[UCI]I804:24011-200000233186

2006年 2月
教育學碩士(數學敎育)學位論文

중학교 수학에서 기하학에 관한 연구

- 중학교 3학년 교과서를 중심으로 -

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

高 炅 善

중학교 수학에서 기하학에 관한 연구

- 중학교 3학년 교과서를 중심으로 -

A Study of Geometry in the middle School mathematics

- Focused on the Third-grade Textbooks of the Middle school -

2006年 2 月 日

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

高 炅 善

중학교 수학에서 기하학에 관한 연구

指導敎授　　金　　남　　길

이 論文을 敎育學 碩士學位 請求 論文으로 제출합니다.

2005년　10　월　　　일

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

高　炅　善

高炅善의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長 朝鮮大學校 敎授 ________________ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 ________________ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 ________________ 인

2005년 12 월 일

朝鮮大學校 敎育大學院

목 차

표 목 차

그 림 목 차

ABSTRACT

:

A study on geometry in the middle school mathematics

(Focused on the Third-grade Textbooks of the Middle school)

Ko, Kyung seon

Advisor : Prof. Kim, Nam Kil

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

In this thesis, for the improvement of the geometry education in middle school we propose the in this thesis

(1) Approve the educational value of Euclidean geometry that is an archetype of deductive thinking and a foundation of axiomatic methods.

(2) Promote student' effective learning using computers and GSP which are visualizing tools.

(3) Create a positive attitude toward solving problems through geometry education.

(4) Develop teaching materials and methods which give much value to geometry

(5) Develop continuous teaching contents for geometry education to be effective

Ⅰ.서론

인간은 오직 교육에 의해 지적으로 성장하며, 모든 교육활동 가운데 가장 기본이 되는 것은 수학이다. 일찍이 유클리드는 수학의 특징을 “진리만을 다루는 학문이다.”라고 하였다. 수학은 인간의 사고적 산물이며 인간의 사고형식은 그 시대의 사상과 사회상의 영향을 받는다. 수학의 발달은 기하학에서 시작된다.

인간이 수학을 시작하기 훨씬 전에 모든 자연 속에는 모양이 있었다. 모양은 물체를 떠나 존재할 수 없으나, 인간의 사고로 이상적인 형상만을 생각할 수 있다. 도형에 대한 인식은 간단한 선분이나 각에서 점차 추상적인 개념에 이르렀다.

최근 우리나라 중학교 기하학의 교육 방향은 도형 영역에서는 자연 현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간의 개념을 직관적으로 이해하고, 이를 그림으로 나타내거나 개량화 하는 활동이 기초적인 학습 활동이며, 후반에서는 연역적 추론을 통해 문제 해결의 경험을 얻는 것을 목적으로 한다.

평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 사실의 이해는 중요하며, 연역적 추론 방법은 다른 어떤 영역보다도 기하 영역에서 적절하며 효과적이다.

또한, 기하학적 개념은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접한 관계가 있다. 기하 문제는 그 해결 방법이 다양하기 때문에 학생들로 하여금 탐구력과 창의적인 사고력 배양을 위해 좋은 소재이다.

1. 연구의 필요성 및 목적

21세기의 지식, 기반 정보화 사회에서의 학교 교육의 중점은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 있다. 이에 대비하기 위한 수학과의 역할은, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학을 사용한 또는 수학을 통한 정보를 처리하고 교환하는 능력, 실생활이나 다른 교과 영역에서 수학적 지식을 사용하여 문제를 구성하고 해결하는 문제 해결력, 창의력, 수학적으로

사고하는 성향, 사고의 유연성, 자신감 등의 수학적 힘을 기르게 하는 것이다.

수학과 교육은 수학 교육 현대화 운동 이후 국내외적으로 많은 변화가 있어 왔다. 1980년대 이후에는 수학적 사고력 신장과 문제 해결력 배양에 중점을 두어 왔고, 1990년대에 들어서는 문제 해결력보다 광의의 개념인 수학적 힘의 신장을 강조하고 있다. 그러나 우리 수학 교육은 상급 학교 진학을 위한 준비에 급급하여 단편적 지식의 습득과 단순한 문제 풀이의 기능 숙달에 치중하여 온 것이 사실이다.

따라서 본 논문에서는 수학과 교육과정의 변천을 간단히 살펴보고, 현대 기하학이 어떻게 진행되어지고, 기하 교육은 왜 필요한가를 서술하며, 현재 중학교 3학년 교육과정에서 기하학이 어떻게 진행되어지는지를 살펴보고 마지막으로 기하교육이 어떠한 방향으로 개선되어야 하는지를 제안하고자 한다.

2. 연구대상

본 연구는 기하교육의 개선 방향을 주제로 하고 있으며 연구 대상으로는 기하교육의 필요성과 현대 기하교육의 동향을 살펴보고 우리나라 수학 교육의 시대적 변천과정을 살펴보았으며, 제 7차 중학교 3학년 8종 교과서의 기하학부분의 개정 내용이 교과서마다 어떠한 차이점이 있는지를 구체적으로 비교·분석 하고자 한다.

여기에 제시된 교과서 순서는 8종 교과서를 편의상 출판사의 가나다순으로 다음과 같이 A, B, C, D, E, F, G, H로 표기하기로 한다.

A : 교학사(박두일, 신동선, 강영환 저)
B : 교학사(박배훈, 정창현 저)
C : 두산동아(김연식, 김흥기 저)
D : 바른교육사(오병승 저)
E : 지학사(구광조, 황선욱 저)
F : 지학사(김호우, 박교식, 신준국, 정은실 저)
G : 천재교육(최용준, 이현구 저)

H : 한샘출판사(김응태, 박승안, 오연장, 신현용 저)

3. 연구 방법

본 연구는 주로 중학교 수학과 3학년 교과서의 기하학 부분을 중심으로 자료를 비교 분석하는 방법으로 이루어졌으며, 모든 분석 기준은 제 7차 3학년 수학 8종 교과서의 내용을 토대로 연구자 자신이 기준을 설정하고 그 기준에 따라 비교, 분석하였다.

연구의 효율성을 높이기 위해서는 오랜 기간의 연구와 연구 대상을 넓게 하고 초・중등학교 교과서들의 연계성과 타 교과와의 관련성도 연구대상으로 삼아야 하겠으나 여건상 중학교 3학년 기하학부분으로 국한하여 기하학 교육 전반에 걸친 분석에 한계가 있음을 밝혀둔다.

Ⅱ. 기하학 연구

1. 기하교육의 필요성

수학교육에서 기하는 매우 중요한 영역이다. 그것은 기하학이 독립된 학문으로서 가장 오랜 역사를 지니고 발전해 온 것으로도 그 중요성을 충분히 알 수 있다. 그렇다면 기하교육은 왜 필요한가?

첫째, 우리 실제 생활과의 연계성뿐만 아니라 다른 학문과도 연결된다는 것이다. 어떤 인간의 요구와 필요에 의해 기하연구가 시작되었고 물리학, 생활과학, 사회과학, 인문학, 생물학 등 많은 실제적 문제 해결하는 데 유용하기 때문에 수세기 동안 존재해 왔다는 사실을 인식해야 한다.

평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 소양을 갖추기 위한 교육이 될 것이다. 또, 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등과 같은 기하학적 변환에 관한 기본적인 사항을 인식하여 과학, 예술, 건축, 도안 등의 분야에서도 응용될 수 있다. 정말로, 기하학은 우리 삶의 많은 부분들에 적용되어지기 때문에 많은 문화 개발에 도움을 줄 수 있다. 오늘날의 교실현장이 점점 더 문화적으로 다양해짐에 따라 학생들에게 다양한 방법의 접근이 학습에 더욱 유리하고 문화적 다양성이 교육과정 속에 고려되어질 때 교실에서 학습이 더욱 향상된다는 연구들이었다. 기하학이 문화적 요소로서 인식되어질 때 학생들은 사회에서 기하의 필요성을 절감하게 될 것이다.

둘째, 기하학은 논리적 사고력 증진에 중요한 역할을 한다. 기하학은 연역적 추론의 방법을 가르치는 풍부한 기회를 제공해 준다. 사실, 서양의 수학교육에 있어서는 거의 2000년 이상을 연역적 방법을 가르치기 위한 적절한 수단으로써 유클리드 원본을 소중하게 여겨왔다. 오늘날에 있어서도 연역적 추론 과정이 소중하게 여겨지는데 이것은 첫째, 가정으로부터 어떤 결론이 가능한가(종합적 사고) 둘째, 결론이 성립하기 위해 어떤 조건이 충족되어야 하는가(해석적 사고) 셋째, 어떤 명제가 거짓임을 보이기 위한 예가 존재하는가(반례에 대한 반증)등으로 중등이상의 수

학과정에서 쓰이는 방법이다.

셋째, 공간적 추론(Spatial reasoning)을 증가시킬 수 있다. 기하학과 공간적 추론은 상호관련성이 높고 대개의 수학자들은 기하 교육과정의 일부에 공간적 추론을 포함시키고 있다. 예를 들어, Usisikin 〔16〕은 기하학의 과정을 다음과 같이 4단계로 설명하고 있다.

