[UCI]I804:24011-200000232988

2006년 2월

教育學碩士(數學教育)學位論文

수학교육에서의 반성의 의미와 역할에 대한 고찰

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

金 秀 珍

수학교육에서의 반성의 의미와 역할에 대한 고찰

A Study on the Role and Meaning of Reflection in Mathematics Education

2006年 2月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 秀 珍

수학교육에서의 반성의 의미와 역할에 대한 고찰

指導敎授 黃 惠 貞

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 제출합니다.

2005년 10월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 秀 珍

金秀珍의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

2005년 12월

朝 鮮 大 學 校 敎 育 大 學 院

목 차

표목차 ····· iii

ABSTRACT ····· iv

Ⅰ. 서 론 ····· 1

1. 연구의 필요성 및 목적 ····· 1

2. 연구의 내용 ····· 3

3. 연구의 제한점 ····· 3

Ⅱ. 반성에 관한 문헌 연구 ····· 4

1. 교육학 입장에서의 반성의 의미 ····· 4

1) Dewey ····· 4

2) Schön ····· 7

2. 수학과 교수 학습 이론에서의 반성의 의미 ····· 9

1) Piaget의 반영적 추상화 ····· 9

2) Freudenthal의 수학화 현상 ····· 11

3) Van hieles의 수학학습수준이론 ····· 13

4) Skemp의 반영적 지능과 델타 2 지휘체계 ····· 16

Ⅲ. 수학교육에서의 반성의 의미와 역할 ····· 19

1. 수학교육에서의 반성 개념의 공통적 이해 ····· 19

2. 반성과 메타인지의 이해 ····· 24

1) 메타인지 개념의 유래 ····· 24

2) 메타인지의 역할 ····· 29

3) 반성과 메타인지의 역할 비교 ····· 34

Ⅳ. 요약 및 제언 ····· 42
1. 요약 ····· 42
2. 반성과 메타인지가 교육에 미치는 영향에 관한 제언 ····· 42

참고문헌 ····· 44
부록 ····· 46

표 목 차

[그림 1] 반영적 추상화의 과정 ····· 10
[그림 2] 수업에서의 수학화 과정 ····· 12
[그림 3] Skemp의 지휘체계 ····· 17
[그림 4] Skemp의 두 가지 지휘 체계 ····· 17
[그림 5] Skemp의 반영적 지능 체계 ····· 18
[그림 6] Freudenthal의 수학화 ····· 20
[그림 7] Piaget의 반영적 추상화 ····· 21
[그림 8] Skemp의 지능 체계 ····· 22
[그림 9] van Hieles의 수학학습수준 ····· 23
[그림 10] 반성의 공통적 이해 ····· 24
[그림 11] Polya의 문제해결 ····· 40
<표 1> 메타인지의 개념 ····· 28
<표 2> 수학 문제 해결 과정과, 메타 인지적 발문 ····· 33

ABSTRACT

A Study on the Role and Meaning of Reflection in Mathematics Education

Soo-Jin Kim

Advisor : Prof. 혜 정 황 Ph.D.

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

The history of mathematics education in late of the 19th century is represented for the New Math from the late 1950s to the late 1960s, Back to the Basics in the 1970s, and Problem Solving and Meta-cognition in the 1980s considering the unit of a decade. Especially meta-cognition became the centered interest as a main subject of the mathematics education studies together with problem solving education in the 1980s. And lots of researches concerned with it have been even progressed recently with activity.

But, despite the advance in studies like this, there is a problem that cognition regarding the concept of the meta-cognition is not necessarily positive. In fact, the notion of meta-cognition has been pointed out continually because of the ambiguity and uncertainty from the initial stage up to recently.

However, though these questions aren't raised lately, the school of mathematics education has just dived in studies applying to the concept of meta-cognition. There is almost no researches intended to reveal the concept itself.

Although the status of the meta-cognition in mathematics education lies

in the application stage equivalent to the final stage, it can be said that it is placed in contradictory situation which fundamental problems are unsolved.

Therefore, it is essential at this point in time that the work of examining the concept of meta-cognition closely. This study has an intention to find out the nature of the concept of meta-cognition in aspects of mathematics education having a critical mind.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

대부분의 학생들은 문제를 풀어서 답을 구했을 때, 그 답이 맞는지 틀리는지에 대해서 검토해 보는 과정을 매우 소홀히 하거나 아예 검토할 필요성을 느끼지 않는 경향이 있다.(Kilpatick) 아예 검산을 하지 않거나 검산을 하더라도 계산 과정만 볼 뿐 문제에서 요구하는 전반적인 내용은 보려 들지 않는다. 이는 문제 해결 과정에서 중요한 일부분을 생략하는 것과 마찬가지이다. 검토와 반성을 통해 학생들은 자신의 실수를 찾아낼 수 있으며 풀이 과정을 재음미하면서 자신의 사고에 대한 확신을 가질 수 있다. 또한 새로운 풀이 방법을 찾아낼 수 있으며 다른 주제와의 관련성을 찾아냄으로써 더 나은 문제 해결자가 될 수도 있다. 따라서 문제 해결이 끝난 후 학생들은 선택한 문제 해결 전략이나 과정 및 그 결과에 대해 왜? 또는 어떻게 해서? 라는 물음을 던지는 방법을 생각할 수 있어야 한다. 예컨대 왜 그런 방법으로 풀었느냐?, 왜 그렇다고 생각하느냐?, 어떻게 해서 이렇게 되었느냐? 등의 물음을 던짐으로써 학생들은 자신의 문제 해결 전 과정에 대해 반성. 검토해 봐야할 것이다. 또한 이 같은 발문을 통해 교사나 학부모는 학생들이 무엇을 생각하고 있으며, 어떻게 생각하고 있는지에 대한 정보를 얻어 지도의 효율을 높일 수 있다. 이 과정에서 이루어지는 수학적 사고를 반성적 사고(Reflective Thinking)라고 하며 최근의 인지 심리학에서는 메타인지(meta-cognition)라는 개념으로 도입되고 있다. 이처럼 반성적 사고와 메타인지는 학생들의 수학적 사고력 향상에 핵심적인 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 그러나 이러한 중요성에도 불구하고 현재까지도 반성과 메타인지에 대한 뚜렷한 정의가 확립되어 있지 않아 두 용어가 혼용되어 사용되고 있다, 실제로 메타인지 개념은 심리학에서 발전되어 수학교육에 도입된 것으로, 그것에 대한 수학교육적 번안 작업이 매우 부족하다.(김연식, 김수미) 사실상 메타인지 개념은 도입 초기부터 최근에 이르기까지 그 애매함이나 불명확함이 지속적으로 지적

되어 왔다.(Schoenfeld,1987, 1992 ; Garofalo & Lester, 1985; 박영태, 1985; Yamaguchi, 1994 등) 이와 관련하여 Schoenfeld(1987)는 메타인지라는 용어에 대해 수학 교사들이 나타낸 반응을 다음과 같이 소개하고 있다.

> " 메타인지란 연구자를 위한 전문어일 뿐이다
> ...(중략)...그러나 분명한 것은 연구자가 아닌 우리로서는
> 메타인지는 종잡을 수 없는 전문어이며, 그에 대한 어
> 느 것도 이해되지 않는다는 것이다. 메타인지가 그렇게
> 중요하다면 당신에게는 다음과 같은 질문에 대해 우리들이
> 이해할 수 있는 명쾌한 말로 설명할 책임이 있다.
> 메타인지란 무엇인가? 메타인지는 어떤 이유로 중요한가?
> 메타인지에 대해 우리들은 어떻게 하면 좋겠는가?"

위의 인용문은 메타인지 개념의 불명확성의 문제를 매우 명쾌하게 나타내고 있다고 생각된다.

그런데 이러한 문제가 최근에 제기된 것이 아님에도 불구하고 수학교육학에서는 메타인지 개념을 적용하는 연구에만 몰두해 왔으며, 메타인지 개념 자체를 규명하고자 하는 연구는 거의 찾아보기 힘들다. 수학교육에서의 메타인지 개념의 위상은 연구의 최종 단계라고 할 수 있는 적용 단계에 놓여 있으면서도, 개념의 구명이라 하는 매우 기본적인 문제가 해결되지 않는 모순적인 상황에 놓여 있다고 할 수 있다. 따라서 현 시점에서 메타인지 개념의 규명 작업은 매우 필요한 과제라고 생각된다. 본 연구는 이러한 문제 의식을 갖고 메타인지 개념의 본질을 수학교육적 측면에서 명확히 규명해보고자 하는 것이다. 더불어 수학 교수 학습 이론에서 반성적 사고의 의미를 알아보고, 수학교육에서의 역할을 살펴보고자 한다. 또한 수학 학습 지도에 어떠한 영향을 미치는지 알아보도록 하겠다.

2. 연구의 내용

1) Dewey와 Schön를 중심으로 교육학에서의 반성의 의미를 정리해본다.

2) Piaget의 반영적 추상화, Freudenthal의 수학화 과정 , Van heile의 수준이론, Skemp의 반영적 지능을 살펴봄으로써 수학과 교수학습 이론에서 반성의 의미와 역할을 알아본다.

3) 반성과 유사 개념으로 알고 있는 메타인지의 역할 분석을 통해 메타인지의 의미와 역할을 명확히 고찰하고, 반성의 의미와 역할과 비교 분석하여 수학 교수 학습 이론에서의 반성의 의미와 역할을 살펴본다.

3. 연구의 제한점

수학 교수 학습 이론에서의 반성의 공통적 개념을 정리하고자 하였으나, Piaget의 반영적 추상화, Freudenthal의 수학화, Skemp의 반영적 지능, Van Hiele의 수학학습수준이론, 즉 4명의 수학교육학자의 이론을 중심으로 수학교육에서의 반성의 의미를 종합하여, 전반적인 개념의 확립은 부족하다. 또한, 메타인지와 반성의 의미와 역할을 비교하기 위하여 Polya의 문제해결과정을 통해 설명하였는데 반성과 메타인지의 개념은 많은 유사점이 있으나 반성은 메타인지적 사고가 중점적으로 나타나는 학습자의 인지적 사고로서 학습자의 문제해결과정 중에 핵심적인 역할을 수행함을 알 수 있었다. 그러나 본 연구의 목적상 수학교육에서의 반성의 의미와 역할을 살펴보고, 유사 개념으로 알려진 메타인지의 의미와 역할과 비교함으로써 반성의 명확한 이해를 돕기 위함이었으므로, 반성과 메타인지의 수학 교수 학습 이론에서의 활용방안을 제시하지 못했다. 차후 수학학습에서의 반성과 메타인지의 활용을 위한 연구가 계속 되어야 할 것이다.

Ⅱ. 반성에 관한 문헌 연구

1. 교육학 입장에서의 반성의 의미

1) Dewey

그는 사고(thinking)라는 말과 반성(reflection)이라는 말을 거의 동의어로 혼용하면서 '반성'을 다음과 같이 정의 하고 있다.

"반성은 우리들이 어떤 신념의 기초로써 사물을 그 자체에 대한 직접적인 설명에 의해서가 아니라, 어떤 다른 증언, 증거, 입증, 근거 등에 의해서 믿게 되는 (또는 믿지 않게 되는) 것을 의미한다."

곧 반성이란 어떤 사물이 우리에게 주는 어떤 직접적인 느낌이나 자연스러운 의식의 흐름이 아니라, 그 곳에 내재하는 참된 의미를 어떤 사실적 뒷받침을 받아 근거 있게 파악하는 정신 작용을 의미하는 것으로 그 과정 속에서 한편으로는 사실과 다른 의미가 긴밀하게 상호작용하게 된다. 이와 같이 반성은 사물의 의미가 과학적 실증적 근거에 따라 파악되는 것이다. 이러한 관점에서 그는 반성적 사고를 다음과 같이 설명하고 있다.

"어떤 신념, 또는 가정된 지식의 형식을 그 신념 또는 지식을 지지하는 근거와 그것이 지향하는 그 이상의 여러 결론들에 비추어 적극적, 지속적으로 그리고 주의 깊게 고찰하는 활동이 반성적 사고를 구성하며 이러한 반성적 사고 개념 속에는 대체로 다음과 같은 특성들이 함의된다.

① 반성적 사고는 하나의 연쇄이다 : 그것은 백일몽이나 공상과 같은 의식의 우발적 불규칙적 흐름이 아니라, 관념들의 연속적 공존계열이며, 여러 관념들이 질서 있게 서로 관련되는 연쇄적 과정이다

② 반성적 사고는 하나의 결론을 목표로 한다 : 반성적 사고는 막연한 사상이나 사실적 근거 없이 전개되는 가공적 이야기들과는 달리 심상열의 바깥에 있는 하나의 목표를 가지고 있다. 어떤 문제의식에서 출발하여 애매한 것을 명백히 하고 혼란스러운 것을 질서 지으면서 하나의 결론에 도달한다.

③ 반성적 사고는 탐구를 촉진 한다 : 어떤 권위나 관습에 의한 유행적 신념과는 달리 반성적 사고는 논리적 실증적 근거를 가진 신념과 지식을 과감하게 계속적으로 추구하고 재음미한다. ″

이와 같이 반성적 사고는 공상, 사상 등과 같은 자연적 의식의 흐름이 아니라, 하나의 결론에 도달하려는 의도적, 유목적적 문제해결과정이고 그것은 어떤 문제사태에서 출발하며 그 문제사태를 구성하고 있는 여러 가지 논리적, 경험적 근거에 따라 그 본질적 의미가 추구되는 지적 조작을 의미하며, 그러한 과정에서 전개되는 다양한 지적 조작들은 서로 긴밀하게 연관지어 진다. 요컨대 반성적 사고과정은 하나의 과학적 사고과정이며 합리적 문제해결과정이다. 이러한 반성적 사고과정을 통하여 우리들은 여러 가지 문제를 해결하고 새로운 지식과 신념들을 형성하며, 우리들의 경험에 지성적 성격을 부여하고 계속적으로 성장, 발전해 나간다.

