[UCI]I804:24011-200000232970

2006年 2月
教育學碩士(數學教育)學位論文

선 형 변 환 에 관 한 연 구

朝鮮大學校 教育大學院

數學教育專攻

金 善 娥

선형변환에 관한 연구

A Study on the linear transformations

2006年 2 月 日

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 善 娥

선 형 변 환 에 관 한 연 구

指導敎授　　金　　仙　　兒

이 論文을 敎育學 碩士學位 請求 論文으로 제출합니다.

2005년　10　월　　일

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金　善　娥

金善娥의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 _____ 인

2005년 12 월 일

朝鮮大學校 敎育大學院

목 차

그림목차 ····· ii

ABSTRACT ····· iii

Ⅰ. 서 론 ····· 1

Ⅱ. 본 론 ····· 3

1. 행렬과 선형변환 ····· 3

2. 도형의 선형변환 ····· 7

1) 여러 가지 선형변환 ····· 7

2) 선형변환의 합성과 역변환 ····· 16

3) 선형변환에 의한 상 ····· 18

3. 적용 ····· 28

Ⅲ. 결 론 ····· 32

참고문헌 ····· 33

그 림 목 차

(그림 1-1) 선형변환 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ····· 7
(그림 2-1) x축 대칭이동 ····· 8
(그림 2-2) y축 대칭이동 ····· 8
(그림 2-3) 원점 대칭이동 ····· 9
(그림 2-4) $y=x$ 대칭이동 ····· 10
(그림 2-5) $y=-x$ 대칭이동 ····· 10
(그림 2-6) 닮음변환 ····· 11
(그림 2-7) 원점중심 회전이동 ····· 13
(그림 2-8) 좌표축 회전이동 ····· 14
(그림 2-9) 인수 k에 의한 x-방향으로의 전단 ····· 15
(그림 2-10) 인수 k에 의한 y-방향으로의 전단 ····· 16
(그림 2-11) 합성변환 ····· 17
(그림 2-12) 좌표평면으로의 이동 ····· 18
(그림 2-13) 직선으로의 이동 ····· 19
(그림 2-14) 삼각형의 이동 ····· 22
(그림 2-15) 평행사변형의 이동 ····· 24
(그림 2-16) 평면의 원점 이동 ····· 25
(그림 2-17) 원점을 지나는 직선 ····· 25
(그림 2-18) 직선의 원점 이동 ····· 26
(그림 2-19) 점 또는 원점을 지나는 직선 ····· 27
(그림 2-20) F형 펜토미노의 대칭이동 ····· 28
(그림 2-21) W형 펜토미노의 대칭이동 ····· 29
(그림 2-22) x축 위로의 정사영 ····· 30
(그림 2-23) y축 위로의 정사영 ····· 30
(그림 2-24) 회전이동 ····· 31

ABSTRACT

A Study on the linear transformations

Kim, Seon A

Advisor : Prof. Kim, Sunah

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

The purpose of this paper is to investigate, firstly, the relationship between linear transformation and matrix, and its characterization, and application.

Secondly, we consider that a geometrical plane figure in the present mathematics curriculum of the highschool can be changed into matrix, and furthermore we display that linear transformation can be expressed in a graphic chart.

Especially, questions which are related to linear transformation are not only being used in various branches of mathematics but also being dealt in the field of computer graphic.

Ⅰ.서론

1. 연구의 필요성 및 목적

현대사회는 수학이 자연과학뿐만 아니라 인문 사회과학 등의 여러 분야에서 광범위하게 이용되므로 날이 갈수록 수학교육의 중요성이 강조되고 있다.

현대 수학의 여러 분야 가운데서 변환 기하학은 실용적 가치와 폭넓은 유용성을 갖고 있으면서 현실의 상황을 기하학적으로 다룰 수 있는 현대 수학의 중요한 부분이다. 변환 기하학은 F. Klein 이래 공간의 성질을 취급하는 기하학 자체의 복잡성을 대수적으로 구조화함으로써 보다 쉽게 다룰 수 있게 되었다. 이렇듯 수학에서 다루는 가장 중요한 연결중의 하나는 기하와 대수 사이의 대응관계이다. 기하에서 대상들의 관계는 대수에서의 대상들의 관계에 대응된다. 예를 들어 기하에서의 한 점은 대수에서의 순서쌍에 대응된다. 또 직선은 방정식을 만족하는 순서쌍의 집합과 대응되고, 두 직선의 교점은 2개의 방정식을 동시에 만족하는 순서쌍의 집합과 대응된다.

이러한 변환은 기하학적인 문제를 대수적으로 해결하는 가장 강력한 문제해결의 도구이다. 특히, 선형변환과 행렬에 관한 문제는 수학의 여러 분야에서 이용되고 있으며 컴퓨터 그래픽 분야에서 아주 중요하게 다루어지고 있으므로 이 분야에 관한 연구는 의의가 있다고 하겠다.

선형변환의 이론은 행렬이론과 밀접히 관련되어 크게 발전되어 왔다.

역사적으로 행렬식은 G. W. Leibnitz가 1693년에 L'Hospital에게 보낸 편지에 삼원일차방정식을 행렬식을 이용하여 쓴 것으로 시작하여 행렬보다 먼저 사용되어 왔다. 행렬식의 개념은 19세기 영국의 A. Cayley에 의해 이론적으로 다듬어지기 시작했다.

A. Cayley는 영국의 W. R. Hamilton이 발견한 사원수에서 아이디어를 얻어 행렬을 선형변환과 결부시켜 생각했으며 선형변환의 상등과 합성으로 행렬의 상등과 곱을 정의하여 행렬이 사영변환이라는 기하학적 뜻을 가지고 있음을 명백히 함으

로써 근세 기하학을 체계화하려 하였다.

이러한 선형변환의 개념은 기하학에서 도형과 관련된 불변량의 연구가 활발하던 시점에서 좌표의 도입으로 인해 그 중요성과 유용성이 부각되었고, A. Cayley가 행렬대수를 고안하는 데에도 결정적인 계기를 제공하였다. 기하학적인 도형의 불변량 문제를 선형변환에 대한 불변량의 문제로 환원하는 것은 복잡하고 어려운 기하학적 문제를 해결하는 데 큰 도움이 되었다. 즉, 복잡하고 새로운 도형을 선형변환을 통해 잘 알고 있거나 동치인 다른 도형으로 변환시킨 다음에 변환된 도형에서 주어진 문제를 해결하거나 새로운 성질을 발견한 다음 그것을 원래의 도형에 대해 역변환을 시켜 문제를 일반화하는 것이다. 이러한 연구는 해석기하의 발달과 함께 도입된 좌표를 통해 더욱 발달하였고 Cauchy는 선형변환을 좌표축의 이동으로 생각하여 고유치 문제를 포함하는 오늘날의 Spectral 이론을 발달시키기도 하였다.

그러나 현행 제 7차 수학교육과정에서는 평면위의 선형변환의 내용이 삭제되고 단지 평면위의 도형의 기하학적인 성질만 다루고 있다.

따라서 본 논문에서는 선형변환과 행렬사이의 관계 및 그들의 성질을 조사 연구하고, 이들의 성질을 이용하여 현 수학교육과정에서의 평면 $\mathbb{R}^2$에서의 도형의 대칭이동 즉, 원점에 대한 대칭이동, 좌표축에 대한 대칭이동, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동 등의 행렬표현과 삼각함수의 덧셈정리를 선형변환을 통하여 쉽게 유도할 수 있음을 보였다. 고등학교 교육과정에서 다루는 기하학적 변환을 행렬과 선형변환의 일대일 대응 관계로 학생들에게 설명하면 보다 효과적으로 전달할 수 있기 때문에 평면에서 평면으로의 선형변환은 고등학교 과정에 도입되어야 하는 필요성을 강조하였다.

