[UCI]I804:24011-200000232870

Collection @ chosun

2006年 8月
教育學碩士(數學敎育)學位論文

# 다차원 삼각형의 수심, 외심, 무게중심에 관한 연구

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 智 惠

Collection @ chosun

# 다차원 삼각형의 수심, 외심, 무게중심에 관한 연구

A study on orthocenters, circumcenters, centroids of multi dimensional triangles

2006년 8월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 智 惠

Collection @ chosun

# 다차원 삼각형의 수심, 외심, 무게중심에 관한 연구

指導敎授 安 永 濬

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 제출합니다.

2006년 4월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 智 惠

Collection @ chosun

# 李智惠의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授 _____ 인

2006년　6월

## 朝鮮大學校 敎育大學院

Collection @ chosun

# 목 차

그림목차 ····· ii

ABSTRACT ····· iii

제 1 장. 서론 ····· 1

제 2 장. 예비지식 ····· 2

제 3 장. 초구면에 놓여있는 삼각형의 수심 ····· 6

제 4 장. 결론 ····· 18

참고문헌 ····· 19

Collection @ chosun

# 그 림 목 차


그림 1. 오일러 직선 ····· 2
그림 2. 내접원과 외접원의 반지름 ····· 2
그림 3. 무게중심과 수심과 내심의 위치관계 ····· 3
그림 4. 삼각형의 외심과 수심 ····· 3
그림 5. 삼각형의 외심과 무게중심 ····· 3
그림 6. Euler의 원 ····· 4
그림 7. 삼각형의 외심과 Euler의 원 ····· 4
그림 8. 삼각형의 내심과 외심과의 관계 ····· 5
그림 9. 단위원상에서의 삼각형의 수심의 위치 ····· 7
그림 10. 단위구와 $z=k$인 평면 α ····· 8
그림 11. $z=k$인 평면 α ····· 8
그림 12. 단위구와 $yz$평면과의 단면도 ····· 9
그림 13. 반지름을 3배 확장했을 때 $z$평면과의 단면도 ····· 9
그림 14. $xy$평면위의 수심$H$ ····· 10
그림 15. 구면상의 점의 극좌표변환 ····· 11
그림 16. 4차원 초구면과 평면 $\alpha$와의 단면도 ····· 12
그림 17. 4차원 초구면과 $yz$평면과의 단면도 ····· 12
그림 18. 반지름을 3배 확장했을 때 $yz$평면과의 단면도 ····· 13
그림 19. $n$차원 초구면과 평면과의 단면도 ····· 16
그림 20. 반지름을 3배 확장했을 때 평면과의 단면도 ····· 16

Collection @ chosun

# ABSTRACT

## A study on orthocenters, circumcenters, centroids of multi dimensional triangles

Ji Hye Lee
Advisor : Prof. Young Joon Ahn. Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education. Chosun University

It is well known that the orthocenter(H), the circumcenter(O), and the centroid(G) of a two-dimensional triangle are linear and $\overline{OG} : \overline{GH} = 1:2$. Based on these properties, we show that the set of all orthocenters of the triangle whose vertices lie on the unit circle is equal to the interior of the circle of radius 3.

Also, we extend the corresponding results to the general dimensional cases.

Collection @ chosun

# 제1장. 서론

삼각형에는 내심, 외심, 무게중심, 수심, 방심의 오심이 존재하는데 그들의 위치는 삼각형의 모양에 따라 달라진다. 내심은 내접원의 중심으로서 세 내각의 이등분선의 교점이다. 이 때, 삼각형의 모양에 관계없이 내심은 항상 삼각형의 내부에 존재한다. 외심은 외접원의 중심으로서 세 변의 수직이등분선의 교점으로, 예각삼각형인 경우에는 삼각형의 내부에 존재하고, 직각삼각형의 경우에는 빗변의 중점에 위치하며, 둔각삼각형의 경우에는 삼각형의 외부에 존재한다. 무게중심은 각 꼭지점에서 대변의 중점을 이은 중선의 교점으로서 삼각형의 모양에 관계없이 항상 삼각형의 내부에 존재한다. 수심은 각 꼭지점에서 대변에 내린 수선의 교점으로서 예각삼각형의 경우에는 삼각형의 내부에 존재하고, 직각삼각형의 경우에는 직각을 낀 꼭지점이 수심과 일치하며 둔각삼각형의 경우에는 삼각형의 외부에 존재한다. 방심은 방접원의 중심으로서 삼각형의 한 내각의 이등분선과 이것과 이웃하지 않은 두 외각의 이등분선은 한 점에서 만나는데 삼각형의 모양과 관계없이 항상 방심은 삼각형의 외부에 존재한다.

이 논문에서는 수심에 대해 더 자세히 알아보고자 한다. 구체적으로, 단위원상의 임의의 세 점을 잡았을 때 수심은 어디까지 존재하는가에 대한 연구와 단위구상의 임의의 세 점을 이은 삼각형의 수심의 위치, 그리고 n차원으로의 확장에 대한 연구를 한다.

Collection @ chosun

# 제2장. 예비지식

이 장에서는 삼각형의 오심에 관한 여러 가지 알려진 성질들을 소개한다.

## 정리 2.1 [1]

임의의 삼각형의 외심 $O$와 무게중심 $G$, 수심 $H$는 동일직선상에 있고 무게중심은 외심과 수심을 이은 선분을 $1:2$ 로 내분한다. 여기서 이 세 점 $O$, $G$, $H$ 를 지나는 직선을 삼각형의 오일러 직선이라고 한다.