Dewey가 의미하는 문제사태란 일상적인 생활 문제에만 한정되는 것이 아니라 일상적, 학문적, 이론적, 실천적 문제를 모두 포함하는 것이다(Dewey 1933). 그는 반성적 사고가 일어나는 불확정 상황을 전반성적 상황(pre-reflective situation)이라 하고, 그것이 해결된 확정상황을 후반성적 상황(post-reflective situation)이라고 하면서 반성적 사고의 과정을 5가지 측면으로 설명하고 있는데, Heflish 와 Iran-Nejard(1995)가 요약한 내용을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 암시(suggestion)의 단계로서 의문 또는 갈등이 일어나면 자연히 그 해결과 관련된 관념 혹은 암시가 제시된다. 그러나 둘 이상의 관념, 암시가 서로 갈등을 일으킬 경우 본격적인 탐구가 시작된다. 이는 반성의 출발점을 의미하며, 행동에 대해 무의식적으로 일어나는 의심 혹은 불확실함의 상태를 의미한다고 할 수 있다.

둘째, 지성화(intellectualization)의 단계로서 막연한 암시에 의해 직접적인 문제 해결이 어려울 경우 그 문제의 성격, 상태, 관련된 사실들과 해결의 단서 등이 검토되고 이를 해석함으로써 그 문제를 정확하게 이해하게 된다. 즉, 그 문제 사태에 대한 정서적 반응이 지성화 과정으로 전환되는 것이다. 이는

해결되어야 할 의문으로 불확실함을 적극적으로 조작하는 것을 의미 한다.

셋째, 가설화(hypothesis)의 단계로서 문제 사태가 지적으로 분석되어 분명히 파악되고, 여러 가지 관찰 추리가 진행되면 그 문제 해결에 유용한 더 적절한 관념 즉, 하나의 가설이 형성된다. 이 과정에서 문제의식은 더욱 적절해지고 세련되며 따라서 문제해결 방법은 단순한 가능성이 아니라 검증될 수 있는 개연성으로 전환된다. 이는 문제 해결책에 대한 일차적인 진단으로 문제를 조직하는 것에 관해 보다 사려적인 것을 의미한다.

넷째, 추리(reasoning)의 단계로서 추리는 관념이나 가정을 세련시켜 나가는 정신적 작용이다. 하나의 관념은 추리에 의해 다른 관념과 관련되고, 보다 적절한 형태로 재구성되며 혼란, 갈등이 해소되어 하나의 일관된 전체로 통합된다. 이 단계는 이전의 지식에 기초하여 일단 해결책이 모호하게 형성되면 그 아이디어에 대해 엄정한 검토가 이루어지는 것이다.

다섯째, 가설검증의 단계로서 반성적 사고의 결론단계로 가설이 구체적 행위에 의해 검증되어 실험적으로 확인 또는 입증된다. 이 과정에서 확증에 실패할 수도 있지만, 반성적 사고의 이점은 실패가 단순한 실패가 아니라 성공에서와 같이 실패를 통해서도 많은 것을 배우게 하는데 있다. 이는 문제에 대해 계획된 해결책이 실제 기대한 바대로 행위 되는지를 알기 위한 가설검증과 다시 행위 하는 것이 포함된다.

Dewey가 밝히고 있는 반성적 사고과정은 전반성의 문제 사태에서 출발하여 암시-지성화-가설-추리-가설검증의 과정을 거쳐 문제가 해결되고 결론이 도출됨으로써 끝이 난다고 할 수 있다. 그러나 Dewey는 이러한 절차가 어떤 고정된 순서를 나타내는 것은 아니며 반성적 사고의 통합적 특성과 이에 작용하는 여러 요소들을 드러내기 위하여 이러한 절차를 제시했다고 밝히고 있다. Dewey에게 있어서 각 단계는 새로운 관찰을 도출하는 가능성을 가지며, 문제의 정의를 다른 방식으로 전개시킨다. 즉 Dewey는 반성적 사고란 시간의 경과에 따라 전개되는 유동적이며, 창의적인 과정으로, 하나의 '내적 문제해결주기'라고 보고 있다. 이러한 문제해결 주기로서 반성적 사고를 보는 것은 문제에 대한 의식적인 주의에 초점을 두게 하는데, 그러나 Dewey는 자발

적인 창의적 과정의 중간에서 무의식적으로 일어나는 반성적 사고의 측면에 대해서도 이야기 한다. 그는 새로운 대상(주제) 혹은 아이디어에 대하여 친밀감을 일으키도록 돕는 무의식적인 정신의 역할에도 그 가치를 부여하고 있는 것이다. 즉, Dewey는 무의식적인 정신은 자발성과 신선함을 제공하며, 의식은 명령과 통제를 제공한다고 봄으로써 무의식적으로 일어나는 반성적 사고의 측면을 제시하고 있다.

2) *SchÖn*

SchÖn(1983)은 Dewey의 반성적 사고에 대한 개념을 근거로 전문가(professional expertise)의 개념을 언급한다. 그에 따르면, 반성적 사고란 전문가가 자연스럽게 사고하고 행위 하는 방식이다. 따라서 전문가는 갈등, 독특성, 불확실성을 필연적으로 포함하는 전문적 상황에서 반성적으로 사고하면서 실천할 수 있는 사람으로 정의한다. 전문적 상황 속에서의 실천행위, 불확실성에 대한 대처, 문제해결 등은 SchÖn의 반성개념 중 핵심적인 것이라고 할 수 있다. 이러한 SchÖn의 이론을 구체적으로 제시하면 다음과 같다.

SchÖn(1987)은 실천행위에 있어서 지식의 묵시적이고 직관적인 영향을 언급한다. 그는 이것을 knowing-in-action(KIA)으로 명명하며, KIA는 바로 행위의 결과로서 얻어지는 지식으로서 우리의 행위에 영향을 준다고 본다. 그러나 KIA는 역동적으로 형성되므로 Dewey처럼 행위 내에서 개입되는 단계들을 정확하게 묘사하는 것이 불가능하며, 어떤 상황 안에서 혹은 환경에 대한 관계성 안에서 우리가 행동하는 방식을 무의식적으로 통제하는 것이라고 설명한다. KIA를 구체적으로 나타내기 위하여 SchÖn은 우리가 어떻게 다른 사람의 얼굴과 감각들을 인식하게 되는 가에 관한 예를 제시한다. 다른 사람들의 얼굴과 감각들은 우리가 그 전에 경험해 왔을 수도 있는 다른 얼굴이나 감각들을 비교하거나 기억에 저장되는 것이 아니라 오히려 자연발생적(직관적)으로 그것들에 대한 인식이 일어남으로써 그 결과 우리가 알고 있는 누군가의 얼굴을 알게 되는 것인데, 어떻게 그것이 일어나는지는 확실하게 말 할 수 없는 성질을 가진다고 보는 것이다.

SchÖn(1987)은 Dewey가 불확실함 혹은 의심의 상태일 때 반성의 주기가 시작된다고 한 것처럼, 일상적인 행위를 이끄는 KIA의 흐름을 방해하는 무언가가 있을 때, 즉 어떤 놀라움이 있을 때 의식적인 반성(reflection)이 일어난다고 보고 있다. 이 의식적인 반성은 행위 후의 반성(reflection-on-action)과 행위 중의 반성(refletion-in-action)의 두 가지 방식으로 가능해진다고 본다. '행위 후의 반성'은 놀라움이 왜 일어났는지를 이해하기 위하여 행위를 돌이켜 생각해 보는 것을 의미한다. 행위 후의 반성이 일단 일어나면, 형성과 어떤 거리를 두게 되며 평가적, 비판적으로 그 상황을 숙고할 수 있게 된다.(SchÖn1983, 1987) 따라서 침착하고 면밀하게 무슨 일이 일어났으며, 왜 그 일이 일어났고, 그 현상을 예기했던 KIA의 실패의 원인이 무엇인지를 재고 하는 능력이 생기게 되는 것이다.

또 다른 반성은 '행위 중의 반성'으로 SchÖn(1983, 1987)은 개인이 놀라움에 직면하게 되고 하나의 행위에 열중하게 되는 동안 일어나는 '행위 중의 반성'에 일차적인 관심이 있다고 밝히고 있다. '행위 중의 반성'은 개인이 문제를 구조화하고, 상황을 이해하며, 문제를 이끌어 오는 가정들의 기저를 비판적으로 평가하고, 검증될 수 있는 대안적인 해결방식을 구성하도록 허용하는 하나의 의식적인 탐구이다.(SchÖn 1987) 이는 능동적, 역동적 학습 경험으로서 어떤 놀라움이 KIA의 흐름을 방해하면 적극적인 주의가 야기되고 의문이 일어나며, 검증되고 평가될 수 있는 하나의 해결책을 적극적으로 예언하거나 혹은 어떻게 문제가 해결될 수 있는지를 역동적으로 인식하게 된다. 해결책이 역동적으로 나타나면, 그것은 적극적으로 분석되며, 만약 그 해결책이 문제가 있으면, 문제가 재 해결될 때까지 능동적인 자기 조정이 개입된다.

SchÖn(1983)에 따르면 진정한 전문가로서의 능력은 ' 행위 중의 반성'과 보다 밀접한 관련이 있다. 이는 전문적 행위를 하고 있는 동안 변화가 내재된 행위 방식에 대해 생각하며, 자신이 무엇을 하고 있는지를 알고 있다는 것을 의미한다. 따라서 '행위 중의 반성'은 실천적 이론과 실험을 포함하게 되며, SchÖn(1983)은 이러한 '행위 중의 반성' 과정을 통해 진정한 전문성 발달이 이루어 질 수 있다고 본다.

2. 수학과 교수 학습 이론에서의 반성의 의미

1) *Piaget*의 반영적 추상화

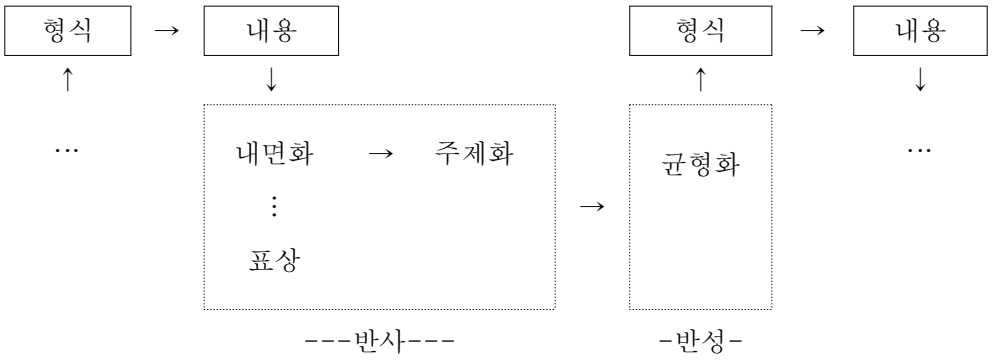
새로운 지식은 재조직을 하는 것이기는 하지만 앞에서의 어떤 사실들로부터 요소들을 끌어오기 때문에, 새로운 지식은 추상화를 전제로 한다. 또한 수학의 본질은 그 추상성에 있으며 수학의 학습은 추상화하는 활동이 중심이 된다. Piaget는 세 가지 종류의 추상화를 구분하였는데, 인식 주체의 외부 대상이 갖는 성질들로부터 일반화된 지식을 끌어내는 경험적 추상화와, 인식 주체의 활동에 대한 일반적 조정으로부터 이루어지는 반영적 추상화 그리고 주체의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성 결과의 확인은 외부 대상에 대해서 행해지는 의사 경험적 추상화가 그것이다.(우정호, 홍진곤, 1999)

또한 Piaget는 반영적 추상화의 메커니즘을 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위의 수준으로 옮긴다는 의미의 '반사'와 전 단계에서 반사된 것을 새로운 수준에서 재구성하거나 혹은 거기에 이미 놓여져 있는 것과 전 단계의 요소를 관련짓는 '반성'이라는 상보적인 두 과정으로 나누어 설명한다.(홍진곤, 1999)

> 반영적 추상화는 항상 분리될 수 없는 두 가지의 특징을 포함한다. 선행하는 수준으로부터 빌려 온 무엇인가를 더 높은 수준으로 투사한다는 의미에서의 '반사'와 전이 되어지는 것에 대한 (다소 의식적인) 인식적 재구성 또는 재조직이라는 의미에서의 '반성'이 그것이다 (Piaget, 1975, p.41)

반사는 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위 단계로 옮긴다고 하는 의미이며, 반사가 시작되는 가장 기초적인 단계는 감각 운동적 움직임에서 출발하는 일련의 행동을 내면화하여 개념의 시초인 표상으로 투사하는 것이다. 행동이 내면화되었다는 것은 행동과 관련된 어떤 내적 구성이 이루어져서 이를 통해 행동을 의식하고 그 행동을 다른 행동과 결합할 수 있게 하는 것이다. 이러한 내면화 과정은 인지 발달의 모든 단계에서 나타나는 것이기도 하지만, 특히 반사의 과정은 반드시 내면화로부터 시작되어야 한다. 그런데 반사가 이

루어진 상위 단계에서 반성이 이루어지기 위해서는 하위 단계에서 사고의 도구였던 것이 사고의 대상이 되어야 하는데, Piaget는 이를 주제화라고 설명한다. 결국 반사의 과정은 '내용'에 대한 내면화로부터 출발하여 주제화로 귀착된다고 할 수 있으며, 이렇게 주제화된 '내용'은 반영적 추상화의 다음 단계인 '반성'에 의해 새로운 '형식'을 구성하게 하는 재료가 되는 것이다. '반사'가 이루어지고 나면 주제화된 것을 새로운 수준에서 재구성하는 '반성'이 이루어지게 된다. 그런데 반성의 과정은 반사와는 달리 새로운 형식을 창조적으로 구성하여 그 형식이 점점 풍부한 구조를 가지게 하는 특징이 있으며, 이러한 반성 과정의 고유한 창조성으로 인해 반영적 추상화는 비로소 생산적인 힘을 갖게 된다고 할 수 있다. '반성'에 의하여 새로운 것이 생겨나는 과정은 동화와 조절 사이의 균형화 과정에서 나타나게 되는데, 이 균형화는 하위 단계의 구조에서 야기되는 여러 가지 불균형을 새로운 차원에서 고려해야 할 필요성에 의하여 반사에 의해 다음 단계로 옮기는 것이 자연스럽게 되는 과정을 통해서 이루어진다. 이렇게 반성에 의하여 구성적으로 창조된 새로운 형식은 다음 단계의 반사 과정에서는 보다 세련된 '내용'으로 기능하여 결과적으로 끊임없는 반사와 반성의 순환이 이루어지게 하며, 수준이 높아질수록 '주제화'로 귀착되는 '반사'에 비하면 창조적인 재구성을 이루는 '반성'의 비중이 점점 커지게 된다.(홍진곤 1999)



