2006년 2월
교육학석사(수학교육)학위논문

# 대수영역의 분석 및 학습지도에 관한 고찰

- 10 단계를 중심으로 -

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 媛 善

# 대수영역의 분석 및 학습지도에 관한 고찰

- 10 단계를 중심으로 -

A Note on Analysis and Guidelines for teaching of A Field of Algebra

( Focusing 10th level )

2006年 2月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 媛 善

# 대수영역의 분석 및 학습지도에 관한 고찰

- 10 단계를 중심으로 -

指導敎授 朴 順 喆

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 제출합니다.

2006년 2 월

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 媛 善

金媛善의 敎育學 碩士學位 論文을 認准합니다.

審査委員長 朝鮮大學校 敎授 ______________ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 ______________ 인

審 査 委 員 朝鮮大學校 敎授 ______________ 인

2006 년 2 월

朝鮮大學校 敎育大學院

# 목　차

# ABSTRACT

A note on analysis and guidelines for teaching of a field of algebra

( Focusing on 10th level )

Sun-Won Kim

Advisor : Prof. Soon-cheol Park, Ph.D.

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education, Chosun University

Every study is based on mathematics. And so, teachers have to teach mathematical thoughts and its treatment-method. The concepts of the algebraic structure is the most importance in the study of mathematics.

In our schools, students meet the algebraic structure of abstract algebra, but they are lacking in understanding it theoretically because its contents consist of passive questions solved by memorization. Thus we deal with the contents, principle and law of algebraic structure in high school.

First of all, this study is composed of a field of algebraic in 7th curriculum in high school, and then we introduce the definitions and basic theorems with respect to the structure of groups, rings and fields. We analyze the algebraic structures and some examples which are applied on mathematics textbooks in high school. The result of the study is expected to apply in of affective teaching methods which are concerned with algebraic concepts and structures to teacher and these help high school students to understand the algebraic concepts and structures.

# Ⅰ. 서론

## 1. 연구의 필요성과 목적

학교 교육에서 수학교육의 목적은 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 것이다.([7]) 수학은 사회가 정보화 되어감에 따라 사회의 기본적 기능의 수행과 발전을 위해 핵심적인 역할을 담당하게 되었고, 그에 따라 자연과학뿐 아니라 인문, 사회과학, 경제학, 정보통신 공학 등에서도 폭 넓게 이용되고 있다. 지식의 양이 폭발적으로 증가하는 21C 정보화 사회에서 수학은 이와 같이 다양한 분야에서 사용될 뿐만 아니라 다른 교과 학습에 기초가 되는 교과로 학교 교육에서 수학교육이 차지하는 비중이 매우 높아지는 실정이므로 교육현장에서는 수학 교육이 매우 중요함을 더욱 인지하여야 할 것이다.

‘수와 연산’, ‘문자와 식’을 주로 다루는 수학의 영역인 ‘대수’ 는 초등학교에서 고등학교까지 학습하게 되는 방정식과 부등식이 주된 내용이라고 할 수도 있겠으나, 대학에서 배우는 대수학은 단순히 방정식과 그 해에 관한 연구에 국한되지 않고 군, 환, 체와 같은 수학적 구조에 관한 연구를 포괄하는 보다 넓은 개념으로 이해되고 있다.

대수학에서 가장 기본이 되는 대수적 구조는 군이다. 군의 구조에 대한 내용은 초·중등학교에서는 구체적으로 명시하고 있지는 않지만, 알게 모르게 다루는 기본적인 내용이다. 고등학교 수학 교과서를 살펴보면, 대수학에서 다루는 여러 가지 대수적 개념과 이론이 밑바탕이 되어 교과서가 저술되어 있음을 알 수 있다. 즉 대수적 구조에 관한 개념과 성질을 바탕으로 추상적 단계에서 개념을 조직하고 적용하는 수단과 일반화와 통찰을 가능하게 하는 방법을 제공하고 있는 것이다. 이러한 면에서 대수에 대한 이해는 그 자체 이외

에도 해석, 통계, 기하 등의 학습에도 필수적이라 할 수 있다. 따라서 학생들이 수학교육의 목적을 이루기 위해 대수적 구조에 대한 근본적인 이해가 선행되어야 할 것이다.([15])

