[UCI]I804:24011-200000233078

2006年 2月
敎育學碩士(數學敎育)學位論文

陰數 指導 方法에 관한 考察

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 聖 恩

陰數 指導 方法에 관한 考察

A Study on the teaching method of negative numbers

2006年　2月　日

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李　聖　恩

陰數 指導 方法에 관한 考察

指導敎授 鄭 潤 泰

이 論文을 敎育學 碩士學位 請求 論文으로 제출합니다.

2005年 10月 日

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 聖 恩

李聖恩의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

2005年 12月 日

朝鮮大學校 敎育大學院

목 차

ABSTRACT ii
제 1 장 서 론 1
제 2 장 음 수 3
2.1 음수의 역사 3
2.2 음수지도의 어려움 4
제 3 장 음수지도 모델에 관한 연구 7
3.1 직관적 지도 8
(1) 수직선 모델 8
(2) 셈돌 모델 15
(3) 우체부 모델 18
(4) EIS 이론에 따른 3단계 지도 모델 22
3.2 형식적 지도 31
(1) 귀납-외삽법 31
(2) 형식의 불역의 원리 34
3.3 기타 음수지도 모델 및 교과서 분석 37
(1) 기타 음수지도 모델 37
(2) 현행 중학교 수학교과서 분석 37
제 4 장 효과적인 음수지도 40
4.1 음수지도 모델 사용의 장단점 40
4.2 효과적인 음수지도를 위한 제언 42
제 5 장 요약 및 결론 45
참고문헌 47

ABSTRACT

A Study on the teaching method of negative numbers

Lee, Seong Eun

Advisor : Prof. Jung, Yoon-Tae

Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

In this thesis, we consider some difficulties in teaching negative numbers, and find the effective methods for it. We also research on necessities, and merits and demerits of intuitive method and formal method.

Finally we survey methods of teaching negative numbers and present a model of the lecture that introduces negative numbers to the first graders of junior high schools.

제 1 장 서 론

학교에서 수학을 지도하는 중요한 목적 중의 하나는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 학습을 통하여 논리적이고 합리적인 사고를 기르고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활 문제 해결이나 다른 과목의 학습에 활용할 수 있게 하기 위함이다. 이를 위해 학교 수학은 무엇보다도 수학의 기본적인 지식과 기능을 중시해야 한다. 수학의 기본적인 지식이 갖추어져 있을 때에야 비로소 창의적인 문제 해결이 가능하고, 실생활 및 타 교과에 활용할 수 있으며, 또 발전된 수학을 학습할 수 있다.

이러한 목표를 성취하려면 학생들은 먼저 수학의 각 분야에 대한 기본적인 개념을 명확히 학습해야 한다. 그렇게 함으로써 학생들은 수학적 언어로 표현된 개념의 의미뿐 아니라 그 수학적 개념에 결부된 풍부한 해석과 의미를 인식할 수 있고, 수학적 원리와 법칙, 수학적 문제 및 실생활의 문제에 대해 폭넓은 시각으로 사고할 수 있으며, 다양한 관점에서 사고할 수 있게 된다.

또한 학교 수학 교육은 수학적 사고의 산물인 수학적 지식을 단지 전달만 하는 것이 아니고, 학생들의 진정한 수학적 사고 활동을 촉진하는 교육을 하도록 노력해야 한다. 이를 위해서 학생들에게 수학적 지식을 강요하는 것이 아니라, 학생의 수학적 활동을 돕기 위한 수학화를 강조하고, 학생들에게 수학을 성공할 수도 있고 실패할 수도 있는 인간 활동으로 제시해야 한다.[1)]

다양한 수학적 사고활동에서 가장 기본이 되는 것은 수의 개념과 그 연산이다. 수는 내용면에서는 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수 등으로 분류된다. 이러한 수의 개념 및 연산은 타 영역의 학습활동에 바탕이 되므로 학생들은 능숙하게 사칙연산을 다룰 수 있어야 한다.

중학교 수학에서는 학생의 인지 능력, 사회적 요구수준, 학교의 교육 목적에 적합하도록 실수체계를 접할 수 있게 한다.

---

1) 김응태, 박한식, 우정호 공저(1988), 수학교육학개론, p.334

역사적으로 음수, 무리수, 허수는 직관적인 접근이 어려웠기 때문에 정당한 수로 받아들이는 데 오랜 시간이 걸렸다. 이는 음수 개념과 연산은 직관적인 접근이 어려울 뿐 아니라, 이를 만족스럽게 설명해주는 모델이 없음을 말해주는 것이다. 이러한 이유로 수학자들은 음수는 학생들에게 형식적인 수학을 가르칠 첫 기회라고 하면서 형식적인 접근을 주장한다. 그러나 학생들은 직관적으로 상상할 수 있는 것을 원하며 그러한 방법으로 자연수를 사용하고 실제 세계와 관련지어 연산을 해왔다. 그러므로 학생들은 음수를 실제 세계와 연결해서 학습하길 바라고 여러 가지 방법으로 음수 연산을 모델화하기를 원한다.

음수를 학습하는 데 있어서, 확실한 동기유발을 통해 학생들의 적극적인 학습 참여와 교사의 흥미롭고 좀 더 쉬운 방법의 지도가 있다면 학생들에게 음수를 보다 효과적으로 이해시킬 수 있고, 그 기억 또한 오래 갈 것이다.

직관적 사고는 문제해결 방법에 아이디어를 제공해주므로 창조성 발전에 큰 역할을 할 것이며, 형식적 사고는 논리의 근거를 분명히 하는 사고활동이므로 수학을 만들고 이를 아름답게 다듬어 가는데 크게 공헌할 것이다. 그러므로 이들은 서로 다른 것, 별개의 것으로만 존재하는 것이 아니라 서로 돕는 관계로 존재하게 되므로 수학을 만들어 가는 관점에서 더욱 수학적 가치가 있다고 본다.

따라서 본 논문은 음수의 개념과 연산지도에 있어서의 어려움과 문제점을 짚어보고 이를 해결하기 위한 효과적인 지도 방안을 모색해 보고자 한다.

제 2 장 음 수

2.1 음수의 역사

수 체계의 역사적 발전 과정을 보면 인류는 셈을 위해 자연수를 최초로 사용했으며, 그 다음에 측정을 위해 양의 유리수를 사용했다. 그 다음에 인류는 정사각형의 변 및 대각선의 길이 같은 단위로 잴 수 없는 상황을 극복하기 위해 양의 실수를 도입했고, 그 이후에 음수를 인식했으며 마지막으로 허수를 받아들였다.[2)]

분수는 연속량 측정과 결부되어 있으므로 도입이 어렵지 않았던 반면, 음수 개념과 량을 나타내는 초보적인 수 개념 사이의 갈등은 음수 역사의 초기부터 존재하였다. '없는 것보다 작은 량'은 실제로 존재하지 않는 부조리한 수라고 여겼기 때문이다.

그렇지만 음수는 수가 아닌 수의 보조물로 간주되었으며, 수학자들은 양의 근을 얻기 위하여 음수를 사용하였을 뿐 음의 근을 방정식의 해로 받아들이지 않았다. 음수를 그 유용성 때문에 사용하면서도 사용 시 발생하는 모순에 대하여 서술하면서 음수를 인정하기를 망설였다. 직관적으로 어떤 개념을 받아들이기 위해서는 실제와의 관련성이 요구되는데 음수에는 그러한 것이 결여되어 있었다. 기존의 수 개념이 크기와 관련 있는 반면, 음수는 방정식의 일반해를 위하여 도입한 반직관적인 형식적 개념이므로 '실제적인' 수로 인정받기 어려웠던 것이다.

음수의 발전에 새로운 계기가 마련된 때는 17세기 정도였는데, 17세기 이전에는 수학의 각 분야가 독립적으로 발전하였으나 17세기에 이르러서 해석기하학이 탄생되면서 서로 보완하며 발전하기 시작하였다. 해석기하학에서는 직선 전체와 곡선 전체를 대수적으로 서술하려면 음의 값을 변수로써 인정할 수밖에 없었다.

데카르트(Descartes)는 기하학적 필요에서 음수를 인정하였을 뿐 아니라 오늘날

---

2) Howard Eves저, 허민·오혜영 역(2001), 수학의 기초와 개념, p.346

우리가 사용하는 많은 대수적 기호를 처음으로 만들어 사용하였다. 데카르트의 좌표화는 음수에 대한 확신을 한층 강화시켜 음수를 정당한 수로 만들었다. 다시 말해, 도형의 대수적 기술이 음수 존재의 확립을 가능하게 한 것이다.

음수의 존재를 확립하기 위한 오랜 기간에 걸친 많은 노력 끝에 완전한 성공을 거둔 것은 19세기 독일의 수학자 헹켈(Hankel)이었다. 19세기에 이르러 수에 대한 관점이 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로 관점의 변화가 일어났다.

그에게 음수는 실제적인 것을 나타내는 개념이 아니라 형식적인 구조를 이루는 것이었기 때문에 음수를 받아들이기 위한 구체적인 모델을 더 이상 찾지 않았다. 여기서 비로소 음수 개념을 양의 개념과 관련짓지 않고 순전히 형식적인 개념으로 간주할 수 있게 되었다.

헹켈은 양수 체계를 구성하는 여러 가지 원리를 그대로 유지하면서 음수 체계를 연구하였다. 그렇게 하여 얻은 음수의 구조는 대수적으로 모순이 없었다. 음수는 양 개념과 시각적인 모델들로부터 독립된 순수한 이론적인 개념으로 인정받기 시작하였고 자연수와 동등한 수로 취급되게 되었다.

이러한 음수의 역사는 수학적인 관습과 억압-수학적 추론이 구체적이며 경험적일 것을 고집하는 것-으로부터 자유로워진 많은 투쟁의 예 가운데 하나이다.[3)]

2.2 음수지도의 어려움

학생들이 양의 수를 처음 배울 때 크기 개념과 관련 있는 셈수(counting number)로 수 개념을 학습해왔다. 그 결과 음수도 구체적이고 직관적인 대상을 통하여 학습하려고 한다. Fischbein은 음수의 개념과 연산에 두 가지 직관적인 장애가 존재한다고 다음과 같이 기술하였다.

> 하나는, 음수 개념 그 자체가 직관적으로 모순 된다는 것이다. 양의 개념은 자연스럽고 실제적인 의미를 지닌다. 그것은 본질적으로 무(無)이상의 어떤

3) 우정호(2001), 학교수학의 기초, p.202-203

것이며, 수 개념은 항상 양의 실제적인 의미와 자연스럽게 연관된다. 그런데 음수의 개념은 실제로 상상할 수 없으며 음수를 만들어 사용해야 할 실제적인 필요성이 있는 것도 아니다. 우리가 식 $\frac{a}{f(x)}$를 다룰 때 $f(x)=0$ 이면 이 식은 의미 없는 것으로 여긴다. 원리상 같은 상황이 음수에서도 일어난다. 방정식을 풀 때 그것이 의미 없다고 버릴 수 있다.

음수 개념의 반직관적인 특성이 음수를 학습하는 학생들에게 걸림돌이 될 수 있다. 음수의 역사를 통해 알 수 있듯이, 수학자들은 수에 대한 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로의 전환을 이루면서 음수 개념을 획득하였다. 학생들이 음수를 받아들이게 하기 위해서도 기본적으로 같은 관점을 선택해야만 한다. 어떤 개념이 수학적으로 타당하다고 수용하는 기준은 실제성이 아니라는 것을 인정해야 한다. 사실, 어떤 개념의 수학적인 타당성은 그 개념을 정의하고, 공리적 구조의 범위 내에서 모순 없이 그것을 조작할 수 있는 가능성에 기초한다. Fischbein이 서술한 두 번째 직관적 장애는 연산에 관한 것이다. 그는 다음과 같이 말하고 있다.

두 번째 어려움은 음수의 곱셈과 나눗셈에서 발생한다. 음수가 연산자의 역할을 하는 상황을 보자. $(-3)\times(+2)$에서 $(+2)$, 즉 어떤 크기를 (-3)배 한다는 것을 직관적으로 해석할 수는 없다. 새로운 언어 협약이 필요하다.

음수 개념과 연산이 실제적인 양과 크기 개념과 결합되어 혼란을 준다. 수학자들도 음수를 표현할 수 있는 구체적이면서 적절한 해석을 찾는 데 어려움을 겪었다. 그 당시 상황에서 수학자들이 극복해야 할 어려움에 대하여 Heberker는 다음과 같이 말한다.

(1) 하나의 수직선(number line)개념이 없었다. 선호된 모델은 반대 방향의 두 개의 반직선 모델이다. 이것은 양수와 음수의 차이를 강화 하였다. 즉, 이 수들은 '상대적인 수'가 아니었다.

