잘 지도해야 할 것이다.

셋째, 최대값과 최소값을 지도할 때는 꼭지점 관계를 설명하고 그래프를 그려 보게 하여 직접 최소값과 최대값을 찾아보도록 지도한다.

마지막으로, 이차함수는 그래프를 그려봄으로써 지도하는데 있어서 판서보다는 시각적으로 ICT를 활용해서 직접 그려 보게 하고 값에 따라 변화되는 그래프를 많이 접하고 직접 그려서 이해도를 높여 준다. 그리고 같이 참여하는 수학에 흥미가 생긴다면 더 이상 지루한 수학시간이 아닌 재미있고 기다려지는 수학 시간이 되도록, 더 나아가 언젠가는 학생들이 수학을 제일 좋아하는 과목이 될 것이라고 생각된다.

<참고문헌>

[1] 정혜일 (2003) 「함수의 개념과 함수 지도 방안 연구」,연세대학교 석사 학위 논문

[2] 서현주 (1998)「이차함수의 효율적인 지도방안」,조선대학교 석사 학위 논문

[3] 강옥기 외 2인 (2002) 「중학교 수학 9-가 교사용 지도서」,(주) 두산

[4] 교육부 (1997)「수학과 교육 과정,교육부 고시 제 1997-15[별책8]」,교육부

[5] 박두일 외 2인 (2001) 「중학교 수학 교사용 지도서 8-가」,교학사