본 논문에서는 문자식의 일반적인 특성을 이해하고 형식적인 처리를 할 수 있으며 문자가 상황에 따라 미지수, 상수, 변수를 나타낸다는 것을 이해할 뿐 아니라 수의 계산 법칙이 문자식의 계산에도 적용될 수 있음을 알고 조작할 수 있는 상태, 즉 완전히 형식적 조작기에 해당하는 고등학교 학생들이 학습하는 10단계를 중심으로 다룬다. 따라서 대수적 구조에 관한 개념 및 성질을 체계적으로 이해하고 활용할 수 있도록 하기위해, 대수학에서 가장 기본이 되는 군(group), 환(ring), 체(field), 정역이 고등학교 과정에서 어떻게 제시되고 있는지 예를 분석함으로써, 효율적인 교수-학습에 도움이 되고자 한다.

## 2. 연구의 제한점

현재 제 7차 고등학교 수학과 교육과정을 바탕으로 한 검인정 교과서는 여러 가지가 있지만 본 연구에서는 대한교과서(주), 중앙교육진흥연구소, (주)두산의 10-(가)를 중심으로 대수적 구조와 관련된 내용을 발취하고 고찰하였으며 이들의 지도 내용을 살펴봄으로 대수영역 지도의 방안을 모색하였다.

다만 본 논문에서는 학습자들의 대수영역에 관한 학습 실태는 직접 조사하지는 못했음을 밝혀둔다.

# Ⅱ. 대수의 기본 개념과 구조

## 1. NCTM에서 발표한 '수학적 구조'에 대한 규준

미국수학교사협의회(NCTM)에서 발표한 '학교수학을 위한 교육과정 및 평가 규준집 (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)'의 고등학교 교육과정의 규준1부터 규준14중에서 14번째 규준인 [규준14 : 수학적 구조]에는 다음과 같은 내용이 있다.([23])

> 수학의 구조는 마치 현대적인 건물의 철골 구조와 같다. 학생들은 이러한 구조를 깨달아야 하며, 어떻게 해서 그것이 다양한 내용이 구축되는 강력한 기초를 제공하는지 또 어떻게 그것이 서로 다른 요소들을 동시에 가지고 있는지를 알아야만 한다. 예를 들어, 이러한 구조들 중에 하나는 산수, 대수, 함수, 그리고 기하학적 변환 등 다양한 수학적 대상과 연산이 내재되어 있는 결합성이다. 이러한 포괄적인 구조적 원리의 의식은 학생들로 하여금 새로운 수학적 내용을 더 구성적으로 접근할 수 있게 해주며, 내용을 더 오랫동안 기억할 수 있게 하는 틀을 제공해 준다.
>
> 그 결과 학생들은 -
>
> ① 실수 체계와 실수의 여러 가지 하위 체계 (유리수, 정수 등)를 구조적 특징에 비추어 비교하고 대조할 수 있어야 한다.
>
> ② 대수적 절차의 논리를 이해할 수 있어야 한다.
>
> ③ 외견상 다르게 보이는 수학적 체계가 본질적으로 같을 수도 있다는 것을 음미할 수 있어야한다.
>
> ④ 복소수 체계를 이해하고 복소수 계산을 잘 할 수 있어야 한다.
>
> ⑤ 군, 체와 같은 여러 가지 수학적 구조 내의 기본 정리를 증명할 수 있어야한다.
>
> ⑥ 공리적 체계의 성격과 목적을 이해할 수 있어야 한다.

따라서 NCTM의 규준에 비춰, 본 논문의 목적에서 밝힌바와 같이 고등학교 수학에서 많은 비중을 차지하는 대수의 구조에 대해 고찰하기로 한다.

## 2. 대수의 기본 개념

대수의 역사에 따르면 기호대수의 발달이 변수와 함수 개념 발달에 결정적 역할을 하였고 또한 군, 환, 체 등과 같은 추상적 관념의 점진적 발달을 가능하게 하였다. 현재 고등학교 과정을 살펴보면 수와 연산, 방정식과 부등식 그리고 함수(변수) 개념 등은 대수 학습에서 중심역할을 하는 개념이다.([11])

NCTM의 규준에서 언급했듯이 대수학습의 가장 중요한 내용 중 하나는 수와 식 그리고 함수 등 다양한 수학적 대상의 개념을 정확히 이해하고, 이들 대상과 연산의 결합성을 파악하는 것이다. 특히 변수는 산술적 사고와 대수적 사고를 구분 짓고 대수적 사고를 이해하는데 핵심적인 역할을 하는 개념으로, 학교수학에서 대수를 이해하는데 바탕이 되는 기본적인 개념이다. 그러므로 학교수학에서 변수 개념을 명확하게 이해하고 이를 통해 대수에 관한 수학적 기초를 형성해 여러 가지 수학적 사고 경험을 의미 있게 사용하는 것은 매우 중요한 일이라 할 수 있다.