① 시각화(Visualization), 그림, 도형의 구성(construction)

② 물리적 세계(Physical world)의 공간적인 면 연구

③ 비 시각적 수학의 개념과 관계를 표현하는 수단으로서의 사용

④ 형식적 수학 체계로서의 표현

여기에서, 앞의 세 단계(①～③)가 모두 기하학에서 공간적 추론의 사용이 필요함을 보여주고 있다. 공간적 추론은 과학적 사고에 필수적이며, 문제해결과 학습에 정보를 표현하고 다다르도록 도와준다. Gardner 〔16,17〕는 공간적 능력은 인간의 지성적 능력 중의 필수라고 했고 다양한 영역을 통하여 유사점을 발견하는 능력은 공간적 지성의 표현으로부터 많은 예증을 유발한다고 했다. 예를 들면, 과학자들이 인간사회와 미생물이나 두뇌 기능 사이에 유사점을 그려보는 것이다. Harris 〔10〕에 의하면 가장 기술적이고 과학적인 영역-도안공(draftsman), 항공 디자이너, 건축가, 화학자, 기술자, 물리학자, 수학자-에서 90%이상이나 공간적 능력을 가진 사람이 필요하다고 주장했다. 수많은 수학자와 수학교육자들은 공간적 능력과 시각적 상상이 수학적 사고에 중요한 역할을 한다고 제안했다. 학생들로 하여금 창조적으로 사고하고, 그들 스스로 생각하도록 하는 일은 기계의 구조를 단순하게 익히는 것보다 훨씬 중요한 일이다. 기하문제는 해결방법이 다양하기 때문에 통상적인 대수적 알고리즘의 까다로움에 비해 더 유리한 학습요소가 될 수 있다.

넷째, 다른 수학의 분야, 즉 대수, 해석학, metric geometry, 삼각법 등과 깊은 관련을 가진다. 기하학적 개념은 대수학이나 해석학 등의 개념과 비교할 때 그 방법이나 내용에 있어서 결코 고립될 수 없는 것이다. 예를 들면 실수에 대한 성질이

기하학의 표현에 영향을 미치는 대수적이고 기하학적인 개념사이에 강한 연관성이 있는 것이다. 또, 평면도형의 넓이, 입체도형의 넓이와 부피 등의 계산, 직각삼각형과 예각삼각형에 대한 tangent, sine, cosine 비 등이 기하과정에 자연스럽게 통합될 수 있다. 수학의 다양한 분야 속에서 기하학이 상호작용 한다는 것은 학생들이 그것을 더 깊이 이해 할 수 있고 그들의 문제해결 능력을 향상시킬 수 있을 것이다.

2. 현대 기하교육의 경향

요즘 수학교육은 문제 해결력이나 사고력을 강조하는 80년대의 움직임의 연장선장에서 컴퓨터와 계산기 등의 교육공학이 대폭적으로 도입되는 방향으로 진행되고 있다. 수학의 수업은 모두 교사로부터의 문제 제시에 의하여 시작되고, 그 해결로써 끝나는 것이 일반적이다. 이와 같은 의미에서 수학의 수업은 모두 문제해결이라고 볼 수 있다. 학교에서 문제해결 지도는 가장 강조되어야 한다는 주장이 많다. Higgins 〔9〕는 문제해결이 수학 교육에서의 종합예술로 말할 수 있다고 했다. 그만큼 문제 해결 속에서 학생들의 개념의 이해를 측정할 수 있고 기능의 숙달을 잴 수 있기 때문이다. 따라서 문제해결 지도의 목표는 매우 중요하고 높은 수준의 목표가 된다. 그 목표는 다음 세 가지로 요약될 수 있다. 〔9〕 : ①문제를 이해하는 능력을 기르고②문제를 풀기 위하여 문제의 내 외부에 있는 정보를 분석하고 종합하여 해의 길을 얻어내는 조직력을 기르고 ③이러한 조직력을 다양한 비정형 문제(non-routine problems)에 적용하는 능력을 기른다. 오늘날 선진 여러 나라에서 문제해결의 신장을 수학교육의 중요한 하나의 목표로 보고 많은 연구를 해 오고 있다. 미국의 NCTM의 연구, 개발한 내용으로 정보화 사회에 대비하는 수학교육은 문제해결을 위하여 필요한 정보를 능동적으로 모집하고 이를 분석, 비교, 종합하여 유용하게 처리, 활용할 수 있는 능력 신장을 중시하고 있다. 그리하여, 기계적인 문제해결, 한 단계 문제연습, 형태가 정해진 문제연습 보다는 문제해결 계획수립과 전략을 개발하고 언어, 수치, 기하도형, 그래프, 기호 등으로 문제 상황을 표현하는 것을 강조하고 있다. 그러나, 우리나라에서는 문제해결 학습의 중요성을 강조하기

시작했을 뿐이고 이에 대한 연구가 많지 않은 실정이다.

2000년대 기하교육도 이러한 수학교육의 흐름에 맞추어 변화하고 있는데 최근에 기하 교육과정에 대하여 많은 의문점이 있다. 예를 들면 형식적인 증명은 어떻게 가르쳐야하는가?, 비형식적 활동은 어떤 위치에 있는가?, 좌표와 변형 기하학에 얼마나 많은 강조점을 두어야 하는가?, 기술은 어떤 영향을 미치는가? 등이다. 물론, 그러한 의문에 옳은 답이 무어라고 말할 수는 없다. 그것은 교육과정의 목적과 학생들의 능력과 흥미정도, 교수법에 따라 달라질 것이다.

1989년 NCTM에서 모든 학생들에게 요구되는 기하 교육과정의 기준으로 다음과 같이 발표하였다. 〔12〕

① 2, 3차원에서 기하학적 도형을 동일화, 묘사, 모델, 분류하기
② 공간적 감각 개발
③ 기하학적 도형을 변환하고, 결합하고, 세분하고, 교환하는 실행 개발
④ 합동과 닮음을 포함하여 기하학적 도형 사이에 연역적 성질과 관계를 이해, 적용, 추론하기
⑤ 물리적 세계(Physical world)를 묘사하는 수단으로서 기하학의 개발
⑥ 다양한 기하학적 체계를 조사・비교하여 공리적 체계의 이해를 개발해야 할 대학 진학(collage-bound) 학생들과 함께 종합적, 변형적, 좌표 기하학으로 접근 탐구
⑦ 기하학의 벡터 접근 연구

이것이 기하교육의 방향을 제시하게 되었고 그 결과가 교실현장에서 수행되어졌다. 많은 교사들은 기하 교육과정을 좌표와 변형이 종합적인 사고로 어떻게 상호 관련되는지 알아감에 따라 기하학적 사고와 기술을 충분히 인식할 수 있다.

예를 들어 대수와 기하가 서로 관련되어 더욱 더 풍부해 지는 것을 볼 수 있다. 문제해결 기술은 학생들이 더욱 더 많은 방법과 자료를 사용하여 향상될 수 있고, 앞에서의 통합된 접근은 학생들에게 다양한 문제해결의 전략을 제공하여 준다.

전통적 기하교육에서는 유클리드 기하의 영향으로, 기하를 하나의 조직된 연역체계로서 평면과 입체도형의 성질이 주로 다루어졌다. 그러나, 차츰 대상과 도형 그 자체를 비형식적으로 다루고 조금씩 연역적 활동으로 나아감이 바람직하다고 인식하게 된다. 전형적인 기하교육보다 더욱더 일반적이고 통합적이며 적용 쉽고 물리적으로 더 직관적이고 접근하기 쉬운 변환 기하학(Transformation Geometry)이 도입되었다. 이것은 가혹한 연역 체계와 다른 점이 있지만 능력 있는 학생들에게 단계적 접근에 따른 과정의 문제들을 제공할 것이다.

이와 같이 지금의 기하교육은 전통적인 것과 새롭고 창조적 개발이 교차하는 복잡한 상황이다. 유클리드 원본의 전통적 사고방식 때문에 여전히 두 가지의 기하교육과정을 발견한다.

· 중등 수준에서 연역적 Euclidean-type 과정
· 일부 협소한 유클리드면을 전하는 초등의 pre-formal 과정

전형적인 연역적 유클리드 기하과정에서는 수학 활동에서 가장 핵심적인 추측(conjectures)을 공식화하는 귀납적인 과정이 거의 무시되었다. 그러나, 최근의 기하학적 software 개발이 기하학의 귀납적인 형태의 학습 환경을 만들게 되었다. 예를 들면, Geometry Grapher(Houghton Mifflin), Geometric Supposer(Sunburst), GeoDraw(IBM)과 같은 것이 기하적 구성 프로그램이다. 이러한 프로그램은 학생들이 추측으로부터 기하 도형을 구성하고 분석할 수 있도록 하여 다른 특징을 추론하도록 도와준다. 이러한 과정은 학생들이 반례에 의해 추측을 반증하거나 증명하는데 유용한 정보를 찾을 수 있도록 한다. 컴퓨터 그래픽의 힘으로 기하 교육과정의 개발에 상당한 영향력을 미쳤다. 표현 방법이 수와 기호로 된 표와 공식에서 컴퓨터를 사용하여 시각적인 표현으로 변화되기에 이르렀다. 우리는 이해하고 분석하고 예측하는 시각적 사용 형태를 사용해야 한다. 그러나 전형적 연역 체계가 시각적 형태의 탐색을 결여시켰고 pre-formal 과정에서 이러한 탐색은 대개 무의미하다.

여러 해 동안 기하 교육과정에 무엇을 어떻게 가르쳐야 하는지에 대한 의견이

일치하지 않았고 이것은 기하학에 대한 무시 현상을 일으켰다.〔13〕 구체적인 이유를 살피면 ① 교사입장에서 빈약한 기하교육 ② 매우 좁은 학교 기하 교육과정 ③ 부족한 교수 자료 ④ 학교에서 기하학에 적은 시간할애 ⑤ 국내적, 국제적 조사에서 기하 내용에 대해 부족한 학생 실행 등으로 볼 수 있다. 결국 학교 기하가 내용, 접근, 교실활동, 기술, 학생의 수준 등의 광범위한 관점을 고려해야하고 일련의 완전한 체계를 세울 수 없다는 것이 최근 기하학에 대한 주장으로 나오고 있다.(NCTM 1987 ;Steen 1990).