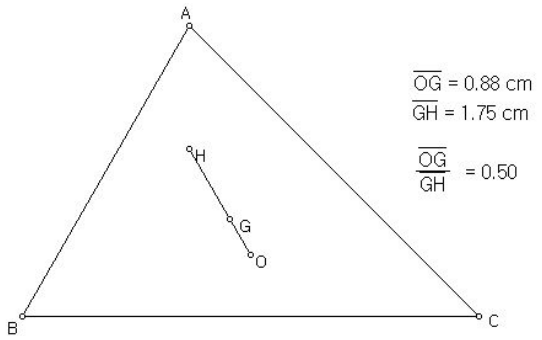


그림 1. 오일러 직선

## 정리 2.2 [1]

임의의 삼각형의 내심을 $I$라 하고, 내접원의 반지름을 $r$ 외접원의 반지름을 $R$ 이라고 할 때, $\overline{OI}^2 = R(R-2r)$이 성립한다.

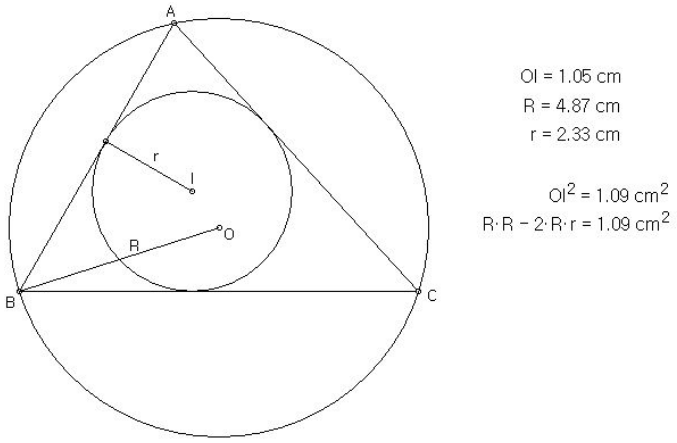


그림 2. 내접원과 외접원의 반지름

Collection @ chosun

### 정리 2.3 [1]

임의의 삼각형의 외심 $O$와 무게중심 $G$, 수심 $H$가 있으면, $\overline{GH}$를 지름으로 하는 원 내부에 반드시 내심 $I$가 존재한다.

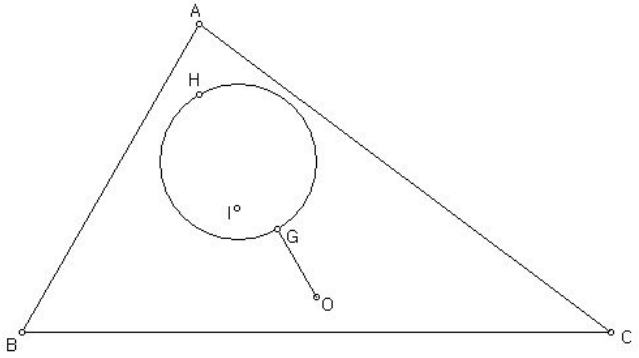


그림 3. 무게중심과 수심과 내심의 위치관계

### 정리 2.4 [2]

삼각형 $ABC$에서 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 상의 임의의 점을 $A', B', C'$라고 하자. $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$이 한 점에서 교차하여 6개의 삼각형으로 나누어지는 경우에 대해 생각해보자. 6개의 삼각형의 외심 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$이 동일 원주상에 있을 때, $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$의 교점이 삼각형 $ABC$의 수심 또는 무게중심이 된다. 또한 역도 가능하다.

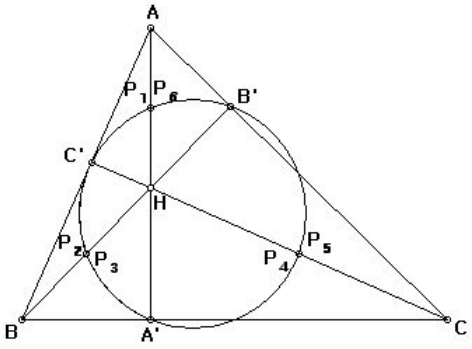


그림 4. 삼각형의 외심과 수심

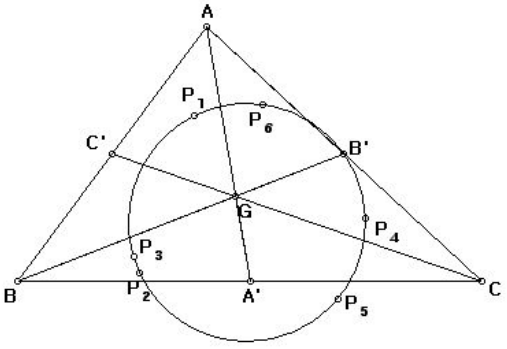


그림 5. 삼각형의 외심과 무게중심

Collection @ chosun

**정리 2.5 [3]**

$\triangle ABC$에서 세 변의 중점을 $D$, $E$, $F$라 하고, 각 꼭지점에서 그 대변에 내린 수선의 발을 $L$, $M$, $N$ 그리고 수심 $H$와 각 꼭지점을 이은 선분의 중점을 $P$, $Q$, $R$이라고 할 때, 이 9개의 점은 한 원 위에 존재한다. 그리고 이 원을 Euler의 원이라고 한다.