## 3. 대수의 개념에 따른 변수의 사용

변수는 산술적 사고와 대수적 사고를 구분 짓고 대수적 사고를 이해하는데 핵심적인 역할을 한다. 대수 학습에서 무엇보다도 중요한 것은 변수 기호와 관련된 형식적인 사고이다. 하지만 학교수학에서는 변수의 의미를 올바르게 이해할 수 있는 적절한 학습 경험을 주어주지 못해 그 결과로 학생들은 변수에 대한 이해가 매우 빈약한 상태이다.

중등수학에서 문자는 수와 함께 문자식을 이루는 기호로서 계산 대상이기도 하지만, 미지수를 나타내거나 도형이나 일반화된 법칙과 공식을 나타내며 또

한 변하는 값이나 어떤 집합에 속하는 임의의 원소를 나타내는 문자라는 의미로서 변수로 사용되고 있다. 그러나 교과서에서는 일반적으로 변수는 함수 개념과 관련하여 여러 가지 값을 나타내는 기호라는 제한된 의미로 간단히 설명하고 있으며, 변수에 대한 충분한 논의가 결여된 상태에서 대입을 위한 단순한 기호로 간주하고 간단히 처리한다. ([6] pp.243-254) 그래서 학생들이 변수를 명확하게 이해하지 못하면 수학적인 표현을 의미 있게 받아들이지 못하는 등 변수를 통해서 얻을 수 있는 수학적 안목이 결여됨으로써 여러 가지 수학적 사고 경험을 의미 있게 하지 못하게 된다. 변수의 복합성과 다양한 형태의 문자사용이 변수에 대한 명확한 이해를 어렵게 하고 있지만, 학교수학에서 현재와 같은 변수의 지도는 보다 발전적으로 고려되어야 할 것이다.

고등학교 과정에서도 변수의 복합성과 다양한 형태가 나타남을 살펴볼 수 있다. 예를 들면 기하에서 변수는 $A\,(a,b)$와 같이 점을 나타내기도 하고, 논리에서 변수 $p, q$ 는 명제로 대신하기도 한다. 해석학에서는 $f$ 를 함수 대신 쓰기도 하고, 대수에서는 $A$ 를 행렬로 보고 $V$ 를 벡터공간으로 보기도 한다. 이와 같이 고등학교 과정에서 변수가 수에서 크게 확장된 개념으로 사용됨을 알 수 있다.

그러므로 대수적 개념을 다음과 같이 네 개의 관점으로 해석하여 그에 따른 변수 사용을 지도 할 수 있다.([15])

① 산수의 일반화로서의 대수

산수에서 $3+5\cdot7 = 5\cdot7+3$ 과 같은 연습을 흔히 하게 된다. 구체적인 숫자를 이용하여 교환법칙이나 결합법칙을 익히도록 한다. 이것을 문자 $a, b$를 사용하여 $a+b=b+a$와 같이 일반적으로 나타낸다. 문자 $x, y$ 를 사용하여 $x\cdot y = xy$ , $x\cdot y = yx$ 와 같은 표현을 이해한다. 따라서 대수의 지도에서 가장 중요한 점은 학생들에게 각 영역에서 다루고 있는 수많은 패턴을 일반화하고 형식화하는 능력을 길러주는 일이다.

② 문제를 푸는 과정으로서의 대수

대수를 방정식을 푸는 절차에 대한 연구로 보면 변수는 미지수나 미정인 상수를 나타내는 자리지기로 간주된다.

“ 어떤 수를 5배하고 3을 더하면 40이 된다. 그 수를 구하여라 ”와 같은 문제는 $5x+3=40$ 과 같이 표현된다. 이 식을 푸는 과정에서 산수의 지식은 단순히 3을 빼고 5로 나누고 하는 일이지만 이 대수 문제에서는 항등원, 역원과 같은 의미가 내포되어 있다. 대수의 첫 번째 성격은 패턴의 일반화로서 변수가 중요한 작용을 한다. 두 번째 성격으로서 ‘간단히 한다’ 와 ‘푼다’ 로 대표하는 절차가 중요한 작용을 한다.