Ⅲ. 중학교 3학년 수학과 8종 교과서의 기하학 관련 부분 비교 분석

1. 교과서의 내용 구성 비교

1) 교과서의 단원의 배열비교

각 교과서의 기하학 부분의 상황을 이해하려면 우선 각 교과의 세부적인 목차가 나타내는 단원의 배열 상태를 알아보는 것이 필요하므로 여기서는 단원의 배열을 비교하여 <표 1>과 같이 나타내었다.

<표 1> 각 교과서의 단원별 배열 비교

교과서 / 단원	A	B	C	D	E	F	G	H
Ⅵ	피타고라스의 정리	피타고라스의 정리	피타고라스의 정리	피타고라스의 정리	피타고라스의 정리	피타고라스의 정리	피타고라스의 정리	피타고라스의 정리
Ⅶ	원의성질	원의성질	원	원의성질	원의성질	원의성질	원의성질	원

<표 1>에서 알 수 있는 바와 같이 교과서 C, H는 피타고라스의 정리와 원으로 이루어져 있으며 다른 교과서는 피타고라스의 정리와 원의 성질을 단원명으로 하고 있으며 전체적인 내용은 유사하다.

2) 각 교과서의 단원의 구성 비교

각 교과서의 기하학 부분의 대단원, 중단원, 소단원 별로 비교하여 보면 <표 2>와 같다.

<표 2> 각 교과서의 단원별 구성 비교(1)

단원 / 교과서	피타고라스의 정리	원의 성질
A	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리 ②삼각형의 각과 변 사이의 관계 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에의 활용 ②입체도형에의 활용	1.원과 직선 ①원과 직선 ②두 원 2.원주각 ①원주각 ②원과 사각형 ③접선과 현이 이루는 각 ④원과 비례
B	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리와 그의 역 ②삼각형의 각과 변 사이의 관계 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에서 활용 ②입체도형에서의 활용	1.원과 직선 ①원의 현 ②원의 접선 ③두 원 2.원주각 ①원주각과 중심각 ②원과 사각형 ③접선과 현이 이루는 각 3.원과 비례 ①원과 비례 ②할선과 접선
C	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리 ②피타고라스의 정리의 역 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에의 활용 ②입체도형에의 활용	1.원과 직선 ①호와 현 ②원의 접선 ③두 원 2.원과 각 ①원주각과 중심각 ②원주각과 호 ③원과 사각형 ④접선과 현이 이루는 각 3.원과 비례 ①원과 비례 ②할선과 접선

<표2> 각 교과서의 단원별 구성 비교(2)

단원 / 교과서	피타고라스의 정리	원의 성질
D	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리와 그의 역 ②삼각형의 각과 변 사이의 관계 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에의 활용 ②입체도형에의 활용	1.원과 직선 ①원과 직선 ②두 원 2.원주각 ①원주각 ②원과 사각형 ③접선과 현이 이루는 각 ④원과 비례
E	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리 ②피타고라스의 정리의 역 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에서 활용 ②입체도형에서의 활용	1.원과 직선 ①원의 현 ②원의 접선 ③두 원의 위치관계 2.원주각 ①중심각과 중심각 ②원과 다각형 3.원과 비례 ①접선과 현 ②원과 비례
F	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리 ②피타고라스의 정리의 역 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에의 활용 ②입체도형에의 활용	1.원과 직선 ①호와 현 ②원의 접선 ③두 원 2.원과 각 ①원주각과 중심각 ②원주각과 호 ③원과 사각형 ④접선과 현이 이루는 각 3.원과 비례 ①원과 비례 ②할선과 접선

<표 2> 각 교과서의 단원별 구성 비교 (3)

단원 교과서	피타고라스의 정리	원의 성질
G	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리 ②피타고라스의 정리의 역 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에의 활용 ②입체도형에의 활용	1.원과 직선 ①호와 현 ②원의 접선 ③두 원 사이의 관계 2.원주각 ①원주각 ②원과 사각형 ③접선과 현이 이루는 각 3.원과 비례 ①원과 비례 ②할선과 접선
H	1.피타고라스의 정리 ①피타고라스의 정리 ②피타고라스의 정리의 역 2.피타고라스의 정리의 활용 ①평면도형에서 활용 ②입체도형에서의 활용	1.원과 직선 ①원의 현과 호 ②원의 접선 ③삼각형과 원 ④두 원 2.원주각 ①원주각 ②원과 사각형 ③접선과 현 3.원과 비례 ①원과 비례 ②할선과 접선

<표 2>에서와 같이 피타고라스의 정리에서는 B 교과서만 피타고라스의 정리와 그 역을 한 단원으로 하고 새롭게 삼각형의 각과 변 사이의 관계에 관한 단원이 있고 원의 성질 부분에서는 A 교과서만 원과 비례 부분이 원주각에 포함되어 있다.

3)각 교과서의 도입, 준비, 문제 제기, 보충 자료 비교

가. 단원 도입부 비교

수학 교육에 있어서 단원 예고는 학습 부진아에게는 학습의 누적적 결손을 극소화하는 기회를 주고 보충학습을 할 수 있도록 한다. 또한, 우수 학생에게는 새로운 단원의 정보를 미리 주어 스스로 예습 활동을 할 수 있게끔하므로써 학업 성취도 및 흥미와 태도에 상당한 효과가 있음을 알 수 있다. 따라서, 새 교육 과정에 따라 학습할 내용에 대하여 학생의 동기 유발을 어떻게 유도하며, 학습에 대한 기대감을 조성하여 학습효과를 높이기 위해서 각 교과서의 단원을 소개하는 도입부에 어떤 차이점이 있는지 알아보려고 그 특징을 비교하여 <표 4>에 나타내었다.

<표 3> 각 교과서의 도입부 비교

내용 / 교재	단 원 도 입 부
A	각 단원과 관련된 고대 수학자에 대하여 간단히 설명하고 실생활에 적용되어지는 예를 서술하였다.
B	각각의 정의를 설명하고 그 정의와 유사한 사항들의 예를 들고 있으며 본문에서 공부할 내용의 학습목표가 상세하게 기술되어 있다.
C	단원과 관련된 수학자가 설명되어지고 단원에서 학습해야할 내용이 간략히 설명되고 있다.
D	학생들에게 흥미를 유발할 수 있는 문제를 통하여 학습 내용을 소개한다.
E	단원의 주요 내용과 실생활과의 관련성을 설명하고 단원의 연계성을 표를 이용하여 정리가 잘 되어있다.
F	대화체를 통한 단원의 설명이 학생들로 하여금 흥미를 유발시킬 수 있으며 기존의 학습내용과 학습해야할 사항을 간략히 기술하였다.
G	각 정리들이 생겨나게 된 동기와 실제 생활에 사용될 수 있는 예를 들었으며 정확한 학습 목표 단락을 제시하였다.
H	각 정리들을 발견한 학파에 대하여 간단한 설명이 있고 실생활에 적용되어진 예를 들었으며 본문에서 다뤄야할 내용을 서술하였다.

<표 3>에서는 수학 교육의 필요성이나 의의가 인식되어질 수 있도록 하기 위해서 대부분의 교과서들은 단원 도입부에서 학생들의 흥미와 호기심을 이끌어낼 수

있도록 그 단원과 관련된 문제를 제시하거나, 수학사나 수학자들의 이야기를 한다거나, 그 단원에 대한 역사적 배경을 소개한 후 학습할 내용을 안내하였다. 다만 특이한 사항은 F 교과서만이 그 단원에서 학습해야할 내용을 대화체를 활용하여 학생들로 하여금 흥미를 유발하였다.

나. 준비 학습의 비교

<표 4>에서는 준비 학습이 각 교과서마다 어떠한 차이점이 있는지 알아보기 위해서 그 차이점을 비교해 보았다.

<표 4> 각 교과서의 단원별 준비학습 비교

내용 / 교재	단 원 도 입 부
A	문항수와 문제의 난이도가 적절하게 배치되어 있어서 각 단원에 대한 진단평가의 기능을 충분히 할 수 있다.
B	기본적인 문제에서부터 좀 더 생각할 수 있는 문제까지 학생들로 하여금 준비학습의 중요성을 인식하게 하는데 많은 도움이 될 것 같다.
C	두 문항 정도의 아주 간단한 단답형의 문제가 제시되고 있다.
D	각 단원에 대한 진단평가를 할 수 있도록 이미 학습한 내용으로 충분한 문제를 제시하고 있다.
E	준비학습 문제가 있으나 너무 단순한 단답식 문제로 이루어져 있어서 본문의 내용에 얼마나 많은 도움이 될지 의문이 든다.
F	준비학습부분을 중요시 생각하여 본분에서 학습할 내용의 기반이 될 수 있는 문제들을 각 단원별로 충분한 문제가 제시되었다.
G	문제는 간단하게 제시되어 있으나 각 단원에서 중요시되는 내용의 문제이므로 준비학습으로는 충분하다고 생각된다.
H	간단한 계산문제 정도의 문제가 제시되고 있으며 준비학습의 위치가 교과서의 아랫부분으로 치우쳐 있어서 그 중요성이 상실 될 우려가 있다.