Ⅱ. 본론

1. 행렬과 선형변환

1) 행렬

mn개의 수 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m : j=1,2,\cdots,n)$를 다음과 같이 배열한 것을 행렬이라고 하고, (a_{ij})또는 하나의 문자 A로 나타낸다.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

행렬 $A=(a_{ij})$를 구성하는 수 a_{ij}를 행렬 A의 원소 또는 성분이라 하고 행렬의 가로의 성분을 행, 세로의 성분을 열이라 부르고, 위에서 세어 i번째의 행을 제i행, 왼쪽에서 세어 j번째의 열을 제j열이라 한다.

그리고 제i행과 제j열에 속하는 원소 a_{ij}를 (i,j)원소라 하고, m개의 행과 n개의 열로 되는 행렬을 (m,n)행렬 또는 $m\times n$행렬이라 한다. 특히 행의 수와 열의 수가 같은 행렬 즉, (n,n)행렬을 정방행렬이라 하고, n을 정방행렬의 차수라 한다.

2) 선형변환

선형변환이란 벡터공간에서의 합과 스칼라와의 곱이 보존되는 Euclid 벡터공간 $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로의 사상을 의미한다.

사상 $T:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$가

(1) $T(a+b)=T(a)+T(b)$ $(a,b\in\mathbb{R}^n)$

(2) $T(ka)=kT(a)$ $(k\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^n)$

을 만족하면 T을 $\mathbb{R}^n$에서 $\mathbb{R}^m$으로의 선형변환이라 한다.

$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$에서 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$로 차원을 낮추어 두 개의 실수의 쌍 (x,y) 전체의 집합으로 나타내면 $\mathbb{R}^2$의 원소는 평면 위의 점으로 나타난다. 변환 T에 의한 점 $P(x,y)$의 상을 $P'(x',y')$ 라 하면, 두 점 P ,P'의 좌표 사이에

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

(단, a,b,c,d는 0이 아닌 실수)

와 같이 상수항이 없는 일차식으로 나타내어질 때, 변환 T를 선형변환이라 하고, 위의 관계식을 T의 변환식이라 한다.

예를 들어 변환에는 평행이동을 나타내는 $f:(x,y) \to (x+2, y-5)$와 원점에 대한 대칭이동을 나타내는 $g:(x,y) \to (-x,-y)$ 등 여러 가지가 있으나 여기에서는 상수항이 없는 x,y에 관한 일차식으로 나타내어지는 변환만 취급하며 그 변환을 선형변환이라고 한다.

따라서 변환 f는 $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-5 \end{cases}$ 이므로 선형변환이 아니고

변환 g는 $\begin{cases} x' = -x = -x+0y \\ y' = -y = 0x-y \end{cases}$ 이므로 선형변환이다.

선형변환 T의 변환식을 행렬을 써서 나타내면

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(단, a,b,c,d는 0이 아닌 실수)

이 되는데 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X'$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X$라고 하면

$$X' = AX$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이때, 행렬 A을 선형변환 T을 나타내는 행렬 또는 선형변환 T의 행렬이라고 한다.

이와 같이 선형변환 T을 나타내는 식이 주어지면 그에 따른 행렬 A가 하나 결정되고, 역으로 행렬 하나가 주어지면 이 행렬에 의하여 T와 같은 선형변환이 하나 결정된다.

즉, 임의의 선형변환에 대하여 반드시 단 하나의 대응되는 행렬이 존재하며 임의의 행렬에 대응되는 선형변환은 오직 하나 정의된다.

정리1. 선형변환 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$에 대하여 $T(X) = AX$ $(X \in \mathbb{R}^n)$인 행렬 A가 오직 하나 존재한다.

(증명) 두 행렬 A, B에 대하여

$$T(X) = AX,\ T(X) = BX$$

라 하면 모든 $X \in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$AX - BX = T(X) - T(X)$$

$$(A - B)X = 0 \text{이다.}$$

X는 임의의 벡터이므로 $A - B = 0$이다.

그러므로 $A = B$이다.

기본벡터 e_1, e_2에 대하여 $T(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $T(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$라 하면 임의의 $X \in \mathbb{R}^2$는 e_1, e_2와 실수 x, y을 사용하여 $X = xe_1 + ye_2$로 나타낼 수 있다. 그런데 T는 선형변환이므로

$$\begin{aligned} T(X) &= T(xe_1 + ye_2) \\ &= xT(e_1) + yT(e_2) \\ &= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

즉, $$T(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{이다.}$$

이것은 $\mathbb{R}^2$의 기본벡터로 사용한 두 벡터에 의해서 선형변환 T의 행렬 A는 오직 하나 존재하고

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

이므로 기본벡터

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{의 } T\text{에 의한 상 } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{의 } T\text{에 의한 상 } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

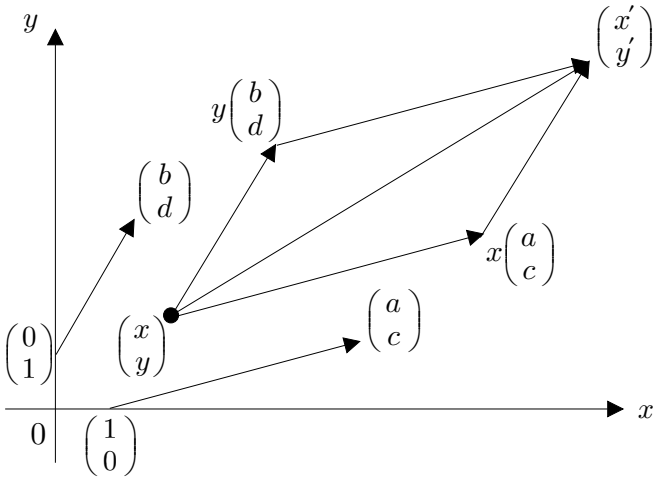
을 구함으로써 그 변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.

다시 말하면

선형변환 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

즉, $X'=AX$는 기본벡터 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$을 각각 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$로 옮겨 놓고 이것을 다시 각각 x배, y배로 확대한 두 벡터 $x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$와 대각선을 이루는 벡터 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$가 평행사변형을 이루도록 벡터를 옮겨 놓음을 알 수 있다.

결국 기본벡터 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$을 각각 어디에 옮기느냐에 따라 여러 가지 선형변환을 생각할 수 있다.



(그림 1-1) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$선형변환

2. 도형의 선형변환

1) 여러 가지 선형변환

평면상의 점이 대칭이동, 닮음, 회전이동 및 전단을 주는 선형변환 T를 구하고, T의 행렬을 구하여 보자.