(2) 오래 지속된 관점은 영을 절대 영 -그 아래는 아무 것도 없는- 으로 보는 것이다. 이것은 Pascal의 관점[4]을 떠오르게 한다.

(3) 구체적인 관점에 집착하였다. 즉, 수와 수의 연산에 구체적인 의미를 부여 하려고 하였다.

(4) 특히, 음수의 모든 계산 법칙을 만족스럽게 설명하는 '유일한 모델'을 원하였다. 잘 알려진 채권-채무 모델로 설명할 수 있으나 만족스럽지 못했다.

(5) 해결의 열쇠는 수 개념을 크기 개념에 종속시킨 아리스토텔레스학파의 수 개념을 포기하는 것이다.

수 개념을 크기 개념에 종속시킬 때, 음수 개념은 혼란스러워진다. 음수뿐만 아니라 허수도 정당한 수로 인정한 지금은 크기 개념이 수 개념에 종속되었다.

이와 같이 음수 개념 및 음수 연산에 있어서 직관적 의미는 제한적이며 이러한 직관적 해석의 결여는 음수 지도에 있어서 적합한 직관적 모델을 모색하는 계기가 되었다.

실제를 초월하는 대상과 그 응용이 점차 다루어지면서 숙련된 교수학자들은 이 한계를 극복하는 보다 정교화 된 직관적 도구를 시도하였고, 때로 이런 노력은 성공적이었다. 음수를 의미 있게 수용하는데서 생기는 곤란은 적절한 직관적 모델을 확인하는데서 생기는 곤란과도 연관되어 있다. 직관적 모델에 의해 접근하는 것은 유용할 수 있으나 모델이 가져올 수 있는 혼란을 고려해 볼 때, 전적으로 모델에 의존한다는 것은 신중해야 한다.

음수지도를 위해서 사용되어 온 몇 가지 직관적 모델 및 형식적 모델은 다음 장에서 살펴보도록 하겠다.

---

4) 0은 뺄셈에서 아무런 효과가 없다. 그러므로 $m < n$일 때, $m - n = 0$이라고 자연스럽게 약속해서 자연수의 뺄셈을 확장한다.

제 3 장 음수지도 모델에 관한 연구

오늘날 음수 체계는 수학적으로 완성되었지만, 초기에 수학자들도 혼란스러워한 음수 개념과 연산을 학생들에게 어떻게 지도해야 하는가는 현재까지 수학교육에서 연구해야 할 중요한 과제이다.

정수를 지도함에 있어 가장 문제가 되는 부분은 음수에 대한 연산이다. 학생들에게 음수의 개념과 그 계산을 가르칠 때, 직관적인 모델을 통해 도입할 수도 있고 그 본질에 입각하여 형식적으로 정의할 수도 있다.

모델은 원래 대상과 구조적으로 동형인 것으로 그 본질적인 측면을 보존하면서 보다 간단하고 쉽게 접근 가능한 것이어야 하고, 직관적인 요소를 갖추어서 발견적인 역할을 하고 학습자에게 동기를 부여할 수 있어야 한다. 그러나 모델에 전적으로 의지하고 원래의 대상에 대하여 숙고하지 않을 경우 적절하지 않은 결론을 이끌어낼 위험이 있으므로 모델을 이용한 개념 지도에서는 모델의 한계를 명확히 인지하고 있어야 한다.

역사 발생적인 과정에 비추어 볼 때, 음수는 직관적으로 받아들이기 어려운 개념이므로 직관을 초월한 이론적인 설명이 필요하다고 하면서 프로이덴탈(Freudenthal)은 다음과 같이 방정식의 해로 음수와 음수의 연산을 지도할 것을 주장하였다.

자연수 a에 대하여 방정식 $x+a=0$의 해를 음수 $-a$로 정의한다면, 자연수에서 성립하는 계산법칙이 음수에서도 성립하도록 음수의 덧셈과 곱셈을 정의할 수 있는 것이다. 정수 -3을 방정식 $x+3=0$을 만족시키는 해로서 정의하는 것은 보다 정확히 표현하면 -3을 $0-3$으로 보는 것이다. 일반적으로 정수는 두 자연수의 차로 볼 수 있다. 즉, $+3=4-1=5-2=6-3=\cdots$, $-3=1-4=2-5=3-6=\cdots$ 이를 형식화하면 정수는 다음과 같이 자연수의 순서쌍의 동치류로 정의된다.

$$+3=\{(4,1),(5,2),(6,3),\cdots\},\quad -3=\{(1,4),(2,5),(3,6),\cdots\}$$

그러나 음수 개념과 그 연산의 지도에서 위와 같은 논리체계가 그 점을 정당화한다고 해서 형식적인 대수적 접근만을 주장하는 것은 문제가 있다. 음수의 존재는 형식적으로 정당화되었지만 음수는 구체적인 물리적 세계의 여러 분야에서 중요한 역할을 한다. 그러므로 학생들에게 음수 개념과 그 연산을 지도할 때 대수적 논리가 그것을 정당화한다는 이유로 형식적인 대수적 접근만을 주장하는 것은 설득력이 없다. 음수의 개념과 그 연산의 지도에서는 형식적인 접근과 다양한 직관적 해석을 함께 고려해야 한다.

현재까지 알려져 있고 학교 수학에서 많이 이용되는 음수 개념과 지도 모델에는 수직선 모델, 셈돌 모델, 우체부 모델, 귀납-외삽법의 4가지 모형이 있다. 본 연구에서는 이 외에도 EIS이론에 따른 3단계 지도모델과 형식 불역의 원리를 이용한 지도 모델을 살펴보았다.

3.1 직관적 지도

(1) 수직선 모델

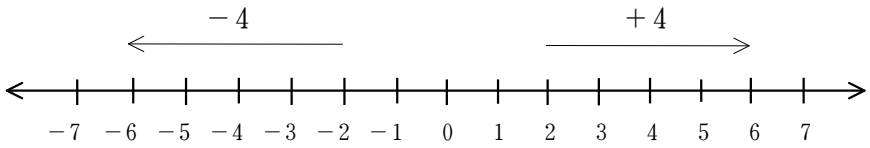
정수 지도에 주로 사용하는 수직선 모델에서 수직선은 수평-좌, 우 방향이 있는-의 수직선이다. 수평으로 직선을 그려서 기준이 되는 점 0을 임의로 잡고 양의 정수를 한쪽 방향에 일정한 간격으로 배열하고 음의 정수를 다른 쪽 방향에 일정한 간격으로 배열한다. 이 수직선 위에서 사칙연산-덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈-을 하고 대소 관계를 비교한다. 대부분의 학생들이 다른 학습 상황에서 이미 수직선을 사용했기 때문에 이에 익숙하다. 자연수를 학습할 때 이미 수직선을 사용하였다.

학생들은 음수를 배우기 전까지 자연수를 크기 개념과 관련지어 학습하였다. 앞에서 고찰한 것과 같이 수 개념을 크기 개념에 종속시켰기 때문에 음수를 자연수와 동등한 수로 받아들이는 것에 대해 과거의 뛰어난 수학자들도 어려움을 겪었다.

수직선 모델에서 음수는 크기와 방향을 함께 갖는 수이다. 정수는 자연수의 확장이므로 결과적으로 자연수도 수직선 모델에서 크기와 방향을 갖는 수로 해석할 수

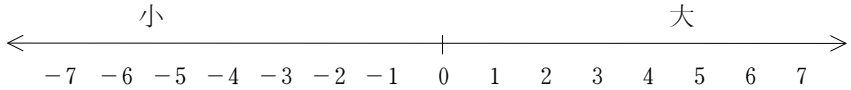
있다. 이러한 이유로 정수를 종종 '방향이 있는 수(directed number)'라고 부른다.

수직선 위에서 수는 방향과 크기를 갖는 화살표로 나타낸다. $+4$는 오른쪽을 향하는 4단위의 화살표이고, -4는 왼쪽으로 향하는 4단위의 화살표이다. 이때, 수직선의 오른쪽을 양의 방향으로 하는 것은 수학적 습관일 뿐이다.



① 대소 관계

수직선에서 정수의 대소 관계를 비교할 때의 수는 방향과 크기를 갖는 화살표가 아닌 수직선 위의 고정된 점이다. 정수의 대소 관계를 수직선 위에서 자연수의 대소 관계를 그대로 유지할 뿐만 아니라 방법도 똑같다. 즉 수직선 위에서 두 자연수의 대소를 결정할 때 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크듯이 음수에서도 마찬가지이다.



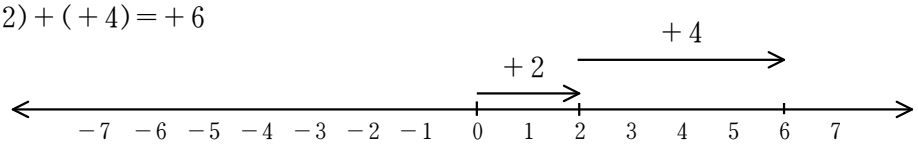
두 정수의 대소 관계는 다른 음수 지도 모델보다 수직선 모델에서 가장 명확하게 알 수 있다. 아마도 음수의 형식적 접근을 주장하는 수학자도 두 정수의 대소 관계를 비교할 때는 직관적인 모형인 수직선에 의존할 것이다.

② 덧셈

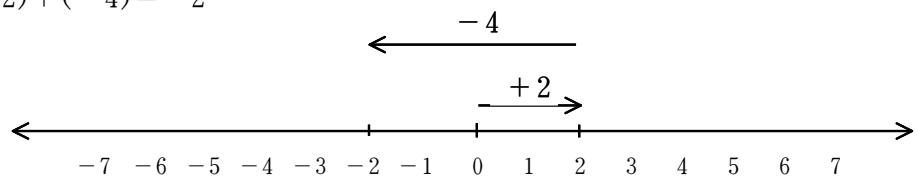
수직선 모델에서 정수의 덧셈은 화살표의 머리에 더할 수를 나타내는 화살표의 꼬리를 붙이는 것이다. 출발은 원점인 0에서 시작한다.

몇 가지 예를 들어 살펴보도록 하자.

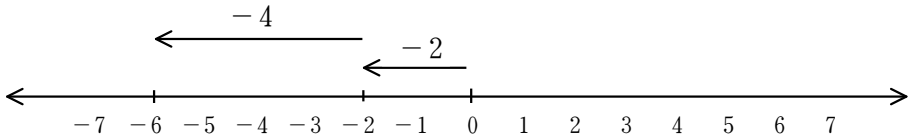
$(+2)+(+4)=+6$



$(+2)+(-4)=-2$



$(-2)+(-4)=-6$



이와 같이 수를 방향과 크기를 갖는 화살표로 해석하여, 덧셈을 수직선 위에서 나타내는 것은 쉽다.

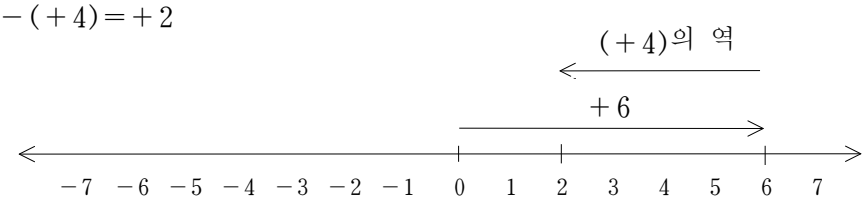
③ 뺄셈

자연수에서 뺄셈은 덧셈의 역이었다. 정수에서도 마찬가지이다. 수직선 위에서 반대 방향을 역이라고 하면 자연스럽다. 즉 두 수의 뺄셈은 한 수에 다른 수의 역을 더하는 것이다.

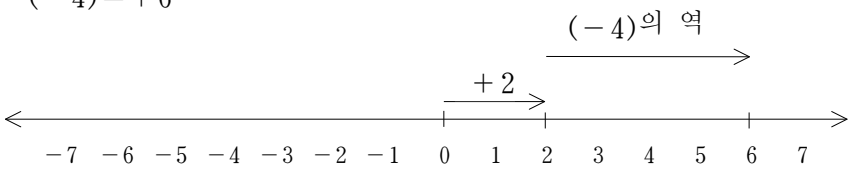
수직선에서 방향이 좌, 우 둘 뿐이어서 오른쪽 반대 방향은 왼쪽이고 왼쪽의 반대 방향은 오른쪽이다. 이는 명확하다. 수직선 모형에서 뺄셈은 빼고자 하는 수의 화살표를 반대 방향으로 놓는다.

몇 가지 예를 들어 살펴보도록 하자.