<표 4>에서 보여지는 바와 같이 모든 교과서가 기본적인 선수학습에 관한 문제를 제시하고 있으나 C, D교과서는 문제가 지나치게 간단하여 본문의 내용에 얼마나 잘 부합이 될지 의문이다.

수학은 타 교과에 비해 선행 학습이 중요한 만큼 선행 학습이 성취되지 않고서는 후속 학습이 이루어지지 않으므로 단원의 도입 부분에서 준비된 학습을 통하여 심화 학습을 이끌어 내야만 학생들로 하여금 새로운 단원에 대한 두려움을 없애고 학습이 흥미와 학력의 향상에 많은 영향을 줄 수 있다.

다. 각 교과서의 단원별 문제 제기 방법 비교

새롭게 공부할 단원의 도입을 위해서 어떠한 방법을 사용하여 학생들로 하여금 동기 유발을 하였으며 각 교과서마다 본문의 내용에 쉽게 접근할 수 있도록 내용 소개를 어떻게 하고 있는지 알아보기 위해서 각 교과서의 특징들을 <표 6>에서 비교해 보았다.

<표 5> 각 교과서의 단원별 문제 제기 방법 비교

내용 / 교재	단 원 도 입 부
A	물음의 간단한 문제를 제시하여 그 풀이 과정 또는 그와 관련된 복잡하지 않은 문제의 설명 과정을 통해서 본문의 도입을 유도하고 있다.
B	이미 배운 내용을 떠올린 뒤 동기 유발을 위한 준비의 문제를 제시한 후 그것과 관련하여 본문의 내용에 대한 설명을 도입하고 있다.
C	학습 목표를 제시하고 본문의 내용에서 기본이 될 만한 문제를 제시한 다음 그 문제에 대한 풀이 과정 혼은 그것과 관련된 유사한 본문 내용을 유도한다.
D	실생활과 관련된 문제를 통하여 문제를 스스로 해결할 수 있도록 유도하였으며 그 설명 과정을 제시하여 도입하고 있다.
E	새로운 내용을 시작 할 때마다 그 내용의 기본이 될 만한 문제를 이용하여 새로운 정리를 이끌어 내는데 도움을 준다.
F	미리 학습한 내용을 바탕으로 본문의 내용에 적합한 예제 문제를 제시하여 본문과 관련된 내용에 대한 설명이 도입되고 있다.
G	물음에 관련된 혹은 그것의 풀이 과정의 설명을 통하여 본문의 도입을 시도하고 있다.
H	물음을 통하여 본문 내용을 도입하고 있다.

<표 5>에서와 같이 소단원의 학습 내용을 보다 쉽게 소개하기 위하여 각 교과서는 여러 형태로 문제를 제기하고 있다. 전반적으로 간단한 물음의 문제를 제사하

고, 그것의 풀이 과정을 통해서 구체적으로 설명할 본문의 기본 개념을 유도하여 일반적인 경우로 점차 심화 발전시켜 나가는 경우가 많았다.

라. 보충자료비교

수학이 추상적이 아닌 일상생활과 관련된 소재와 문제를 다루어 학습에 흥미와 의욕을 증진시키기 위하여 각 교과서마다 어떠한 보충 학습 자료를 사용하여 학습에 접근하고 있는지 그 차이점을 <표 6>에서 비교해 보았다.

<표 6> 각 교과서의 단원별 보충자료 비교

내용 / 교재	보 충 자 료
A	수학 휴게실 · 피타고라스의 정리-BASIC과 피타고라스의 수
B	읽을거리 ·피타고라스의 정리-왜 이렇게 되었는가? · 원의 성질-전깃줄의 길이
C	연구학습 · 피타고라스의 정리-피타고라스의 수 · 원의 성질 -중심이 두 개 있는 원, 증명방법(귀류법)
D	제시되어있지 않음
E	제시되어있지 않음
F	문제를 잘 풀려면 어떻게 해야 하는가?
G	생각하는 수학 · 피타고라스의 정리-피타고라스의 정리의 증명
H	더 넓은 수학의 세계로 · 피타고라스의 정리-피타고라스 정리의 증명 · 원의 성질- 점의 이동과 원주각

<표 6>에서와 같이 대부분의 교과서가 각 단원과 관련하여 궁금증을 풀어줄 수 있는 소재를 가지고 단락을 따로 설정하여 학생들에게 흥미를 유도하고 있으나 D 교과서는 보충자료가 전혀 제시되어 있지 않았으며 B, C, H 교과서는 각 단원마다

보충자료가 있었다. 전체적으로 보면 각 교과서마다 저자들의 견해에 따라 다소 차이는 있지만 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있는 공통된 생각을 가지고 다양한 형태의 자료를 제시하였다.

4) 각 교과서의 인물 비교

가. 각 교과서의 단원별 인물 비교

교과서의 각 단원의 서두에서 본문의 내용을 학습하기 이전에 동기유발 및 단원에 대한 흥미와 호기심을 유발시키기 위하여 간단하게 단원과 관련된 고대 수학자들이 소개되고 있다. 그 내용을 <표 7>로 나타내었다.

<표 7> 각 교과서의 단원별 인물 비교

교재 / 내용	A	B	C	D	E	F	G	H
피타고라스의 정리	피타고라스		피타고라스	피타고라스	피타고라스		피타고라스	피타고라스
원	탈레스	아르키메데우스	탈레스			에라토스테네스		유클리드

<표 7>는 각 교과서의 단원에 나타나 있는 수학자들을 소개하는 내용이며 교과서마다 각 단원의 내용에 알맞게 수학자들이 소개되어 있으나 그 수학자들의 약력에 대해서는 다소 차이가 있었다.

나. 인물소개

① 피타고라스(Pythagoras ; 572 ~ 492 B.C)

그리스의 수학자인 그는 이집트와 바빌로니아에서 배우고, 그리스에 돌아와서 학교를 개설했다. 수에 관해서는 홀수, 짝수, 素數, 완전수, 3각수, 4각수, 피타고라스의 수 등을 연구하고, 도형에 관해서는 유명한 피타고라스의 정리 외에 정5각형 그리기, 황금분할 방법, 타일 붙이기 문제 정다면체 등을 연구했다.

② 탈레스(Thales ; 640? ~ 546? B.C)

그리스의 최초의 철학자이며 7현인의 제 1인자이다. 그는 '원은 지름에 의해서 이등분 된다', '2등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다', '두 직선이 교차할 때 그 맞꼭지각의 크기는 같다'등의 정리는 그가 발견한 것이다.

③ 아르키메데스(Archimedes ; 287 ~ 212 B.C)

그리스의 수학자인 그는 Syracusa에서 출생하였으며, 알렉산드리아를 방문하여 유클리드의 후계자들과 공동 연구하였다. 또한 원주율을 구하여 원의 면적, 구의 표면적, 구의 체적을 구함수의 무한수에 관해 연구하였다. 부력에 관한 아르키메데스의 원리를 발견하였고, 지렛대의 원리 및 수많은 무기를 발명하여 전쟁에 이용하였다.

④ 에라토스테네스(Eratosthenes ; 275 ~ 194 B.C)

그리스의 수학자인 동시에 시인이었으며, 만년에 눈이 멀었으나 굉장히 많은 저서가 있다. 素數를 찾아내기 위한 에라토스테네스의 체는 유명하다.

⑤ 유클리드(Euclid ; 300년경 BC)

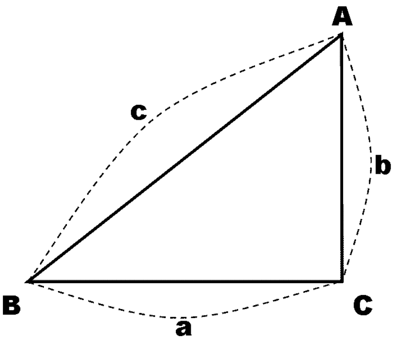
유클리드는 기원전 300년경의 그리스의 수학자로 그리스 식의 이름은 에우클레이데스이다. 유클리드는 '원본'의 저자이다. 이 책은 모두 13권으로 되어있다. 이것은 수학뿐만 아니라 철학과 논리학의 기본이기도하다.

6) 각 교과서의 정의 비교

수학에서 용어는 약속이므로 각 분야에서 요구하는 사항들을 보다 논리적이고 통일된 사고가 요구되며 용어의 정확성과 개념의 올바른 인식이 중요한 학문이다. 하나의 정의에 대하여 나타내고자하는 뜻은 같아야만 한다. 여기서는 각 교과서마다 하나의 정의에 대하여 어떻게 표현되고 있는지 알아보자.

① 피타고라스의 정리

A : 직각삼각형의 직각을 끼고 있는 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라 하면 $a^2+b^2=c^2$이다.



[그림 1] 직각 삼각형

B : 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 a, b 라고 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$이다.

C : 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 a, b 라고 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

D : 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라고 하고, 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

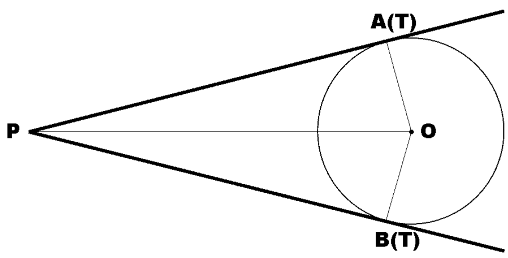
E : 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라 하면 $a^2+b^2=c^2$ 이 성립한다.

F : 피타고라스의 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고, 빗변의 길이를 c라 하면 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

G : 직각삼각형에서 직각을 끼고 잇는 두 변의 길이를 각각 a, b라하고 빗변의 길이를 c라 할 때, $a^2+b^2=c^2$ 이다.