(1) 대칭변환

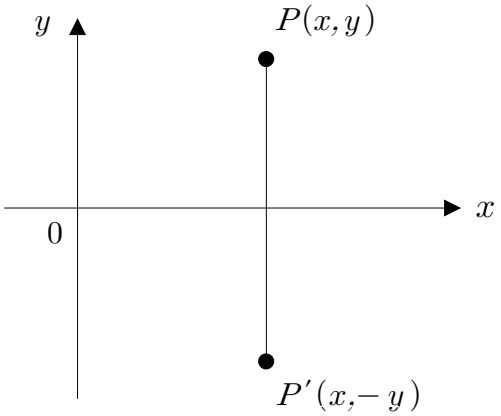
① x축에 관한 대칭이동

$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, x축에 관한 대칭이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-1) x축 대칭이동

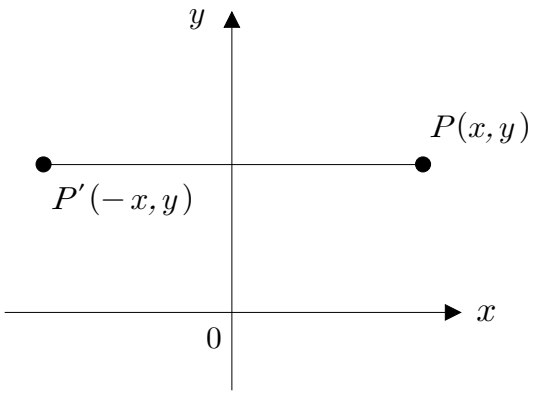
② y축에 관한 대칭이동

$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, y축에 관한 대칭이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-2) y축 대칭이동

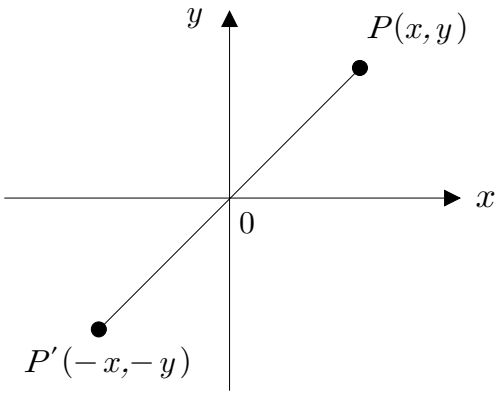
③ 원점에 관한 대칭이동

$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, 원점에 관한 대칭이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-3) 원점 대칭이동

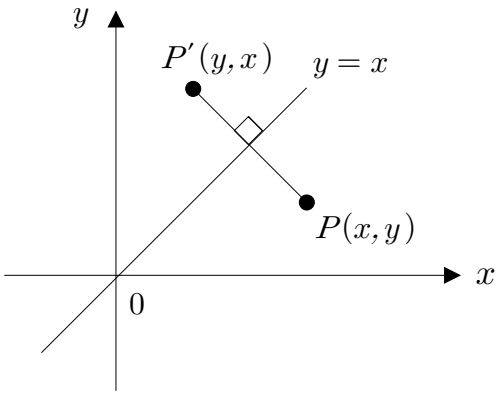
④ $y = x$에 관한 대칭이동

$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, $y = x$에 관한 대칭이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-4) $y=x$ 대칭이동

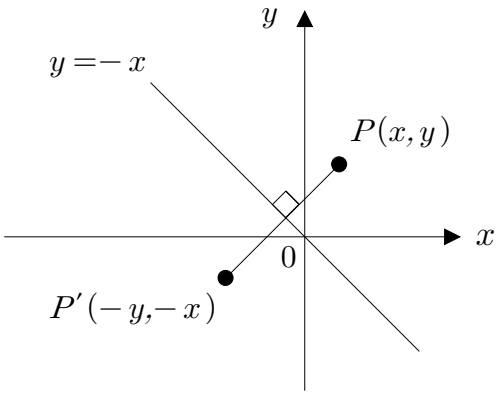
⑤ $y=-x$에 관한 대칭이동

$P'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, $y=-x$에 관한 대칭이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-5) $y=-x$ 대칭이동

이들을 통틀어 대칭변환이라 하며 이것은 모두 선형변환이다.

(2) 닮음변환

k를 0 아닌 상수라 할 때, 평면 위의 점 $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 $P'=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ 옮기는 이동을 '원점을 중심으로 하는 닮음비 k인 닮음변환'이라고 한다.

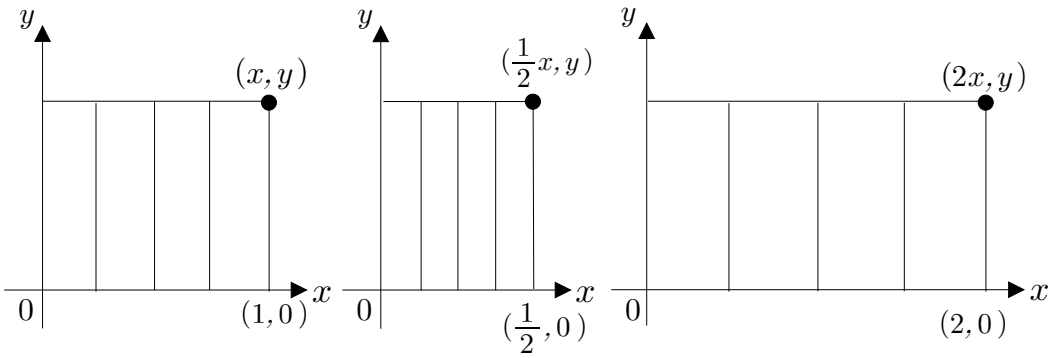
이 변환은 $P'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$,

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, 닮음변환은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$이다.



$0<|k|<1$ 일 때의 축소 $|k|>1$ 일 때의 확대

(그림 2-6) 닮음변환

이때 $|k|>1$이면 확대, $0<|k|<1$이면 축소를 나타낸다.

또 $k=1$이면 점 $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$는 그 자신으로 옮겨지는 선형변환이다.

이것을 평면 $\mathbb{R}^2$의 항등변환이라고 한다.

항등변환의 행렬은 이차의 단위행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이며, 또 닮음비 k인 닮음변환의 행렬은 kE이다.

(3) 회전변환

① 원점중심 회전이동

좌표평면 위의 점 $P(x,y)$를 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전 이동하여 점 $P'(x',y')$으로 옮기는 이동을 회전변환이라 한다.

$P(x,y)$를 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전한 점을 $P'(x',y')$이라 하고 $C(x,0)$, $D(0,y)$를 θ만큼 회전한 점을 각각 C', D'이라 하면 $\angle COC' = \angle DOD' = \theta$이다.

따라서 두 점 C', D'의 좌표는

$$C'(xcos\theta, xsin\theta)$$

$$D'(ycos(\frac{\pi}{2}+\theta),\ ysin(\frac{\pi}{2}+\theta)) = D'(-ysin\theta,\ ycos\theta)\text{이다.}$$

선분 OP'은 직사각형 $OC'P'D'$의 대각선이므로

$$\frac{x'+0}{2} = \frac{xcos\theta - ysin\theta}{2},\quad \frac{y'+0}{2} = \frac{xsin\theta + ycos\theta}{2}\text{이다.}$$

따라서

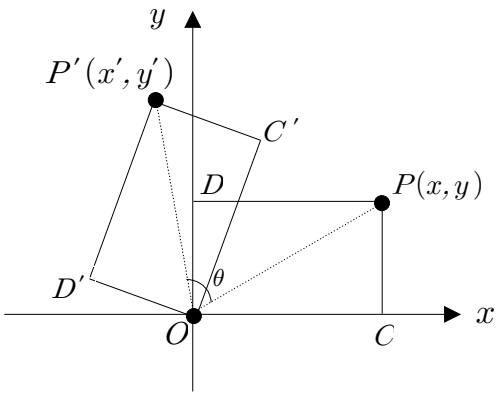
$$x' = xcos\theta - ysin\theta,\quad y' = xsin\theta + ycos\theta$$

즉,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, 원점중심 회전이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-7) 원점중심 회전이동

② 좌표축의 회전이동

xy좌표축을 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전 이동하여 생긴 새로운 좌표축을 XY좌표축이라 할 때, xy좌표축 위의 점 $P(x, y)$가 XY좌표축의 점 (x', y')으로 옮기는 회전이동이다.