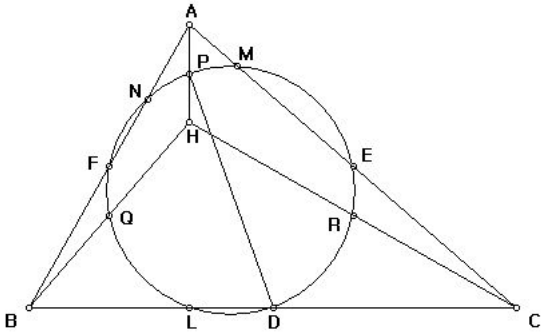


그림 6. Euler의 원

**정리 2.6 [4]**

삼각형 $ABC$의 외심을 $O$라고 하고, $\triangle BOC$, $\triangle COA$, $\triangle AOB$의 외심을 각각 $X$, $Y$, $Z$라고 할 때, $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, $\overline{CZ}$는 한 점 $V$에서 만나고 그 교점은 Euler의 원의 중심 $V$와 일치한다.

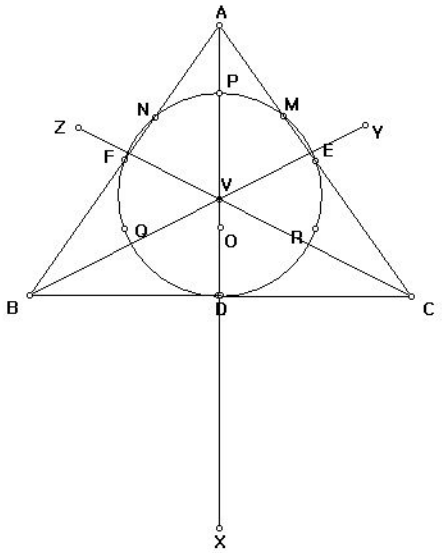


그림 7. 삼각형의 외심과 Euler의 원

Collection @ chosun

**정리 2.7 [5]**

삼각형 $ABC$의 외심을 $O$, 내심을 $I$라 하고 내접원과 $\overline{BC}$와의 교점을 $X$, $\overline{AC}$와의 교점을 $Y$, $\overline{AB}$와의 교점을 $Z$ 라고 하자. 또한, $\overline{YZ}$에 대한 $X$의 대칭점을 $X'$이라 하고, $\overline{XZ}$에 대한 $Y$의 대칭점을 $Y'$, $\overline{XY}$에 대한 $Z$의 대칭점을 $Z'$이라고 하자. 그러면 $\overline{AX'}$과 $\overline{BC}$와의 교점 $A_1$과 $\overline{BY'}$과 $\overline{AC}$와의 교점 $B_1$과 $\overline{CZ'}$과 $\overline{AB}$와의 교점 $C_1$은 모두 $\overline{OI}$ 위에 있다.

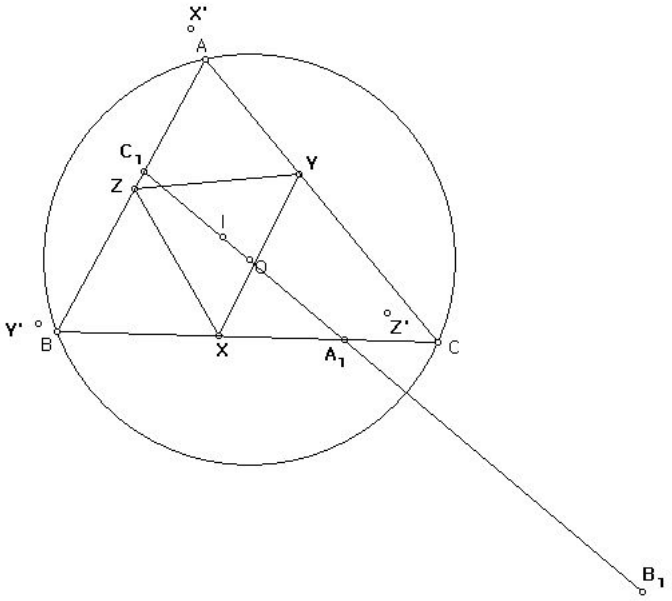


그림 8. 삼각형의 내심과 외심과의 관계

dCollection @ chosun

# 제3장. 초구면에 놓여있는 삼각형의 수심

이 장에서는 단위원상의 임의의 세 점으로 이루어진 삼각형의 수심의 위치와 단위구면상의 임의의 세 점으로 이루어진 삼각형의 수심의 위치를 알아보고, 이를 n차원으로의 확장에 관한 연구를 한다.

먼저 단위원상에서 임의의 세 점으로 이루어진 삼각형의 수심의 위치에 대해 알아보자.

## 정리 3.1

단위원상에서 임의의 세 점 $A, B, C$ 을 잡아, 이 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형에 대해서 생각해보자. 이 삼각형의 수심을 작도해보면 수심의 집합을 $H^*$ 라고 할 때,

$$H^* = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < 3\}$$

이다.

**증명**

(⊆) $H^*$에 속하는 임의의 점 $H(x, y)$을 잡자. 단위원상에서 임의의 세 점 $A, B, C$ 를 잡아서 무게중심 $G$를 작도해보면 $G$는 삼각형의 모양에 관계없이 항상 삼각형의 내부에 존재하고 $|\overline{OG}| < 1$임을 알 수 있다. 오일러 직선에 의해

$$\overline{OG} : \overline{GH} = 1:2, \quad \overline{OG} : \overline{OH} = 1:3 \ , |\overline{OH}| < 3$$

$$|\overline{OH}| = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$$

가 성립한다. 수심들의 집합중의 임의의 원소는 반지름이 3인 원의 내부에 항상 존재함을 알 수 있다.

$$\therefore H^* \subseteq \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} < 3\}$$