H : $\angle C=90°$ 인 직각삼각형 ABC에서, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ 일 때 $a^2+b^2=c^2$ 이다

② 접선의 길이



[그림 2] 접선의 길이

A : 원 O밖의 한 점에서 이 원에 2개의 접선을 그을 수 있다. 이 때, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라고 한다.

B : 원 O 밖에 있는 한 점 P에서 이 원에 그을 수 있는 접선은

두 개 있다. 이 때, 두 접점을 각각 A, B라 하면, $\overline{PA}, \overline{PB}$의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라고 한다.

C : 원 O의 외부에 있는 한 점 P에서 이 원에 접선을 그어 그 접점을 T, T′라고 하면 $\overline{PT}, \overline{PT'}$의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라고 한다.

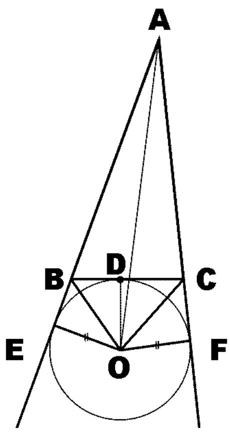
D : 원 O의 외부의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

F : 원 O의 외부에 있는 한 점 P에서 이 원에 접선을 그을 수 있는 접선은 두 개 있다. 이 접점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{PA}, \overline{PB}$의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라 한다.

G : 원 O 의 외부에 있는 한 점 P에서 이 원에 그을 수 있는 접선은 2개이다. 그 접점을 각각 A, B라고 할 때, $\overline{PA}, \overline{PB}$의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라 한다.

H : $\overline{PT}, \overline{PT'}$의 길이를 점 P에서의 원 O에 그은 접선의 길이라고 한다.

③방심



[그림 3] 방심

A : 삼각형의 한 내각의 이등분선과 다른 두 각의 외각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

B : 삼각형에서 한 내각과 다른 두 각의 외각의 이등분선이 만나는 점

C : 삼각형의 한 내각의 이등분선과 다른 두 각의 외각의 이등분선이 만나는 점

D : 삼각형의 한 내각의 이등분선과 다른 두 외각의 이등분선의 교점을 삼각형의 방심이라고 한다.

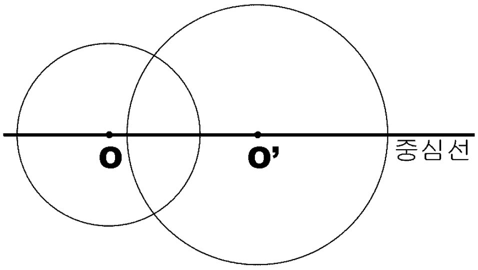
E : 삼각형에서 한 내각과 나머지 두 외각의 이등분선의 교점

F : 삼각형의 한 내각의 이등분선과 다른 두 외각의 이등분선은 한 점에서 만난다. 이점을 그 삼각형의 방심이라고 한다.

G : 삼각형의 한 내각의 이등분선과 다른 두 각의 외각의 이등분선이 만나는 점을 그 삼각형의 방심이라고 한다.

H : 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 $\angle B$ 및 $\angle C$의 외각의 이등분선은 한 점 O에서 만난다. 이 때, 점 O를 삼각형 ABC의 방심이라고 한다.

④ 중심선



[그림 4] 중심선

A : 두 원의 중심 O, O ′ 을 지나는 직선

B : 두 원의 중심 O, O ′ 을 지나는 직선

C : 두 원의 중심 O, O ′ 을 지나는 직선

D : 두 원의 중심 O, O ′ 을 지나는 직선

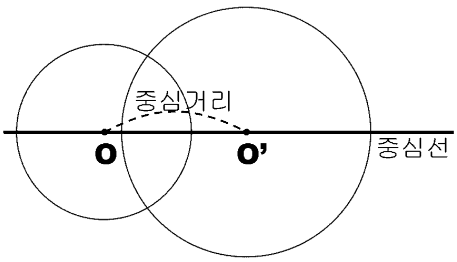
E : 두 원의 중심을 연결하는 직선

F : 두 원의 중심 O, O ′ 을 지나는 직선

G : 아래의 그림과 같이 두 원의 중심 O, O ′ 를 지나는 직선을 두 원O, O ′ 의 중심선이라고 한다.

H : 원 O와 O′ 의 두 중심을 지나는 직선 OO ′ 을 이 두 원의 중심선이라 한다.

⑤중심거리



[그림 5] 중심거리

A : 두 원의 중심을 지나는 직선 O, O' 의 길이

B : 두 원의 중심 O, O'을 지나는 $\overline{OO'}$의 길이

C : 두 원 O, O'을 잇는 $\overline{OO'}$의 길이

D : 두 원 O, O'을 잇는 $\overline{OO'}$의 길이

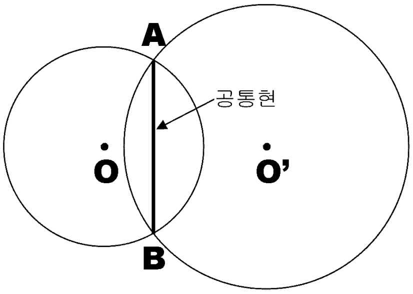
E : 두 원의 중심사이의 거리

F : 두 원의 중심을 잇는 $\overline{OO'}$의 길이

G : 두 원의 O, O' 의 중심을 잇는 $\overline{OO'}$의 길이

H : 원 O와 O'의 두 중심을 지나는 직선 O, O' 을 이 두 원의 중심선이라고 하고 $\overline{OO'}$의 길이를 이 두 원의 중심거리라고 한다.

⑥공통현



[그림 6] 공통현

A : 두 원 O, O ′이 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{AB}$

B : 두 원 O, O ′이 두 점 A, B에서 만날 때, 두 교점을 이은 $\overline{AB}$

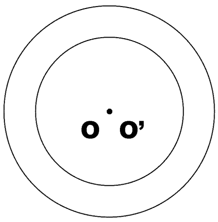
C : 두 원이 두 점 A, B에서 만날 때, 두 교점을 이은 $\overline{AB}$를 두 원의 공통현이라고 한다.

D : 두 원이 두 점에서 만날 때, 그 교점을 연결한 선분을 공통현이라고 한다.

E : 두 원이 두 점에서 만날 때, 그 교점을 연결한 선분

F : 두 원의 교점을 연결하는 선분을 이 두 원의 공통현이라고 한다.

⑦동심원



[그림 7] 동심원

A : 두 원의 중심 O, O ′ 이 일치할 때

B : 두 원 O, O ′ 의 중심이 일치할 때

C : 두 원 O, O ′ 의 중심이 일치할 때

D : 두 원 O, O ′ 의 중심이 일치할 때

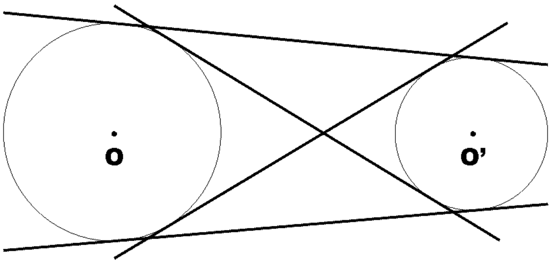
E : 두 원 O, O ′ 이 서로 일치할 때

F : 중심이 같은 두 원

G : 두 원의 중심이 일치할 때, 이 두 원을 동심원이라 한다.

H : 두 원의 중심이 일치할 때, 즉 두 원의 중심거리가 0일 때, 이 두 원을 동심원이라고 한다.

⑧공통접선



[그림 8] 공통접선

A : 두 원이 동시에 접하는 직선

B : 두 원 O, O '에 동시에 접하는 직선

C : 두 원에 동시에 접하는 직선

D : 두 원 O, O '에 동시에 접하는 접선

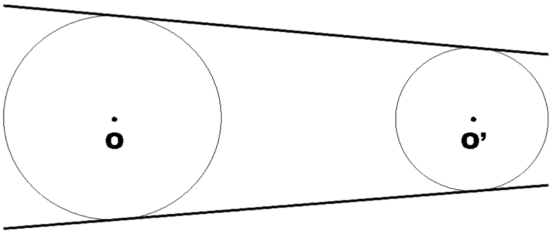
E : 두 원에 공통으로 접하는 직선

F : 두 원 O, O '에 동시에 접하는 직선

G : 두 원에 동시에 접하는 직선

H : 두 원에 동시에 접하는 접선을 그을 수 있을 때, 이 접선을 이 두 원의 공통 접선이라고 한다.

⑨공통외접선



[그림 9] 공통 외접선

A : 두 원이 공통 접선에 대하여 같은 쪽에 있을 때

B : 두 원 O, O '의 공통접선에 대하여 같은 쪽에 있을 때

C : 두 원이 공통접선의 같은 쪽에 있을 때

D : 두 원이 공통접선에 대하여 같은 쪽에 있을 때

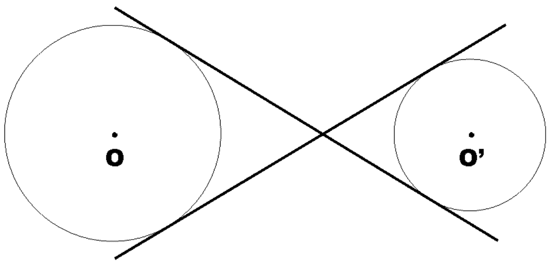
E : 두 원이 공통접선을 기준으로 같은 쪽에 있을 때

F : 두 원이 공통접선에 대하여 같은 쪽에 있을 때

G : 두 원이 접선에 대하여 같은 쪽에 있으면 그 접선을 두 원의 외접선이라고 한다.