③ 수, 양 사이의 관계를 분석하고 기술하는 수단으로서의 대수

함수를 지도 할 때 다음 세 가지 표현은 아직도 학교에서 서로 혼동을 만들어 내는 요인이다.

$$f : x \rightarrow 3x+5$$

$$f(x) = 3x+5$$

$$y = 3x+5$$

여기서 $f(x)=3x+5$ 를 함수라 했을 때는 무리 없지만 $y=3x+5$ 를 함수라 하면 학생들은 혼동을 한다. 함수의 정의구역을 나타내는 여러 값으로서의 변수와, 방정식에서 흔히 미지수로서의 변수는 차이가 난다. 방정식을 구하기 위해서는 직선의 방정식 $y=mx+b$ 로부터 시작한다. 교사에게 이 표현은 함수를 말하는 것으로서 정의역을 나타내는 변수 $x$와 치역을 나타내는 변수 $y$와의 관계를 나타낸다. 그러나 학생들에게는 $m$ $x$, $b$가 확실히 구분되지 않고 마치 모두 미지수로 보일 수 있다.

④ 수학적 구조의 연산으로서의 대수

$3x^2+4ax-132a^2$ 을 인수분해하자.

여기에는 함수의 관계가 없기 때문에 정의역의 값을 나타내는 변수는 없다. 또 방정식이 아니기 때문에 미지수로서의 변수도 없고, 산수에서 있었던 패

턴을 일반화하는 것으로서의 변수도 없다. 따라서 여기에서 사용된 문자는 임의의 기호에 불과하다. 이와 비슷한 예로서 $2\sin^2 x - 1 = \sin^4 x - \cos^4 x$에서도 $x$는 실수를 대입하는 뜻이라기보다는 단순히 왼쪽 식과 오른쪽 식이 항등관계가 성립한다는 것을 뜻한다.

대수를 군, 환, 정역, 체, 벡터공간 등과 같은 추상적인 구조에 대한 연구로 보면 고등학교에서 가르치는 대수와는 거의 관계가 없는 듯이 보이지만, 실수체와 복소수체 및 다항식환, 정역과 군의 성질은 고등학교에서 가르치는 대수와 밀접한 관련이 있다. 다항식은 함수도 관계도 방정식도 일반화된 패턴도 아니며 그 인수분해나 전개와 같은 조작에서 변수는 환의 성질을 만족하는 임의의 기호일 뿐이다. 추상대수에서 변수는 어떤 성질을 만족하는 구조를 이루는 임의의 대상이다.

# Ⅲ. 고등학교 수학과 7차 교육과정의 대수영역 분석

## 10 단계

### 1. 성 격

제 7차 수학과 교육과정에서는 국민 공통 기본 교육 과정의 수학과의 성격을 다음과 같이 규정하고 있다.([8])

국민 공통 기본 교육 과정의 수학을 단계형 수준별 교육 과정으로 구성한다. 단계형 수준별 교육 과정은 학생의 인지 발달 수준을 고려하여 수학의 기본적인 필수 학습 내용을 정선하고, 학습 위계와 난이도에 따라 단계별로 구성한다.

또, 기본 과정과 심화 과정을 두어 학생 개인의 학습 능력에 따라 자기 주도적 학습을 촉진하는 창의적인 학습 기회를 제공한다.

국민 공통 기본 교육 과정의 수학 내용은 '수와 연산' '도형' '측정' '확률과 통계' '문자와 식' '규칙성과 함수' 의 6개 영역으로 구성한다.

① '수와 연산' 영역에서는 자연수, 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산

② '도형' 영역에서는 평면도형과 입체도형의 개념과 성질

③ '측정' 영역에서는 길이, 시간, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피, 삼각비의 개념과 활용

④ '확률과 통계' 영역에서는 경우의 수를 바탕으로 확률의 의미 이해 및 자료의 정리와 표현

⑤ '문자와 식' 영역에서는 문자의 사용, 식의 계산, 방정식, 부등식

⑥ '규칙성과 함수' 영역에서는 규칙 찾기와 대응 관계, 일차함수, 이차함수, 유리함수와 무리함수, 삼각함수에 관한 기초개념과 문제 해결 방법을 다룬다.