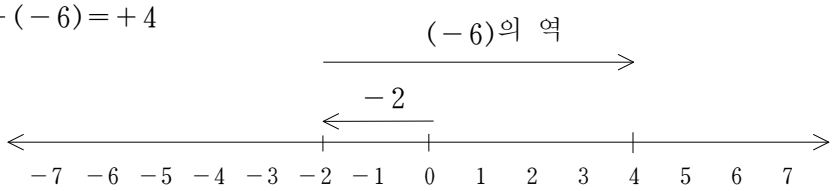
$(+6)-(+4)=+2$



$(+2)-(-4)=+6$



$(-2)-(-6)=+4$

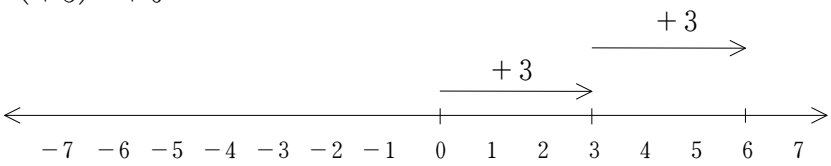


④ 곱셈

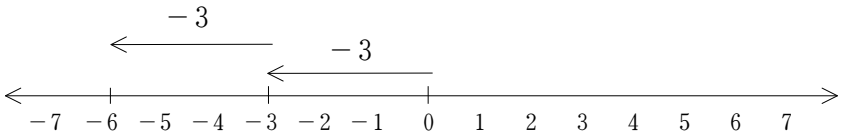
수직선 위에서 곱셈을 나타내는 방법은 여러 가지가 있는데 첫째로, 두 정수의 곱에서 앞부분의 수를 승수(multiplier), 뒷부분의 수를 피승수(multiplicand)로 보는 전통적인 방법이 있다.

몇 가지 예를 들어 살펴보도록 하자.

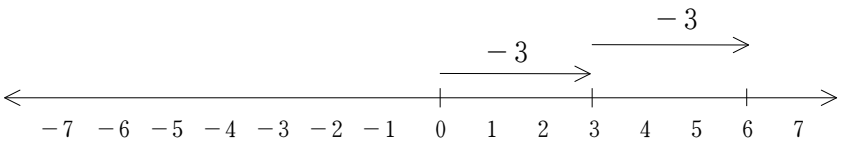
$(+2)\times(+3)=+6$



$(+2)\times(-3)=-6$



$(-2)\times(-3)=+6$



곱셈에서 수직선 모델의 한계가 드러난다. 수직선 모델을 도입할 때, 양의 정수는 양의 방향, 즉 관습적으로 오른쪽으로 향하는 어떤 길이의 화살표이고 음의 정수는 왼쪽을 향하는 어떤 길이의 화살표였다.

그러나 곱셈에서는 이러한 약속이 계속 성립하지 않는다. 승수의 부호가 양이면 피승수의 방향과 같은 방향으로 승수만큼 반복되는 것을 의미하고, 승수의 부호가 음이면 피승수의 방향과 반대 방향으로 반복되는 것을 의미한다.

수직선에서 곱셈을 팽창으로 해석하는 시각도 있다.

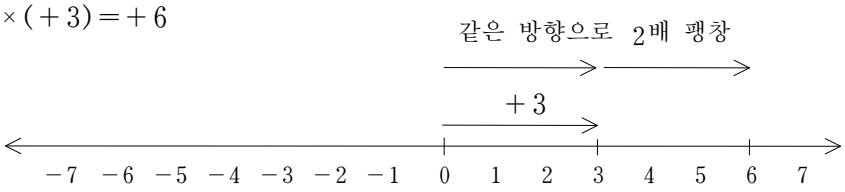
$$a \rightarrow 3 \times a$$

위의 식은 a를 팽창시키는 것이다. 이 때, 방향은 변하지 않고 크기만 3배 팽창된다. 그리고

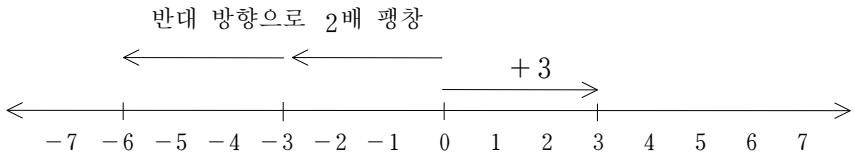
$$a \rightarrow (-3) \times a$$

인 경우에는 a의 반대 방향으로 3배 팽창이다. 이 때 팽창은 원점을 기준으로 한다.

$(+2)\times(+3)=+6$



$(-2)\times(+3)=-6$



곱셈을 팽창으로 볼 때에도 승수의 양의 부호와 음의 부호의 방향은 피승수의 부호로 결정된다.

⑤ 나눗셈

수직선 모델에서 나눗셈을 설명하는 것이 가장 어렵다. 이 때문에 학교 현장에서 수직선 모델에서 곱셈을 한 후, 이것을 일반화인 부호 법칙을 사용하여 나눗셈을 가르친다. 이것이 가능한 이유는 이전부터 나눗셈을 곱셈의 역으로 인식하였기 때문이다.

수직선 모델에서 나눗셈은 (전체수)피제수에서 똑같은 크기의 수를 빼는 뺄셈의 특수한 경우로 설명할 수 있다. 물론, 나눗셈은 곱셈의 역이기도 하다. 그러나 수직선에서는 나눗셈을 곱셈의 역으로 제시하는 것보다 똑같은 크기의 연속적인 뺄셈으로 제시하는 것이 더 현명한 방법이다.

수직선 위에서 음수를 방향과 크기를 갖는 화살표로 해석하여 나눗셈으로 가시화하려면 방향에 대해 심사숙고해야 한다.

이 때, 다음의 두 가지 사실이 바탕이 된다.

첫째, 나눗셈은 곱셈의 역이다. 그러므로 반대로 생각해야 한다. 즉 곱셈은 0에서 시작했지만 나눗셈은 0을 향해 가는 것이다.

둘째, 0에 도달하기 위해 앞으로 이동하느냐 또는 뒤로 이동하느냐에 따라 몫의 부호가 양인지 음인지가 결정된다. 전체 양을 동일한 조각으로 나눌 때 앞으로 이동하면 몫의 부호는 양이고, 뒤로 이동하면 몫의 부호는 음이다.

수직선 모델에서 나눗셈의 출발점은 원점인 0이 아니라 수직선 위의 피제수이다. 피제수에서 출발하여 0을 향해 간다. 또한 몫의 부호는 앞으로 이동하면 양이 되는데, 이때 앞으로의 방향은 제수의 반대 방향을 의미한다.

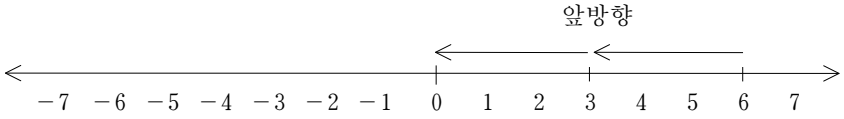
나눗셈을 연속하는 뺄셈으로 볼 때, 뺄셈은 두 번째 정수의 화살표를 반대 방향으로 놓는 것이므로 이러한 해석이 가능하다.

몇 가지 예를 들어 살펴보도록 하자.

$(+6)\div(+3)=+2$ $+6$을 3단위로 나눈다. 3의 양의 부호는 양의 방향, 즉 오른쪽을 의미한다. 그러나 나눗셈은 역이므로 양의 방향의 반대가 앞방향이 된다. 피제수인 $+6$에서 시작하여 3단위

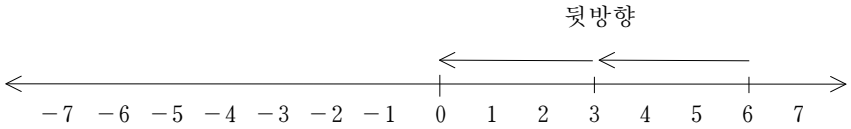
로 나누면서 0을 향해 간다. 왼쪽 방향을 향하므로 몫은 양의 부호이고 두 번 뺄 수 있다. 그러므로 몫은 +2이다.

(역을 고려했을 때 앞방향 : ←)



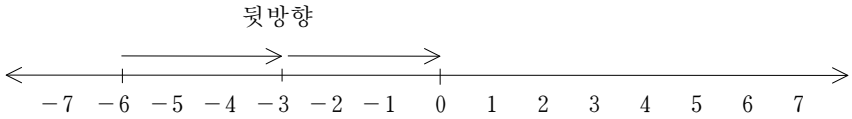
(+6)÷(−3)=−2 +6에서 시작한다. 3의 음의 부호는 음의 방향, 즉 왼쪽을 의미한다. 그러나 나눗셈은 역이므로 음의 반대 방향이 뒷방향이다. +6에서 3단위씩 빼면서 0을 향하면 뒷방향이 된다. 그러므로 몫은 음이고 2이다. 즉 몫은 −2이다.

(역을 고려했을 때 앞방향 : →)



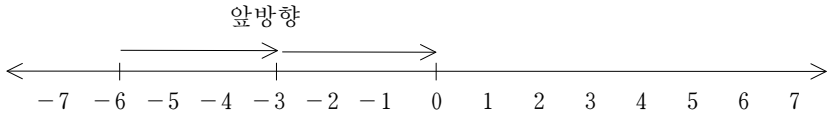
(−6)÷(+3)=−2

(역을 고려했을 때 앞방향 : ←)



(−6)÷(−3)=+2

(역을 고려했을 때 앞방향 : →)



수직선 모델에서 양의 정수는 오른쪽을 향하는 화살표로 음의 정수는 왼쪽을 향하는 화살표로 해석하였으나, 나눗셈에서는 이렇게 해석하지 않는다. 앞의 정수인

피제수는 수직선 위의 점이고, 뒤의 정수인 제수는 방향을 결정하고 0을 향해 가는 화살표의 크기로 해석한다.

수직선 모델에서 대소 관계의 사칙연산을 고찰하였다. 두 정수의 대소 관계를 비교할 때에 수는 수직선 위의 고정된 점이고, 덧셈과 뺄셈을 할 때에 수는 수직선 위에서 방향과 크기를 갖는 이동 가능한 화살표로 해석한다. 곱셈에서 피승수는 위와 같지만 승수의 부호의 방향은 피승수의 부호에 따라 달라진다. 즉 승수의 양의 부호는 오른쪽을 향하는 화살표를 의미하지 않고, 피승수와 같은 방향으로 곱해짐을 의미한다. 나눗셈에서 피제수는 수직선 위의 고정된 점으로 해석되고 제수는 방향과 크기를 갖는 화살표로 해석된다. 그리고 몫의 부호는 제수의 역방향을 고려해서 결정한다.

(2) 셈돌 모델

가테노(Gattegno)가 제안한 셈돌 모델은 두 가지 색의 돌을 이용하여 정수를 나타내고 연산을 정의하는 모델이다. 두 가지 색의 돌을 우리는 흔히 보는 바둑돌로 생각하여 검은 돌과 흰 돌이라고 하자. 검은 돌은 음수를 나타내고 흰 돌은 양수를 나타낸다고 약속한다. 이때 다음과 같은 소멸법칙을 따른다.

검은 돌 하나와 흰 돌 하나는 서로 없앨 수 있다 - 소멸법칙

그러므로 다음과 같은 여러 경우는 같은 것이다.

4개의 검은 돌과 0개의 흰 돌

5개의 검은 돌과 1개의 흰 돌

6개의 검은 돌과 2개의 흰 돌

또한 다음과 같은 경우도 같은 것이다.

0개의 검은 돌과 4개의 흰 돌

1개의 검은 돌과 5개의 흰 돌

2개의 검은 돌과 6개의 흰 돌

① 덧셈

셈돌 모델에서 덧셈은 간단하게 지도할 수 있다. 부호가 같은 정수의 덧셈은 셈돌을 합치면 되고, 양수와 음수의 덧셈은 검은 돌 한 개와 흰 돌 한 개를 짝지어 상쇄시키면 된다.

예를 들어, $(+4)+(-2)=+2$를 생각해 보자.

흰 돌 4개와 검은 돌 2개를 더하는데 흰 돌 2개와 검은 돌 2개, 각각의 쌍은 상쇄되므로 흰 돌 2개가 남는다.

$(+4)+(+2)=+6$ 흰 돌 4개 + 흰 돌 2개 = 흰 돌 6개

$(-4)+(-2)=-6$ 검은 돌 4개 + 검은 돌 2개 = 검은 돌 6개

$(-4)+(+2)=-2$ 검은 돌 4개 + 흰 돌 2개 = 검은 돌 2개

② 뺄셈

부호가 같은 정수의 뺄셈은 빼는 수만큼 셈돌을 제거하면 된다.