[그림 1] 반영적 추상화의 과정

다시 말해, Piaget는 '반성'이 하위 수준의 구조를 주제화하는 것과 관련하여

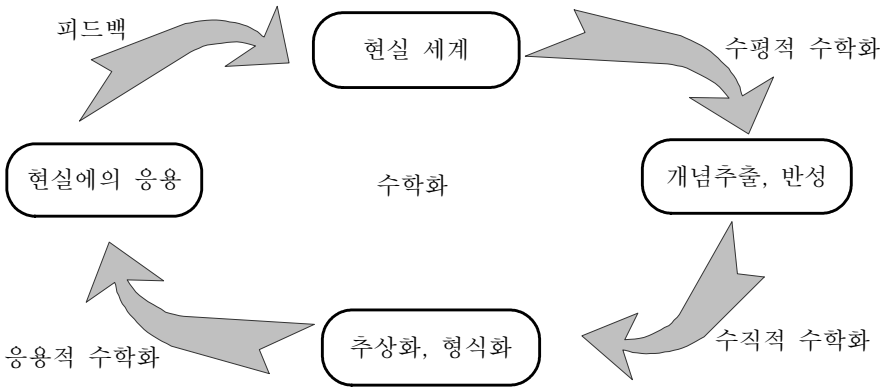
야기된 불균형을 극복하여 인지적 균형으로 나아가려는 균형화 과정이라고 설명하고, 반영적 추상화 가운데 특히 반성이 사고의 대상이 되어 있는 상위 수준에서의 의식적인 구성의 메커니즘을 반영된 추상화 혹은 반성적 사고라 부른다.(Piaget etal., 1977)

*2) Freudenthal*의 수학화 현상

Freudenthal은 수학을 결과적 지식체계로서의 수학, 곧 '기성 수학'과 활동주의 수학, 곧 '실행되는 수학'으로 구분하며, '실행되는 수학'의 주요한 수학적 활동을 수학화 활동으로 보고 있다. 수학화란 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 활동이며, 현실상황이든 수학적 상황이든 현상 가운데에서 그 정리 수단인 본질을 찾는 활동, 즉 현상에 질서를 부여하는 활동을 말한다. 그는 수학적 활동을 수학화 활동과 그 의식성의 현재화 활동으로 보며, '현상 →정리수단인 본질→현상→보다 높은 차원의 본질'과 같이 교대가 일어나면서 인식수준의 상승이 일어나는 불연속적인 과정으로 본다. 곧 현상과 경험을 조직화하고 정리하는 수단인 본질이 그 다음 수준에서는 형상, 곧 연구의 대상이 되는 과정을 반복하면서 수학적 사고활동이 이루어진다는 것이며, 수학학습의 본질은 이러한 불연속성이라는 것이다.(우정호,2000)

또한 수학화는 문제 장면을 수학적 문제로 변형하는 과정과 수학적 체계 내에서의 처리 과정의 차이를 위해 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분할 수 있다. 수평적 수학화란 관찰, 실험, 귀납추론 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 수학적인 방법을 이용할 수 있도록 변형하는 과정 즉, 모델 형성, 도식화, 기호화를 통해 수학으로 향하는 길을 여는 것을 말하며, 수직적 수학화란 수평적 수학화 이후에 따라오는 수학적 과정, 문제를 풀고 일반화하고 형식화하는 것과 관련된 과정 즉, 수학적 처리 과정과 탐구 중인 문제 장면의 구조화 속에서의 수준 상승 과정과 관련이 있다. 이러한 수학화 활동의 원동력은 학생들이 자신의 여러 가지 활동을 반성하고 관점의 전환이 이루어져서 부분적으로 또는 전반적으로 수학적인 사고 체계를 거꾸로 보는 것 즉, 반성적 사고 태도이다.

Freudenthal(1983)은 *"대체로 수학은 자신이나 다른 사람의 실제적·정신적 수학적인 활동을 반성*[1]*하는 것이다"* 라고 까지 말하면서 실행된 수학을 반성하는 것을 중요한 수학적 태도로 보고 있다. (정영옥 1997)



[그림 2] 수업에서의 수학화 과정

실제로 수평적·수직적 수학화는 학생들의 행동과 그 행동에 대한 반성적 사고를 통해 일어난다. 즉 학습 수준과 관련해서 낮은 수준에서 실행된 수학이 의식화되고 분석되어서 높은 수준에서의 내용으로 변하며, 이러한 수준 상승의 수단이 반성적 사고이며, 이는 자신이 아는 것을 어떻게 알게 되었는가에 대한 의문에서 일어난다. 이런 반성적 사고를 가능하게 하고 학생들의 창조적 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 주어진 맥락을 다루어 가는 것도 중요하지만 어떤 수준에 이르러서는 좀더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다. 교수 학습 과정에서 학생들은 자신의 창작 활동을 통해서 현실과

1) ■Freudenthal은 반성이라는 용어에 중요한 의미를 부여하게 된 동기가 '수학교육에서의 증명'이라는 강연을 준비하는 과정에서였다고 한다. '내가 생각했던 증명의 이전 단계는 구성하는 것이었고 그것이 정신적으로 이루어진다면 그것은 암묵적으로 존재 주장들이 참임을 증명하는 것을 의미한다. 그러나 구성이 증명의 전 단계라고 하면 거기에는 반드시 중간 단계가 있을 것이고 나는 그것을 반성이라고 결정하였다.(Freudenthal, 1979, p80)

■Freudenthal은 반성이라는 용어를 '거울처럼 비추어 주는 것'이라고 정의한다. 자신을 다른 사람에게 비추어서 탐구하고 이해하는 것으로부터 시작해서, 자기 자신을 비추어 보는 것 즉 내관이 뒤따른다. 이는 자기 자신에 대해 반성하는 것이며, 자기가 한 것, 느낀 것, 상상한 것, 생각한 것 또는 자기가 하고 있는 것, 느끼고 있는 것, 상상하는 것, 생각하는 것에 대해 반성하는 것이다. 그는 아동을 관찰한 결과 아동은 자신의 말에 대해 반성하기 시작하고 자기 자신과 말할 수 있게 됨으로써 사고에 대한 반성이 일어난다고 보았다.

관련된 열린 문제 또는 불충분한 문제를 해결할 수 있고, 그들 자신의 창작 활동을 통해서 그들의 잘못된 생각을 드러냄으로서 교수 학습 과정의 반성과 예견의 이론적 기반을 제시해주고 있다. 또한 교수 학습 과정 중 용어, 기호, 기호법, 도식, 그리고 모델을 만드는 것은 수평적 수직적 수학화 모두에 공헌한다. 즉 현실 상황이나 수학적 문제로 매우 다양한 풀이 방법을 허락하는 열린 문제와 해결되기 전에 자료나 준거들을 스스로 보충할 것을 요구하는 불완전한 문제들을 해결하는 것도 필요하고 다른 학생들을 위해 어떤 주제 또는 어떤 가정에 대한 문제를 만들어 보는 활동을 통해 학생들은 수업에서 수학화 과정을 스스로 경험하여 자신의 학습 과정을 반성적으로 사고하고 동시에 앞으로 어떻게 계속 진행될지를 예측할 수 있는 것이다.(류희찬 1997)

*3) Van hieles*의 수학학습수준이론

Freudenthal이 주장하는 수학화를 학습하는 방법적 기초이론으로 제시된 것이 van Hiles의 학습수준 이론이다. van Hieles(1959)는 사고 수준 문제의 심각성을 함수의 정의를 예로 들어 다음과 같이 기술하고 있다. 함수가 함수식 $f(x)$ 혹은 $y=f(x)$로 정의된다는 모호한 설명은 낮은 사고 수준에서 함수의 정의를 내리려는 데에서, 곧 함수적 사고 활동에 충분히 친숙해지기 전에 그러한 활동 가운데 내재적으로 포함된 구조, 곧 내적 질서를 표현하고자 한 데서 비롯된 것이다. 그러한 시도는 실패할 수밖에 없었으며, 보다 높은 수준에 이르러 함수적 사고에서 실제로 무엇을 하였는가 반성하게 되면서 함수는 x와 $f(x)$ 의 대응 f 라는 결론에 이르게 된다는 것이다.

따라서 Van Hieles(1986, p.45)는 “수학을 학습하는 것은 사고하는 것을 학습하는 것을 뜻 한다” 고 하면서, 수학교육의 주요 문제는 서로 다른 수준에서 추리하는 교사와 학생이 서로를 이해하지 못하는 데에서 비롯되므로 학생들의 사고수준을 파악하여 그에 따른 사고교육을 할 것을 요구한다.

Van hiele는 수학적 사고 활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 비약을 하게 되는

과정을 반복하는바, 수학의 학습-지도는 그러한 불연속적인 사고 수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명해 가야 한다고 주장하였다, 또한 기하학 학습의 다섯 수준을 확장하여 수학적 사고수준을 크게 시각적 수준, 기술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역체계를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 통찰하는 수준으로 구분하였다. 이와 같은 사고 수준의 비약은 지도과정에서 다음과 같은 다섯 단계를 거쳐 이루어질 수 있다.

▶안내단계: 자료를 제시받고 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 한다.

㉠ 교사와 학생들이 학습 목표를 확인하는 단계이다.

(예) 마름모는 무엇인가? 정사각형은? 평행사변형은? 어떻게 그들은 같은가? 정사각형은 마름모가 된다고 생각하는가?

▶제한된 탐구단계: 제시된 자료를 통해 탐구분야를 연구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구분야의 구조가 점진적으로 파악된다.

㉠ 교사가 제시하는 짧은 발문으로 이루어진 활동 자료를 보며, 학생들은 자기 나름대로 과제를 탐구한다.

㉡ 교사는 제시하는 자료를 대각선이 같은 여러 크기의 마름모를 그리게 한다든지, 4개의 각이 같은 마름모를 그리게 한다.

(예) 모눈종이를 주면서 대각선이 같은 여러 크기의 마름모를 그리게 한다든지, 4개의 각이 같은 마름모를 그리게 한다.

▶명확화 단계: 발견된 관계를 표현하는 활동을 통해 그를 명확히 하며 전문적 용어를 학습한다.

㉠ 학생들은 전 단계에서 경험하고 관찰하는 사항에 대하여 토론한다.

㉡ 교사는 학생의 토론하는 활동만 지켜보고 어떤 설명도 하지 않는다.

(예) 모눈종이의 마름모의 활동에서 학생들은 자기가 한 활동에서 어떤 도형과 그 도형이 가지는 성질을 토론한다.

▶자유로운 탐구단계: 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구분야의 구조에 정통하게 된다.

㉠ 그 단계보다 복잡한 과제가 제시된다.

㉡ 많은 사고 단계가 들어 있는 과제를 제시하고, 자신이 배운 지식을 종합적으로 적용해 보게 한다.

▸통합단계: 탐구활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고수준의 비약의 일보 전에 이르게 된다.

㉠ 교사는 학생들 스스로 경험한 지금까지의 단계를 종합하고 음미하게 한다.

㉡ 5단계가 끝나면 다음 수준으로 넘어갈 준비가 된 셈이다.

(예) 마름모의 성질이 학생들에 의하여 종합된다.

따라서 수준의 비약이 가능하도록 하기 위해서는 교사의 일방적이 설명이 아니라 학습자 스스로의 탐구 활동이 가장 중요한 요인이라고 보고 있다. (우정호)

또한 Van hieles의 이론은 현상의 정리 수단의 연구 대상화, 사고의 내적 질서의 연구 대상화 패턴화, 대상화 그리고 형식화와 내용화의 거듭된 교대로 표현되는 수학화 과정의 특성을 반영한 수학학습수준이론으로 기하 교육과정 개발과 학습지도 개선에 시사하는 바가 큰 이론으로, 수학은 인간의 정신적 활동이며 수학화 과정은 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준의 상승이 이루어지면서 조직화·구조화되는 불연속 과정이며, 이런 수준의 비약을 가능케 하는 것은 반성적 사고라고 한 Freudenthal의 생각과 일맥상통하다. 다만, Van hiele의 수준 이론은 수학화를 위한 거시적인 하나의 틀을 제공해 주는 반면, Freudenthal이 제시하는 수준이론은 거시적인 수준의 비약을 위해서는 한 수준 내에서도 점진적이고 미시적인 수준의 상승이 이루어지도록 해야 함을 의미한다. 따라서 이런 점진적인 수학화가 가능하도록 하기 위해서는 학습자의 현실 내의 현상과의 부단한 관계를 맺으면서, 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 일어나도록 하여, 반성에 의한 수준 상승이 자연스럽고 자발적으로 이루어지도록 해야 한다. 또한 어느 지점에서 반성적 사고가 필요한지 알 필요가 있으며, 수학 수업의 관찰을 통해서 높은 수준으로의 비약과 수준 상승을 가능케 하는 반성의 특성을 탐색하고, 교사나 학생이나

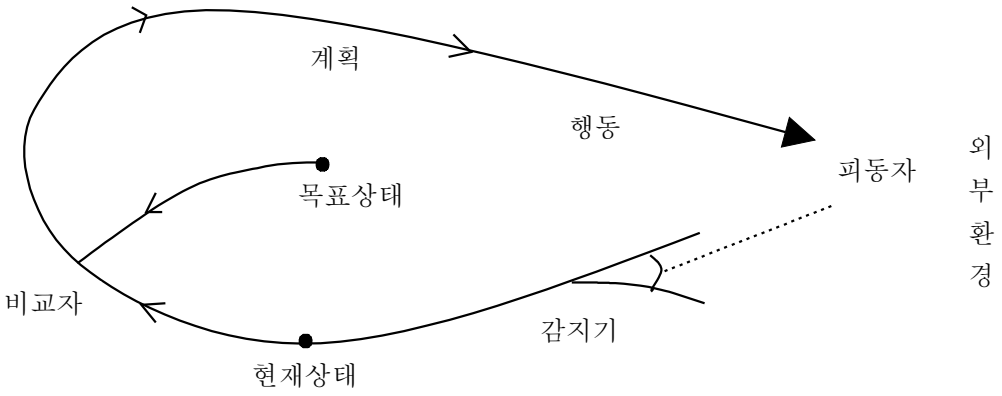
다른 사람의 관찰을 통해서 자기 자신을 관찰하고 반성하도록 해야 한다.