## 2. 목 표

제 7차 수학과 교육과정에서 10단계의 목표는 다음과 같은 국민 공통 기본 교육 과정 전체에 대한 수학과의 총괄적인 목표와 관련지어 이해되어야 한다.([8])

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.

제 7차 교육과정이 추구하는 인간상을 구현하기 위한 수학 교육의 목표는 크게 두 가지 측면으로 나누어 생각할 수 있다. 하나는 수학적 지식과 기능의 습득 및 그 응용이며, 다른 하나는 수학적 사고력의 신장과 수학적 태도의 함양이다. 이런 의미에서 고등학교 수학과에서는 고등학교 학생들이 가져야 할 기초적인 수학적 지식의 습득을 중요시함과 동시에 이를 토대로 여러 가지 사물의 현상을 수학적으로 표현하고, 사고하고, 처리하는 능력과 수학적 태도의 육성을 그 목표로 하고 있다.

위의 총괄 목표에 이어 고등학교 수학과의 하위 목표가 인지적 영역과 정의적 영역으로 구분되어 제시되어 있다. 인지적 영역에서는 수학적 지식과 이해, 기능과 적용에 대하여, 정의적 영역에서는 수학적 태도에 관하여 각각 설명하고 있다.([8])

가. 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

나. 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

3. 내용체계

| 단계 | 영 역 | 내 용 | |
|---|---|---|---|
| 10-(가) | 수와 연산 | 집합의 연산과 법칙 | ▷집합의 연산법칙 |
| | | 명제 | ▷명제의 뜻과 참, 거짓의 판별<br>▷명제의 역,이,대우<br>▷필요조건과 충분조건 |
| | | 실수 | ▷실수의 연산에 관한 성질<br>▷실수의 대소 관계 |
| | | 복소수 | ▷복소수의 뜻과 연산<br>▷복소수의 기본 성질 |
| | 문자와 식 | 다항식과 연산 | ▷다항식의 덧셈과 뺄셈<br>▷다항식의 곱셈과 나눗셈 |
| | | 나머지 정리 | ▷항등식<br>▷나머지 정리 |
| | | 인수분해 | ▷인수분해 |
| | | 약수와 배수 | ▷식의 약수와 배수, 최대공약수와 최소공배수 |
| | | 유리식과 무리식 | ▷유리식과 무리식의 뜻과 계산 |
| | | 방정식 | ▷이차방정식의 실근과 허근<br>▷이차방정식에서 판별식, 근과 계수의 관계<br>▷간단한 삼차방정식과 사차방정식<br>▷미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식 |
| | | 부등식 | ▷부등식의 성질<br>▷절대값을 포함한 일차부등식<br>▷이차부등식과 연립이차부등식<br>▷간단한 절대부등식 |
| | 확률과 통계 | 산포도 표준편차 | ▷산포도와 표준편차 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10<br>-(나) | 도형 | 평면좌표 | ▷두 점 사이의 거리<br>▷선분의 내분과 외분 |
| | | 직선의 방정식 | ▷여러 가지 직선의 방정식<br>▷두 직선의 평행 조건과 수직 조건<br>▷점과 직선 사이의 거리 |
| | | 원의 방정식 | ▷원의 방정식<br>▷두 원의 위치 관계<br>▷원과 직선의 위치 관계 |
| | | 도형의 이동 | ▷평행이동<br>▷원점, $x$축, $y$축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동 |
| | 측정 | 부등식의 영역 | ▷부등식의 영역<br>▷간단한 최대 문제와 최소 문제 |
| | 규칙성과 함수 | 함수 | ▷함수의 뜻과 그래프<br>▷함수의 합성, 합성함수<br>▷역함수 |
| | | 이차함수 | ▷이차함수의 최대, 최소<br>▷이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계<br>▷이차함수와 이차방정식, 이차부등식의 관계 |
| | | 유리함수와 무리함수 | ▷유리함수와 무리함수<br>▷함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프<br>▷함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프 |
| | | 삼각함수와 그 그래프 | ▷호도법<br>▷삼각함수<br>▷사인, 코사인, 탄젠트의 그래프와 성질<br>▷삼각함수의 성질<br>▷간단한 삼각방정식과 삼각부등식 |
| | | 삼각형에의 응용 | ▷사인법칙과 코사인법칙<br>▷삼각함수를 활용한 삼각형의 넓이 |