$(+4)-(+2)=+2$ 흰 돌 4개 - 흰 돌 2개 = 흰 돌 2개

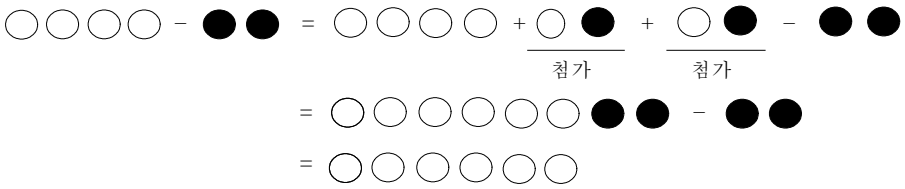
$(-4)-(-2)=-2$ 검은 돌 4개 - 검은 돌 2개 = 검은 돌 2개

그러나 부호가 다른 정수의 뺄셈에서는 '없는 쌍 만들어 내기'가 필요하다.

예를 들어, $(+4)-(-2)=+6$을 생각해 보자.

4개의 흰 돌에서 검은 돌 2개를 제거해야 하는데 검은 돌이 없으므로 검은 돌 2개를 만들어내야 한다. 이때, 흰 돌 2개와 검은 돌 2개를 첨가한다. 그러면 흰

돌 6개와 검은 돌 2개에서 검은 돌 2개를 제거하는 것이 되므로 흰 돌 6개가 남는다.



(－4)－(＋2)＝－6　　검은 돌 4개 - 흰 돌 2개

= (검은 돌 6개와 흰 돌 2개) - 흰 돌 2개

= 검은 돌 6개

(＋2)－(＋4)＝－2　　흰 돌 2개 - 흰 돌 4개

= (흰 돌 4개와 검은 돌 2개) - 흰 돌 4개

= 검은 돌 2개

이와 같이 다양한 경우의 뺄셈이 있고 그 계산 또한 완벽하다. 모든 경우가 다음의 원리에 따라 해결된다.

흰 돌과 검은 돌 한 쌍은 상쇄되고, 뺄 수 없을 때에는 쌍을 첨가

③ 곱셈

(－2)×(＋3) ⇒ 검은 돌 2개씩 3번 놓기.

(－2)×(＋3)＝－6

(＋3)×(－2) ⇒ 검은 돌 6개, 흰 돌 6개를 생성, 흰 돌을 3개씩 2번 제거. 그러므로 남는 돌은 검은 돌 6개가 된다.

(＋3)×(－2)＝－6

(－3)×(－2) ⇒ 검은 돌 6개, 흰 돌 6개를 생성, 검은 돌을 3개씩 2번 제거.

그러므로 남는 돌은 흰 돌 6개가 된다.

$(-3)\times(-2)=+6$

위 방법은 곱셈을 승수가 양일 때는 동수누가(同數累加)로, 승수가 음일 때는 동수누감(同數累減)으로 정의하는 방법을 토대로 만든 모델인 것이다. 이런 방법으로 지도하면 곱셈 또한 지도 가능하게 되지만 승수가 음수일 때 학생들이 시초수 '0을 나타내기'에 해당하는 셈돌 개수를 학생들이 추정할 수 있어야 한다.

④ 나눗셈

셈돌 모델에서 나눗셈은 자연스럽지 않다.

셈돌 모델은 자연수 개념을 물건의 개수와 관련짓는데 익숙한 학생들에게 무리없이 음수의 덧셈과 뺄셈을 가르칠 수 있다는 장점이 있다. 그리고 이 모델을 덧셈과 뺄셈이 각각의 반대연산이라는 것을 명확하게 보여주고 있다.

(3) 우체부 모델

우체부 모델은 우편물을 배달하는 우체부와 이것을 받는 사람의 이야기로 정수의 연산을 지도할 수 있는 모델이다. 우체부 모델에서 우체부가 배달하는 것은 어음과 고지서이다. 배달만 하는 것이 아니라 때로는 잘못 배달된 어음과 고지서를 되가져가기도 한다. 어음은 양수를 나타내고 고지서는 음수를 나타낸다. 또한, 가지고 오는 것은 덧셈, 가지고 가는 것은 뺄셈을 의미한다.

먼저, 우체부의 행동을 수학적 기호와 관련지어 생각해 보자.

우체부 이야기	수학적 기호
우체부가 5원짜리 어음을 가지고 왔다	$+(+5)$
우체부가 5원짜리 어음을 가지고 갔다	$-(+5)$
우체부가 5원짜리 고지서를 가지고 왔다	$+(-5)$
우체부가 5원짜리 고지서를 가지고 갔다	$-(-5)$

사용할 수 있는 돈이 많아지면 소득이 되므로 양의 부호로 나타내고, 사용할 수 있는 돈이 적어지면 손실이 되므로 음의 부호로 나타낸다. 여기서 어음과 고지서를 받는 사람을 혜은이라고 하자.

① 덧셈

$+(+2)+(+4)=+6$ 우체부가 2원짜리 어음과 4원짜리 어음을 가지고 왔다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 6원 많아졌다.

$+(+5)+(-3)=+2$ 우체부가 5원짜리 어음과 3원짜리 고지서를 가지고 왔다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 2원 많아졌다.

$+(-3)+(-1)=-4$ 우체부가 3원짜리 고지서와 1원짜리 고지서를 가지고 왔다.
우체부의 방문결과, 4원의 돈을 지불해야 하므로
사용할 수 있는 돈은 4원 적어졌다.

② 뺄셈

$+(+7)-(+2)=+5$ 우체부가 7원짜리 어음을 가지고 왔다. 그리고 배달했던
2원짜리 어음이 잘못 배달된 것이라며 가지고 갔다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 5원 많아졌다.

$-(+5)-(+1)=-6$ 우체부가 5원짜리 어음과 1원짜리 어음을 가지고 갔다.
우체부의 방문결과, 6원의 돈을 지불해야 하므로
사용할 수 있는 돈은 6원 적어졌다.

$-(-3)$ 우체부가 3원짜리 고지서를 가지고 갔다.
그 전에 무리 없이 3원을 지불해야하는 돈으로 여기고
그가 사용할 돈에서 3원을 제외했었다.

우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 3원 많아졌다.

$-(-2)-(-3)=+5$ 우체부가 2원짜리 고지서와 3원짜리 고지서를 가지고 갔다.
혜은이는 2원과 3원을 지불해야하는 돈으로 여기고
그가 사용할 돈에서 5원을 제외했었다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 5원 많아졌다.

$+(+3)-(-6)=+9$ 우체부가 3원짜리 어음을 가지고 오고, 6원짜리 고지서는
가지고 갔다. 혜은이는 9원을 지불해야하는 돈으로 여기고
그가 사용할 돈에서 9원을 제외했었다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 9원 많아졌다.

③ 곱셈

두 정수를 곱할 때 '곱하는 수는 어음과 고지서'로, '곱해지는 수는 우체부가 몇 개를 가지고 왔거나 가지고 간 것'으로 해석하여 연산을 지도한다.

$(+3)\times(-4)=-12$ 우체부가 4원짜리 고지서를 3장 가지고 왔다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 12원 적어졌다.

$(-2)\times(+5)=-10$ 우체부가 5원짜리 어음을 2장 가지고 갔다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 10원 적어졌다.

$(-5)\times(-1)=+5$ 우체부가 1원짜리 고지서를 5장 가지고 갔다.
1원짜리 고지서 5장에 대한 돈을 지불하려고
그가 사용할 돈에서 5원을 제외했었다.
우체부의 방문결과, 사용할 수 있는 돈이 5원 많아졌다.

④ 나눗셈

우체부 모델에서 나눗셈은 자연스럽지 않다.

우체부 모델은 소득-손실 모델을 보완한 것이다. 소득-손실 모델에서 정수의 연산은 부자연스러운 점이 있다. 예를 들면, $(+10)-(+20)$은 10원에서 20원을 잃는다는 말이다. 즉 소유한 것보다 더 많이 잃는다는 것은 직관적으로 받아들이기 힘들다.

우체부 이야기로 해석하면, 우체부가 10원짜리 어음을 가지고 와서 어제 배달된 20원짜리 어음이 잘못 배달되었다고 하면서 다시 가지고 갔다. 결국 우체부의 방문결과 사용할 수 있는 돈은 10원이 줄었다.

소득-손실 모델은 1차원이다. 이에 반해 우체부 모델은 2차원이다. 이익과 손실의 차원(어음과 고지서, 사용할 수 있는 돈의 액수가 늘어남과 줄어듦), 또 하나의 차원(우체부가 가지고 가는 것과 가지고 오는 것)으로 2차원이다. 결과적으로 한 차원을 확장해서 음수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 자연스럽게 해결하였다.

그러나 우체부 모델에서의 '어음'이나 '고지서'의 개념을 중학교 1학년 학생들이 이해하기가 어려울 것이므로 용어의 어려움으로 음수에 대한 흥미가 반감될 우려가 있다고 판단, 그 틀은 유지하고 용어만을 바꾸어 보았다.

학생들이 많이 하는 인터넷 게임 모델로 이름을 바꾸고 우체부 모델에서의 어음과 고지서를 게임에서의 상점과 벌점으로 보고, 우체부 모델에서의 우체부가 가지고 '옴'과 가지고 '감'을 게임에서 관리자가 점수를 주고 점수를 가져가는 것으로 바꾸어 생각하는 것이다.[5)]

예를 들어 살펴보도록 하자.

$+(+3)+(-2)=+1$ 혜은이가 3게임을 이기고 2게임을 져서
관리자가 3점의 상점과 2점이 벌점을 주었다.
따라서 혜은이는 1점을 얻었다.

5) 김혜은(2004), 음수 지도 방법에 관한 연구, p.18

$+(+7)-(+4)=+3$ 혜은이가 7게임을 이기고 4게임을 져서 관리자가 7점의 상점을 주고 그 중 4점을 벌점으로 가져갔다.
따라서 혜은이는 상점 3점을 얻었다.

$+(-3)-(-4)=+1$ 혜은이는 3게임을 진 후, 다시 4게임을 이겨서 관리자가 3점의 벌점을 주고, 혜은이가 가지고 있던 벌점 중에서 4점의 벌점을 가져갔다.
따라서 혜은이는 상점 1점을 얻었다.

$(+2)\times(+3)=+6$ 관리자가 2점의 상점을 3번 주었다.
따라서 혜은이는 상점 6점을 얻었다.

$(+2)\times(-3)=-6$ 관리자가 2점의 상점을 3번 가져갔다.
따라서 혜은이는 벌점 6점을 얻었다.

$(-3)\times(+2)=-6$ 관리자가 3점의 벌점을 2번 주었다.
따라서 혜은이는 벌점 6점을 얻었다.

$(-3)\times(-2)=+6$ 관리자가 3점의 벌점을 2번 가져갔다.
따라서 혜은이는 상점 6점을 얻은 셈이다.

우체부 모델에서 용어만 바꾸어 본 것이지만 컴퓨터 게임에 익숙한 요즘 학생들에게는 이 방법이 더 이해하기 쉬울 것이라고 생각된다.

*(4) EIS*이론에 따른 *3*단계 지도 모델[6)]

6) 김혜은(2004), 음수 지도 방법에 관한 연구, p.19

이 절에서는 여태까지 곱셈을 정의할 때 동수누가로만 했던 것을 동수누감으로까지 해석함으로써 동수누가로 해석이 안 되는 $2\times(-3)$의 계산 방법과 이를 이용한 EIS이론에 따른 음수지도 방법을 알아보고자 한다.

<곱셈의 재정의>

"곱셈은 승수가 양수일 때는 동수누가(同數累加)이고,
승수가 음수일 때는 동수누감(同數累減)이 된다."

곱셈을 동수누가로만 정의했을 때는 $2\times(-3)$을 다음과 같이 3가지로 해석할 수 있다.

첫째는 곱셈의 교환법칙을 이용하여 동수누가로 해석하는 것이다. 이것은 전혀 다른 현상을 단지 곱셈의 정의로만 교환성으로 일축해버리고 같은 상황으로 만들어 버린다는 데에 문제가 있다.

둘째는 수직선 모델에서 이해시키는 것인데 이것은 학생들이 수직선 모델에서의 현상과 실제적으로 나타나는 현상을 연관시키지 못함으로 해서 구체적인 상황을 연결시킬 수 없다는 데에 문제가 있다.

셋째는 귀납적 외삽법을 이용한 것인데(여기서는 3장 2절에서 설명한다.) 이것은 그럴 수 있는 개연성은 가지고 있으나 하나의 현상을 단독으로 해석하지 못하는 문제점이 있다. 예를 들어, $(+2)\times(-30)$의 경우에는 해석하는 데 많은 시간이 걸린다. 또한 그 자체가 의미하는 실제의 어떤 상황에 대한 설명을 할 수 없다.