*4) Skemp*의 반영적 지능과 델타 *2* 지휘체계

Skemp(1997)는 '직관적 지능'과 '반성적 지능', schèmes과 동화· 조절 기능이라고 하는 Piaget 심리학의 기본적인 아이디어를 수학 학습심리학적인 입장에서 해석하여, 수학적 개념의 이해를 위한 학습-지도 이론, 곧 스키마의 형성을 위한 '스키마 학습'이론을 전개하고 있다. 그는 새로운 개념이 어떻게 형성되는지에 관심을 가지고서 연구한 결과 서로 관련이 있는 개념들의 구조를 스키마라고 정의 하며 기존의 스키마를 새로운 지식의 획득을 위한 수단으로 사용하는 학습을 스키마틱 학습이라 말한다.(Skemp,1972)

먼저 Skemp는 인간은 지능에 따라 행동하는 존재로 보고, 지능의 본성에 대한 논의를 바탕으로 그에 충실한 능동적인 수학학습이 이루어져야 한다고 주장한다. 그에 의하면 지능은 목표지향적인 행동이며, 현 상태와 목표 상태를 파악하고 비교하여 그 간격을 좁히기 위한 계획을 세우고 그에 따라 행동하게 하는 정신적 도구인 지시체계를 본질로 한다. 그리고 지시체계는 외부 환경으로부터 정보를 수용하여 실제적인 대상에 대하여 행동하게 하는 지시체계와 그러한 지시체계가 경제적이고 적응력을 갖고 작용하도록 하는 지식구조, 곧 스키마를 이루는 지시체계로 나뉘어진다.(우정호)

또한, Skemp는 학습 유형을 습관적 학습과 지적 학습으로 구분하였다. 습관적 학습이란 학생들의 바람직한 반응에 보상 효과를 줌으로써 그 반응을 습관화하는 것이다. 수학적 개념의 정의나 공식의 의미를 생각하지 않고 암기하는 것은 습관적 학습이다. 이런 학습의 결과는 학습 내용을 오래도록 지속할 수는 있지만 새로운 상황에의 적용력이 떨어지며 방해가 될 수 있다. 지적 학습이란 반영적 지능 체계를 활용하여 학습의 목표로 접근해 가는 학습의 한 방법이다. 현재 상태를 목표 상태로 바꾸는 과정을 나타낸 모델로서 다음 그림과 같은 지휘자 체계(director system)가 있다.

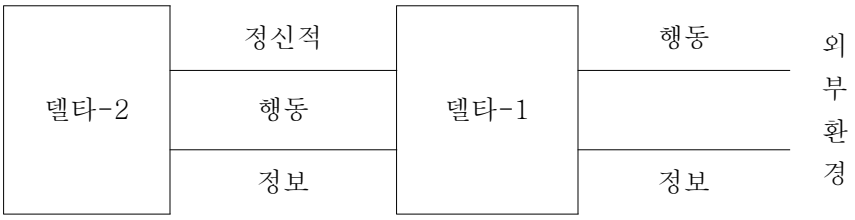


[그림 3] Skemp의 지휘체계

이 모델은 감지기를 통하여 외부 환경에 있는 피동자를 인지하여 현재 상태로 하고 이것을 목표 상태와 비교한 다음 그 차이를 줄이기 위한 계획을 세우고 행동하여 피동자에게 반응하는 것이다.(강옥기,2000)

이와 같은 활동을 반복하여 현재 상태를 목표 상태로 접근해 가게 한다. 이러한 목표 지향적인 학습으로서의 지능은 통합된 지식의 구조(스키마)의 형성과 검증을 위해서 '델타-1'과 '델타-2'라는 두 가지 지휘 체계를 필요로 한다.

델타 -1은 물리적 환경에 대하여 작동하는 지휘 체계이며, 델타-2는 델타-1을 피동자로 하는 이차적인 지휘 체계로서 델타-1이 보다 잘 작동될 수 있는 상태가 되도록 델타-1을 바꾸어 주는 역할을 한다. 델타-2의 중요한 목표의 하나는 스키마의 구성이며, 지능은 두 가지 방법으로 적응력에 이바지한다.



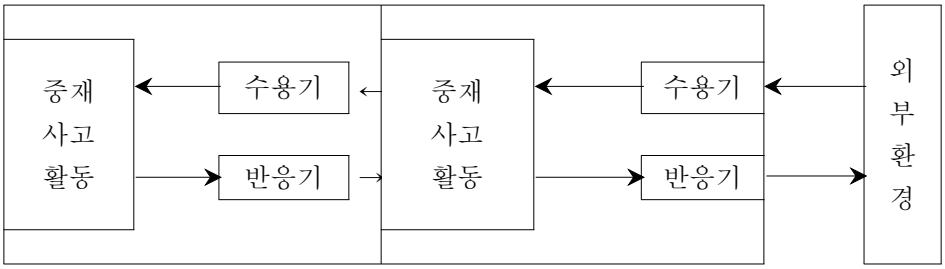
[그림 4] Skemp의 지능체계

첫째, 델타-1이 수행하는 모든 다른 종류의 일에서 스키마를 구성하여 적응력을 키워준다. 둘째, 이 스키마로부터 서로 다른 처음 상태와 목표 상태에

적절한 계획을 구안하며, 이러한 계획은 목표 지향적인 행동의 기초를 형성한다.

이렇듯 Skemp는 지능을 목표 지향적인 행동을 위한 지휘체계로 보고 있으며 가장 중요한 기능으로서 스키마의 구성을 들고 있다. 이에 따라 Skemp는 지능을 직관적 지능과 반영적 지능으로 구분하고 동일한 체계 내에서 일어나는 두 가지 기능으로 설명한다. 직관적 지능이란 감각기관을 통해 지각된 실제적 대상 상이의 관계, 혹은 아동 자신의 대상에 대한 행동 사이의 관계를 인식하는 능력을 가리키는 것이며, 반성적 지능이란 직관적 지능에 의해 구성된 개념이나 개념 사이의 관계를 인식하고 내면적 활동을 조정하는 능력이다. 반성적 지능은 표상과 관련된 행동에 대하여 그 결과뿐만 아니라 과정도 의식함으로써 추론과 탐구활동, 문제해결 활동을 의식적으로 지속할 수 있게 된다. Skemp는 직관적 지능을 뒷받침하는 감각-운동 체계와 반성적 지능 체계의 관계를 [그림 4]와 같이 도해하고 있다.

오른쪽 부분은 직관적 지능 체제를 나타낸 것으로 환경으로부터 눈이나 귀와 같은 수용기관(receptors)을 통해 다양한 형태의 감각 자료를 (신경체계를 통하여) 받아들여 중재사고활동(intervening mental processes)에서 직관적 사



[그림 5] 반영적 지능 체계

고 활동을 한 다음 그 환경에 대해 실행자(근육;effector)를 사용하여 개인에 따라서 다양한 행동을 하는 것이다. 여기서 반영하는 행동의 특성은 중재사고활동을 하는 개념체계의 복합성에 의해 결정된다. 왼쪽에 있는 부분은 직

관적 지능체계에 의하여 이루어진 사고 활동을 반영적 지능 체계에 받아들여 중재사고활동이라는 개념체계에 의하여 사고를 한 다음 실행자를 통해 이전 단계에 있는 중재사고활동에 영향을 주는 것이다. 이 때의 수용 기관과 실행자는 정신활동 속에 있는 것으로서 구체적으로 설명할 수는 없는 것이다.(강옥기,2000)

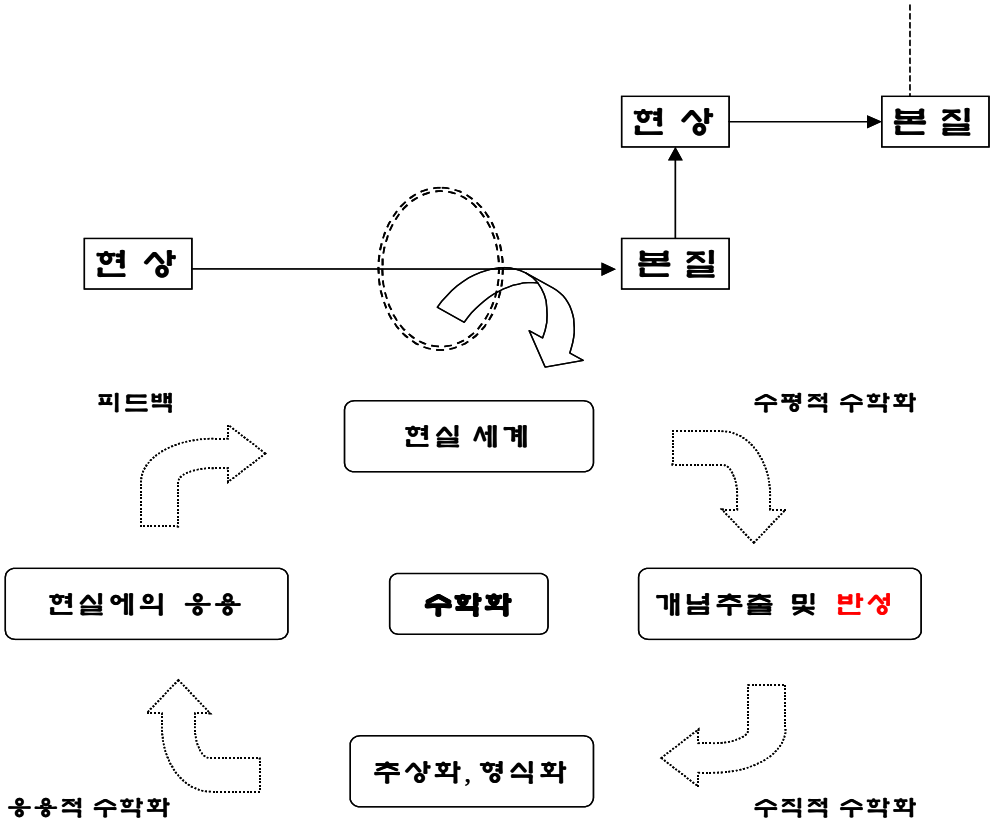
따라서, 반영적 지능은 감각-운동 체계에 의해 외부 세계에 대한 경험으로부터 이끌어 낸 1차적인 개념 및 그 관계를 인식하고 조정할 수 있는 2차원적인 개념 및 그 관계 체계, 곧 스키마의 구성을 가능하게 한다. 따라서 반성적 지능은 델타-2의 기능을 하는 것으로 볼 수 있다.(우정호)

Ⅲ. 수학교육에서의 반성의 의미와 역할

1. 수학교육에서의 반성 개념의 공통적 이해

Freudenthal 은 수학적 사고의 본질과 그 교육에 대하여 다음과 같이 주장하고 있다. 인간은 도형에 의하여 형이란 현상의 세계에 질서를 창조하며, 수에 의해서 도형이란 현상에 질서를 창조하고, 십진법에 의해서 자연수란 현상에 질서를 창조한다. 나아가 보다 높은 수준에서 여러 가지 수학적 현상이 군, 체, 위상공간 등의 개념으로 파악된다. 이와 같이 하여 인간은 수학을 발전시켜 나아간다. 여기서 주목할 것은 현상과 그 정리 수단과의 관계가 상대적인 관계라는 것, 즉 어떤 수준에서 정리 수단이었던 것이 그 보다 고차의 수준에서 현상으로 파악되며, 보다 낮은 수준에서 실행된 수학이 보다 높은 수준에서 현상으로 파악되며, 보다 낮은 수준에서 실행된 수학이 보다 높은 수준에서 관찰되는 수학이 된다는 점이다. 결국 수학적 사고 발달의 동인은 자신 또는 다른 사람의 수학하는 활동을 반성하는 것이며, 수학교육의 주요 문제는 자신이나 다른 사람의 실제적 또는 정신적인 수학적 활동을 반성하도

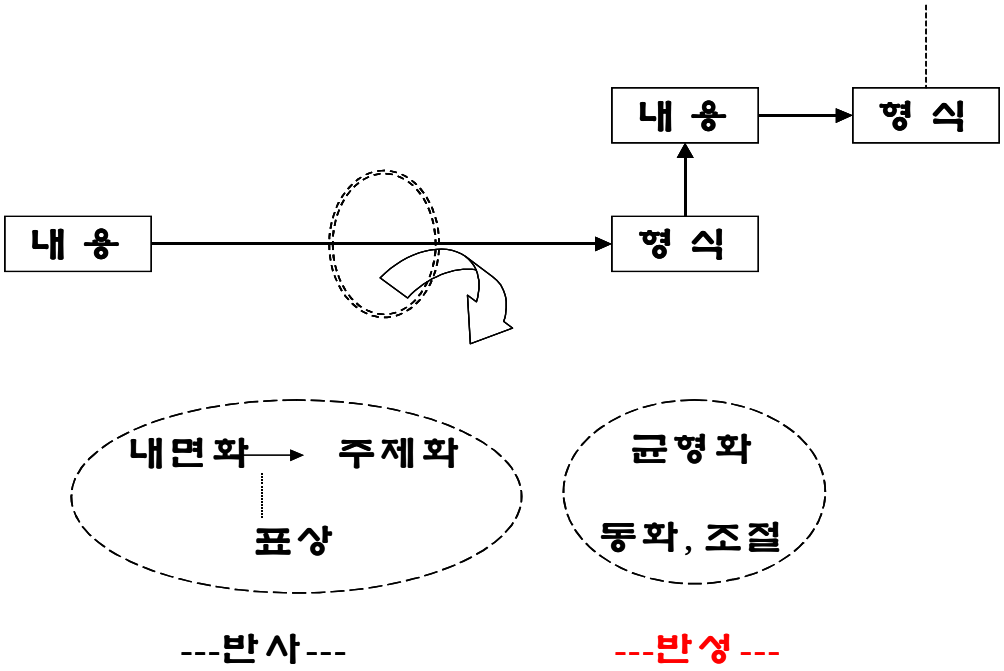
록 어떻게 자극할 것인가의 문제로 귀착되는 것이다.(우정호)