$P(x, y)$는 원점 O를 중심으로 $-\theta$만큼 회전한 회전변환이므로

$$x' = xcos(-\theta) - ysin(-\theta) = xcos\theta + ysin\theta$$

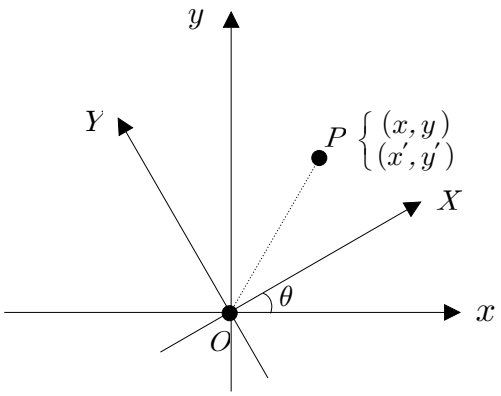
$$y' = xsin(-\theta) + ycos(-\theta) = -xsin\theta + ycos\theta$$이다.

즉,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, 좌표축의 회전이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-8) 좌표축 회전이동

(4) 전단변환

① 인수 k에 의한 $x-$방향으로의 전단이동

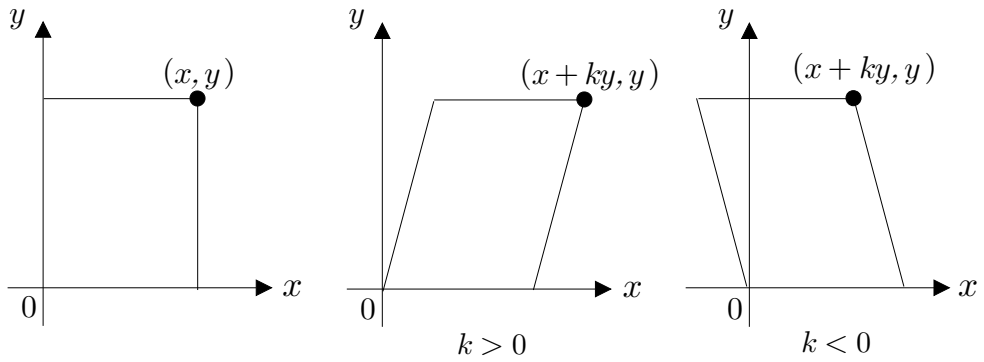
각 점 (x, y)를 x축 방향으로 나란히 새로운 점 $(x+ky, y)$으로 ky만큼 이동시키는 변환이다.

이 변환은 $P=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+ky \\ y \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, 인수 k에 의한 $x-$방향으로의 전단이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-9) 인수 k에 의한 x-방향으로의 전단

② 인수 k에 의한 $y-$방향으로의 전단이동

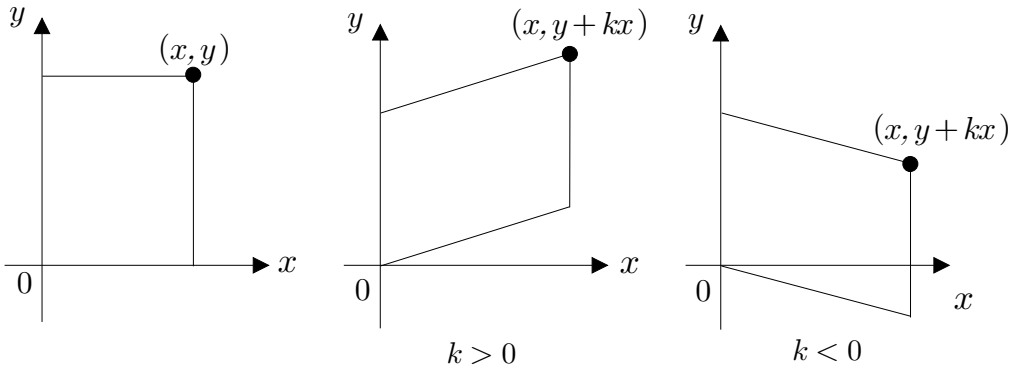
각 점 (x, y)를 y축 방향으로 나란히 새로운 점 $(x, y+kx)$으로 kx만큼 이동시키는 변환이다.

이 변환은 $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+kx \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, 인수 k에 의한 $y-$방향으로의 전단이동은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-10) 인수 k에 의한 y-방향으로의 전단

2) 선형변환의 합성과 역변환

앞에서 2×2 행렬 전체의 집합과 평면 $\mathbb{R}^2$의 선형변환 전체의 집합사이에 일대일 대응이 이루어짐을 알아보았다. 여기에서는 두 함수의 합성과 역함수를 정의한 것과 같은 방법으로 두 선형변환의 합성과 역변환을 정의하고 그에 대응하는 행렬을 알아보자.

(1) 선형변환의 합성

두 선형변환 $f:(x,y)\to(x',y')$와 $g:(x',y')\to(x'',y'')$에 대하여 $h:(x,y)\to(x'',y'')$ 인 변환을 생각할 수 있다.

이 변환 h를 f와 g의 합성변환이라고 하며 $g\circ f$로 나타낸다.

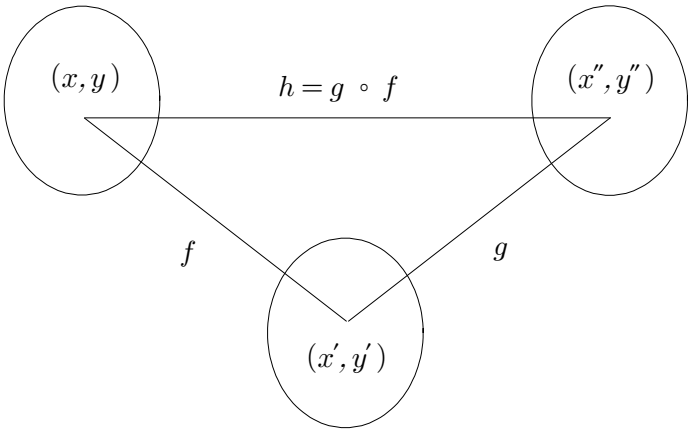
즉, $g\circ f:(x,y)\to(x'',y'')$이다.

위의 선형변환 f,g를 나타내는 행렬을 각각 A,B라고 하면

$$f:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad g:\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\text{이므로}$$

$$h:\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=B\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{가 성립한다.}$$

그러므로 합성변환 $g \circ f : (x, y) \rightarrow (x'', y'')$은 $g \circ f : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 의하여 행렬 BA로 나타내어지므로 선형변환이다.



(그림 2-11) 합성변환

(2) 선형변환의 역변환

A가 선형변환 T를 나타내는 행렬이고, T에 의한 점 $P(x, y)$의 상은 $P'(x', y')$이라고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이다.

특히 A의 역행렬 A^{-1}가 존재하는 경우에는 위의 식 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면 $A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이다.

그러므로 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$이다.