H : 두 원이 공통접선에 대하여 같은 쪽에 있는 경우에, 이 두 접선을 두 원의 외접선이라고 한다.

⑩공통내접선



[그림 10] 공통 내접선

A : 두 원 O, O ′의 공통접선에 대하여 서로 반대쪽에 있을 때

B : 두 원 O, O ′의 공통접선에 대하여 두 원이 서로 반대쪽에 있을 때

C : 두 원 O, O ′의 공통접선에 서로 반대쪽에 있을 때

D : 두 원이 접선에 대하여 서로 반대쪽에 있으면 그 접선을 두 원의 공통 내접선 이라고 한다.

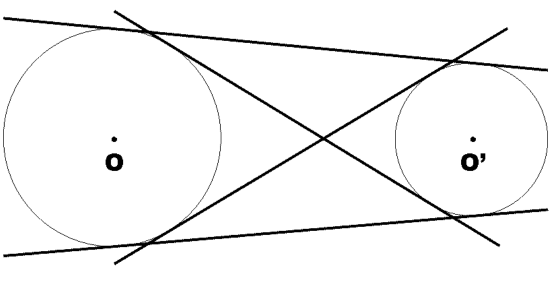
E : 두 원이 공통접선에 대하여 서로 반대쪽에 있을 때

F : 두 원이 공통접선에 대하여 서로 반대쪽에 있을 때

G : 두 원이 접선에 대하여 서로 반대쪽에 있으면 그 접선을 두 원의 공통 내접선 이라고 한다.

H : 두 원의 공통접선에 대하여 서로 반대쪽에 있는 경우에, 이 접선을 두 원의 공통 내접선 이라고 한다.

⑪공통접선의 길이



[그림 11] 공통 접선의 길이

A : 하나의 공통접선에 두 개의 접점이 있을 때, 이 두 점 사이의 거리

B : 두 원 O, O ′의 한 공통접선의 두접점 사이의 거리

C : 공통접선에 접하는 접점 사이의 거리

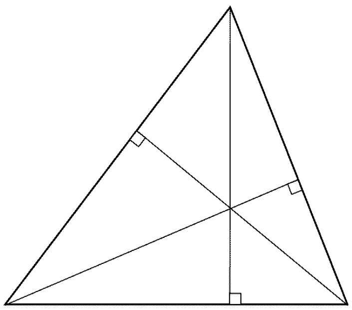
D : 두 원 O, O ′의 한 공통접선의 두 접점 사이의 거리

E : 공통접선의 접점이 두 개일 때 그 두 점을 끝점으로 하는 선분의 길이

F : 공통접선에 접하는 두 원의 접점 사이의 거리

G : 한 공통접선에 접점이 2개 있으면 이 두 접점 사이의 거리를 두 원의 공통 접선의 길이라고 한다.

⑫수심



[그림 12] 수심

A : 삼각현의 세 꼭지점에서 대변에 내린 세 수선은 한 점에서 만날 때의 점

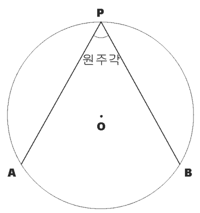
E : 각 꼭지점에서 대변에 내린 수선의 교점

F : 삼각형의 한 꼭지점에서 그 대변에 내린 수선은 한 점에서 만난다. 이 점을 그 삼각형의 수심이라고 한다.

G : 삼각형에서 각 꼭지점에서 그 대변에 내린 수선의 교점을 그 삼각형의 수심이라고 한다.

H : 삼각형의 각 꼭지점에서 그 대변에 내린 세 수선은 한 점에서 만난다. 이때 그 점을 △ABC의 수심이라고 한다.

⑬원주각



[그림 13] 원주각

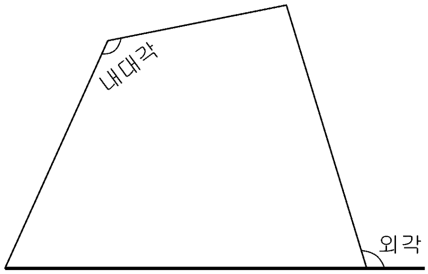
A : 원 O에서 ∠APB를 호AB에 대한 원주각이라 한다.

⑭오심

A : 한 삼각형에 대하여 내심, 외심, 방심, 수심, 무게중심이 정해진다. 이것을 삼각형의 오심이라고 한다.

⑮내대각

A : 사각형에서 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각의 내대각이라고 한다.



[그림 14] 내대각

B : 사각형의 한 외각에서 그와 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각에 대한 내대각이라고 한다.

C : 사각형에서 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각의 내대각이라고 한다.

D : 사각형의 한 외각에서 그와 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각의 내대각이라고 한다.

E : 사각형에서 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각에 대한 내대각이라고 한다.

F : 사각형에서 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각의 내대각이라고 한다.

G : 사각형에서 한 외각에 이웃한 내각에 대한 대각을 그 외각에 대한 내대각이라고 한다.

H : 사각형에서 한 외각에 이웃하는 내각과 마주보는 내각을 이 외각의 내대각이라고 한다.

위의 내용과 같이 8종 교과서의 정의들이 각 교과서마다 내용은 같을지라도 표현 방식이 서로 달라서 학생들에게 타 교과서를 접했을 시에 혼란을 일으킬 수 있는 소지가 될 수 있으므로 일괄적인 사고형성을 위해 기호의 통일성을 기해야 할 것이다. 또한, 교과서에서 단어는 언급하고 있으나 정의에 대하여는 표현되어 있는 교과서도 있고 그렇지 못한 교과서가 있어서 학생들이 타 교과서를 공부할 때에 많은 어려움이 발생하리라 생각되며, 정의가 설명되어 있지 않은 내용은 그 단어에 대하여 이해가 부족하여 내용의 이해가 어려우리라 생각된다.

Ⅳ. 기하교육의 개선방안

유클리드 기하는 그리스 이래 수학교육의 근간을 이루어 왔으며, 역사적으로 수학교육의 개선 노력의 방향도 역시 기하교육을 중심으로 해서 이루어져 왔다고 해도 과언이 아니다. Perry〔 〕를 선구자로 하여 전개된 20세기 초의 수학교육 개혁 운동의 이념 역시 유클리드 기하 교육의 개선을 주된 내용으로 하고 있으며, 1950년대 이후의 현대화 운동이 代數學적인 구조적 접근을 근간으로 하고 있기는 하지만, “Euclid must go″란 슬로건으로 유명한 Dieudonne의 ‘학교 수학의 새로운 사고’와 그에 대한 Thom의 반론, 그리고 그 이후의 수학교육의 흐름은 유클리드 기하교육의 중요성을 새롭게 인식하게 해 준 계기가 되었다.

오늘날의 기하교육은, 삼각형의 합동 조건 등을 바탕으로 한 전통적인 유클리드 기하학적 접근과 Klein이래 강조되어 온 변환 기하학적 접근, 현대적인 선형대수학적인 접근 등이 복잡하게 얽혀 그 개선 방향이 매우 혼미스러운 상황에 놓여있다. 이러한 상황에서 기하교육의 개선방안 몇 가지를 제안 하고자 한다.

첫째, 오랫동안 기하교육을 지배했던 유클리드 기하를 문제점을 현대수학에 끌어들이는 작업이 있어야 한다는 것이다. 수학교육에서 보다 본질적으로 선행되어야 할 일은 그 내용을 현대 수학적인 방법으로 구성하고 진술해야 한다는 것이다. 유클리드 기하를 가르치는 것이 시간의 낭비라면 그것은 유클리드 기하 자체에 문제가 있는 것이 아니라 지도하는 방법 스타일에 문제가 있는 것이다. 종래의 유클리드 기하에서 강조한 것은 다음과 같다.

· 선분이나 넓이는 양으로만 취급하고 문자로 나타내든지 식으로 나타내지 않는 경향이 있다.

· 이동이나 확대, 축소와 같은 동적인 것보다 삼각형의 합동, 닮음이라는 정적인 것에 치중한 면이 있었다.

· 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용하여 작도하였다.

· 대부분 어려운 증명문제로 가득 차있었다.

이와 같은 유클리드 기하에 대한 반성의 소리가 높아져, 점차 개선되어지게 되었다. 도형 교육의 목표는 도형의 변환과 이동에 강조를 두고 공간의 직관에 중점을 두어야 할 것이다. 공간도형의 직관이란 그냥 관찰만 하는 것이 아니라 그 도형을 만져보고 그려보고 만들어보고 쪼개보고 움직여 보아 여러 가지 면에서 실험적 접근 방법을 택해야 할 것이다. 또, 많은 자료를 써서 여러 가지 방법으로 작도하도록 해야 하며 작도된 도형의 성질을 파악하게 하여 가장 좋은 작도법을 알아내도록 해야 할 것이다. 여기서의 기하교육은 손을 움직여서 작업을 하는 하나의 행동교육이 될 것이다. 인간이 환경을 극복하고 개척하고 미화하려면 이와 같은 근로에 의한 교육, 조작을 통한 사색의 교육이 필요할 것이다. 그리고 유클리드기하가 수학적 사고 방법의 전형이므로 이를 통하여 기하학적 방법 및 기하학적 성질을 귀납적 추론으로부터 연역적 추론으로 점진적으로 이해하게 하여야 할 것이다. 그러기 위하여 특정한 현상의 기하학적 성질을 조사할 수 있는 기회를 주고 지식을 일반화하도록 유도하며 이 일반화된 것을 실제 일상생활에 적용할 수 있도록 해야 한다. 이러한 경험은 기하학적모형을 만드는 능력을 길러 줄 것이다.