따라서 승수가 양수일 때는 $2\times4=(0)+2+2+2+2$으로 덧셈의 항등원인 '0'을 시초수로 두고 동수누가로 계산한다.

승수가 음수인 경우도 동수누감으로 해석하여 다음과 같이 생각해 보자.

$2\times(-4)$에서 2를 -4번 더한다. 즉 '-4'번은 4번 제거(빼주는)하는 것으로 보는 것이다. 다시 말해 $2\times(-4)=(0)-2-2-2-2=-8$로 해석하면 되는 것이다.

또 다른 예로 $(-2)\times(-4)=(0)-(-2)-(-2)-(-2)-(-2)=0+2+2$

$+2+2=+8$로 생각하는 것이다.

다음의 EIS이론에 따른 모델에서는 곱셈을 승수부호에 따라 동수누가와 동수누감으로 보고 고찰할 것이다.

<*EIS*학습이론>

브루너(Bruner)의 EIS이론은 하나의 학습과제를 활동적 표상단계(Enactive representation), 영상적 표상단계(Iconic representation), 상징적 표상단계(Symbolic representation)로 나누어 학습지도 전략을 수립한다. EIS이론에서는 한 학습과제를 학생들이 재미있는 놀이를 할 수 있게끔 활동적 표상으로 구성한 후, 학생들이 활동 후에 활동적 표상단계에서의 각각의 활동이 본 학습에서의 수식과 어떤 관련이 있는지 연관을 지어 나가면서 상징적 표상으로 바꾸어 가게 한다는 것이다. 이러한 학습은 학생들의 사고의 유연성을 높여줄 수 있을 것이다.

여기에서는 내용상 4가지 학습요소로 분류하고, 그 4가지 학습요소에 따른 3단계의 지도 전략을 제시할 것이다.

첫째는 정수의 개념화 지도 전략, 둘째는 정수의 덧셈지도 전략, 셋째는 뺄셈, 넷째는 곱셈지도 전략에 대해 살펴본다.

각 전략에 따른 3단계는 다음과 같이 제시한다.

제 1단계에서는 학습내용을 모두 이야기로 구성해서 학생들이 수학 학습임을 모르게 놀이 학습으로 전개한다.

제 2단계에서는 1단계에서 했던 이야기 활동 내용을 학습요소와 연관해 도식화시킴으로써 이야기와 학습요소간의 상호전환 활동을 한다.

제 3단계에서는 수리적은 추상적 사고 과정으로 학습을 전개시켜 나간다.

이때 1, 2단계 과정을 되새기면 구체와 추상의 관련성을 이해시키는 것이다.

정수의 개념화 지도 전략

<제 *1* 단계>

어느 마을에는 혜은이라는 착한 아이가 살고 있었다. 혜은이는 평소에 착한 일을

많이 하는 아이로 하늘나라의 천사가 되고 싶어 하는 아이였다. 그래서 혜은이는 하나님에게 자신이 하늘나라의 천사가 될 수 있도록 해 달라고 매일같이 기도했다. 하나님은 평소에도 착한 혜은이 매일 정성껏 기도하는 모습을 보고 감동하여 천사장을 불러 혜은이의 소원을 들어주라고 지시하였다.

천사장은 천사들을 불러 회의를 열었다. '어떻게 하면 혜은이를 하늘나라로 올릴 수 있을까?' 하는 것이 회의의 내용이었다. 천사들은 고민 끝에 혜은이에게 풍선을 매달아주어 혜은이 둥실둥실 떠서 하늘나라로 올라올 수 있도록 하자고 의논을 했다.

혜은이에게 풍선을 1개 매달아주면 혜은이는 하늘나라를 향해 1칸 올라가게 되었다. 어떤 천사는 풍선을 4개 매달아주어 혜은이를 하늘나라로 4칸 올라가게 하였고, 어떤 천사는 풍선을 6개 달아주어 혜은이는 6칸을 올라가게 되었다. 이렇게 많은 천사들이 풍선을 매달아 주었고, 혜은이는 하늘나라를 향해 점점 올라가고 있었다.

이때, 혜은이의 친구들 사이에서 긴급회의가 열리고 있었다. 친구들은 혜은이가 하늘나라로 올라가 하늘나라의 천사가 되면 평소에 착하고 친한 친구인 혜은이를 다시는 볼 수 없을 거라는 생각을 하게 되었다. 그래서 친구들은 혜은이가 하늘나라에 올라가지 못하도록 막기 위한 대책을 강구하기 시작하였다. 친구들의 회의 결과는 혜은이의 발에 돌멩이를 매달아 주자는 것이었다. 혜은이에게 돌멩이 1개를 매달면 혜은이는 1칸을 내려오게 되었다. 어떤 친구가 돌멩이를 2개 매달아 주어 혜은이는 땅을 향해 2칸 내려왔다. 또 어떤 친구가 돌멩이를 5개 달아주자 혜은이는 5칸을 내려오게 되었다.

이렇게 천사들과 친구들은 서로 풍선과 돌멩이를 많이 매달아 주려고 쉴 틈 없이 움직였고, 혜은이는 올라갔다가 내려 갔다가를 반복하게 되었다.

자, 여러분들도 천사 또는 친구가 되어서 혜은이에게 풍선 또는 돌멩이를 매달아 보세요.

<제 *2* 단계>

제 1단계에서의 풍선과 돌멩이의 역할의 차이를 학생들에게 인식시켜, 풍선을 혜은이를 올라가게 하고 돌멩이는 혜은이를 내려가게 하는 것을 이해시킨다. 같은 3개라도 풍선을 3개 달아주었을 때와 돌멩이를 3개 달아주었을 때 혜은이의 상황이 반대가 됨을 보여준다.

이렇게 하여 수에는 혜은이가 원하는 방향으로 이끌어주는 수인 양수와 그 반대인 음수가 있음을 깨닫게 한다. 또한 양수와 음수의 표현에 대한 약속을 학습시킨다. 따라서 이때 풍선은 양수가 되고, 돌멩이는 음수가 됨을 학생들 스스로가 찾아내게 한다.

<제 *3* 단계>

개념의 고착화 단계로서 구체(具體)와 추상(抽象)의 연관성을 인식하여 구체가 나타내는 추상을 정확하게 표현할 수 있다. 즉 각각의 양수를 그에 해당하는 풍선을 연상하며 이해하고 각각의 음수는 그에 해당하는 돌멩이를 연상하며 이해한다.

정수의 덧셈 지도 전략

<제 *1* 단계>

하늘나라를 향해 올라가던 혜은이는 뜻밖으로 친구들이 나타나서 방해를 하는 바람에 공중에서 오르락내리락 하고 있었다. 혜은이에게 너무 많은 천사들과 친구들이 달려들게 되자 천사들과 친구들은 타협을 하였다. 천사와 친구가 각각 1명씩 나와서 풍선과 돌멩이를 달아주자고 의논을 했다.

천사1이 풍선을 3개 매달아주는 동안 친구1이 돌멩이 4개를 매달아서 혜은이는 3칸 올라갔다가 다시 4칸을 내려와 원래보다 1칸을 내려오게 되었다.

천사2가 풍선을 7개 매달아주고 친구2가 돌멩이를 4개 매달아 주어서 혜은이는 7칸 올라갔다가 다시 4칸을 내려와 이번에는 3칸을 올라간 셈이 되었다.

천사3이 풍선을 4개 매달아주고 친구3이 돌멩이를 4개 매달아 주어서 혜은이는 4칸 올라갔다가 다시 4칸을 내려와서 원래 그 자리에 그대로 있게 되었다.

이렇게 혜은이는 하늘나라를 향하여 다가갔다가 멀어졌다가 하였다.

<제 *2* 단계>

제 1단계에서의 풍선을 달아주고 돌멩이를 달아주는 것을 학생들에게 각각 양수와 음수를 더하는 것과 같다는 것을 이해시킨다.

예를 들어, 풍선을 3개 매달아 준다는 것은 $+3$을 더하는 의미임을 이해시킨다. 이때 더하기는 매달아 주는 것이고, 풍선 3개는 $+3$을 의미하게 되는 것이다. 마찬가지로 풍선을 7개 매달아 주는 것은 $+(+7)$을 의미하게 된다.

또한 돌멩이를 매달아 주는 것은 음수를 더한다는 것이다. 이때 돌멩이는 음수를 뜻하고 매달아 준다는 것은 더하는 것을 뜻하는 것이므로, 예를 들어 돌멩이 4개를 매달아 준다는 것은 $+(-4)$이 되는 것이다. 그래서 돌멩이 6개를 매달아 주는 것은 $+(-6)$과 같이 표현할 수 있다.

결국 풍선과 돌멩이를 같이 매달면, 양수와 음수의 덧셈이 되어 정수의 덧셈에 관한 지도가 될 수 있는 것이다. 다양한 예를 통하여 정수의 덧셈에서의 교환법칙과 결합법칙 또한 이해시킬 수 있다. 다른 부호의 두 수의 합은 절대값이 큰 수의 부호에 두 수의 절대값의 차를 쓴 것이 된다는 사실을 학생들에게 주지시킨다.

<제 *3* 단계>

정수의 덧셈에 관한 여러 문제를 혜은이에게 풍선과 돌멩이를 달아주는 놀이를 하던 것을 연상하며 계산에 임하도록 한다. 즉 계산식에서의 각각의 수나 연산 작용을 놀이단계의 각각의 활동을 연상하면서 행하는 것이다.

정수의 뺄셈 지도 전략

<제 *1* 단계>

계속해서 풍선과 돌멩이를 매달아 주는 천사들과 친구들도 이제는 지쳤다. 그 때 꾀가 많은 한 친구가 혜은이에게 매달아 놓은 풍선을 3개 끊어버려 혜은이는 땅을 향해 3칸 내려오게 되었다. 그것을 본 천사가 화가 나서 돌멩이를 4개 끊어버렸다. 그랬더니 혜은이는 하늘을 향해 4칸을 올라가게 되었다.

어떤 천사들은 풍선을 매달아 주기도 하고, 어떤 천사들은 이렇게 돌멩이를 끊어

버리기도 하였다. 마찬가지로 어떤 친구들은 돌멩이를 매달아 주기도 하고 풍선을 끊어 버리기도 하였다. 왜냐하면 천사가 풍선을 3개 매달아 주는 것이나 돌멩이를 3개 끊어버리는 것이 똑같이 혜은이를 3칸씩 올라가게 만들었기 때문이다. 또한 친구들이 돌멩이를 4개 매달아 주는 것이나 풍선을 4개 끊어버리는 것은 똑같이 혜은이를 4칸씩 내려오게 만들어 버리므로 같은 역할을 하게 되었다.

<제 *2* 단계>

자른다는 것은 뺀다는 것임을 이해시키도록 한다. 즉 풍선을 자른다는 것은 풍선이 양수를 뜻하는 것이므로 양수를 제거해 버린다는 것이고, 따라서 양수를 뺀다는 해석이 가능하다는 것이다. 또한 돌멩이를 자른다는 것은 돌멩이가 음수를 뜻하므로 음수를 제거해 버린다는 해석으로 음수를 뺀다는 해석이 가능하다.

풍선을 자르면 혜은이는 땅을 향해 내려오게 되므로 이 행위는 음의 행위가 되어 결국 자르는 풍선의 개수만큼의 돌멩이를 달아주는 것과 같은 역할을 한다. 따라서 다음과 같은 식이 성립한다.

$-(+3)=+(-3)$: 풍선 3개를 자른다. = 돌멩이 3개를 단다.

$-(-3)=+(+3)$: 돌멩이 3개를 자른다. = 풍선 3개를 단다.

위와 같이 뺄셈을 계산의 편의상 반수(反數)의 덧셈으로 바꾸어서, 정수의 뺄셈은 정수의 덧셈으로 계산을 하면 된다는 것을 보여준다.

여러 가지의 다양한 문제로 뺄셈은 반대부호의 수를 더하는 것과 결과가 같다는 내용을 이해시킴으로써, 양의 요소를 제거하는 것(양수를 빼는 것)은 음의 요소를 달아주는 것(음수를 더하는 것)과 같다는 것을 학생들에게 이해시킨다. 마찬가지로, 음의 요소를 제거하는 것(음수를 빼는 것)은 양의 요소를 달아주는 것(양수를 더하는 것)과 같다는 사실도 학생들에게 이해시킨다.

<제 *3* 단계>

정수의 뺄셈에 관한 여러 문제도 혜은이에게 풍선과 돌멩이를 잘라버리는 놀이를 하던 것을 연상하며 풍선과 돌멩이를 잘라버리는 행위는 각각 돌멩이와 풍선을

달아주는 행위와 같은 결과를 얻은 것을 연상시키며 뺄셈을 반대부호 덧셈으로 자연스럽게 전환하여 계산하도록 유도한다.