(⊇) $\sqrt{x^2 + y^2} < 3$을 만족하는 임의의 점 $H(x, y)$을 잡으면 $|\overline{OH}| < 3$이다. 오일러 직선에 의해

$$\overline{OG} : \overline{OH} = 1:3$$

가 성립하므로 $\overline{OH}$을 $1:2$ 로 내분하는 점 $G$을 잡아보면 $|\overline{OG}| < 1$임을 알 수 있다. 다음으로, $G$을 중심으로 하는 단위원상의 세 점을 작도해보기로 하

Collection @ chosun

자. $\overline{OH}$와 단위원과의 교점을 $A$라 하고 $\overline{AG}$을 2:3으로 외분하는 점 $P$을 잡아서 $\overline{AP}$와 수직이 되도록 단위원 내부에 현을 그리면, 현과 단위원과의 두 교점을 각각 $B, C$라고 할 수 있다. 그래서, 단위원상에 세 점 $A, B, C$를 지나는 삼각형이 존재함을 알 수 있다. $H(x, y)$는 수심들의 집합 $H^*$에 포함된다.

$$\therefore \{(x, y): \sqrt{x^2+y^2} < 3\} \subseteq H^*$$

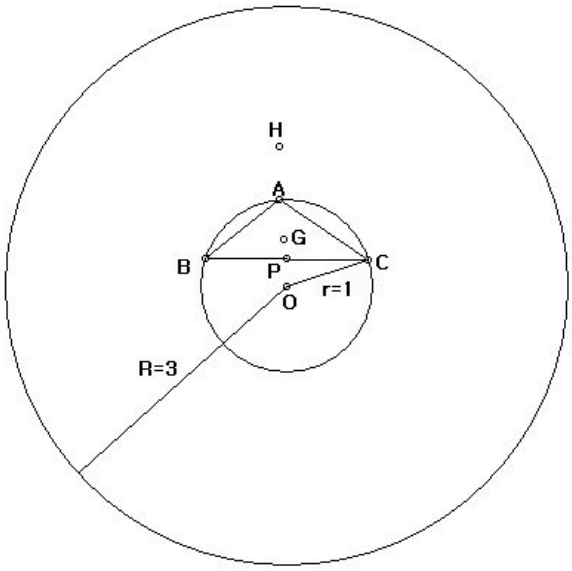


그림 9. 단위원상에서의 삼각형의 수심의 위치

$$\therefore H^* = \{(x, y): \sqrt{x^2+y^2} < 3\}$$

다음으로, 단위구면상에서의 임의의 세 점으로 이루어진 삼각형의 수심의 위치에 대해 알아보자.

## 정리 3.2

단위구면상의 임의의 세 점 $A, B, C$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형을 생각해보자. 이 삼각형의 수심을 $H(x, y, z)$라고 하고, 수심들의 집합을 $H^*$라고 하면

$$H^* = \{(x, y, z): \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 3\}$$

이다.

Collection @ chosun

**증명**

(⊆) $H^*$에 속하는 임의의 점 $H(x, y, z)$을 잡자. 다음으로 단위구면상의 임의의 세 점 $A, B, C$ 을 잡아서 적당히 구를 회전하여 이 세 점을 포함하는 평면 α가 $xy$평면과 평행하고 $z=k$인 평면에 대해서 생각해보도록 하자. 평면 α 이 구를 만나서 생기는 단면은 중심이 $O'(0,0,k)$ 인 원이다. 세 점 $A, B, C$ 는 원 위에 존재하고 반지름은

$$\overline{O'C} = r' = \sqrt{1-k^2} < 1$$

이 된다. 오일러직선에 의해

$$\overline{O'G} : \overline{GH} = 1:2, \quad \overline{O'C} < 1$$

$$|\overline{O'G}| < 1, \quad |\overline{O'H}| < 3$$

임을 알 수 있다.

$$\overline{OO'} = k, \quad \overline{OC} = 1, \quad \overline{O'C} = \sqrt{1-k^2} < 1$$

이 되어 구의 중심을 지나는 경우 $(k=0)$에 가장 큰 단면이 생김을 알 수 있다.