즉, 좌표평면 위의 임의의 점 $P'(x', y')$에 대하여 선형변환 T에 의한 상이 $P'(x', y')$으로 되는 점 $P(x, y)$가 오직 하나 정해지므로 이 변환을 T의 역변환이라고 하며 기호 T^{-1}로 나타낸다.

$$T^{-1} : (x', y') \rightarrow (x, y)$$

이때 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 가역행렬이기 위해서는 $\det A = ad - bc \neq 0$이어야 한다. 따라서 선형변환 T는 그 행렬 A의 $\det A \neq 0$일 때, 그때에 한해서 역변환을 갖는다. 또 역변환을 가지는 선형변환의 행렬을 흔히 정칙행렬이라 한다.

한편 $\det A = ad - bc = 0$이면 T는 역변환을 갖지 않는 선형변환이 된다.

그리고 선형변환 T가 역변환 T^{-1}를 가지면 $T \circ T^{-1}$, $T^{-1} \circ T$는 둘 다 평면 $\mathbb{R}^2$의 항등변환이다.

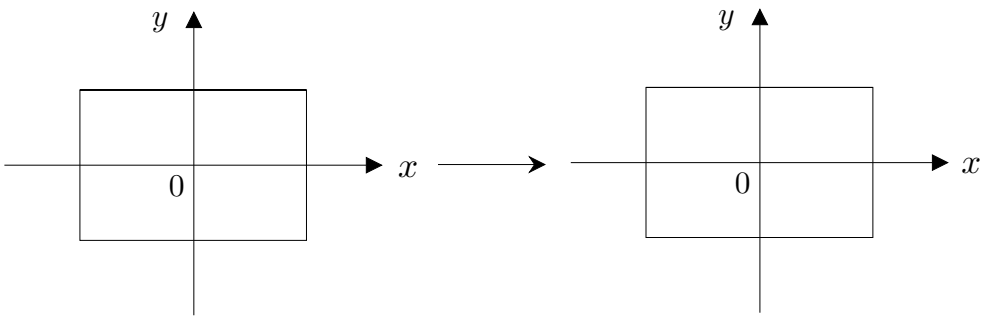
3) 선형변환에 의한 상

평면의 선형변환에 의해 평면위의 여러 가지 도형이 어떤 모양의 도형으로 옮겨지는가? 또 옮겨진 도형 본래의 도형은 어떤 도형인가 하는 것에 대하여 알아보자.

(1) 선형변환에 의한 평면 · 직선 · 선분의 상

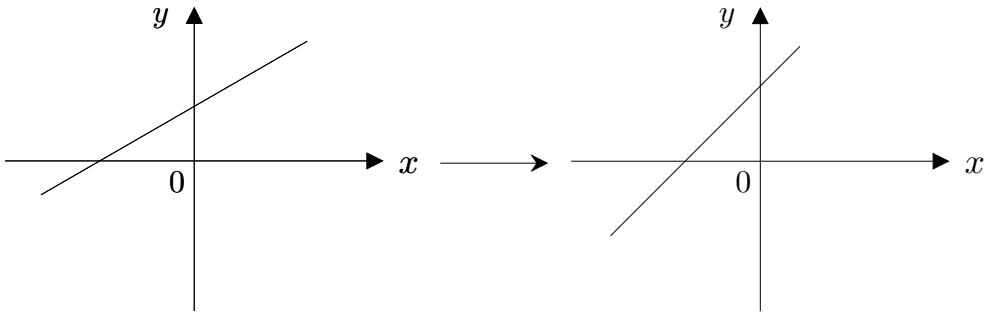
선형변환 f를 나타내는 행렬 A가 정칙행렬 일 때 좌표평면 위의 임의의 점 (x', y')에 대하여 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$이라고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이므로 점 (x', y')은 f에 의한 어떤 점 (x, y)의 상이 된다.

i) $\det A = ad - bc \neq 0$일 때 좌표평면은 좌표평면으로 옮겨진다.



(그림 2-12) 좌표평면으로의 이동

ii) $\det A = ad - bc \neq 0$일 때 직선을 직선으로 옮긴다.



(그림 2-13) 직선으로의 이동

정리2. 선형변환 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$의 행렬이 정칙행렬이라 하면 다음이 성립한다.

(a) 직선의 상은 직선이다.

(b) 원점을 지나는 직선의 상은 원점을 지나는 직선이다.

(c) 평행한 직선의 상은 평행한 직선이다.

(d) 점 A와 B를 잇는 선분의 상은 A의 상과 B의 상을 잇는 선분이다.

(e) 세 점의 상이 일직선 위에 있을 필요충분조건은 그 세 점이 일직선 위에 있을 때이다.

(증명) (a) 선형변환 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을 $T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(ad - bc \neq 0)$으로 정의할 때 (x,y)를 직선 $Ax + By + C = 0$ $(A, B \neq 0)$의 점이라 하고 (x', y')를 선형변환에 의한 상이라 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$이다.

즉, $\begin{cases} x = \dfrac{d}{ad - bc}x' + \dfrac{-b}{ad - bc}y' \\ y = \dfrac{-c}{ad - bc}x' + \dfrac{a}{ad - bc}y' \end{cases}$ 이다.

이것을 주어진 직선의 방정식에 대입하여 정리하면

$\frac{dA-cB}{ad-bc}x' + \frac{-bA+aB}{ad-bc}y' + C = 0$ 이다.

그러므로 (x', y')는 직선 $A'x' + B'y' + C = 0$

$(A' = \frac{dA-cB}{ad-bc}, B' = \frac{-bA+aB}{ad-bc},\ A', B' \neq 0)$ 위의

점이다.

따라서 직선의 선형변환에 의한 상은 직선이다.

(b) 선형변환 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을 $T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(ad-bc \neq 0)$으로

정의할 때 (x,y)를 직선 $Ax + By = 0$ $(A, B \neq 0)$의 점이라 하고

(x', y')를 선형변환에 의한 상이라 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$이다.

즉, $\begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc}x' + \frac{-b}{ad-bc}y' \\ y = \frac{-c}{ad-bc}x' + \frac{a}{ad-bc}y' \end{cases}$ 이다.

이것을 주어진 직선의 방정식에 대입하여 정리하면

$\frac{dA-cB}{ad-bc}x' + \frac{-bA+aB}{ad-bc}y' = 0$ 이다.

그러므로 (x', y')는 원점을 지나는 직선 $A'x' + B'y' = 0$

$(A' = \frac{dA-cB}{ad-bc}, B' = \frac{-bA+aB}{ad-bc},\ A', B' \neq 0)$ 위의

점이다.

따라서 원점을 지나는 직선의 선형변환에 의한 상은 원점을 지나는 직선이다.

(c) 선형변환 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을 $T(x,y)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(ad-bc \neq 0)$으로 정의하고 평행한 두 직선을 $Ax+By+C=0$와 $Ax+By+D=0$ $(A,B \neq 0,\ C \neq D)$이라 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

즉, $\begin{cases} x=\dfrac{d}{ad-bc}x'+\dfrac{-b}{ad-bc}y' \\ y=\dfrac{-c}{ad-bc}x'+\dfrac{a}{ad-bc}y' \end{cases}$ 이다.

이것을 주어진 두 직선의 방정식에 대입하여 정리하면

$$\frac{dA-cB}{ad-bc}x'+\frac{-bA+aB}{ad-bc}y'+C=0,$$

$$\frac{dA-cB}{ad-bc}x'+\frac{-bA+aB}{ad-bc}y'+D=0 \text{ 이다.}$$

따라서 평행한 두 직선의 선형변환에 의한 상은 평행한 두 직선 $A'x'+B'y'+C=0,\ A'x'+B'y'+D=0$

$(A'=\dfrac{dA-cB}{ad-bc}, B'=\dfrac{-bA+aB}{ad-bc},\ A',B' \neq 0)$이다.