[그림 6] Freudenthal의 수학화

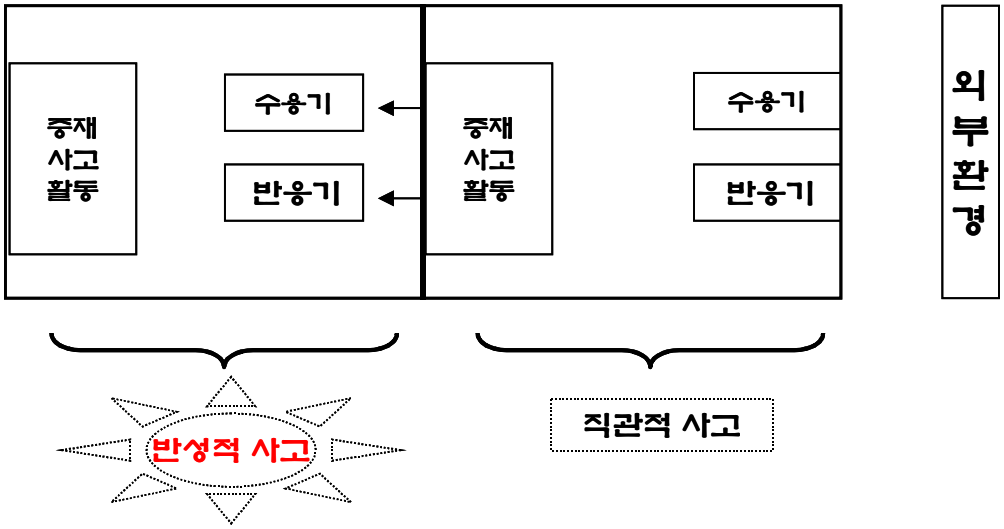
반영적 추상화를 구현하고자 하는 수학 학습 이론들이 사고 수준의 불연속적인 비약을 설명하기 위하여 대상화, 집약화, 회귀 등의 아이디어를 제시하고 있음은 앞에서 언급한 바와 같다. 전 단계에서 사고의 수단이었던 것이 다음 단계의 사고의 수단이었던 것이 다음 단계의 사고의 '대상'이 된다는 식의 이러한 아이디어는 Piaget 이론에서는 주제화라는 말로써 표현된 것이다. 그런데 piaget의 반영적 추상화 이론에서 주제화는 '반사' 과정의 종착점이며, 이로 인하여 다음 단계의 '반성'이 가능해진다는 것이 보다 중요하다. 수학적 개념의 발달에서 '반성'의 역할이 중요한 의미를 갖는 것은, 이 과정을 통하여 이전의 구조를 포괄하는 재구성을 이룰 수 있고 논리적 정합성을 유지하는

개념의 확장이 가능하기 때문이다. 음수의 개념을 예로 들면, 1 - 4 또는 2 - 5와 같은 조작들을 단순히 '사고의 대상으로 삼는' 과정만으로 음수 개념이 형성되기를 기대할 수는 없다. 이러한 대상들을 더하거나 곱하는 등의 조작에서 자연수의 덧셈, 곱셈과의 유사성에 주목하고 그것들을 새로운 구조로 통합할 수 있어야 이 대상들을 '수'로서 인식할 수 있게 되는 것이다. 수학 학습이 완결된 형태의 지식을 수용하는 것이 아니라 수학의 사고 과정을 배우는 것이라 할 때, 수학적 개념의 학습에서 그 개념의 기저가 되는 조작을 구성하게 하는 '반성' 과정이 핵심적인 위치를 차지해야 할 것이다.



[그림 7] Piaget의 반영적 추상화

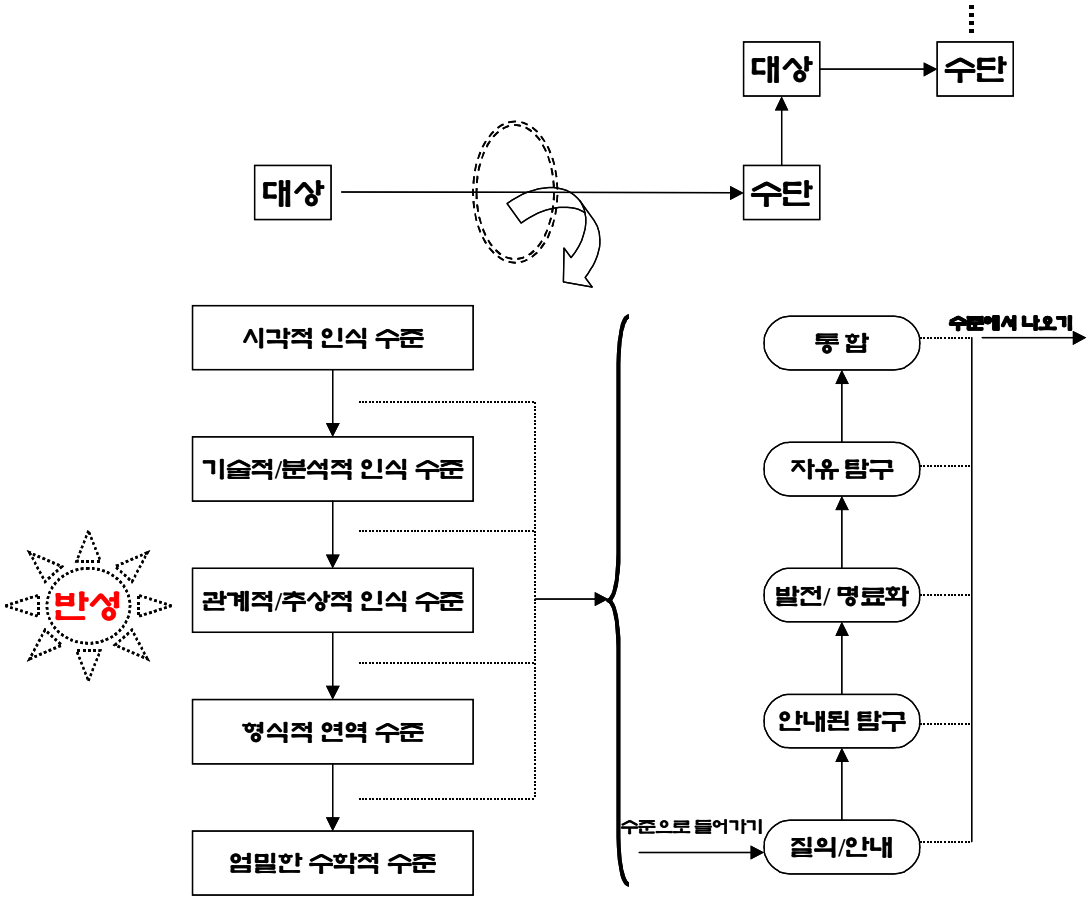
Skemp(1987)는 인간의 사고 활동을 직관적 사고와 반성적 사고로 이분화하면서 특히 후자의 사고를 메타인지와 관련짓고 있다.



[그림 8] Skemp의 지능 체계

많은 경우 중재 사고 활동을 의식하지 않고도 직관적 활동이 성공적으로 이루어지는데, 예를 들어 6+5는 얼마인가? 란 질문에 대해 곧바로 대답하는 경우가 그것이다. 한편, 반성적 사고 단계에서는 중재 사고 활동이 내성적 인식의 대상이 된다. '16×25'는 얼마인가라는 질문에 '400'이라고 대답했을 경우, '머리 속에서 어떻게 계산했는가? 라는 질문을 받을 수 있는데, 이는 곱셈의 결합 법칙과 분배 법칙을 인용하는 정도의 복잡한 사고를 요하는 질문이다. 반성적 사고 단계가 직관적 사고 단계와 차별되는 것은 바로 이러한 모든 질문에 답하는데 필요한 정보가 주위 환경으로부터가 아닌 우리 자신의 개념 체계로부터 유래한다는 것이다. 이것이 바로 ' 중재 사고 활동'이다.

마지막으로 Van Hiele는 수준이론을 통해 반성이 학습자의 수준 상승에 결정적인 역할을 수행함을 설명하였다. 본 연구에서는 특히 관계적/ 분석적 인식 수준에서 이러한 반성적 사고가 활발히 일어남을 다음과 같은 그림을 통해 표현해 보았다.

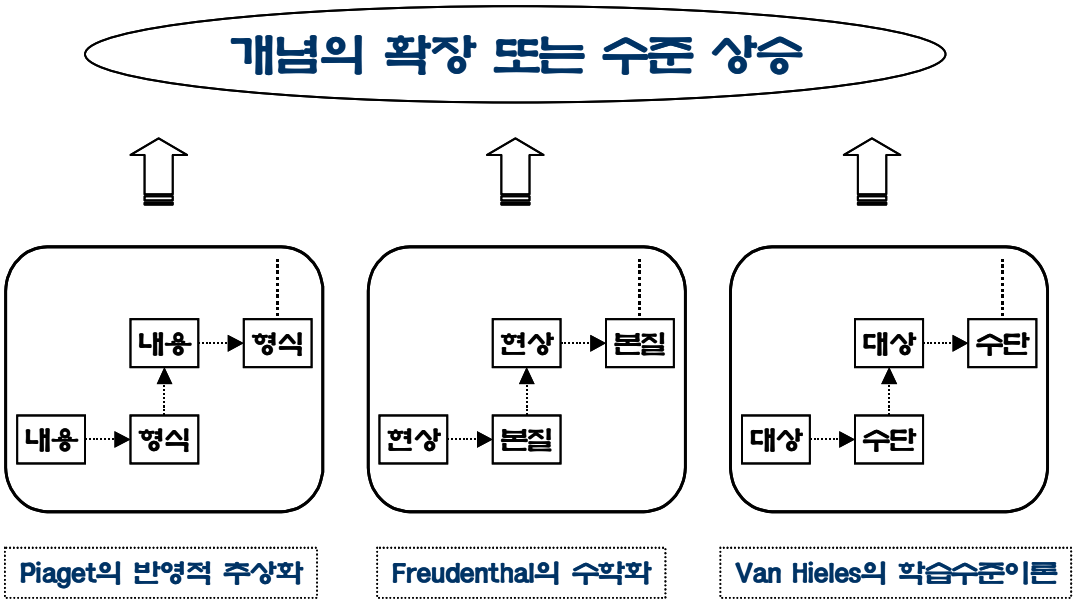


[그림 9] van Hieles의 수학학습수준

따라서 반성은

- 인지 조작을 사유의 대상으로 삼고 그것을 되돌아보는 인간의 능력
- 자신의 정신 상태에 대한 지각
- 마음속에서 대상을 돌려보고 그것에 대해 세심하게 고려해 보는 사고
- 의식적으로 자신의 사고 과정을 관찰대상으로 삼는 능력

으로 정리해볼 수 있다.



[그림 10] 반성의 공통적 이해

2. 반성과 메타인지의 이해

1)메타인지 개념의 유래

메타인지는 메타기억이라는 용어에서 비롯된 것으로, 메타이해, 메타집중, 메타의사교환, 메타언어 그리고 메타기억 등을 모두 포괄하는 광의적 의미의 개념이다. 이때 접두사 '메타'는 '변화'와 '이후'라는 의미를 나타내는 그리스어 'μετα'에서 유래된 어휘로, '직접적인 사건을 떨어져서 고찰하여, 그 사건을 초월하여 제기할 수 있는'이란 의미로 사용되고 있다. 이러한 관점에서 보면 메타인지는 포괄적인 의미에서 인지 그 자체를 대상으로 하는 지식이요, 인지 그 자체에 대한 이해라 할 수 있다. 달리 말하면 정신의 상태나 과정이 반성의 대상이 되는 정신 활동이라 할 수 있다. 따라서 메타인지는 '인지에 대한 인지', '인지에 대한 반성', 혹은 사고에 대한 사고' 등으로 불리어진다.

메타인지의 모개념으로서의 메타기억은 1970년대 초반, 심리학자 Flavell에 의해, 아동의 암기 수행상의 결함을 설명하기 위해 도입되었다. 따라서 메타기억의 초기 개념은 '기억에 대한 지식'으로서 이는 메타기억이 처음에는 지식의 한 유형으로 간주되었음을 의미하는 것이다. 그러나 아동의 암기 수행의 결함을 그들이 가진 암기에 대한 지식의 부족뿐만 아니라 자신의 암기 과정을 모니터하고 조절하는 능력의 부족으로 돌리려는 경향이 대두되면서 메타인지는 현재의 지식과 기능이라는 두 가지 측면을 가진 양면적 개념으로 인식되게 되었다. 메타인지에 대한 이와 같은 이분법적 해석은 메타인지를 인지의 한 유형으로 간주하는 것과도 맥을 같이 한다. 일반적으로 인지는 두 가지 관점으로 해석된다. 하나는 알려고 하는 작용 그 자체로서의 의미를 지니며, 다른 하나는 알고 있는 상태 그 자체로서의 의미를 지닌다. 이처럼 인지는 인지 활동의 과정과 산물이라는 두 가지 의미를 동시에 지니고 있기 때문에, 메타인지를 인지의 한 유형으로 본다면 메타인지 역시 인지활동의 과정과 산물이라는 두 가지 측면으로 분류 가능하다. 따라서 지식과 기능으로서의 메타인지에 대한 현재의 이분법적 해석은 그것을 인지적 개념으로 간주할 경우 상당한 근거를 가지고 있다고 할 수 있다.