둘째, 컴퓨터와 소프트웨어(GPS, LOGO, CAI등)를 이용하여 시각화를 향상시켜 학습의 효과를 증진시켜야 할 것이다. 시각화란 단순히 “그림을 통해 수학을 인식하는 것”이 아닌 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위하여 적절한 도형을 그릴 수 있고, 이를 문제해결에 효과적으로 이용하는 과정인 것이다.

현재의 수학교육에서 시각화가 다소 소홀히 다루어지는데 그 이유는 시각화에 대한 잘못된 인식과 수학자와 교사들의 무관심, 시각화에 대한 적절한 방법론의 부족에 있다고 볼 수 있다. 이를 해결하기 위해서는 시각화에 대한 올바른 인식과 시각화를 효과적으로 학습하는 방법과 이를 효과적으로 가르치는 방법을 알아야 한다. 시각화를 위한 중요한 전제조건은 어떻게 시각적이고 기호적인 학습을 서로서로 보충하여 완전하게 할 수 있느냐는 것이다. 교사는 시각적으로 표현하는 것이 가장 좋은 내용과 기호적으로 표현하는 것이 가장 좋은 내용이 무엇인지를 알고 학생들이 시각적인 방법과 분석적인 방법 모두를 이해하고 응용할 수 있도록 도와주어야 한다.

시각화를 수학교육에 도입할 때, 고려해야 할 것은 시각화의 도구이다. 시각화의 도구로 여러 가지가 있으나 컴퓨터, 특히 GSP 프로그램을 들 수 있다. 컴퓨터는 학생들의 다양한 능력수준과 학습경험 및 학습태도에 따라 적합한 수업계열을 제공해줌으로써 학생들의 흥미 유발을 촉진시켜 시각화를 도울 수 있다. 또, 컴퓨터는 시각적 이미지의 목록을 만드는 도구가 될 수 있는 데 학생들로 하여금 컴퓨터를 통해 수학적인 변환을 인식하고 수학의 패턴을 이해할 수 있게 해야 한다. 컴퓨터 프로그램인 GSP(The geometer's Sketchpad)는 움직이는 평면기하(Dynamic Geomery), 실험을 통한 기하 수업을 위한 프로그램으로서 GSP의 특징을 살펴보면

· GSP는 기본적인 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽고 명확히 구현 할 수 있으며, 그림은 빠르고 엄밀하게 도형들의 본질적인 관련성을 쉽고 명백하게 나타낼 수 있다. 특히 GSP는 각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선 그리기, 수직선 그리기 등 작도가 되는 기본적인 기능을 한번에 수행 할 수 있다. 또한, 평행이동, 대칭이동, 회전이동의 변환도 한번에 그릴 수 있다.

· 그림 그리는 과정을 기록 할 수도 있고, 그 기록을 따라 다시 재생할 수도 있으며 애니메이션(동화상)도 쉽게 구현 할 수 있다. 따라서 이 동적 기하프로그램을 통하여 도형의 자취나 궤적을 쉽게 알아볼 수 있고, 스크립트를 이용하여 프랙탈을 그릴 수 있다.

· 도형의 여러 요소의 색상처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식 등의 표현이 쉽게 구현되며, 레벨링을 하거나 주석을 다는 여러 표현도 손쉽게 처리 할 수 있다.

· 그래프 메뉴의 PLOT으로 두 변량의 관계를 그래프로 나타낼 수 있다. 즉 모든 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

이러한 GSP의 특징을 교육적인 효과를 살펴보면

· 동적인 성질을 가진 평면기하를 정적인 상태의 인쇄 매체 또는 칠판을 사용하여 지도할 때보다 더욱 확실하게 이해시킬 수 있다.

· 새로운 멀티미디어 매체로서 GSP는 일반적인 그림 프로그램과는 달리 자(직선 또는 선분)와 컴퍼스(원)만을 사용하는 작도(construction)와 측정(measurement)

을 통하여 학생들의 흥미를 돋울 수 있고, 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 학습 욕구를 유발할 뿐만 아니라 학습 내용을 확인할 수 있어서 더욱 효과적이다.

· 주어진 평면도형에서 어떤 성질이 성립할 것인가? 평면도형의 성질을 발견적으로 찾아낼 수 있도록 학생들을 유도하면, GSP를 마치 실험도구처럼 사용하여 실제로 작도하고, 측정하여 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와 줄 수 있다.

· 평면도형의 성질을 직관적으로 충분히 이해한 다음 연역적으로 증명하는 것이 필요한데 이 때에 GSP는 정확한 그림을 제공하여 증명이나 문제 풀이에 필요한 정보를 확실하게 얻을 수 있다.

· Animation과 Drag를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있다. 특히 Animation으로 만들어지는 Trace는 도형의 자취를 생생하게 보여 준다. 머리 속으로 '아마 그렇게 될꺼야'라는 것보다 더욱 현실감을 갖게 할 수 있고 Locus로 자취전체를 한번에 제공하기도 한다. 따라서 많은 도형을 그 정의로 의하여 구해 봄으로서 확실한 개념을 얻고 그로부터 파생되는 도형의 여러 성질을 자연스럽게 끌어내어 정의할 수 있다. 특히, Animation과 Trace기능을 이용하여 여러 가지 재미있는 도형을 만들 수 있어서 학생들의 자유로운 상상력을 자극하여 Design에 대한 욕구도 충족시킬 수 있다.

· Scrip의 Loop 기능으로 이미 만들어 놓은 작업을 되풀이할 수 있어 Fractal 그림을 만들 수도 있다.

· GSP에서 제공되는 직교좌표계와 극좌표계를 써서 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하적 접근이 가능하다. 〔16,18〕

셋째, 기하교육에서 학생들에게 문제해결에 대한 보다 긍정적 태도를 갖도록 도와주어야 할 것이다. 수학에서의 모든 수업의 근본적인 목표는 학생들이 문제를 해결하도록 하는 것이다. 기하수업은 학생들에게 재미있고 도전적인 문제를 풀 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 그러나 많은 학생들은 수학적 문제 풀기를 좋아하지 않는다. 그것은 학생들이 문제 해결에 별로 성공적인 경험을 가지지 못했기 때문일 것이다. 기하 수업은 수나 상징적인 것보다는 다소 도형의 그림을 포함하는 시각적

인 표현으로 주어진다. 또한 산술적인 것이나 대수에서 하나의 옳은 답이 요구되어지는 반면에 학생들은 증명이나 풀이 등을 통해 올바른 추론을 할 수 있고 교과서에 주어지고 이미 받아들여진 정리와 증명보다는 자신의 방법으로 문제 해결하는데 흥미를 가질 것이다. 이러한 문제해결의 부분적인 성공이 학생과 교사의 고무된 노력에 의해, 완전한 성공으로 개발되어질 수 있고 학생들은 문제해결이 즐거운 활동이란 것을 발견하게 될 것이다.

기하수업의 목표 중 하나가 학생들이 기하문제를 해결하는 데 유용한 전략에 친근해지도록 하는 것이다. 다음에 제시된 전략은 풀이 방법이 명확하지 않을 때 문제 해결의 하나의 접근을 제공해 주고 한 전략이 적용되지 않으면 다른 전략을 시도해야 할 것이다.

· 하나의 형태를 살펴보라.
· 특별한 예에서 일반화하라.
· 다이어그램을 그려라.
· 기본적인 형식을 적용하라.
· 단순하고 관련된 문제를 사용하라.
· 시도, 오류, 소거의 과정을 사용하라.
· 거꾸로 추론하라.
· 연역적 논증을 하라.
· 해답이 없을 가능성을 인식하라.
· 반례를 세워라. 〔14,15〕

예1】 원과 같은 모양의 섬을 찾아라. 그 섬에는 3개의 길만이 있는데, 그것은 직각삼각형을 이룬다. 직각의 정점은 원의 중심에 있다. 긴 변이 4mile 이고 원주의 북쪽으로 뻗어있고 짧은 변은 3mile 이고 동쪽으로 뻗어있다. 원의 중심에서 동쪽으로 1.5mile 가서 보물을 찾아라. 그러면 한 길을 통과할 때까지 북쪽으로 가고 원주의 서쪽으로 나아가라. 거기에 보물이 있다.

-전략 : 다이어그램을 그려라-

<계획 세우기>

방향을 이해하기 쉽게 다이어그램을 그려라. 만약, 다이어그램에 보물을 표시할 수 있으면 섬의 보물을 찾을 수 있을 것이다.

<계획대로 시행하기>

다음과 같은 단계로 다이어그램을 그려라.

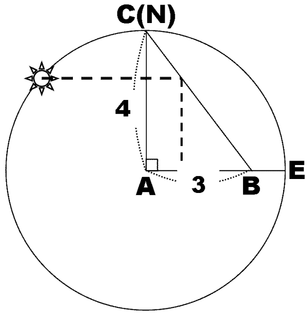
① 각 mile을 1cm단위로 사용하라.

② 4cm 반지름의 원을 그려라.

③ 북쪽으로 4cm인 한 변과 동쪽으로 3cm인 한 변을 지닌 직각삼각형을 그려라.

④ 직각을 ∠A, 긴 변을 AC ,짧은 변을 AB로 표시한다.