(d), (e)는 (a)에 의하여 성립한다.

이 정리의 (c), (d), (e)로부터 선형변환 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$의 행렬이 정칙행렬이면 T에 의한 변환은 삼각형을 삼각형으로 평행사변형을 평행사변형으로 변환시킴을 알 수 있다.

예) 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 선형변환 T에 의하여 꼭지점 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$인 $\triangle OAB$는 어떤 도형으로 옮겨지는가?

(풀이) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

즉, $\begin{cases} x = x' - y' \\ y = -x' + 2y' \end{cases}$ 이다.

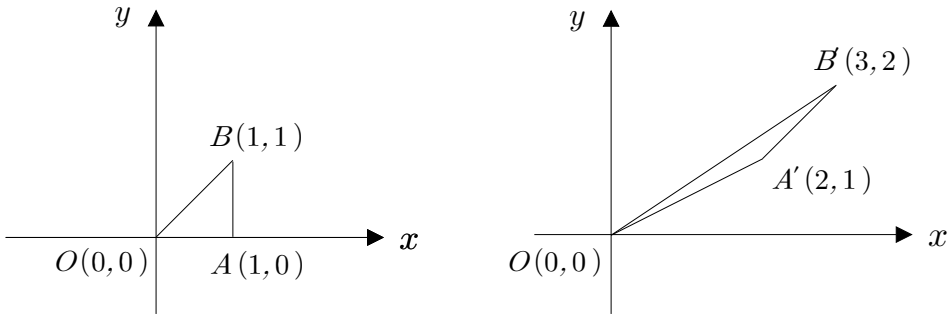
직선 OA의 방정식은 $y=0$이므로 $y = -x' + 2y' = 0$이다.

그러므로 직선은 변환 T에 의하여 직선 $x' - 2y' = 0$으로 옮겨진다.

직선 OB의 방정식은 $y=x$, 직선 AB의 방정식은 $x=1$이고, 이들 직선은 변환 T에 의하여 직선 $2x' - 3y' = 0$, $x' - y' - 1 = 0$으로 옮겨진다.

또 $T(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(B) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로 $\triangle OAB$의 변 OA는 원점 O와 점 $A'(2,1)$을 잇는 선분으로 옮겨진다. 변 OB는 원점 O와 점 $B'(3,2)$를 잇는 선분, 변 AB는 점 $A'(2,1)$과 점 $B'(3,2)$를 잇는 선분으로 옮겨진다.

따라서 $\triangle OAB$는 꼭지점 $O(0,0)$, $A'(2,1)$, $B'(3,2)$인 $\triangle OA'B'$으로 옮겨진다.



(그림 2-14) 삼각형의 이동

예) 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 선형변환 T에 의하여 꼭지점 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$인 □$OABC$는 어떤 도형으로 옮겨지는가?

(풀이) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

즉, $\begin{cases} x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' \\ y = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' \end{cases}$ 이다.

직선 OA의 방정식 $y=0$, 직선 BC의 방정식 $y=1$이고, 이들 직선은 변환 T에 의하여 직선 $2x'+y'=0$, $2x'+y'-3=0$으로 옮겨진다.

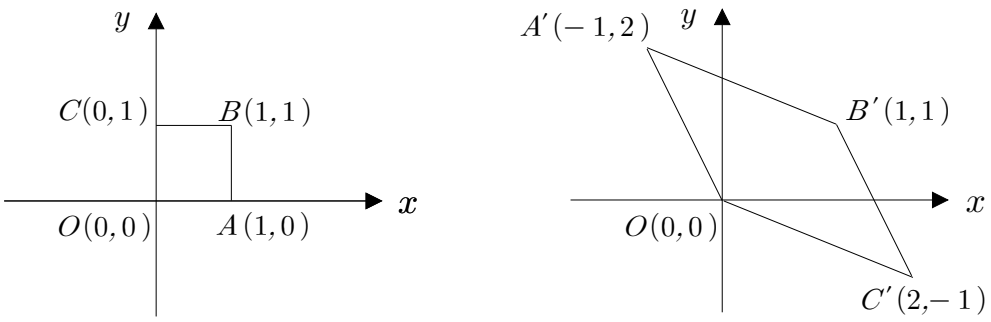
직선 OC의 방정식은 $x=0$, 직선 AB의 방정식은 $x=1$이고, 이들 직선은 변환 T에 의하여 직선 $x'+2y'=0$, $x'+2y'-3=0$으로 옮겨진다.

평행한 두 직선 OA와 BC는 변환 T에 의하여 평행한 직선 OA'와 $B'C'$으로 옮겨지고 평행한 두 직선 OC와 AB는 변환 T에 의하여 평행한 직선 OC'와 $A'B'$으로 옮겨진다.

또 $T(O)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $T(A)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $T(B)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $T(C)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

이므로 $\square OABC$의 변 OA는 원점 O와 점$A'(-1,2)$을 잇는 선분, 변 AB는 점 $A'(-1,2)$와 점 $B'(1,1)$를 잇는 선분으로 옮겨진다. 변 BC는 점 $B'(1,1)$과 점 $C'(2,-1)$를 잇는 선분, 변 OC는 원점 O와 점 $C'(2,-1)$를 잇는 선분으로 옮겨진다.

따라서 $\square OABC$는 꼭지점 $O(0,0)$, $A'(-1,2)$, $B'(1,1)$, $C'(2,-1)$인 평행사변형 $OA'B'C'$으로 옮겨진다.



(그림 2-15) 평행사변형의 이동

(2) 역변환을 갖지 않는 선형변환에 의한 상

T를 역변환을 갖지 않는 선형변환이라 하고, A를 T의 행렬이라고 하자.

이때 A는 역행렬을 갖지 않고, 그 행렬식은 $\det A=0$이다.

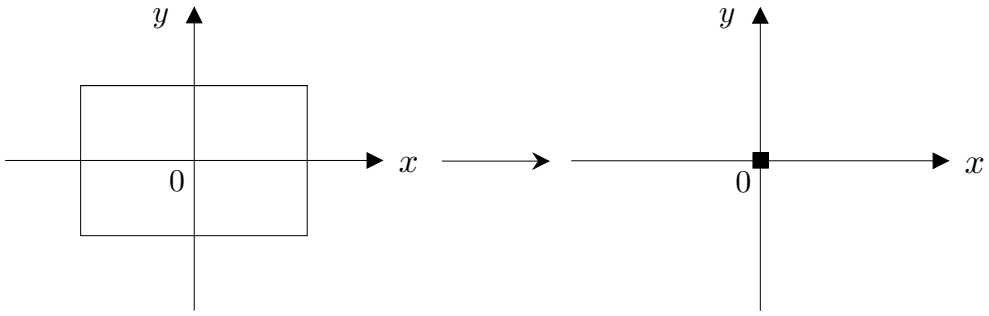
① 좌표평면의 상

예) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$인 경우에는 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

즉, $\begin{cases}x'=x+2y\\y'=2x+4y\end{cases}$ 에서 $y'=2x'$이 성립한다. 여기서 x,y가 모든 실수의 값을 가질 때 x',y'도 모든 실수의 값을 갖는다.