메타인지 개념의 선행 개념으로 반성, 실행적 제어, 자기 조절, 타조절 개념을 개별적으로 고찰하고, 메타인지의 구성요소를 살펴봄으로써 수학교육에서의 메타인지의 개념을 명확하게 정의하겠다.

이 네 가지 개념을 메타인지 선행 개념으로 간주하였던 것은 시기적으로 보아 메타인지 개념 출현 이전부터 이미 존재했을 뿐만 아니라, 의미상으로는 현재 사용되고 있는 메타인지 개념과 매우 근접하기 때문이다.

'반성' 개념은 의미가 매우 다양하지만 기본적으로 사유의 대상이 정신 조작, 즉 인간의 인지 과정이라는 점에서 메타인지의 핵심 개념과 일치한다. 실제로 메타인지는 '인지에 대한 반성'으로 일컬어지기도 한다. 따라서 일부에서는 반성을 메타인지 개념과 동일시하기도 하지만 반성은 메타인지의 여러 다양한 측면 중 일면에 지나지 않는다.

'실행적 제어' 개념은 정보처리 모델에서 비롯된 것이지만, 실제로 메타인지

의 기능적 측면과 밀접히 관련되어있다. 정보 처리적 관점에서는 인간의 정보처리 과정을 컴퓨터의 정보처리 과정과 동일시함으로써, 강력한 중앙 처리자를 가정하고 있다. 그러나 인간은 기계와 달리 수 많은 인지 시스템이라 할 수 있다. 따라서 메타인지는 기존에 간과되어온 인지 과정에서의 인간의 심리적이고 정서적인 면을 고려하고 있다는 점에서 정보 처리적 모델에서 제시되는 단순한 제어 개념과는 구분 된다고 할 수 있다.

'자기 조절' 개념은 Piaget에 의해 메타인지 개념이 출현하기 훨씬 전부터 많은 연구가 이루어진 주제이다. 특히 Piaget는 자기 조절의 세 가지 수준을 고려하고 있는데 최상의 수준은 의식적 조절로서, 무의식적 자동 조절이나 행동의 차원에서 발생하는 행동적 조절과는 구분되다. 그러나 이와는 달리 현재 사용되고 있는 메타인지 개념은 여러 수준의 자기 조절적 행위를 동시에 포괄하고 있다. 특히 학습 활동에 대한 무의식적인 자기조절 행위와 신중하고 의식적인 사고 실험 간의 기본적인 구분도 시도되지 않고 있다. 바로 이러한 점이 메타인지 개념의 불명확성 혹은 다양성의 일면을 그대로 나타내고 있는 것이라고 생각된다.

마지막으로 '타율적 조절 행위'는 메타인지 개념과 직접적인 관련이 있다기보다는 메타인지적 조절 행위를 획득하기 위한 일종의 중재적 수단으로서의 성격이 강하다.

현재 메타인지라는 이름으로 대표되고 있는 여러 가지 다양한 하위 개념군으로는 정신세계에 대한 지식, 변인에 대한 지식, 자신의 인지적 상태에 대한 평가적 지식, 문제 해결 기능, 정의적 특성으로서의 메타인지라고 하는 다섯 가지 범주로 분류될 수 있다. 각 범주에 해당되는 내용은 다음과 같다.

첫째, 정신세계에 대한 지식으로서의 메타인지는 외부의 실물 세계와 다른 내적 정신세계에 대한 지식이다.

둘째, 변인에 대한 지식으로서의 메타인지는 메타인지의 초기 개념으로 현재, 가장 널리 알려진 것이기도 하다. 이것은 인지적 과제를 수행하는데 있어 수행 과정이나 결과에 영향을 미치는 변인에 대한 개인적 지식 혹은 신념이다. 변인으로는 인간, 과제, 전략, 환경 등이 있다.

셋째, 자신의 인지 상태에 대한 평가적 지식으로서의 메타인지는 인지적 과제를 처리하는 상황에서 행해지는 자신의 현 사고 과정에 대한 즉각적인 자기 평가이며, 또한 평가된 결과이다. 이것은 다음과 같은 세 가지 유형의 지식을 포함한다. 제 1유형은 자신에게 어떤 인지 과제가 주어졌을 때 자신이 그것을 과연 어느 정도 할 수 있을까 하는 자기 예언이다. 제 2 유형은 과제 수행 중에 자신의 사고과정 상태를 점검하는 자기 점검이다. 제 3 유형은 과제를 마친 후에 자신의 수행에 대해 내리는 자기평가이다.

넷째, 기능으로서의 메타인지 역시 변인에 대한 지식으로서의 메타인지와 더불어 가장 널리 알려진 메타인지 개념이다. 이것은 인지적 과제를 효과적으로 수행하고 수행한 결과에 대해 확신을 갖기 위해 행해지는 전략적 행동 혹은 의사결정과 관련된 문제해결의 일반 기능이다.

다섯째, 정의적 특성으로서의 메타인지는 인지 과제에 대한 개인적인 신념, 태도, 정서(혹은 감정)와 관련된다.

다음은 메타인지의 구성요소를 살펴보자. 현재까지의 연구는 메타인지가 적어도 두 가지 분리된 구성 요소로서 메타인지적 지식과 메타인지적 자기 조정능력을 포함한다고 밝히고 있다. 메타인지적 지식은 과제를 효율적으로 수행하는 데 필요한 기능, 전략 및 자원의 인식과 관련되며, 메타인지적 자기 조정 능력은 성공적인 과제 수행을 보장하는 자기규제 기제를 사용하는 능력으로 메타인지적 지식을 실행하는 방법과 시기를 아는 것과 관련된다. 특히 메타인지적 자기 조정은 자신의 인지 과정을 스스로 지각하는 메타인지 지식만으로는 효율적으로 과제를 수행할 수 없다는 전제 하에 메타인지 지식보다도 문제해결 과정에서 스스로 계속적으로 자기 점검하는 것을 강조하는 것으로 대두된 개념이다. 따라서 메타인지적 자기 조정은 학습자가 조직적인 인지활동을 위하여 자신의 인지 활동을 계획하고 점검하며 수정하는 활동으로써 문제를 해결하는데 이용하는 실질적인 인지전략이다

메타인지는 인지활동에 대한 지식과 조절을 포함하는 용어

메타인지적 능력: 학습자가 혼자의 힘으로 문제해결을 추진하는 과정에서 필요한 메타인지적 지식과 조절을 구체적으로 활용하는것	**메타인지적 지식**	과제를 효율적으로 수행하는데 필요한 한 개인이 자신의 인지능력, 인지전략, 과제, 기능, 자원 등에 관해 소유하고 있는 지식
	메타인지적 조절	◉ 정의 : 메타인지적 지식을 통합하는 과정 ◉ 과제해결시 § 인지적 과제 해결 과정에서의 여러 가지 결정과 전략적 행동과 연관 § 메타인지적 지식을 실행하는 방법과 시기에 따라 과제 수행의 성공 좌우 § 문제의 특성을 이해하는데 필요한 전략선택 § 활동절차의 계획 및 계획실행을 위한 적절한 전략의 선택 § 전략 수행 활동에 대한 모니터링 § 전략과 계획의 결과에 대한 평가 § 부적절한 전략과 계획의 수정과 삭제
	신념체계	§ 학습자가 수학에 대해 가지고 있는 가치관이나 선입견

자신의 인지과정을 스스로 지각하는 메타인지 지식만으로는 효율적으로 과제 수행을 할 수 없다는 전제하에 메타인지 지식보다 **문제 해결 과정에서 스스로 계속적으로 자기점검 하는 것을 강조**

<표 1> 메타인지의 개념

2) 메타인지의 역할

수학교육 현대화 운동은 급격히 발전해 온 수학의 내용을 학교 수학에 조기 도입하려는 시도로 인해 거기서 목표로 하는 현대 수학의 이해에도 미치지 못했을 뿐 아니라 기초적인 기능마저 저하 시키는 결과를 가져오게 되었다. 이러한 수학 교육 현대화 운동을 반성하면서 Freudental은 전통적인 수학교육이나 현대화에 의한 새 수학 모두의 결함이 완성된 형태로 수학을 전달했기 때문이라고 지적하고, 그 개선의 실마리를 사고 활동으로서의 수학을 경험시키는 것에서 찾고 있다. 이와 같은 맥락에서 G. Polya도 학교 수학의 목적이 수학적으로 '사고하도록 가르치는 것'이며 이는 단지 정보적 지식을 전달하는 것이 아니라 부여된 정보적 지식을 사용하는 능력, 곧 방법적 지식과 바람직한 사고 태도와 습관을 개발하는 것이라고 한 바 있다. 수학교육 현대화의 반성으로 1977년 "문제 해결을 학습하는 것이 수학을 배우는 중요한 이유"라는 의견서를 내었고 마침내 1980년 NCSM에서는 "문제 해결은 1980년대의 학교 수학의 초점이 되어야 한다"는 권고문을 발표하였다. 그때부터 문제 해결 교육에 대한 연구가 시작되었고 그 연구의 대부분이 Polya의 발견술 지도에 초점이 맞추어져 있었다. 그러나 1980년대 말 Polya의 연구를 근거로 한 문제 해결 전략 지도에 관한 여러 실험 연구가 발표되었는데 그 결과가 긍정적인 면과 부정적인 면으로 혼합되어 나타났다. 이처럼 문제 해결을 지도한 결과가 성공과 실패로 엇갈려서 나타나는 원인을 찾는 과정에서 연구자들이 발견한 문제 해결의 주요 변인이 '메타인지'라 할 수 있다.(유현주) Kilpatrick(1985)은 학생들이 주어진 문제를 풀기 위하여 필요한 개념이나 기술을 모두 갖추고 있으면서도 그것을 문제 해결에 이르기까지 종합적으로 사용하지 못하고 있음을 지적하면서 그 이유로 교사들이 학생들로 하여금 그들의 의식이 어떻게 작용하는지 또 그들의 정신 활동을 감시하고 조절하는데 그것을 어떻게 이용할 수 있는지를 좀 더 의식하도록 도와주는데 별다른 주의를 기울이지 못했기 때문이라고 말하고 있다. Lester, Jr.(1985)도 "학생의 문제 해결력을 개선하려는 많은 연구가 실패한 것은, 발견술적 기능의 개발을 지나치게 강조하였으며, 이로 인해 학생 자신이 자신의 활동을 조정하는

관리적 기능을 무시한 데 그 원인이 있다.” 고 주장하고 있다. 문제 해결자가 아무리 풍요한 전략을 갖고 있다 하더라도 그 전략을 적절하게 관리할 수 있는 능력이 없다면 별가치가 없다는 것이다. 여기서 말하는 ‘관리적 기능’ 이란 인지 활동에 대한 조정과 통제에 해당하는 것으로, 문제 해결자가 문제 해결 활동을 성급히 실행하기 전에 주어진 문제가 갖는 의미가 무엇인가를 이해하였는지 스스로 확인하고, 문제 해결 계획을 수립하고 조정하는 것 등을 의미한다. Schoenfeld(1987)도 인지적 자원을 종합적으로 사용 처리케 하는 메타 인지적 작용 즉 관리적 기능이 문제 해결에서 가장 중요하다는 것을 믿고 있다. 그는 문제 해결 과정에 메타 인지가 전체적인 인지 활동을 이끌어 가는 핵심적인 추진력의 역할을 담당하며, 이러한 역할을 수행하는 메타 인지에 대한 보다 많은 연구가 이루어 져야 함을 여러 곳에서 역설하고 있다.

이와 같이 메타 인지적 지식과 기능이 수학 문제 해결에 중요함을 알면서도 그 동안 이 분야에 관심을 기울이지 못한 이유로서 Garofalo와 Lester, Jr(1985)는 다음과 같은 세 가지를 들고 있다.

첫째, 은밀한 행동은 어떤 형태이든 관찰하고 분석하기가 매우 어렵다는 데 있다. 실제로 많은 심리학자들은 자기 자신의 정신 과정에 직접 접근할 수 없는 것으로 믿고 있기 때문에 자기 기록을 연구 자료로 여기는 것에 대하여 의문시 하고 있으며, 이러한 의문은 메타 인지 과정에서 더욱 두드러진다. 둘째, 자기 기록을 합법적인 자료로 수용하는 연구자도 어떤 과제를 수행하는 동안 정보를 말로 나타내도록 요청하는 것이 인지 과정에 영향을 줄 것이라고 믿고 있기 때문이다. 셋째, 메타인지, 메타 기억 등과 연계된 현상은 많은 심리학자에 의해서 너무 불명확하기 때문에 과학적 탐구의 대상이 될 수 없는 것으로 여겨졌으며 그 결과 메타 인지의 역할이 대부분 무시 되었다.

그러나 수학 문제 해결 지도에 대한 연구에서 지금까지 인지적 활동만을 고려한 것을 반성하면서 최근에 전략 선택, 인지적 조정, 인지 과정의 평가 등과 관련된 메타 인지에 대하여 많은 관심이 제기 되고 있음은 앞에서 언급한 바 있다. Klipatrick(1985)은 현재 수학 교육에서 거론되는 주요한 연구 주제는 ‘자기 의식’에 관한 것인바, 수학의 지도와 학습이 효율적으로 이루어지기

위해서는 교사나 학습자가 교수 활동이나 학습 활동에 임할 때 자신이 현재 수행하고 있는 일에 대하여 보다 더 의식적인 인식을 가져야 한다고 주장하고 있다.