정수의 곱셈 지도 전략

<제 *1* 단계>

지칠 대로 지친 천사들과 친구들은 몇 명씩 짝을 지어 행동하기 시작했다. 천사 3명이 풍선을 4개씩 혜은이에게 매달아 주었더니, 혜은이는 4칸씩 3번 올라가서 모두 12칸을 올라가게 되었다. 그 모습을 본 친구들도 똑같이 행동했다. 친구 3명이 돌멩이를 4개씩 혜은이에게 매달아 주었더니, 혜은이는 4칸씩 3번 내려가게 되어 모두 12칸을 내려가게 되었다. 그리고는 바로 친구 3명은 각각 풍선을 4개씩 잘라버렸다. 그러자 혜은이는 또 4칸씩 3번을 내려와서 12칸을 내려오게 되었다. 이를 본 화가 난 천사들도 3명이 돌멩이를 4개씩 잘라버리자 혜은이는 4칸씩 3번 올라가게 되어 다시 12칸을 올라갔다.

<제 *2* 단계>

풍선을 양수의 개념이고 돌멩이는 음수의 개념이다. 또한 매달아 주는 것은 더해준다는 의미이고 잘라버린다는 것은 뺀다는 의미이다. 따라서 같은 개수의 풍선 또는 돌멩이를 여러 번 매달아 주는 것은 양수 떠는 음수를 여러 번 더해주는 것이 된다. 따라서 승수가 양수인 곱셈이 되는 것이다. 그러나 같은 개수의 풍선 또는 돌멩이를 여러 번 잘라 버리는 것은 양수 또는 음수를 여러 번 빼주는 것이 되어 승수가 음수인 곱셈이 된다.

위의 사실을 학생들이 곱셈식과 연관을 지어 찾아낼 수 있도록 유도해 주고 많은 이야기를 꾸며 연관성을 익히도록 한다.

승수가 양수이면 여러 번 달아주는 것을 의미하고 승수가 음수이면 여러 번 잘라버리는 것을 의미한다. 따라서 승수가 양수인 경우에는 '동수누가'가 되고 승수가 음수인 경우에는 '동수누감'이 된다.

$a > 0$, $b > 0$ 일 때

① 풍선 a개를 b번 달아주었다.

$$(+a)\times(+b)=(+a)+(+a)+(+a)+\cdots+(+a)=+ab$$

② 돌멩이 a개를 b번 달아주었다.

$$(-a)\times(+b)=(-a)+(-a)+(-a)+\cdots+(-a)=-ab$$

③ 풍선 a개를 b번 잘라버렸다.

$$(+a)\times(-b)=-(+a)-(+a)-(+a)-\cdots-(+a)$$
$$=(-a)+(-a)+(-a)+\cdots+(-a)=-ab$$

④ 돌멩이 a개를 b번 잘라버렸다.

$$(-a)\times(-b)=-(-a)-(-a)-(-a)-\cdots-(-a)$$
$$=(+a)+(+a)+(+a)+\cdots+(+a)=+ab$$

결과적으로 같은 부호의 두 수의 곱의 결과는 양수가 되고,

$$(+)\times(+)=(+) \qquad (-)\times(-)=(+)$$

다른 부호의 두 수의 곱의 결과는 음수가 된다.

$$(+)\times(-)=(-) \qquad (-)\times(+)=(-)$$

<제 3 단계>

정수의 곱셈에 관한 여러 문제를 혜은이에게 같은 개수의 풍선과 돌멩이를 달아주거나 잘라버리는 놀이를 하던 것을 연상하며 계산에 임하도록 한다. 즉 계산식에서의 승수가 양수일 때에는 달아주는 행위를 연상하고 승수가 음수일 때에는 잘라버리는 행위를 연상하면서 계산에 임하도록 한다.

이 EIS학습이론은 양수와 음수의 적절한 대비로 음수를 처음 접하는 학생들도 이해시키기 쉽다는 장점이 있으나 이 이론은 각각의 연산에 대해서 3단계를 거쳐야 하므로 시간을 많이 필요로 하는 단점이 있다. 하지만 곱셈의 부호법칙을 지도하기 위해 EIS학습이론에 따른 지도 모델을 직접 그림을 그려가면서 도입하는 것은 (음수)×(음수)=(양수)가 되는 것을 시각적으로 잘 보여줄 수 있다.

3.2 형식적 지도

(1) 귀납-외삽법*(歸納-外揷法)*

프로이덴탈(Freudenthal)은 자연수의 성질을 그대로 정수로 확장하여 다음과 같은 방법으로 지도하고자 주장한다.

자연수에서 성립되는 대수적 성질이 확장된 체계인 정수에서도 그대로 적용된다는 전제하에 음수와 음수의 연산을 정의할 수 있다. 이 출발점은 자연수의 기초적인 계산 법칙인 덧셈과 곱셈의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이다.

귀납적 외삽법은 수학 내적인 유추로서 자연수 영역에서 더 큰 영역인 정수로의 유추적 확장이다. 그래서 학생들은 이 방법으로 음수의 연산을 학습하기 전에 자연수에 대한 학습이 제대로 이루어져 있어야 한다. 귀납은 그 다음 단계를 구성해 나가는 예견을 포함한다. 이러한 예견은 연속적인 행동을 구성하는 것으로서, 유한개의 구성 후 그 다음 단계의 구성을 계속 진행할 수 있도록 하는 것이다. 즉 이것은 양수의 사칙연산의 결과로 음수의 결과를 예측하는 것이다.

① 덧셈

일정한 수에 양의 정수를 차례대로 더한 후, 이 결과를 가지고 그 일정한 수에 음수를 차례대로 더한 결과를 예측하게 된다.

$3+2=5$	$2+2=4$
1씩 줄어듦	1씩 줄어듦
$3+1=4$	$2+1=3$
1씩 줄어듦	1씩 줄어듦
$3+0=3$	$2+0=2$
1씩 줄어듦	1씩 줄어듦
$3+(-1)=\square$	$2+(-1)=\square$
$3+(-2)=\square$	$2+(-2)=\square$

이 방법으로 정수 전체의 덧셈을 예측하는 것은 자연스럽다.

위의 결과를 바탕으로 다양한 덧셈을 시도한다.

$(-1)+3=2$	$(-3)+3=0$
$(-1)+2=1$	$(-3)+2=-1$
$(-1)+1=0$	$(-3)+1=-2$
$(-1)+(-1)=\square$	$(-3)+0=\square$
$(-1)+(-2)=\square$	$(-3)+(-1)=\square$

이때 부호가 다른 두 정수의 합은 두 수의 절대값-부호를 생각하지 않은 수-의 차에 절대값이 큰 수의 부호를 붙인다는 것을, 부호가 같은 두 정수의 합은 두 수의 절대값의 합에 두 수의 부호를 붙인다는 것을 학생들에게 고정화시켜 주어야 한다.

② 뺄셈

$3-2=1$	$2-2=0$
1씩 늘어남	1씩 늘어남
$3-1=2$	$2-1=1$
1씩 늘어남	1씩 늘어남
$3-0=3$	$2-0=2$
1씩 늘어남	1씩 늘어남
$3-(-1)=\square$	$2-(-1)=\square$
$3-(-2)=\square$	$2-(-2)=\square$

위의 예를 통해 $-(-1)=+(+1)$, $-(-2)=+(+2)$이므로 정수의 뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 더한 결과와 같다.

③ 곱셈

귀납적 외삽법을 이용하면 곱셈의 부호 법칙을 쉽게 인식시킬 수 있다.

$3\times2=6$	$2\times6=12$
3씩 줄어듦	6씩 줄어듦
$3\times1=3$	$1\times6=6$
3씩 줄어듦	6씩 줄어듦
$3\times0=0$	$0\times6=0$
3씩 줄어듦	6씩 줄어듦
$3\times(-1)=\square$	$(-1)\times6=\square$
$3\times(-2)=\square$	$(-2)\times6=\square$

이 방법을 통해서 다른 부호를 갖는 두 수의 곱은 음수라는 사실을 쉽게 인식시킬 수 있다. 마찬가지로 음수와 음수의 곱도 지도할 수 있다.

$(-4)\times2=-8$	$2\times(-5)=-10$
4씩 늘어남	5씩 늘어남
$(-4)\times1=-4$	$1\times(-5)=(-5)$
4씩 늘어남	5씩 늘어남
$(-4)\times0=0$	$0\times(-5)=0$
4씩 늘어남	5씩 늘어남
$(-4)\times(-1)=\square$	$(-1)\times(-5)=\square$
$(-4)\times(-2)=\square$	$(-2)\times(-5)=\square$

이를 통해서 (음수)×(음수)=(양수)라는 사실을 쉽게 인식시킬 수 있다.

④ 나눗셈

나눗셈도 곱셈과 마찬가지 방법으로 구할 수 있다.

이렇게 하여 시각화와 상상력을 돕는 교구를 사용하지 않고 음수의 사칙연산을

할 수 있다. 수학 내적인 유추인 귀납-외삽법을 사용하여 자연수 체계의 성질을 더 큰 영역, 즉 정수체계의 성질로 확장하였으나 오류가 발생하지 않고 일관성이 있다. 대수적 해법의 영속성을 획득하기 위하여 음수를 고안해 냈고, 이전의 영역인 자연수의 성질의 영속성을 위하여 음수 연산을 정의한 것을 고려할 때, 귀납-외삽법에 의한 도입은 자연스러운 접근이다.

(2) 형식 불역의 원리

형식 불역의 원리는 새로운 수의 계산방법(예를 들어 자연수에서 정수로 확장될 때, 실수에서 복소수로 확장될 때 등)을 정할 때, 종래의 수에 대해 성립되는 법칙이 될 수 있는 한 그대로 성립되게 하는 원리이다.

자연수 n이 있다. 방정식 $x+n=0$의 해로 음수 $-n$을 정의한다. 이때 방정식의 해 $-n$의 유일함이 전제되어야 한다. 이와 같은 방법으로 음수의 집합을 만들 수 있다. 음수는 양수, 0과 함께 정수를 구성한다. 확장된 영역에서도 자연수에서 성립한 계산 법칙이 일관성 있게 성립하도록 음수의 덧셈과 곱셈을 정의한다.

자연수 a, b에 대하여 방정식

$$x+a=0 \cdots\cdots\cdots ㉠$$

$$y+b=0 \cdots\cdots\cdots ㉡$$

을 만족시키는 유일한 해인 $x=-a, y=-b$로 음수를 정의한다.

그러면, $x+y=(-a)+(-b)$이다.

㉠과 ㉡의 양변을 각각 더하고, 형식 불역의 원리에 의해 새로운 수 x, y의 덧셈이 자연수의 덧셈과 같은 성질을 만족한다고 하면 교환법칙과 결합법칙에 의해

$$(x+y)+(a+b)=0$$

이다. 따라서

$$x+y=-(a+b)$$

이다. 이 방정식의 해는 유일하므로

$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$

이다. 이 결과, 두 음수의 덧셈은 두 수의 절대값의 합에 음의 부호를 붙인 것과 같다.

한편, $xy=(-a)(-b)$이다.

㉠식에 b를 곱하고, ㉡식에 x를 곱하면,

$$bx+ab=0,\ xy+bx=0$$

이므로

$$-bx=ab,\ xy=-bx$$

이다. 따라서

$$xy=ab$$

이다. 이 방정식의 해는 유일하므로

$$(-a)(-b)=ab$$

이다. 이 결과, 두 음수의 곱셈은 두 수의 절대값의 곱에 양의 부호를 붙인 것과 같다.

이와 같이 음수와 음수의 연산을 형식적으로 다루면 부호 법칙과 대수적 성질을 명확하게 지도할 수 있다.[7)]

형식 불역의 원리는 발견술적 기능을 갖고 있으므로 엄밀한 증명을 요구하는 경우에 거부되고 있는데, 실제로 형식 불역의 원리에 의하여 증명되는 것은 아무것도 없다.

형식 불역의 원리에 의한 확장의 과정은 순전히 협약적이다.

확실히 우리는 왜 $(-4)\times(-3)=12$ 인지를 유연하게 설명할 수는 있지만

7) 우정호(2001), 학교수학의 교육적 기초, p. 215-216

그것을 증명할 수는 없다. 그것들은 임의적인 협약들이며 다른 것들로 대체할 수 있다.[8)]

교사들은 이러한 문제점을 회피하기 위해서 음수지도 시 학생들에게 연산규칙을 제시하고 외우게끔 지도하는 경우가 있다.