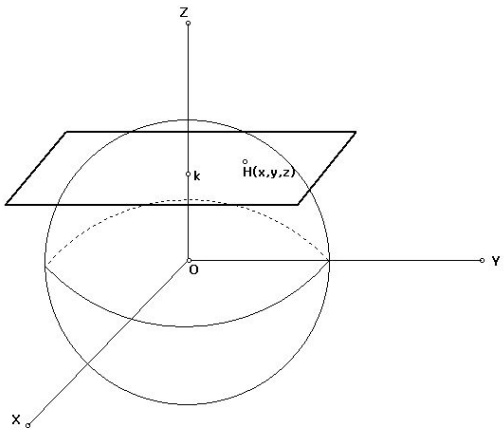


그림 10. 단위구와 $z=k$인 평면 α

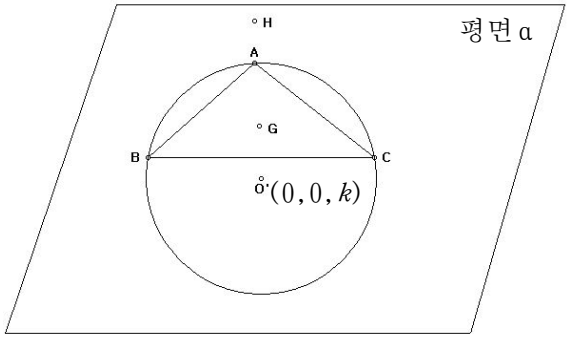


그림 11. $z=k$인 평면 α

Collection @ chosun

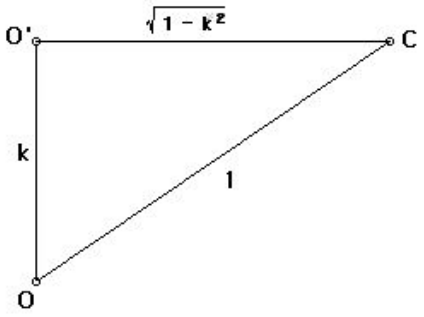


그림 12. 단위구와 $yz$평면과의 단면도

이 가장 큰 단면이 생기는 경우는 앞의 정리 3.1의 증명에 따라 수심 $H$는 반지름이 3인 원의 내부에 존재함을 알 수 있다. 중심이 $O'(0,0,k)$인 원에 대해서 수심이 3배 반경 내에 존재한다고 하자. 다시 말해서 반지름이

$$\overline{O'C} = \sqrt{1-k^2}$$

이므로 $3\sqrt{1-k^2}$를 반지름으로 하는 원의 내부에 수심이 존재하게 된다. 직각삼각형의 피타고라스 정리에 의해서

$$(3\sqrt{(1-k^2)})^2 + k^2 = 9-8k^2$$

$$\sqrt{9-8k^2} \le 3 \quad (0 \le k \le 1)$$

이 된다. 즉, 수심들의 집합의 임의의 원소에 대해서 반지름이 3인 구 내부에 수심이 항상 존재함을 알 수 있다.

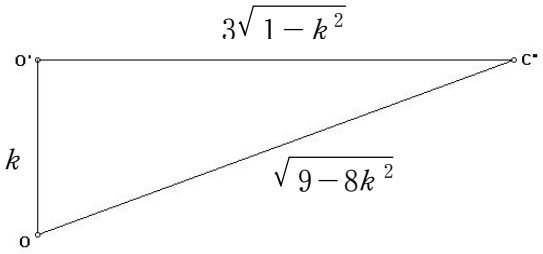


그림 13. 반지름을 3배 확장했을 때
$yz$평면과의 단면도

$$\therefore H^* \subseteq \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 3\}$$

Collection @ chosun

(⊇) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}<3$을 만족하는 임의의 점 $H(x, y, z)$ 를 잡자.

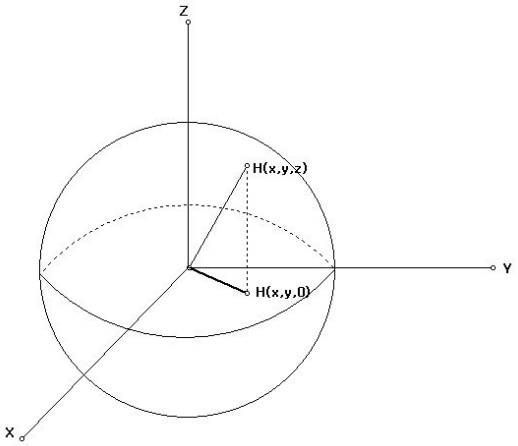


그림 14. $xy$평면 위의 수심 $H$

좌표축을 적당히 회전하여 점 $H$ 가 $xy$평면위에 오는 경우에 대해 생각해보자. 그 때의 점 $H$는 $z=0$인 평면위의 점 $H(x, y, 0)$에 대해서 $|\overline{OH}|<3$이 된다. 그림 9에서와 같이, 점 $H$ 을 수심이라고 하면 오일러직선에 의해 $\overline{OH}$을 1:2로 내분하는 점 $G$을 잡을 수 있다. 그러면 $|\overline{OG}|<1$임을 알 수 있다. 위의 정리 3.1에서 증명한 바와 같이 점 $G$을 무게중심으로 하고 정확히 점 $H$을 수심으로 갖는 삼각형 $ABC$는 단위원상에 존재한다. 즉 $H$는 단위원상의 어떤 세 점 $A, B, C$의 수심이 된다. 따라서

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}<3$$

을 만족하는 임의의 점 $H$에 대하여 단위구면상의 세 점 $A, B, C$가 존재하여 삼각형 $ABC$의 수심은 바로 점 $H$가 된다.

$$\therefore \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2}<3\} \subseteq H^*$$

$$\therefore H^* = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2}<3\}$$

## 보조정리 3.3

단위 구면상에서 임의의 점 $A(x, y, z)$을 잡았을 때 구면위에서 이 점을 이동하여 얻어진 $A'(X, Y, Z)$의 좌표는 다음과 같은 $3\times3$행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.

Collection @ chosun

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\rho & 0 & -\sin\rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\rho & 0 & \cos\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\rho cos\theta & -\cos\rho sin\theta & -\sin\rho \\ sin\theta & \cos\theta & 0 \\ sin\rho cos\theta & -\sin\rho\sin\theta & \cos\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

여기에서 Θ는 $z$좌표를 고정하고 $xy$평면상에서의 회전각을 의미하고, ρ는 Θ만큼의 평행이동 후 $xz$평면상에서의 회전각을 의미한다.