이에 덧붙여 최근 수학 교육 연구자들은 메타 인지 영역에 정의적 요소를 추가시키려는 경향을 보이고 있다. 예를 들면 신념을 '주관적인 지식'으로 여겨 메타 인지의 구성 요소인 '인지에 대한 지식'에 추가시키는가 하면 Schoenfeld(1987)처럼 메타 인지에 대한 연구에 자신의 사고 과정에 대한 지식, 조정과 함께 '신념과 직관'을 포함시키기도 한다. 그러나 문제 해결자가 수학과 수학 활동에 어떠한 신념과 태도를 가지느냐 하는 것이 문제 해결 활동에 중요한 영향을 끼친다는 것은 대부분의 학자들이 인정하고 있는 사실이지만, 이것을 메타 인지 영역에 포함시켜 연구한다는 것은 무리인것 같다. 이에 대해 Kilpatrik(1985)은 "메타 인지에는 수학을 하는 사람으로서, 수학자로서 자기 자신에 대한 신념이 포함되지만, -엄격히 말해서-수학을 어떻게 하느냐 하는 것과 중요한 관계를 가질 수도 있는 다른 신념은 포함되지 않는다" 고 분명히 이야기 하고 있다. 오히려 백석윤(1992)과 같이 메타 수준의 인지 활동, 신념 체계 그리고 문제 해결 활동에 영향을 끼칠 것으로 보이는 문제 해결자의 정의적, 심성적 요인들을 모아서, "순수 인지 외적 요인"으로 부르는 것이 타당한것 같다.

그러면 메타 인지가 수학 문제 해결 지도에 어떻게 적용되는지를 Lester, Jr의 연구를 통해 알아보자. Lester, Jr(1985)는 Polya의 문제 해결 4단계 모델은 메타인지가 고려되지 아니한 연구라고 비판하면서, 이 모델의 인지적 요소에 이와 서로 관련이 있는 메타 인지적 요소를 가미한 개선안을 제시하고 있다. (<표 2>) 이 개선안에는 Polya의 모델의 인지적 요소를 방향 설정, 조직화, 실행, 검증으로 수정 제시하고, 메타 인지적 요소로서는 Flavel이 메타 기억과 관계된 세 가지 변인으로 들었던 개인, 과제, 전략이라는 변인을 들고 있다. 그는 이 세 가지 변인이 메타 기억뿐만 아니라 수학적 과제의 해결과 관련된 메타 인지를 논의하는데도 적당하다고 본 것이다

<표 2> 수학 문제 해결 과정과 메타 인지적 발문

범 주	메타 인지 결정의 보기
방향설정 : 문제를 평가하고 이해하기 위한 전략적 행동 ①이해의 전략 ②정보의 분석 ③최초의 부분적 표현 ④곤란도 또는 성공의 평가	• 나는 금방 중심 단어를 찾았어, 그것이 무엇을 해야 할 지를 말해 줄 거야 • 이 문제에 주어진 수가 나에겐 너무 커 • 이 문제는 저것과 비슷한데! • 이 문제를 어떻게 풀어야 할지 도무지 알 수 없어 • 수가 너무 많은데! 그것은 전에 풀었던 문제와 같지 않아
조직화 : 행동의 계획 또는 활동의 선택 ①목표의 명확화 ②전체적인 계획 ③부분적인 계획 (전체 계획의 실행을 위한)	• 그 문제는 <이러한 것>을 구하는 것이라 고 생각해 • 이 문제는 <이 量>을 알아내면 풀 수 있어 • 이 수에 대해 먼저 <이런 조작>을 해야 한다고 생각해 • 확실치는 않지만 <이런 알고리즘, 방법> 이 이런 유형의 문제에는 좋다고 생각해 • 무엇을 해야 할지 확실하지가 않아 • 이것은 <이런 유형>의 문제야, 그것은 다른 문제처럼 풀 수 있어
실행 : 계획을 제대로 수행하기 위한 행동의 조정 ①부분적 행동의 실행 ②부분적 계획의 진전과 일관성에 대한 감시 ③포기할 것의 결정 (예 : 속도 대 정확도, 얼마나 잘 푸는가의 정도)	• 나는 계산 처리를 적당히 얼버무리고 있어 보다 천천히 처리하는 게 더 좋아 • 이건 복잡한데, 한 단계 한 단계를 조심스럽게 처리해야겠어. • 이 방법으로는 잘되지 않는데 다른 방법으로 해봐야겠어 • 잊지 않도록 내가 하고 있는 것을 소리 내어 말하는 게 필요해

	• 이 단계는 적어 둘 필요가 있어
검증 : 결정한 사항과 계획 실행의 결과에 대한 평가 (1) 방향 설정과 조직화에 대한 평가 ① 문제 표현의 적절도 ② 조직적 결정의 적절도 ③ 전체 계획에 대한 부분적 계획의 일관성 ④ 목표에 대한 전체 계획의 일관성 (2)실행의 평가 ① 부분적 행동의 검토 ② 계획이나 문제의 조건에 대한 중간 결과의 일관성 ③ 문제 조건에 대한 최종 결과의 일관성	• 나는 경솔해, 내가 처리한 각 단계를 점검하는 게 더 좋아 • 이 계획이 적당한지 자신이 없어, 다시 한번 그것을 손질하는 게 좋겠어 • 내가 그 문제를 이해했는지 확실치가 않아 한 번 더 읽어 봐야겠어 • 이 답은 너무 큰 것 같아 검토해봐야겠어 • 그 문제는 이런 유형의 문제라고 생각했는데 그렇지가 않은 것 같아

3) 반성과 메타인지의 역할 비교

최근의 개념학습과 문제해결 학습에서 반성적 사고의 중요성이 강조되면서 메타 인지에 대한 관심이 증대되고 있다. 단지 지금까지 대부분의 수학 문제 해결 과정에 대한 연구에서는 주로 문제 해결 전략에 관심이 집중된 반면, 최근의 연구에서는 메타 인지 측면도 고려되어야 함을 주장하고 있는 것이라고 볼 수 있다. 그러나 과거의 문제 해결에 대한 연구에서 메타 인지적 측면에 대한 고찰이 전혀 없었던 것도 아니다. 예를 들어 , 메타 수준의 인지적 기능에 대한 용어로 그동안 '반성적(reflective)'이란 용어가 자주 사용되어 왔는 바, Dewey의 '반성적 사고(reflective thinking)', Piaget의 '반영적 추상화(reflective abstraction)', skemp의 '반성적 지능(reflective intelligence)' 등이 그 예이다. 이러한 이론으로부터 얻을 수 있는 공통적인 시사점은 인지 과제

에 대한 인지 기능의 '반성적'인 역할의 중요성이며 그것은 다름 아닌 개인이 인지적 과제를 수행하고 있는 도중이나 수행한 후에 작용하는 이른바 메타 수준의 인지 활동이라는 것이다.

한편, Crowhite(1987)도 과거 수학 교육의 역사를 분석하여 보면 메타 인지라는 말은 사용하지 않았지만 그와 유사한 의미를 가진 말이 많이 있었다면서 그 예로서 '엄밀한 사고', '비판적 사고', '논리적 추론' 등을 들고 있다. 심지어, '정신도야'라는 말 속에도 메타 인지 기능의 의미를 함축하고 있다고 하면서 , 메타 인지 연구자들에게 다음과 같이 부탁하고 있다.

"과거에 대한 의식을 보여 달라. 새로운 용어를 도입할 때는, 우리의 익숙한 용어와 어떤 점이 다르고 어떤 점이 같은지를 설명해 달라 ."

이제부터 Polya의 발견술에는 메타 인지적 측면이 어느 정도 고려되고 있는지 알아보고, 문제해결교육에서 반성과 메타인지의 역할을 비교 분석해 보겠다.

메타 인지에 대한 Polya의 명시적인 언급은 찾아 볼 수 없다. 그러나 polya의 글을 주의 깊게 살펴보면, 그가 메타 인지적 기능을 강조하고 있음을 알 수 있다. Polya는 1980년 미국 버클리에서 개최된 제 4차 수학 교육 국제 회의에서 "수학은 지성을 증진시킨다" 는 아주 짤막한 글을 발표하였다. 거기서 그는 "수학 교사의 가르침이 정신을 증진시키기 위해서 수학 교사는 무엇을 할 수 있는가?"라는 질문을 던지고 있다. 이에 대해 Kilpatick(1985)은 Polya의 질문을 때때로 우리 자신에게 던져 메타 인지적으로 우리의 생각을 조정해볼 것을 제안하면서 정신의 증진은, 적어도 부분적으로는 학생과 교사의 인식이 자기 자신을 돌아볼 필요성이 있음을 의식하는데 있다고 말하고 있다. 우정호(1991)도 이 Polya의 말을 음미하면서, 대화법을 통한 문제 해결 교육의 요지가 대화를 통해 소위 반성적 사고를 유발시키고자한 것임을 지적하고 있다. Polya의 저술 전체를 통하여 일관된 생각이 있다면 그것은 아마도 반성적 사고를 유발시키는 조언일 것이다.

메타 인지 연구자들은 Polya의 생각에는 메타 인지가 고려되지 않았다고 비판하고 있다(Lester, Jr. 1985) . 그러나 그의 유명한 책 How to solve it 초판

서문에 보면 그 스스로 메타 인지적 사로를 했음을 알 수 있다.

“ 그렇다. 해답은 맞은 것 같고, 정확한 듯 보인다. 그러나 어떻게 해서 그러한 풀이를 고안할 수 있는 것일까? 그렇다. 이 실험은 잘된 것 같고, 사실과 일치하는 듯 하구나. 그러나 사람은 어떻게 해서 그러한 사실을 발견할 수 있게 되는 것일까? 그리고, 나라면 어떻게 해야 그러한 것들을 스스로 발견하거나 발명할 수 있을것이가?”

그는 이러한 의문은 자기 혼자만의 의문이 아닐 것이라고 말하면서 바로 이러한 의문을 갖는 사람들을 위해 이 책을 썼음을 밝히고 있다. 또 그는 무제 해결자라면 문제를 해결하는 동안에 해답으로부터의 ‘심리적 거리’의 정도를 예상할 수 있다고 하면서, 인지에 대한 인지에 대해 다음과 같이 표현하고 있다.

“자기 문제에 대해 진지하게 관심을 갖고 있는 사람이라면 누구나 해답에의 근접도 그리고 해답을 향한 전진의 정도를 생생하게 느끼고 있다. 그는 말을 하지는 않을지 모르지만 다음과 같은 것을 예민하게 느끼고 있다. ‘잘되가는구만, 해답은 아주 가까이 있는거 같애’ 또는 ‘매우 더디군, 해답은 아직도 멀리 있는거 같아’ 또는 꽉 막혔어, 전혀 진전이 없구만, ” 또는 ‘나는 해답에서 멀리 표류하고 있어’(mathematica Discovery, Vol. Ⅱ, John Wiley & Sons, Inc., 1965.)

메타 인지 연구자들은 관리적 기능을 중요시함을 앞에서 밝힌 바 있다. 이와 같은 생각은 polya의 글에서도 찾아볼 수 있다. 그가 사용하는 ‘조직화’라는 용어속에는 관리적 기능의 의미가 함축되어 있다고 생각한다.

“문제를 해결하기 위해서는..... 처음에는 동면 상태에 있는 지식 가운데 적절한 것을 선택하여 모아야 한다. ...문제를 풀기 위해서는 고립되어 있는 사실을 회상하는 것으로는 충분치 않으며 이러한 사실을 결합시키지 않으면 안되고 그들의 조합은 당면한 문제에 잘 들어맞아야 한다. 수학 문제를 해결할 때에는 잘 조절된 전체에 회상된 결과를 관련지우는 논증을 구성해야 한다.

이와 같이 조절하고 결합하는 활동을 '조직화'라고 부를 수도 있을 것이다."
(우정호 (역) 어떻게 문제를 풀 것인가 ? -*How to solve it*-)

물론 그는 동원이니 조직화니 하는 말을 문제 해결자가 문제를 해결하는 동안에 어떻게 할 것인가를 말하는 처방적인 용어로 사용한 것이 아니라 단지 그의 전형적인 정신 활동이 어떤지를 기술하기 위하여 사용했지만, 조직화라는 말 속에 '조절과 통제' 또는 '관리적 기능'의 의미가 들어 있음은 분명하다. 그리고 Silver(1982)도 지적했듯이, polya의 발견술적 조언의 많은 부분은 문제 해결자가 문제를 해결하는 과정의 진행 상황을 반성하도록 하고 사용하는 절차의 효율성을 평가하도록 하는 " 메타 인지적 조언(metacogitive prompts)"임이 분명하다. 그러나 polya는 메타 인지적 과정을 단지 묵시적으로만 고려하고 있을 뿐이다.(정은실)

Polya는 문제 해결 과정을 문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성의 4단계로 나누고, 각 단계에서 일어나기를 기대하는 사고 과정을 발문과 권고의 형태로 제시하고 있는 데 이를 사고 유형으로 정리해 보면 다음과 같다.(HSI, pp. 14-16)

▶문제에 대한 이해

* 문제의 주요 부분의 확인 : '미지의 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가?
* 문제의 가늠 곧 주어진 정보의 과부족 점검 : 조건을 만족될 수 있는가? 조건은 미지의 것을 결정하기에 충분한가, 또는 불충분한가, 또는 과다한가, 또는 모순되는가?
* 그림 그리기와 기호 붙이기 : 그림을 그려보아라. 적절한 기호를 붙여라.
* 조건의 분해 : 조건을 여러 부분으로 분해하라, 그것을 써서 나타낼 수 있는가?