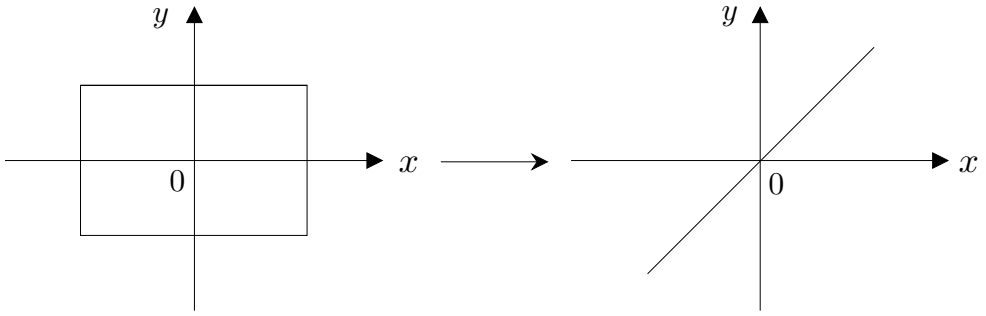
일반적으로 선형변환 T를 나타내는 행렬이 영행렬인 경우에는 T에 의한 좌표평면의 상은 원점이다. 또 선형변환 T를 나타내는 행렬이 영행렬이 아니면서 역행렬을 갖지 않으면, T에 의한 좌표평면의 상은 직선이다.

i) $A = O$이면 좌표평면 위의 모든 점은 원점 $(0,0)$으로 옮겨진다.



(그림 2-16) 평면의 원점이동

ii) $A \neq O$이고 $\det A = ad - bc = 0$이면 좌표평면 위의 모든 점은 원점을 지나는 직선으로 옮겨진다.



(그림 2-17) 원점을 지나는 직선

② 직선의 상

예) 직선 $x + y - 2 = 0$은 행렬로 주어지는 선형변환에 의하여 어떤 도형으로 옮겨지는가?

i) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$인 경우에는 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

즉, $\begin{cases}x'=x-y\\ y'=2x-2y\end{cases}$ 에서 $y'=2x'$이다.

따라서 직선 $y=2x$로 옮겨진다.

ii) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$인 경우에는 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

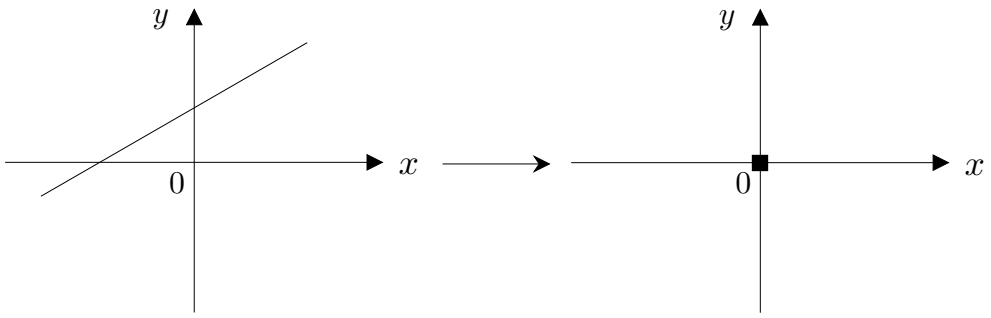
즉, $\begin{cases}x'=x+y\\ y'=2x+2y=2(x+y)\end{cases}$ 인 관계식이 성립한다.

$x+y-2=0$을 위의 식에 대입하면 $x'=2,\ y'=4$이다.

따라서 직선 $x+y-2=0$위의 모든 점의 상은 한 점 $(2,4)$로 옮겨진다.

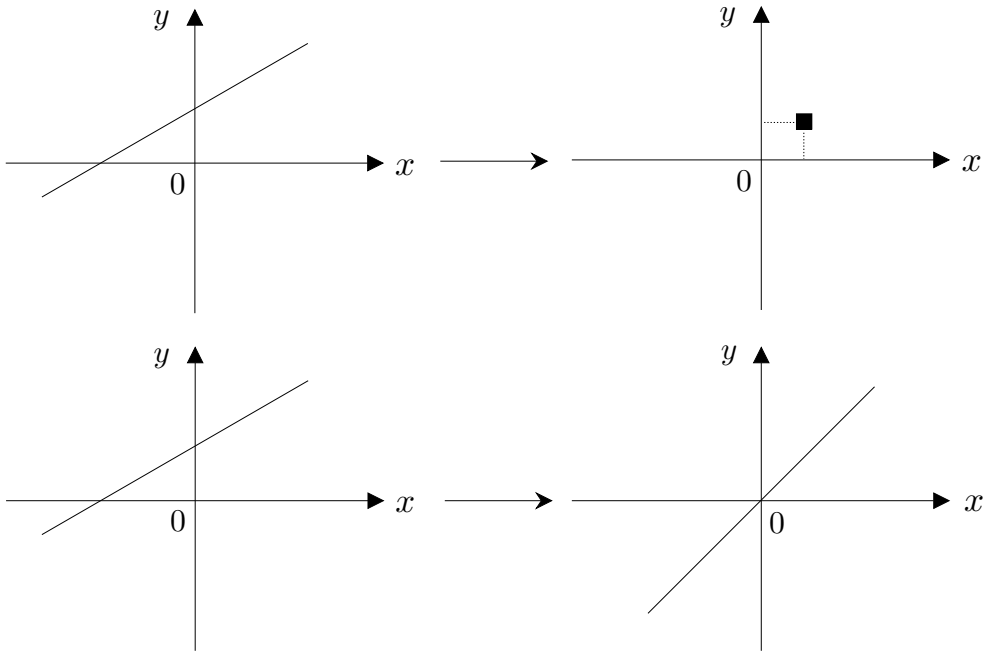
일반적으로 선형변환 T를 나타내는 행렬이 영행렬인 경우에는 T에 의한 직선의 상은 원점이다. 또 선형변환 T를 나타내는 행렬이 영행렬이 아니면서 역행렬을 갖지 않으면, T에 의한 직선의 상은 원점을 지나는 직선 또는 한 점으로 옮겨진다.

i) $A=O$이면 직선 위의 모든 점은 원점 $(0,0)$으로 옮겨진다.



(그림 2-18) 직선의 원점 이동

ii) $A \neq O$이고 $\det A = ad - bc = 0$이면 직선 위의 모든 점을 점 또는 원점을 지나는 직선으로 옮겨진다.



(그림 2-19) 점 또는 원점을 지나는 직선

3. 적용

1) 펜토미노의 대칭이동([1] P.74)

크기가 같은 5개의 정사각형을 모서리와 모서리를 붙여서 다양하게 배합하여 만든 도형을 펜토미노(Pentomino)라고 하는데 펜토미노에는 서로 다른 12가지 패턴이 있고, 회전시킨 것을 각각 다른 모양으로 구분하면 총 64가지의 형상이 생긴다. 이들 12가지의 펜토미노 패턴 중 F형 펜토미노를 가지고 대칭변환을 살펴보자.