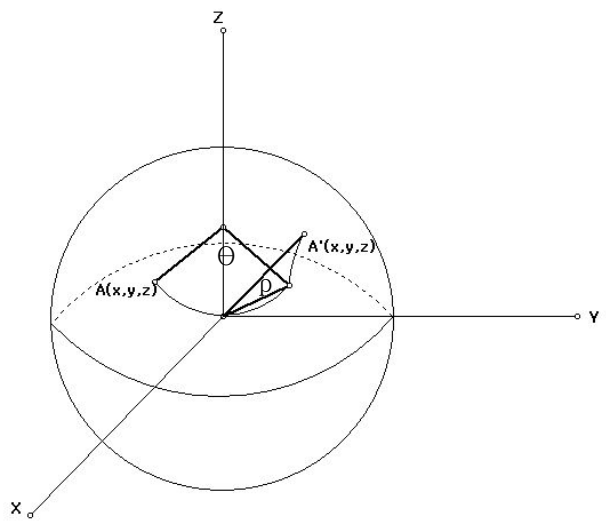


그림 15. 구면상의 점의 극좌표변환

다음으로, 4차원 초구면의 임의의 세 점에 대한 삼각형의 수심의 위치에 대해 알고, 증명해보자.

## 정리 3.4

4차원 초구면의 임의의 세 점 $A, B, C$을 꼭지점으로 하는 삼각형을 생각해보자. 이 삼각형의 수심을 $H(x, y, z, w)$라 하고, 수심들의 집합을 $H^*$라고 하면

$$H^* = \{(x, y, z, w) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} < 3\}$$

이다.

Collection @ chosun

**증명**

(⊆) $H^*$에 속하는 임의의 점 $H(x, y, z, w)$을 잡자. 다음으로 4차원의 초구면상의 임의의 세 점 $A, B, C$ 을 잡아서 적당히 4차원 초구를 회전하여 이 세 점을 포함하는 평면 α가 $xy$평면과 평행하고

$$z = k_2\ ,\ w = k_1$$

인 평면에 대해서 생각해보도록 하자. 평면 α 가 4차원 초구를 만나서 생기는 단면은 중심이

$$O'(0, 0, k_2, k_1)$$

인 원이다. 세 점 $A, B, C$는 원 위에 존재하고 반지름은

$$\overline{O'C} = r' = \sqrt{1-(k_1^2+k_2^2)} < 1$$

이 된다. 오일러직선에 의해

$$\overline{O'G} : \overline{GH} = 1:2,\quad \overline{O'C} < 1$$

$$|\overline{O'G}| < 1\ ,\ |\overline{O'H}| < 3$$

임을 알 수 있다.

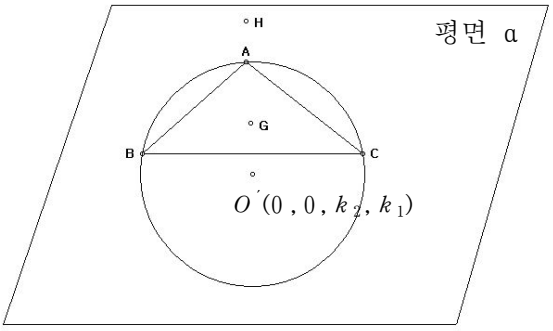


그림 16. 4차원 초구면과 평면 α와의 단면

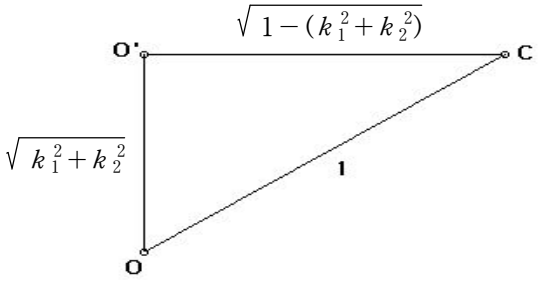


그림 17. 4차원 초구면과 $yz$평면과의 단면도

Collection @ chosun

$$\overline{OO'} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \overline{OC} = 1$$

$$\overline{O'C} = \sqrt{1-(k_1^2+k_2^2)} < 1$$

이 되어 4차원 초구의 중심을 지나는 경우에 가장 큰 단면이 생김을 알 수 있다. 이 가장 큰 단면이 생기는 경우는 앞의 정리 3.1의 증명에 따라 수심 $H$는 반지름이 3인 원의 내부에 존재함을 알 수 있다. 그러면 중심이

$$O'(0, 0, k_2, k_1)$$

인 원에 대해서 수심이 3배 반경 이내에 존재한다고 하자. 즉 원의 반지름은

$$\overline{O'C} = \sqrt{1-(k_1^2+k_2^2)}$$

이므로 $3\sqrt{1-(k_1^2+k_2^2)}$을 반지름으로 하는 원 내부에 수심이 존재함을 말한다. 피타고라스의 정리를 이용하여

$$(3\sqrt{1-(k_1^2+k_2^2)})^2 + (\sqrt{k_1^2+k_2^2})^2 = 9-8(k_1^2+k_2^2)$$

임을 알 수 있다.

$$\sqrt{9-8(k_1^2+k_2^2)} \le 3 \quad (0 \le k \le 1)$$

이다. 즉, 수심들의 집합의 임의의 원소에 대해서 반지름이 3인 4차원 초구 내부에 수심이 항상 존재함을 알 수 있다.