## 4. 대수영역

### 1) 수와 연산

#### (1) 내용개요

- 10-(가) 단계에서는 중학교에서 직관적으로 다루었던 집합을 일반화하고 집합에 연산을 도입하여 연산법칙을 이해한다.
- 중학교에서는 도형의 성질을 다루면서 암시적으로 명제의 가정과 결론을 쓸 수 있었다. 여기에서는 일반적인 명제의 뜻을 이해하고, 조건이 주어진 명제를 취급하여 필요조건과 충분조건 들을 다룬다. 그리고 명제의 역, 이, 대우를 알게 하여 참과 거짓을 판별할 수 있도록 한다.
- 중학교에서 도입한 실수를 보다 깊이 이해하기 위하여 연산에 대한 기본법칙을 다루고 '닫혀 있다', '항등원', '역원' 등의 뜻을 알고 수의 대소관계를 판단한다.
- 중학교에서는 수 집합을 실수의 범위까지만 다루었으나, 여기서는 $x^2=-1$ 을 만족시키는 수인 허수단위 $i$를 도입하여 수를 복소수까지 확장한다. 그리고 복소수의 연산을 정의하여 연산에 대한 기본 성질을 이해하도록 한다.

#### (2) 지도의 의의

- 집합의 포함 관계와 연산법칙의 이해는 모든 논리적 사고의 기본이 된다. 특히, 수학적 문장을 이해하는 바탕이다.
- 명제의 부정, 역, 이, 대우, 필요조건, 충분조건, 필요충분조건 등은 명제의 참과 거짓을 논리적으로 다루어 가는 추론 과정의 출발점이다. 학생들이 이해할 수준에서 적절한 기호를 사용하여 수학적 문장을 쓸 수 있게 한다.
- 수의 확장 과정에서 수의 연산에 대한 일관된 대수적 구조가 유지되는 것을 파악하게 한다.
- 다항방정식 해의 존재성과 관련된 복소수의 체계를 전반적으로 이해하게 한다.

2) 문자와 식

(1) 내용개요

- 다항식의 집합의 덧셈, 뺄셈, 곱셈 등의 연산을 다룰 수 있다.
- 정수의 나눗셈에서 나머지를 얻듯이 두 다항식의 나눗셈에서 얻을 수 있는 나머지인 다항식에 관하여 알아본다.
- 유리식과 무리식의 뜻을 알고, 그 계산을 할 수 있다.
- 다항식에 관련된 방정식과 부등식을 인수분해를 이용하여 풀 수 있게 한다.

(2) 지도의 의의

- 방정식, 부등식 등에 나타나는 문자를 품는 다항식은 수를 확장한 또 다른 대수적 구조이다. 문자나 식은 일상적인 상황을 조건에 알맞게 변수화하거나 방정식 또는 부등식 등과 같이 수학적으로 표현하는데 쉽게 활용된다. 한편 문자나 식의 연산은 수의 연산만큼 자연스럽다.

  즉, 대수적으로 쉽게 다룰 수 있다. 문자와 식은 대부분의 수학에서 의사소통하는 데 사용되는 언어로서 추상적인 단계에서 개념을 조작하고 적용하는 수단과 원래의 상황을 넘어서는 일반화와 통찰을 가능하게 하는 방법을 제공해 준다. 이런 점에서 문자와 식은 그 자체의 체계적 학습 이외에도 해석, 통계, 기하 등의 학습에서 필수적이라 할 수 있다.

# Ⅳ. 교과서의 대수적 구조와 지도방안

이 장에서는 대수학의 중심 분야인 군(group), 환(ring), 체(field)의 개념과 그것이 10단계에서는 어떻게 다루어졌는지 교과서의 대수적 구조를 분석하고 그 지도방안을 제시한다.

임의의 집합에 그 집합의 원소들 사이 상호관계를 정의해 주는 하나의 공리계를 부여함으로써 그 집합에 하나의 구조가 형성된다. 예로 자연수 집합 $N$에서의 대수적 구조는 두 원 $a, b$의 합 $a+b=c$ 를 구하는 과정에서처럼 두 자연수의 한 쌍에 의해서 제 3의 수가 결정되는 사실로부터, 두 변수의 함수 $f: N \times N \rightarrow N$, $f(a,b)=c$ 로 정의된다. 이 사실은 $a, b$의 결합에 의해 $c$가 결정된다고 볼 수 있다. 이를 일반적으로 생각하면 $f(a,b)$는 덧셈에 국한되지 않고, $f(a,b)=ab$와 같이 곱셈을 나타낼 수도 있다.