(음수) × (음수) = (양수)

(음수) × (양수) = (음수)

그러나, 프로이덴탈은 교사가 $(-4)\times(-3)=12$가 됨을 보인 그 방법(형식 불역의 원리)은 수학적으로 매우 중요하고 그것은 자의적인 주장이 아니며 일반적 법칙이 보존되면서 자연수로부터 정수로 수 관념이 확장 가능하다면 그 결과는 본질적으로 유일하다고 말한다. 그리고 이러한 원리에 의한 설명은 학생들에게도 신선한 자극을 주며 의미있는 수학활동이기 때문에 이러한 과정 없이 법칙만을 지도하는 것은 해로운 일이라고 주장한다.

학생들에게 위의 방법을 문자 그대로 제시하는 것보다는 직관적으로 알 수 있게 숫자를 대입해서 지도한다면 이해하기가 더욱 쉬울 것이다. 예를 들어, $(-2)+(-1)$의 합을 구하기 위해서 위에 정의된 방정식을 이용하면

$$(-2)+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{㉠}$$

$$(-1)+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠식과 ㉡식을 각각 더하고 교환법칙과 결합법칙에 의해

$$\{(-2)+(-1)\}+(1+2)=0$$

이다. 그러면, $(-2)+(-1)=-(1+2)=-3$이 된다.

$(-2)\times(-1)$도 정의해 보면, ㉠식에 1을 ㉡식에 -2를 곱하면,

$$1\times(-2)+1\times2=0$$

$$(-1)\times(-2)+1\times(-2)=0$$

이므로 $1\times2=-\{1\times(-2)\}$이고, $(-1)\times(-2)=-\{1\times(-2)\}$이다. 따라서 $(-1)\times(-2)=1\times2$이 된다.

8) H. Freudenthal(1983), Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, p.232

이런 방법으로 학생들에게 음수의 연산 법칙을 설명하는 것은 프로이덴탈의 일반화된 연산을 학습하는 것에는 어긋나지만 (음수)×(음수)=(양수)임을 이해하지 못하는 학생들에게는 효과적인 지도 방법이 될 수 있다.

3.3 기타 음수지도 모델 및 교과서 분석

(1) 기타 음수지도 모델

앞에서 살펴본 음수지도 모델 이외에도 우리는 음수를 정의하는 여러 가지 예들을 일상생활에서 접할 수 있다. 실례로, 기온은 영상 (+)과 영하 (−)로, 국가와 회사의 재정을 흑자 (+)와 적자 (−)로 나타내기도 하고, 위로 향하는 계단과 아래로 향하는 계단, 동쪽과 서쪽의 방향 표시등도 모두 양수와 음수를 적용하여 표현할 수 있다. 그러나 어느 한 모형이 모든 개념이나 정수의 사칙연산을 만족스럽게 설명하지는 못하고 있다.

이 밖에 또 다른 모델 중에 '지렛대 모델'도 음수의 개념을 시각화하기 위한 모델이라 할 수 있다. 지레의 축에서 오른쪽으로의 길이는 양수로, 왼쪽으로의 길이는 음수로 나타내어지며 위에서 아래쪽 방향으로 작용하는 힘은 양, 아래에서 위쪽 방향으로 작용하는 힘은 음을 의미한다. 힘과 거리의 곱은 모멘트가 되며 모멘트의 합이 0이 되면 지렛대는 평형상태를 이룬다.

계산의 합이 0이 되는 상태의 평형만 시각적으로 파악할 수 있으므로 등식의 좌변, 우변의 개념과 연관하여 볼 때 상당한 제한을 갖고 있으며, 두 가지로 표현되는 모멘트 역시 높은 수준의 개념이므로 이 모델 역시 쉽게 지도되고 이해되기는 어렵다.

(2) 현재 중학교 수학교과서 분석

이제 현재 중학교 1학년 수학 교과서에서 제시되고 있는 음수지도에 대해 살펴보

고자 한다. 기존의 현행 교과서에 제시되어 있는 정수의 정의는 다음과 같다.

> 자연수에 양의 부호 '+'를 붙인 수 $+1, +2, +3, \cdots$을 양의 정수,
> 음의 부호 '−'를 붙인 수 $-1, -2, -3, \cdots$을 음의 정수라 한다.
> 그리고 양의 정수, 0, 음의 정수를 통틀어 정수라 한다.[9)]

위의 정의에 대한 보기로 각 교과서에서 일상의 다양한 예를 양수와 음수로 들고 있으며 대체로 그 유형은 다음과 같다.

섭씨 $0°$의 눈금을 기준점으로 하여 위에 있으면 영상, 아래에 있으면 영하를 각각 $+5, -5$와 같이 표시하고, 0을 중심으로 동쪽과 서쪽으로 갈 때 각각 $+, -$로 나타내며, 영상 $(+)$과 영하 $(-)$, 해발 $(+)$과 해저 $(-)$, 이익 $(+)$과 손해 $(-)$, 증가 $(+)$와 감소 $(-)$, 과거 $(+)$와 미래 $(-)$ 등 서로 반대인 성질을 나타낼 때 한 쪽은 $+$, 다른 쪽은 $-$로 나타낸다. 중학교 수학 교과서에서 덧셈 지도 시 대부분 수직선 모델을 제시하고 있다. 뺄셈을 지도할 때는 덧셈의 역원을 이용하여 뺄셈을 덧셈으로 변환하여 정수 개념지도를 하고 있는 교과서도 있다. 곱셈을 지도하기 위하여 사용된 모델은 대부분이 귀납적 외삽법과 형식 불역의 원리이다.

각각의 교과서마다 기존의 모델로 양수와 음수 즉, 정수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 설명한 후에는 형식적인 계산 방법을 박스(box)형식 안에 설명해 놓음으로써 학생들이 계산방식을 완전히 암기해 놓을 수 있도록 하고 있다.

다음은 교과서에 기재된 유리수(정수)의 사칙연산에 관한 설명이다.

《유리수의 덧셈》

(1) 부호가 같은 두 수의 덧셈은 두 수의 절대값의 합에 공통인 부호를 붙인다.

(2) 부호가 다른 두 수의 덧셈은 두 수의 절대값의 차에 절대값이 큰 수의 부호를 붙인다. 특히, 절대값이 같을 때에 그 합은 0이다.

---

9) 중학교 수학 7-가, 대한교과서(2001), p.53, 외 5종

《유리수의 뺄셈》

뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 더한다.

《유리수의 곱셈》

(1) 부호가 같은 두 수의 곱은 절대값의 곱에 양의 부호 $+$를 붙인다.

$$(+)\times(+) \rightarrow (+), \quad (-)\times(-) \rightarrow (+)$$

(2) 부호가 다른 두 수의 곱은 절대값의 곱에 음의 부호 $-$를 붙인다.

$$(+)\times(-) \rightarrow (-), \quad (-)\times(+) \rightarrow (-)$$

(3) 어떤 수와 0과의 곱은 항상 0이다.

《유리수의 나눗셈》

(1) 부호가 같은 두 수의 나눗셈의 몫은 각 절대값의 나눗셈의 몫에 양의 부호 $+$를 붙인다.

$$(+)\div(+) \rightarrow (+), \quad (-)\div(-) \rightarrow (+)$$

(2) 부호가 다른 두 수의 나눗셈의 몫은 각 절대값의 나눗셈의 몫에 음의 부호 $-$를 붙인다.

$$(+)\div(-) \rightarrow (-), \quad (-)\div(+) \rightarrow (-)$$

중학교 수학 교과서의 정수(음수)지도를 분석한 결과를 정리해 보면, 덧셈은 거의 대부분의 교과서가 수직선 모델을 택하고 있고, 뺄셈은 덧셈의 역원으로 설명하고 있으며, 곱셈은 귀납적 외삽법을, 나눗셈은 곱셈의 관계와 역임을 이용하고 있다. 그러나 이것은 모두 기존의 모델이 정수의 모든 사칙연산을 만족스럽게 설명해주지 못한다는 것을 보여주는 실례가 된다.

따라서 이러한 모델들의 장점들을 이용해 학생들에게 음수의 개념을 소개하고, 연산방법을 적당히 이해시킨 후, 형식적인 지도방법을 적용하고 있는 것이 현재까지 계속되고 있는 음수지도 방법이다.

제 4 장 효과적인 음수지도

4.1 음수지도 모델 사용의 장단점

음수가 반직관적인 형식적 개념이라는 이유로 음수지도 시 형식적 지도만을 강조한다면 음수의 풍부한 내용을 전달할 수 없다. 음수지도에 있어 직관적 지도를 한다는 것은 이제 막 중학교에 입학한 학생들에게 좀 더 시각적으로 흥미를 줄 수 있고 음수 연산의 이해를 쉽게 하기 위한 좋은 방법이 될 수 있다.

이제부터 4가지 직관적 지도방법의 장단점을 살펴보자.

수직선 모델은 대부분의 교과서에 빠지지 않고 나올 정도로 음수 연산 지도에 용이하게 쓰이고 있다. 특히 덧셈과 뺄셈 지도 시 효과적인데 곱셈과 나눗셈은 오른쪽 방향이 양수, 왼쪽 방향이 음수를 나타낸다는 수직선상에서의 암묵적인 가정을 깨는 것이므로 오히려 혼동만 가져올 수 있다는 문제점이 있다. 또한 수직선(數直線) 모델은 수평선이 아닌 수직선(垂直線)이어야 한다는 주장이 프로이덴탈에 의해 주장되었는데, 실세계의 음수지도 모델로 자주 이용되는 온도계, 해발·해저, 지상·지하 등이 수직(垂直)모양이므로 수직선 모델 역시 수직인 것이 더 자연스럽고 이해하기가 쉽다는 것이다. 이러한 주장이 교과서에서 수용된 것을 볼 수 있는데 수직선 모델은 수평으로 사용하되, 실세계 모델 중에도 수평인 동쪽·서쪽, 몇 시간 전·후 등으로 예를 들어 지도하는 것을 볼 수 있다.

셈돌 모델은 우리가 흔히 볼 수 있는 바둑돌을 많이 이용하게 되는데. 이것을 양수와 음수를 시각적으로 대등하게 대비시킬 수 있고 학생들 스스로 덧셈·뺄셈 연산을 바둑돌을 이용해 직접 해 볼 수 있다는 점에서 수직선 보다 쉽게 덧셈 · 뺄셈을 지도할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 셈돌 모델은 곱셈을 설명할 수 없다는 점이 커다란 단점으로 지적되어 왔는데 곱셈을 승수가 양일 때와 음일 때로 나누어 곱셈의 재정의에 따른 지도방법을 택하면 셈돌 모델 또한 곱셈지도가 가능하다는 것을 앞에서 살펴보았다. 앞에서 살펴보았듯이 셈돌 모델에 의한 곱셈지도는

승수가 음수일 경우 시초수 0에 해당하는 검은 돌과 흰 돌의 개수를 설명하는 보다 적절한 방법을 연구해 낸다면 셈돌 모델로써 곱셈 연산 또한 효과적으로 지도할 수 있을 것이다.

우체부 모델은 용어 자체에서 느껴지는 어려움을 탈피하고자 요즘 학생들 세대에 맞는 게임 모델로 전환할 것을 주장하고 그 구체적인 방법을 살펴보았다. 이제 음수를 처음 접하는 학생들에게는 '음수' 그 자체로도 어려울텐데 '고지서'나 '어음'이라는 어려운 용어로 학생들을 가르치는 것은 불필요하다는 생각에서였다. 또한 요즘 학생들의 대부분은 '게임'에 흥미가 있으므로 이것을 수학지도에 도입한다면 동기유발은 물론 실생활에 적용 또한 할 수 있을 것이므로 매우 효과적인 지도방법이 될 수 있을 것이다.

EIS이론에 따른 3단계 지도 모델은 1단계에서는 놀이 활동으로, 2단계에서는 1단계의 놀이 활동을 학습요소와 연관시켜 둘 사이의 상호학습을 하고, 3단계에서는 새로운 문제를 접해서 1, 2단계를 적용해서 사고할 수 있게 하는 것이다. 이 지도방법을 정수지도에 도입하고 있는 것으로 매우 체계적으로 어떤 학생에게도 효과적인 지도방법일 수 있다는 장점이 있다. 그러나 정수 개념과 사칙연산을 각각 3단계에 걸쳐 지도해야 하므로 시간이 매우 오래 걸려 현실적으로 학교수업에서는 이 방법으로 지도하기가 매우 어렵다는 문제가 있다. 그럼에도 불구하고 이 지도방법을 단편적으로나마 교과서에서 볼 수 있는 것은 이 지도방법이 매우 효과적이라는 것을 말해주는 것이다. 따라서 앞으로는 시간적인 문제를 해결하려는 노력을 계속해야 할 것이다.