우선 F형 펜토미노의 x축 대칭이동은

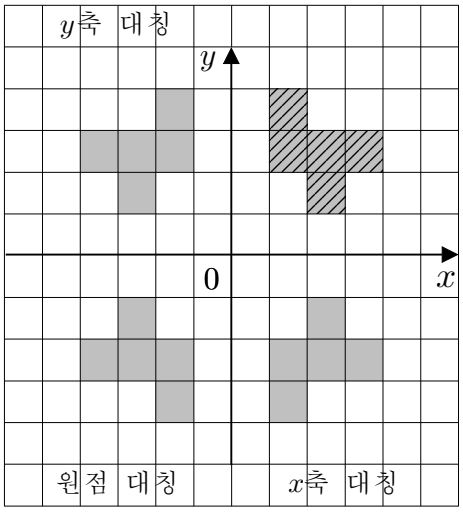
$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$에 의하여

$T\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ 가 된다.

y축 대칭이동과 원점 대칭이동도 위와 같은 방법에 의하여 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



(그림 2-20) F형 펜토미노의 대칭이동

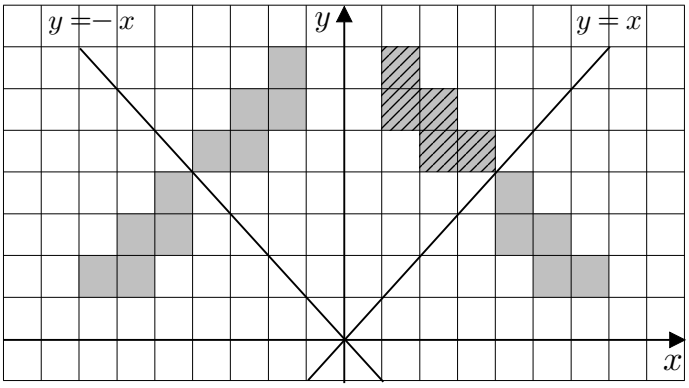
또한 W형 펜토미노의 $y=x$ 대칭이동은 $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$에 의하여

$T\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ $T\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ 가 된다.

W형 펜토미노를 y축에 대칭시킨 다음 $y=-x$ 대칭이동을 하여 위와 같은 방법에 의하여 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



(그림 2-21) W형 펜토미노의 대칭이동

2) 정사영

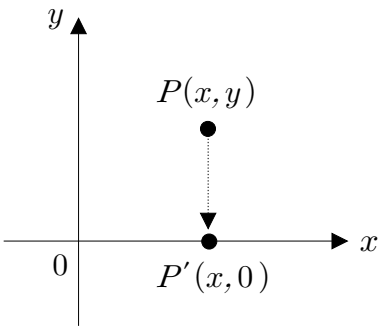
(1) x축 위로의 정사영

$P'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, x축 위로의 정사영은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-22) x축 위로의 정사영

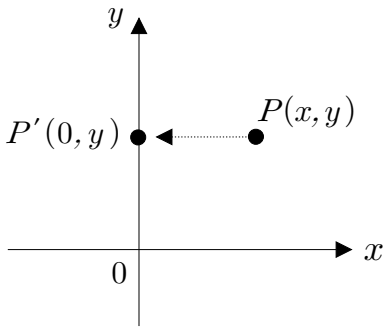
(2) y축 위로의 정사영

$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$이므로 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 된다.

즉, y축 위로의 정사영은 평면의 선형변환이며 그 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이다.



(그림 2-23) y축 위로의 정사영

3) 사인 · 코사인 덧셈정리([2] P.9)

회전변환의 합성에 의해 사인 · 코사인 덧셈정리를 증명하여 보자.

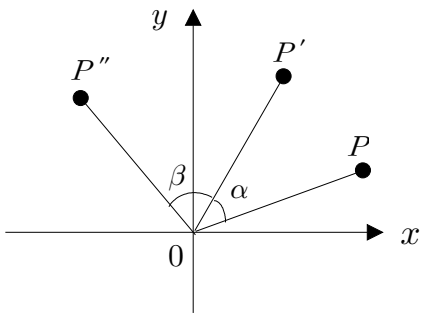
원점을 중심으로 각 β의 회전이동과 각 α의 회전이동을 합성하면

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}$$

이고, 이것은 원점 중심의 각 $\alpha+\beta$의 회전변환

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha+\beta) & -sin(\alpha+\beta) \\ sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

와 같다.



(그림 2-24) 회전이동

행렬의 연산법칙을 이용하여 위 두 개의 행렬의 곱을 계산하여 아래 행렬의 제1열과 비교하면

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$$
$$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

가 된다. 다시 이들 식에서 β를 $-\beta$로 바꾸어 놓으면

$$cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$
$$sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$$

가 된다. 이것으로 회전변환의 합성에 의해 사인 · 코사인 덧셈정리가 증명된다.

Ⅲ. 결론

변환 T에 의한 점 (x, y)의 상을 (x', y') 라 하고, 평면상의 직선에 대한 선형변환의 변환식을 행렬을 써서 나타내면

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

(단, a, b, c, d는 0이 아닌 실수)

이와 같이 임의의 선형변환에 대하여 반드시 단 하나의 대응되는 행렬이 존재하며, 임의의 행렬에 대응되는 선형변환은 오직 하나 정의된다.

즉, 선형변환의 집합과 이에 대응하는 행렬의 집합사이에는 일대일 대응이 존재하여 선형변환 전체의 모임은 그에 대응하는 행렬 전체의 모임과 동형이다.

이처럼 행렬은 기하학적인 내용을 대수적으로 표현하는 도구이다.

본 논문에서는 제7차 교육과정에서 다루고 있는 대칭이동, 닮음이동, 회전이동 등의 기하학적 평면도형의 변환을 행렬로 바꾸어 표현하고 그래프를 통한 선형변환과 행렬 사이의 일대일 대응 관계를 연구하였다. 또한 그 응용으로써 회전변환과 합성변환에 의해 사인의 덧셈 정리, 코사인 덧셈 정리를 쉽게 유도할 수 있음을 보였다.

위에서 살펴보았듯이 행렬은 선형변환의 표현으로서 중요한 개념인데 현 제 7차 수학과 교육과정에서는 선형변환의 내용이 삭제되고 행렬의 계산 위주의 이론만 다루어지고 있어서 기하학적인 내용을 대수적으로 다룰 수 있는 행렬과의 관련성을 인식하기 힘들어졌다. 따라서 여러 가지 평면도형의 기하학적인 성질뿐만 아니라 도형의 이동과 관련된 변환의 내용을 행렬과 연결시켜 지도되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] 김수환 외 6인(2002), 고등학교 수학 10-나, (주) 지학사.

[2] 양승갑 외 8인(2003), 미분과 적분, (주) 금성.

[3] 임재훈 외 7인(2002), 고등학교 수학 10-나, (주) 두산.

[4] 강영식(1989), 선형변한에 의하여 변형된 도형의 면적 또는 체적의 연구, 제주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[5] 김영심(2001), 일차변환의 효율적 교수학습방법 연구, 대구대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[6] 김종미(1998), 일차변환의 기하학적 고찰, 충북대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[7] 김환중(1988), 행렬과 선형변환의 연구, 홍익대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[8] 손문수(1989), 선형변환에 의한 평면도형의 성질에 관한 연구, 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[9] 안성석(1997), 고교 수학에서의 행렬에 관한 연구, 한양대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[10] 오광석(1990), 고등학교 자연과정 수학교육에서의 행렬지도에 관한 연구, 공주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[11] 이강만(1994), 선형변환과 행렬에 관하여, 인천대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[12] 장완식(1996), 고등학교 수학에서의 행렬에 대한 연구, 울산대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[13] 천무현(1994), 고등학교 수학에서의 선형변환에 관한 연구, 서강대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[14] 한정현(1982), 행렬과 선형변환, 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[15] H. Anton(2000), Elementary Linear Algebra (8th), John Wiley & Sons.