▶계획의 작성

* 이전 경험의 동원 : 전에 그 문제를 본 일이 있는가? 그렇지 않으면 약간 다른 형태로 된 같은 문제를 본 일이 있는가?
* 관련 문제 또는 정리 탐색 : '관련된 문제를 알고 있는가? 유용하게 쓰일 수 있는 듯 한 어떤 정리를 알고 있는가?
* 유사 문제 탐색 : 미지인 것을 살펴보아라, 친숙한 문제 중 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라
* 관련 문제의 결과와 방법의 활용 : 관련된 문제로 전에 풀어 본 일이 있는 문제가 있구나, 그것을 활용할 수 가 있을까? 그 결과를 활용할 수 있을까? 그 방법을 활용할 수 있을까? 어떤 보조 요소를 도입하면 그것을 활용할 수 있을까?
* 문제의 재 진술 : 문제를 달리 진술할 수 있을까? 좀 더 다르게 진술할 수 있을까? 정의로 되돌아 가보자
* 일반화, 특수화, 유추에 의한 탐색 : 만일 제시된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어 보아라. 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 보다 특수한 문제는? 유사한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있는가?
* 보조 문제 작성과 풀이 : 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것은 버려 보아라. 그랬을 때 미지인 것은 어느 정도 까지 정해지는가? 어떻게 변형할 수 있을까? 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 미지인 것을 결정하는데 적절한 다른 자료를 생각해 볼 수 있을까? 새로운 미지인 것과 새로운 자료가 서로 보다 더 가깝게 되도록 하기 위해서, 미지인 것이나 자료 또는 필요하다면 두 가지 모두 변형할 수 있을까?
* 정보 사용 누락 여부 점검 : 자료는 모두 사용했는가? 조건을 모두 다 사용했는가? 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했는가?

▶계획의 실행

* 실행 및 확인 : 풀이 계획을 실행하고 '매 단계를 점검하라.' 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가?

▶ **반성**

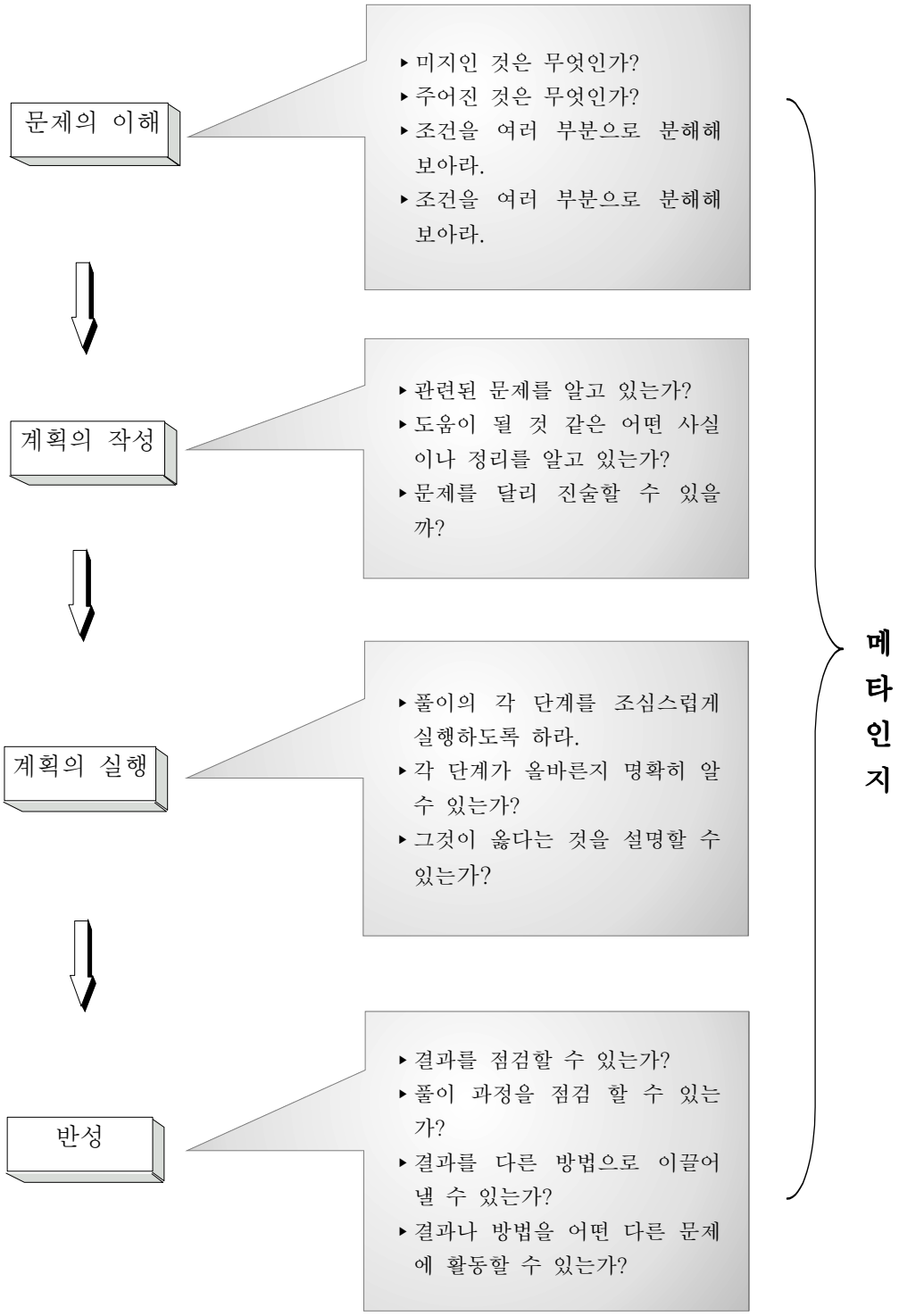
* 결과의 점검 : '결과를 점검'할 수 있는가? 논증 과정을 점검 할 수 있는가?
* 방법의 점검 : 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? 그것을 한눈에 알 수 있는가?
* 결과와 방법의 활용 : 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

(정은실)

2)장에서 언급된 Lester, Jr(1985)의 Polya의 문제 해결 4단계 모델의 인지적 요소에 이와 서로 관련이 있는 메타 인지적 요소를 가미한 개선안을 제시한 <표 1>의 메타인지결정의 보기와 Polya의 문제해결과정의 교사의 발문이나 권고를 비교해보자.

Lester는 방향 설정 - 조직화 - 실행 - 검증의 과정에 따른 메타인지결정의 보기는 문제해결을 하고 있는 학습자 내부의 사고를 나열해 놓은 것이며, Polya의 발문은 교사가 문제해결을 위해 학습자의 사고를 전개해주는 역할을 하는 것이다. 다시 말해 학습자는 문제해결과정의 각 단계를 거치는 과정을 교사의 발문을 통해 의식적으로 습득하게 되고, 자신의 사고의 방향을 결정해간다. 즉, 문제해결에 유용한 사고 작용을 야기 시키는 적절한 발문과 권고를 교사와 학생간의 대화를 통해 훈련하여 최종적으로는 학생 내부에서 그러한 대화가 이루어져 자기의 사고 과정을 자율적으로 규제하고 조정하며 문제를 해결하게 된다. 이러한 교사의 발문이나 권고가 학습자 스스로 자기 대화를 통해 문제해결을 해나갈 때 학습자는 메타인지적 사고를 했다고 할 수 있다.

이와 같이 반성과 메타인지는 문제해결 과정에서 핵심적인 역할을 수행하고 있음을 알 수 있다. 그러나 수학 교수 학습 이론에서는 다음과 같은 특징을 들어 반성과 메타인지를 구분하고 있다.



[그림 11] Polya의 문제해결

※기존의 반성 개념에 부여되는 특징

- 인식의 대상이 인지 곧, 정신 조작
- 의식성과 관련
- 반성적 지능을 고차적인 사고로서 아동의 사고의 특성은 아니라는 것

그런데 반성에 대한 이와 같은 특성은 또한 메타인지 개념의 핵심 특성이기도 하다.

이러한 관점에서 본다면 반성과 메타인지는 매우 유사한 개념임에 틀림없다. 반성과 메타인지는 사유의 대상이 인지적 혹은 정신적 조작이라는 점에서는 매우 유사하다. 그러나 메타인지는 내적 정신세계의 존재성에 대한 명확한 통찰을 전제로 한다는 반성이라는 점에서 일반적인 반성 개념과 구분된다. 다시 말해, 어떤 대상 혹은 자신의 사고과정을 되돌아본다고 하는 외양은 반성이나 메타인지가 다를 바 없다. 그러나 메타인지는 자신의 사고 과정을 되돌아보는 것 이면에 고찰 대상이 되는 정신세계의 존재성에 대한 명확한 이해 혹은 자각을 전제로 한다는 점에서 일반적인 반성 개념과 구분된다. 또한 메타인지 개념은 자신의 정신적 조작에 대한 세심한 고찰 뿐 아니라 그에 대한 의사결정, 더 나아가 그에 대한 조절 기능까지 포괄하는 행동적이고 기능적인 개념이라는 점에서 역시 일반적인 반성 개념과 구분 된다고 할 수 있다.(김수미)

Ⅳ. 요약 및 제언

1. 요약

본 연구는 수학교육 분야에서 제기되고 있는 문제해결의 중요성을 인식하고, 학습자의 문제 해결 과정에 중추적인 역할을 수행하는 반성 개념의 불명확성 문제를 교육학적 고찰을 통해 다각적으로 분석하여 보았으며, 수학교육 분야에서의 반성과 메타인지 개념의 보다 명확한 이해를 위해 Piaget, Freudenthal, Skemp, Van Hieles의 이론을 중심으로 전개하였다. 또한, 반성과 메타인지적 사고는 학습자의 문제해결 과정에서 두드러지게 나타나는 인지적 사고임을 인식하고 Polya의 문제해결과정을 중심으로 메타인지와 반성의 역할을 알아보았다. 그리하여 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

- ◆ 반성과 메타인지는 사유의 대상이 인지적 혹은 정신적 조작
- ◆ 메타인지는 내적 정신세계의 존재성에 대한 명확한 통찰을 전제
- ◆ 메타인지 개념은 자신의 정신적 조작에 대한 세심한 고찰 및 그에 대한 의사결정, 조절 기능까지 포괄하는 행동적이고 기능적인 개념

2. 반성과 메타인지가 교육에 미치는 영향에 관한 제언

'반성(reflection)' 한다는 것은 구체적으로 어떤 활동을 의미하는가? 인간의 사고에서 반성이 갖는 중요성을 강조한 것은 Piaget만이 아니었다. John Locke는 그의 '인간 오성론'에서 반성을 '정신이 자신의 조작과 그 방법에 대해 주목하는 것'이라고 하였으며, Wilhelm von Humboldt는 사고의 본질을 '반성', 즉 사고하는 것을 사고되는 것으로부터 구별하는 것'이라고 하였다 (Kilpatrick, 1986, p.8) 물리적 의미에서 'reflection'이라는 용어의 기원이 빛

이나 소리가 동일 매질에서 어떤 면을 때리고 돌아 나올 때 일어나는 방향의 변화를 의미하는 것과 같이, 사고 과정의 'reflection'은 인식의 방향을 인식의 주체에게로 되돌린다는 뜻을 담고 있다. 아이디어를 'reflect'하여 깊이 생각해 보는 것은 자신의 사고에 대해 사고하도록 하는 강력한 수단이 된다. Piaget는 반영적 추상화 과정이 의식적이 되고 개념화된 결과를 '반영된 추상화(abstraction reflechie)'라고 불렀는데, 이는 '반성' 과정의 산물을 말한다.

Piaget는 '반성'이 하위 수준의 구조를 주제화하는 것과 관련하여 야기된 불균형을 극복하여 인지적 균형으로 나아가려는 균형화 과정이라고 설명한다. 반성에 대한 Piaget의 이러한 설명은 위에서 언급한 다른 수학교육학자들의 생각과 다르지 않다. 인지구조의 동화와 조절이 잘 일어나도록 하는 '적절한 갈등상황' 곧 '문제 상황'이 반성적 사고의 출발점이며, 문제를 해결하고자 하는 태도가 사고의 논리적인 형식 못지않게 중요하다는 것을 알 수 있다. 그러므로 학습 상황에서 전체적인 학습 환경은 학습자의 반성적 사고 활동에 중요한 의미를 가지게 된다. 교과는 학습자의 경험과 관련된 흥미와 문제를 제공할 수 있는 형태로 제시되어야 하며, 학습자 스스로 문제를 해결하고자 하는 태도를 고무하는 지적 호기심으로 가득 찬 교실 분위기가 중시되어야 한다.

또한, 새로운 수학 학습 내용을 학습하기 이전에 학생들이 기존에 가지고 있는 자신의 기습 지식을 반영해 보는 것과 관련된 것으로, 수학적 사고의 단계적 추상화란 특성은 메타인지가 비록 학습 초기에는 교사에 의해 고무된다 하더라도 궁극적으로는 학생 스스로에 의해 능동적으로 시도되어져야 할 것이다.

참고 문헌

[1] 강옥기(2003). 수학과 학습지도와 평가론 (제 2 판)

[2] 김수미, 김연식(1996). 메타인지 개념의 수학교육적 고찰

[3] 김천수(2000). Dewey의 교육관과 반성적 사고

[4] 류희찬, 조완영(1994). 수학교육의 수업 원리로서의 반영적 추상화

[5] 류희찬(2002). Freudenthal의 수학과 이론과 현실적 수학교육

[6] 백석윤(1995). 문제해결을 위한 메타인지적 사고의 지도 방법 모색

[7] 박은혜, 이은화(1998). 반성적 사고 신장을 위한 교육실습지도

[8] 신은주, 이종희(2004). 중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구

[9] 신은주, 이종희(2004). 모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구

[10] 정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 박사학위 논문

[11] 정영옥(1994). Piaget이론의 수학교육적 적용

[12] 정은실(1995). Polya의 수학적 발견술 연구

[13] 정문숙, 이영하(1994). 수학적 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 나타나는 메타인지에 관한 연구

[14] 우정호(2003). 수학 학습-지도 원리와 방법

[15] 우정호, 홍진곤(2004).반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도

[16] 유현주(1996). 문제해결과 메타인지

[17] 윤미영. 문제해결에서 메타인지의 역할을 강조한 수업효과에 관한 연구

[18] 이동일(2000). Dewey의 수학교육론에 대한 분석. 서울대학교 교육대학원 석사학위 논문

[19] 이봉주(2004). 문제해결 과정에서 메타인지적 활동 안내를 통한 고등학생의 메타인지 능력 활성화 가능성

[20] 이인학(2003). 교육적 가치의 준거로서 J. Dewey의 반성적 사고
[21] 이진향(2002). 교사의 수업개선을 위한 반성적 사고의 의미
[22] Richard R. Skemp. The Psychology of Learning Mathematics