위 4가지 방법에서 보듯이 직관적 모델은 흥미롭기는 하나 나름대로의 단점을 가지고 있다. 그리고 Fischbein이 지적하고 있듯이 이 모든 직관적 모델은 인위적인 규약체계를 통해 한 단계씩 형성된 것이기 때문에 어떤 개념을 직관적으로 수용하거나 문제풀이 과정에서 직관적인 비약이 일어날 때 요구되는 분명함과 일관성이 결여될 수 있다. 그러므로 프로이덴탈(Freudenthal)은 학생들에게 형식적 관점에서 수학개념을 지도하는 첫 번째 기회로 음수개념 지도를 제안하는 것이다.

여기서 형식적 지도 방법인 귀납-외삽법과 형식 불역성의 장단점을 살펴보도록

한다.

귀납-외삽법은 덧셈·뺄셈·곱셈의 연산이 모두 지도 가능하지만 그 중에서도 곱셈을 자연수에서 음수로 자연스럽게 확장시킴으로써 다소 복잡하게 느껴질 수 있는 음수의 곱셈을 지도할 수 있다는 장점이 있다. 또 이 방법은 계산과 추론하는 과정을 통해 이루어지는데 프로이덴탈(Freudenthal)은 직관적 지도방법이 수동적인 측면을 보완할 수 있는 능동적 지도법이라고 말한다. 그 이유는 음수 연산을 직관적 모델로 직접 보여주는 것은 한계가 있고 자연스럽게 추론과 계산으로 점검해 볼 수 있는 방법이라고 생각되기 때문이다. 그러나 직관적 모델을 사용하지 않고 귀납-외삽법으로만 음수의 연산을 정의한다면 음수가 물리적 세계를 다양하게 해석하여 수의 영역을 풍요롭게 한다는 것 학생들은 알 수 없을 것이다. 귀납-외삽법에서 음수는 단지 수일뿐이기 때문이다.

형식 불역성에 의한 지도 방법은 문자에 익숙하지 못한 중학교 1학년 학생들에게 문자를 이용한 식으로는 가르칠 수 없다는 문제가 있지만 구체적인 수를 대입하여 학생들이 이해하기 어려워하는 (음수)×(음수)=(양수)가 되는 것을 논리적으로 가르칠 수 있다는 장점이 있다.

4.2 효과적인 음수지도를 위한 제언

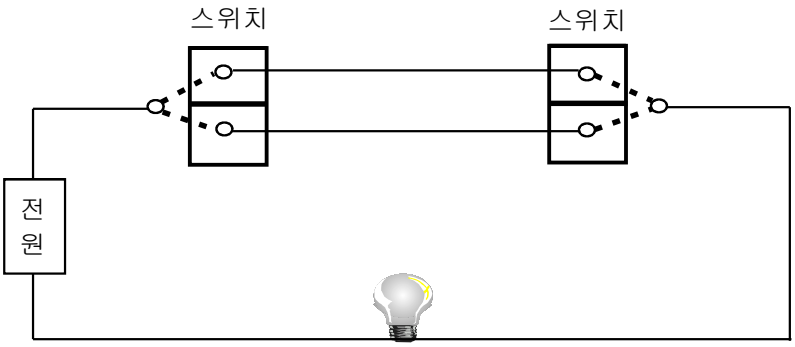
처음 정수를 접하는 학생들에게 처음부터 형식적인 방법으로 음수지도를 시작한다면 학생들은 혼란을 겪을 것이고, 수학교육의 목적에서도 벗어나게 된다. 그러므로 정수의 덧셈과 뺄셈(특히 음수의 덧셈과 뺄셈)은 직관적인 지도 방법으로 학생들을 지도해보자는 것이다. 학생들이 음수를 학습할 때 가장 어려워하고 교사들 또한 가르칠 때 가장 어려운 부분이 음수의 곱셈과 뺄셈 부분이다.

$(-3)-(-4)=(-3)+(+4)$은 학생들이 직관적으로 받아들이지 못하는 부분인데, 이것은 수직선 모델에서는 학생들이 화살표 방향을 어려워하므로 셈돌 모델이나 게임 모델로 이해시킬 수 있을 것이다.

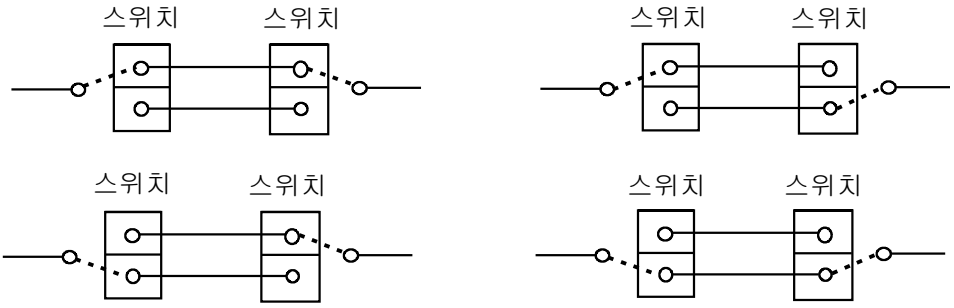
따라서 음수의 덧셈과 뺄셈은 수직선 모델, 이야기 모델, 셈돌 모델, 게임 모델 등 직관적인 지도 모델을 이용하는 것이 효과적일 것이다.

지금 제시하고자 하는 스위치 모델[10]은 음수 연산에서 많은 혼란을 갖고 있는 학생들 중에서 절차적 이해가 부족한 학생들에게 자동화 된 음수 곱셈의 알고리즘의 획득, 즉 음수 곱셈 규칙의 절차적 이해를 돕기 위한 방안이다. 이 모델은 실생활에서 사용되고 있는 스위치와 전등의 불을 켜고 끄는 원리에서 직관적이고, 자연스럽게 음수 곱셈 규칙을 획득할 수 있고 학생들의 실수를 줄여줄 수 있을 것이다.

다음의 회로도는 두 개의 스위치에서 회로가 연결될 때에만 전기가 통하여 전구에 불이 켜진다. 즉 굵은 점선으로 나타낸 부분을 연결시켜서 전구에 불이 켜지게도 할 수 있고, 불이 꺼지게도 할 수 있다.



[활동1] 두 개의 스위치의 회로를 연결할 수 있는 방법의 종류를 세어보자. 어떤 경우가 생기겠는가?

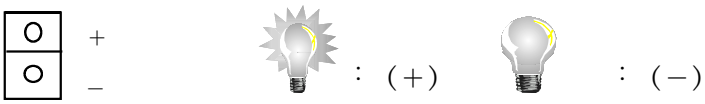


[활동2] 활동1에서 구한 각각의 경우에 대해서 회로가 연결되는 경우, 즉 전구에

10) 조숙례(2003), 음수 개념의 이해 실태 분석에 관한 연구, p.60

불이 켜질 때의 회로와 연결되지 않는 경우, 즉 불이 꺼질 때의 회로로 구분해보자.

[활동3] 위의 활동에서 스위치의 양 끝에 +, −를 써서 나타내고, 불이 켜질 때를 +기호, 불이 꺼질 때를 −기호로 나타내자.



이 때, 불이 켜질 때와 꺼질 때를 +, -기호를 사용하여 나타내어 보자.

	스위치①	스위치②	전구의 불
불이 켜질 때	+	+	+
	−	−	+
불이 꺼질 때	+	−	−
	−	+	−

[활동4] 회로에서의 부호 규칙과 음수 곱셈의 부호 규칙과 비교해보자.

이 회로는 일반 주택에서 계단에 설치되어 있는 전등에 많이 사용되고 있는 회로이다. 실제로 1층에서 2층으로 올라가는 계단에 전등이 있고, 스위치가 1층과 2층에 각각 설치되어 있다고 하자. 이 때 1층과 2층에서 같은 방향으로 스위치가 눌러져 있으면 점등이 되고, 둘 중 하나라도 스위치가 반대로 눌러져 있으면 소등이 된다.

이 회로를 통해서 학생들은 직관적으로 부호의 규칙을 알 수 있고, 주변에서 쉽게 접하는 예가 수학적으로 접근이 가능한 것을 학생들이 안다면 수학에 대한 흥미도 높아 질 것이다.

제 5 장 요약 및 결론

본 논문의 목적은 현행 교육과정에서 제시하고 있는 음수개념과 연산 지도 방안을 분석해 보고 대수적인 접근으로 음수의 개념을 정의함으로써, 음수를 이해하기 어려워하는 학생들에게 보다 효과적이고 수학적으로 음수를 받아들이는 데 도움이 되고자함이다. 이러한 목적을 달성하기 위하여, 본 논문의 제 2 장에서는 음수의 역사와 음수지도의 어려움을 살펴보았다.

제 3 장에서는 음수의 개념과 연산 지도에 활용될 수 있는 모델로 수직선 모델, 셈돌 모델, 우체부 모델, EIS이론에 따른 3단계 지도 모델, 귀납-외삽법, 형식 불역의 원리 등을 설명하고 이를 시각화 해 보았다. 다음으로 기타 음수지도 모델, 지렛대 모델을 제시하였고, 여러 가지 지도 모델들의 실재 활용 여부 등을 현행 교과서의 분석을 통해 알아보았다.

다음으로 제 4 장에서는 3장에서 제시한 음수지도 모델의 장단점을 분석하고 음수의 개념을 대수적으로 정의한 후 그에 대한 방안으로 스위치 모델을 제시해 보았다.

여기서 본 논문의 결론은 다음과 같이 요약할 수 있다.

직관적인 음수지도 모델이 음수의 모든 대수적 성질을 일관성 있게 만족시켜 주지는 못하지만 음수에 대한 다양한 해석을 가시화 하므로 형식적인 접근과 병행하여 학생들에게 음수의 연산을 이해시키는 것이 더욱 효과적일 것이다. 예를 들면, 수직선 모델은 크기를 나타내는 대표적인 양(量)인 길이로 수를 표현한 것으로 덧셈과 뺄셈을 자연스럽게 할 수 있다. 그러나 곱셈과 나눗셈을 할 때에 수에 대한 해석에 일관성이 없다. 음수의 연산이 자연수의 대수적인 성질에 영속성을 부여하도록 정의되었다는 것을 고려할 때, 귀납-외삽법이 자연스러운 방법이 될 수 있겠다. 계산과 추론 과정을 통하여 이루어지는 이 방법은 직관적 방법과 완전히 분리된 것이라기보다는, 직관적인 방법의 수동적인 측면을 보완해 줄 수 있다.

본 논문에서 제시한 모형-직관적 모형과 형식적 모형-들이 정수의 개념이나 연

산지도에 있어서 최적의 모형이라고는 생각되지 않는다. 또한, 기존의 알려져 있는 모형 외에 다른 모형을 개발하지 못 했다는 것이 본 논문의 한계점이기도 하다. 그러나 지금까지 제시한 방법들이 학생에게 정수를 지도하는 교사들에게 조금이나마 도움이 되었으면 하는 바람이다.

참 고 문 헌

강옥기 외 2인(2001), **중학교 수학 7-가**, 두산동아

교육부(1997), **중학교 교육과정해설**, 교육부

교육부(1998), **수학과 교육과정**, 교육부

김애란(2002), **효과적인 음수지도를 위한 지도방안 연구**, 석사학위논문, 경희대학교 교육대학원

김윤배(2002), **음수 지도 방법에 관한 교육학적 고찰**, 석사학위논문, 전주대학교 교육대학원

김응태 · 박한식 · 우정호(1988), **수학교육학개론**, 서울대학교 출판부

김혜은(2004), **음수지도 방법에 관한 연구**, 석사학위논문, 인하대하교 교육대학원

김호우 외 3인(2001), **중학교 수학 7-가**, 지학사

박배훈 · 정창현(2001), **중학교 수학 7-가**, 교학사

박윤범 외 3인(2001), **중학교 수학 7-가**, 대한교과서

송말자(2004), **중학교에서의 양수 · 음수 지도에 관한 연구**, 석사학위논문, 단국대 교육대학원

송임선(2004), **정수의 개념과 연산지도에 관한 연구**, 석사학위논문, 연세대학교 교육대학원

신유신(1995), **음수지도 모델에 관한 고찰**, 석사학위논문, 서울대학교

우정호(2000), **수학 학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부

우정호(2001), **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부

조숙례(2003), **음수 개념의 이해 실태 분석에 관한 연구**, 석사학위논문, 한국교원대

조태근 외(2000), **중학교 수학 7-가**, 금성출판사

최병철(2002), **음수지도의 교수현상학적 고찰**, 석사학위논문, 서울대학교

최용준 · 이현구(2001), **중학교 수학 7-가**, 천재교육

허민 · 오혜영 역(2001), **수학의 기초와 개념**, 경문사

H. Freudenthal(1983), Didactical Phenomenology of Mathematical Structures

단비이야기, http://www.mathlove.org(수학사랑,“이런 수업 어때요?”)