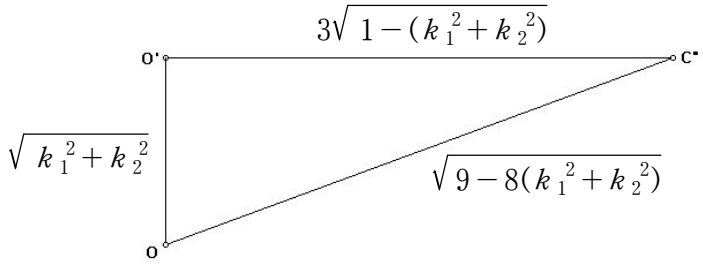


그림 18. 반지름을 3배 확장했을 때
$yz$평면과의 단면도

$$\therefore H^* \subseteq \{(x, y, z, w) : \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2} < 3\}$$

(⊇) $\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2} < 3$을 만족하는 임의의 점 $H(x, y, z, w)$ 를 잡자. 좌표축을 적당히 회전하여 점 $H$ 가 $xy$평면위에 오는 경우에 대해 생각해보자. 그때의 점 $H$는

$$z = 0, \ w = 0$$

Collection @ chosun

인 평면위의 점 $H(x, y, 0, 0)$에 대해서 $|\overline{OH}|<3$ 이 된다. 그림 9에서와 같이 $H$ 를 수심이라고 하면 오일러직선에 의해 $\overline{OH}$를 1:2로 내분하는 점 $G$를 잡을 수 있다. 그러면 $|\overline{OG}|<1$임을 알 수 있다. 위의 정리 3.1에서 증명한 바와 같이 $G$를 무게중심으로 하고 정확히 $H$를 수심으로 갖는 삼각형 $ABC$는 단위원상에 존재한다. 즉 $H$는 단위원상의 어떤 세 점 $A, B, C$의 수심이 된다. 따라서

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}<3$$

을 만족하는 임의의 점 $H$에 대하여 4차원 초구면상의 세 점 $A, B, C$가 존재하여 삼각형 $ABC$의 수심은 바로 $H$가 된다.

$$\therefore \{(x, y, z, w) : \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}<3\} \subseteq H^*$$

$$\therefore H^* = \{(x, y, z, w) : \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}<3\}$$

## 보조정리 3.5

4차원 구에서 임의의 점 $A(x, y, z, w)$을 잡았을 때 구면위에서 이 점을 이동해서 얻어진 $A'(X, Y, Z, W)$의 좌표는 다음과 같은 4×4행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\rho\cos\theta & -\cos\rho\sin\theta & -\sin\rho & 0 \\ \sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\rho\cos\theta & -\sin\rho sin\theta & \cos\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\rho\cos\theta & -\cos\rho\sin\theta & -\sin\rho \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\rho\cos\theta & -\sin\rho\sin\theta & \cos\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

행렬 $A$는 $z$좌표를 $k_2$로 고정함을 의미하고, 행렬 $B$는 $w$좌표를 $k_1$으로 고정함을 의미한다. 또한 $\Theta$는 여기에서 $z$좌표를 고정하고 $xy$평면상에서의 회전각을 의미하고, $\rho$는 $\Theta$만큼의 평행이동 후 $xz$평면상에서의 회전각을 의미한다.

Collection @ chosun

마지막으로, n차원에서 임의의 세 점으로 이루어진 삼각형의 수심의 위치에 대해 알아보자.

## 정리 3.6

$n$ 차원상 단위구면의 임의의 세 점 $A, B, C$을 꼭지점으로 하는 삼각형을 생각해보자. 이 삼각형의 수심을 $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$라고 하고, 수심들의 집합을 $H^*$라고 하면

$$H^* = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2} < 3\}$$

이다.

**증명.**

($\subseteq$) $H^*$에 속하는 임의의 점 $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$을 잡자. 다음으로 n차원의 초구면상의 임의의 세 점 $A, B, C$ 을 잡아서 적당히 n차원 초구를 회전하여 이 세 점을 포함하는 평면 α가 $x_1x_2$평면과 평행하고

$$x_3 = k_{n-2}, x_4 = k_{n-3}, \cdots, x_n = k_1$$

인 평면에 대해서 생각해보도록 하자. 평면 α 가 n차원 초구를 만나서 생기는 단면은 중심이

$$O'(0, 0, k_{n-2}, k_{n-3}, \cdots, k_2, k_1)$$

인 원이다. 세 점 $A, B, C$는 원 위에 존재하고 반지름은

$$\overline{O'C} = r' = \sqrt{1 - (k_{n-2}{}^2 + \cdots + k_1{}^2)}$$

이 된다. 오일러직선에 의해

$$\overline{O'G} : \overline{GH} = 1:2, \quad \overline{O'C} < 1$$

$$|\overline{O'G}| < 1, \quad |\overline{O'H}| < 3$$

임을 알 수 있다.

$$\overline{OO'} = \sqrt{k_1{}^2 + \cdots + k_{n-2}{}^2}, \quad \overline{OC} = 1$$

$$\overline{O'C} = \sqrt{1 - (k_{n-2}{}^2 + \cdots + k_1{}^2)}$$

이 되어 n차원 초구의 중심을 지나는 경우에 가장 큰 단면이 생김을 알 수 있다. 이 가장 큰 단면이 생기는 경우는 앞의 정리 3.1의 증명에 따라 수심 $H$는 반지름이 3인 원의 내부에 존재함을 알 수 있다. 그러면 중심이

Collection @ chosun

$$O'(0,0,k_{n-2},k_{n-3},\cdots,k_2,k_1)$$

인 원에 대해서 수심이 3배 반경 이내에 존재한다고 하자. 즉 원의 반지름은

$$\overline{O'C} = \sqrt{1-({k_{n-2}}^2+\cdots+{k_1}^2)}$$

이므로 $3\sqrt{1-({k_{n-2}}^2+\cdots+{k_1}^2)}$을 반지름으로 하는 원 내부에 수심이 존재함을 말한다. 피타고라스의 정리를 이용하여

$$(3\sqrt{1-({k_{n-2}}^2+\cdots+{k_1}^2)})^2+(\sqrt{{k_1}^2+\cdots+{k_{n-2}}^2})^2 = 9-8({k_1}^2+\cdots+{k_{n-2}}^2)$$

임을 알 수 있다.

$$\sqrt{9-8({k_{n-2}}^2+\cdots+{k_1}^2)} \leqq 3 \quad (0 \le k \le 1)$$

이다. 즉, 수심들의 집합의 임의의 원소에 대해서 반지름이 3인 n차원 초구 내부에 수심이 항상 존재함을 알 수 있다.