⑤ 중심에서 변 AB를 따라 1.5cm되는 점에서 변 BC를 통과할 때까지 변 AC와 평행한 선분을 그려라.



［그림 15］. 보물 찾기

⑥ 변 BC위의 점으로부터 원을 통과할 때까지 변 AB와 평행한 선분을 그려라. 거기에 보물이 있다.

넷째, 수학에 있어서 기하영역의 가치를 학생들에게 부여하는 교재 개발 및 다양한 수업 활동 등이 필요하다고 본다. 수학교육은 현대사회의 발전에 수학의 역할의 중요성을 포함한 정보와 경험이 다루어져야 한다. 학생들은 실제생활 적용 문제에 대한 학습뿐 아니라 수학의 역사에 대하여 배울 필요가 있다. 그래서 기하의 공부는 정의, 공준, 정리 이상의 것을 포함해야 하고 학생들이 실제의 삶 속에서 기하의 가치를 느끼고 이해하도록 교재 내용에 그러한 경험과 활동이 포함되어야 할 것이다. 기하의 역사적 사실에 대한 이해 없이 기하학을 잘 인식하기는 어려울 것이다. 학생들은 자유로운 독서숙제와 간단한 역사적 사실 쓰기를 통하여 이러한 역사를 탐구할 수 있다. 이러한 과제의 일반적인 목표로 다음을 제시할 수 있다. :

(1) 유클리드 시대 이전의 기하의 경험적인 원리를 이해하도록 하는 것 (2) 유클리드 시대의 기하의 체계적 구성자인 유클리드에 대하여 알아보는 것 (3) 분석적 기하의 의미와 데카르트에 대하여 연구하는 것 (4) Bolyai와 Lobachevsky의 비 유클리드 기하에 관하여 연구하는 것 또, 학생들에게 기하가 인간의 요구에 부응하기 위하여 연구가 시작되었고 과학의 많은 실제적 문제를 해결하는데 유익하다는 사실을 이미 앞서 언급하였다. 다른 분야에서 기하의 이용에 대하여 다른 연구의 영역에 적용됨을 보여주는 내용을 교재에 포함시켜야 할 것이다. 학생들이 오늘날 세계의 기하의 역할에 대한 중요성을 이해하도록 하기 위하여 때로는 수업을 이러한 특징들을 토론할 수 있도록 진행할 수도 있을 것이다. 또한 수업을 실시할 때 학생들에게 실제 세계의 상황이나 수학의 다른 분야에 기하의 적용을 토론할 신문이나 잡지의 기사를 조심스럽게 과제로 줄 수 있다. 물론, 학생들이 수업시간에 보여 주고 토론할 자료를 가져오도록 지도해야 할 것이다.

교사들은 기하의 역할이 현대 사회의 발전에 중요하다는 것을 인식하도록 도와 줄 질문들을 만들어 수업 중 적절한 때에 학생들에게 제시 할 수 있을 것이다. 다음은 그러한 질문의 예이다.

· 기하학은 처음에 어떻게 어디에서 사용되어졌는가?
· 현대 사회의 발전은 과학과 기술의 발전에 의존하는가?
· 과학과 기술의 발전은 수학의 발전에 의존하는가?
· 기하학이 이용되는 직업의 종류를 찾아보라.
· 기하학은 잘 해결되지 않는 문제를 포함하는가?
· 기하학이 예술에 영향을 미치는가?

다섯째, 기하교육을 더욱 효과적으로 해 나갈 수 있도록 하기 위한 교과 내용의 개발이 끊임없이 계속되어야 할 것이다. 기하에서 증명은 그 체계가 연역적이긴 하나 그 도입에 있어서는 귀납적인 접근이 필요하다. 물론, 증명을 도입하기 이전에 도형에 대한 명확한 인식이 필요하다. 즉, 도형의 성질 등 증명할 내용에 대한

이해, 연역적 사고 체계에 대한 인식 등이 증명 도입 이전에 선행되어야 할 교육과정이라고 본다. 기하학이 공리를 바탕으로 하는 연역체계인 것은 틀림없으나 학생들의 이에 대한 이해에는 많은 어려움이 따를 것이다.

학교 기하교육의 방향이 초등은 직관적이고 중학교는 논증적이고 고등학교는 공리론적 체험을 통해 기하학의 구성과정 인식으로 흘러가고 있다. 중등 수준의 논증기하의 과정을 마친 학생들 중 극소수만이 기하학의 연역체계를 이해할 수 있을 뿐인 것이 현실이다. Van Hiele에 의하면 수학적 사고가 시각적 수준 → 기술적 수준 → 이론적 수순 → 연역적 수준 → 논리법칙을 통찰하는 엄밀화 수준으로 발달된다고 한다. 이러한 학생의 사고수준을 주시하여 다음과 같은 교과내용이 보완되어야 할 것이다. : (1) 증명하기에 필요한 기술의 개발과 함께 증면의 점진적인 전개 (2) 도형의 다양한 예를 통하여 기본적인 성질 제시 (3) 모든 학생의 능력에 따른 많은 문제와 이해를 돕기 위한 시각화 기술과 손으로 하는 실행을 개발하는 연습문제 제공 (4) 이미 배운 내용을 다시 기억하도록 하는 복습문제 제공 (5) 실제 생활의 적용을 통한 기하 개념의 설명

Ⅴ. 결론 및 제언

틀림없이 수학교육에서 기하영역은 중요한 위치를 차지한다. 그것은 수학과 과학의 여러 분야에 연구를 위한 도구를 제공할 수 있고 논리적인 사고력을 개발시켜주고 실제적인 세계에 대한 공간적 직관을 개발시키고 우리 생활의 여러 면들에 중요하게 적용한다고 앞서 언급하였다. 그러나 기하교육은 나라마다 지도방법과 내용이 다양하고 기하교육에 대한 다양한 이견이 기하영역의 체계적이고 일관성 있는 구성을 이루지 못하게 하고 있다. 그래서 기하교육은 앞으로 많은 연구의 영역이 남아있다고 본다. 교실현장에서 학생들의 보다 효과적인 학습 활동 영역과 다양한 교육적 환경 속에서 기하학적 개념과 사고의 개발에 대한 연구 들이 꼭 필요하다고 본다.

기하교육의 개선 방안에 대하여 ①연역적 사고 방법의 전형이며 공리론적 방법의 시조인 유클리드 기하의 교육적 가치를 인정하자 ②시각화도구로 컴퓨터와 GSP등을 이용해 학생들의 학습효과를 증진시키자 ③기하교육을 통해 문제해결에 대하여 긍정적 태도를 갖도록 하자 ④기하의 가치를 충분히 부여하는 교재 및 수업 방법을 개발하자 ⑤기하교육을 효과적으로 하기 위하여 계속적인 교과내용을 개발하자 이 다섯 가지를 제안하였다. 또한 학교에서 이루어지는 기하수업이 교사와 학생의 상호작용인 만큼, 기하교육의 개선된 환경을 위해서는

(1) 혁신적인 자료의 사용에 대한 연구

(2) 어려운 교육적 환경 속에서 학생들의 지식을 개발하는 방법 모색

(3) 교사가 이러한 환경과 학생들의 학습에 대한 지식 모두를 유용하게 하는 방법을 모색하는 것 등이 없이는 이루어 질 수 없다고 본다.

끝으로 21세기 정보화 사회 고도의 과학기술 사회의 주역이 될 중·고등학생들에게 가장 적합한 기하교육의 내용과 방법을 연구하여 바람직한 개선방안을 제시하기 위해서는 몇몇의 수학자, 교사들에게만 의존할 것이 아니라 전국의 교사, 기하학 전공자들의 적극적인 참여로 교육의 현실에 대한 파악과 의견 및 정보 교환을 통하여 우리의 교육 현실에 적합한 교육과정과 구체적인 학습 지도방안을 논의하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

〔1〕 구광조, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 지학사, 2001
〔2〕 김연식, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 두산동아, 2001
〔3〕 김응태 외, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 한샘출판사, 2001
〔4〕 김호우 외, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 지학사, 2001
〔5〕 박두일 외, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 교학사, 2001
〔6〕 박배훈 외, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 교학사, 2001
〔7〕 오병승, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 바른교육사, 2001
〔8〕 최용준 외, 중학교 3학년 수학 교과서, 서울 : 천재교육, 2001
〔9〕 이승행, 중학교 기하교육방법의 비교연구, 순천향대학교 교육대학원 석사학위 논문, 1999
〔10〕 한태식, 기하교육과 Van Hiele이론, 한국수학교육학회지 제30권 3호, p47-69
〔11〕 The Geometer's Sketchpad, 수학사랑, 1999
〔12〕 신동선, 류희찬, 수학교육과 컴퓨터, 경문사, 1998
〔13〕 이동원, 중학교 수학 1 교과서의 비교·분석 연구, 순천향대학교 교육대학원 석사학위 논문, 1997
〔14〕 이현주, 중학교 수학에서의 기하학에 관한 연구, 건국대학교 교육대학원 석사학위논문, 1996
〔15〕 이지혜, 중학교 수학에서 기하학에 관한 연구, 순천향대학교 교육대학원 석사학위논문, 2000
〔16〕 류희찬, 이지요, 수학교육에서의 시각화의 중요성과 로고, 대한수학 교육학회 춘계 논문집, pp163-176
〔17〕 이승행, 중학교 수학 1 교과서의 비교·분석 연구, 순천향 대학교 교육대학원 석사학위 논문, 1997
〔18〕 장남식, 중학교에서의 기하교육에 관한 연구, 영남대학교 교육대학원 석사학위논문, 1998