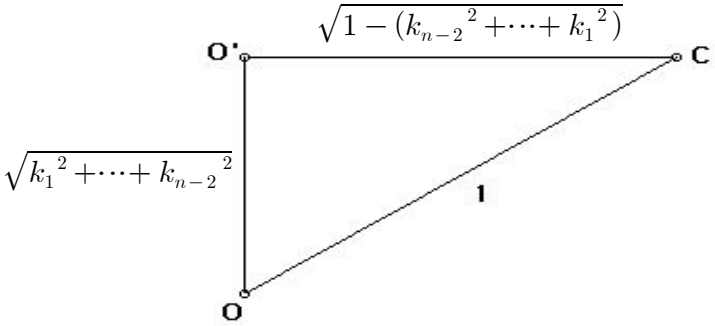


그림 19. n차원 초구면과 평면과의 단면도

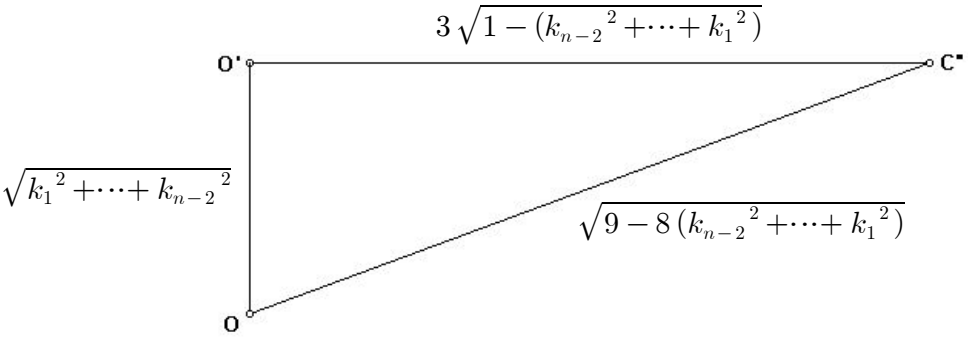


그림 20. 반지름을 3배 확장했을 때 평면과의 단면도

$$\therefore H^* \subseteq \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2} < 3\}$$

Collection @ chosun

(⊇) $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2}<3$을 만족하는 임의의 점

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

를 잡자. 좌표축을 적당히 회전하여 점 $H$ 가 $x_1x_2$평면위에 오는 경우에 대해 생각해보자. 그 때의 점 $H$는

$$x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$$

인 평면위의 점 $H(x_1, x_2, 0, \cdots, 0)$에 대해서 $|\overline{OH}|<3$ 이 된다. 그림 9에서와 같이 $H$ 를 수심이라고 하면 오일러직선에 의해 $\overline{OH}$를 1:2로 내분하는 점 $G$ 를 잡을 수 있다. 그러면 $|\overline{OG}|<1$임을 알 수 있다. 위의 정리 3.1에서 증명한 바와 같이 $G$를 무게중심으로 하고 정확히 $H$를 수심으로 갖는 삼각형 $ABC$는 단위원상에 존재한다. 즉 $H$는 단위원상의 어떤 세 점 $A, B, C$의 수심이 된다. 따라서

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2}<3$$

을 만족하는 임의의 점 $H$에 대하여 n차원 초구면상의 세 점 $A, B, C$가 존재하여 삼각형 $ABC$의 수심은 바로 $H$가 된다.

$$\therefore \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2}<3\right\} \subseteq H^*$$

$$\therefore H^* = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2}<3\right\}$$

dCollection @ chosun

# 4장. 결론

삼각형의 오심에 관련된 여러 가지 알려진 성질들을 알고 단위원상에서 임의의 세 점을 잇는 삼각형의 수심의 위치는 반지름이 3인 원의 내부에 존재함을 알게 되었다. 또한 이를 3차원으로 확장시켜서 단위구면상의 임의의 세 점을 지나는 삼각형에 서 수심의 위치는 반지름이 3인 구의 내부에 항상 존재함을 알 수 있다. 이 정리를 n차원으로 확장 적용하여 $n$차원에서 임의의 세 점을 잡아 삼각형의 수심을 작도했을 때 단위길이의 3배 반경 내에 항상 수심이 존재함을 알게 되었다.

그리고, 구면상의 임의의 점에 대해서 적당히 회전했을 때 $3\times3$ 행렬의 곱으로 표현함으로써 $n$차원 위의 임의의 점을 회전했을 때의 좌표도 $n\times n$ 행렬의 곱으로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

Collection @ chosun

# 참고문헌

[1] Benedetto Scimemi, *Paper-folding and Euler's Theorem Revisited*, Forum Geometricorum Volume 2 (2002) 93-104.

[2] Alexei Myakishev and Peter Y.Woo, *On the Circumcenters of Cevasix Configurations*, Forum Geometricorum Volume 3 (2003) 57-63.

[3] 박진석, 평면기하와 GSP, 경남대학교출판부

[4] Darij Grinberg, *On the Kosnita point and the Reflection Triangle,* Forum Geometricorum Volume 3 (2003) 105-111.

[5] Lev Emelyanov, *On the Intercepts of the OI-line*, Forum Geometricorum Volume 4 (2004) 81-84.