집합에 연산이 주어져 특정한 공리계를 만족 시킬 때, 이 집합과 연산을 함께 묶어 이를 대수적 체계(algebraic system)라하고 또 이 집합에 대수적 구조(algebraic structure)가 주어져 있다고 말한다.

## 1. 이항연산 (Binary Operations)

[정의4-1] 집합 $A(\neq \varnothing)$의 임의의 원소 $x, y$에 대하여 $A$의 단 하나의 원소 $z$를 대응시키는 함수

$$f: A \times A \rightarrow A, \qquad f(x,y)=z$$

를 $A$ 위의 이항연산 또는 간단히 연산이라 하고 $f(x,y)$를 $x, y$의 곱(product), 결합(composite) 또는 합성이라고 한다. 또 $\circ$와 같은 기호를 사용하여 $f(x,y)$를 $x \circ y$로 나타내고 $f$ 대신에 $\circ$를 $A$위의 연산이라 하고 또 집합 $A$위에 연산$\circ$이 정의되었다(defined)고 말한다. 이항연산을 나타내는 기호로서는 $\circ$, $*$, $+$, $\times$, $\cdot$ 등이 사용된다.

집합 $A$위에 연산 $\circ$이 정의되어 있을 때, $A$의 부분집합 $B$에 대하여

$$a, b \in B \Rightarrow a \circ b \in B$$

인 경우에 $B$는 연산 $\circ$에 관하여 닫혀 있다(closed)고 말한다.

(주)두산의 10-(가) 교과서(p.37)에서는 수 체계의 시작 부분에서 자연수, 정수, 유리수, 실수를 다룬 뒤 실수의 연산에 관한 성질에서 '닫혀 있다'를 다음과 같이 정의하고 있다.

> 일반적으로, 공집합이 아닌 집합 $S$의 임의의 두 원소 $a, b$에 대하여 어떤 연산을 한 결과가 $S$의 원소일 때, 이 집합 $S$는 그 연산에 대하여 **닫혀있다**고 한다.

그리고 p.40에서는 보기와 문제를 통하여 수 집합들이 사칙연산에 대하여 닫혀있는가를 이해하게 하고 있다.

| | 덧 셈 | 뺄 셈 | 곱 셈 | 나눗셈 |
|---|---|---|---|---|
| 자연수 | ○ | X | ○ | X |
| 정수 | ○ | ○ | ○ | X |
| 유리수 | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 실수 | ○ | ○ | ○ | ○ |

교과서에서 '닫혀있다'의 개념을 묻는 예를 살펴보자. ([4] p.56)

[예4-1] 집합 $\{x \mid x$는 음의 정수$\}$는 사칙연산 중 어느 연산에 대하여 닫혀있는가? ( 단, 0으로 나누는 것은 제외한다. )

풀이) 덧셈 : (음수) + (음수) = 음수

뺄셈 : (-1)-(-3)=2

곱셈 : (-1)·(-3)=3

나눗셈 : (-1)/(-1)=1

그러므로 위의 집합은 덧셈에 대해서만 닫혀있다.

<지도방안> ([7])

· 연산에 대해 닫혀있음을 알게 한다. 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수 집합에서의 사칙연산을 차례로 다루어 봄으로써 연산이 지니고 있는 성질을 알도록 한다.

<심화과정>

· 임의의 수의 집합에서 사칙연산에 대하여 닫혀있는지를 조사할 수 있도록 한다.

심화과정의 예를 살펴보자. ([4] p.58 )

[예4-2] 집합 $A=\{x \mid x = m+n\sqrt{2},\ m, n$은 유리수$\}$는 사칙연산 중 어느 연산에 대하여 닫혀있는가? (단, 0으로 나누는 것은 제외한다.)

풀이) 집합 $A$의 임의의 두 원소에 대하여 각각 $a+b\sqrt{2}$, $c+d\sqrt{2}$ (단, $a, b, c, d$는 유리수)라고 하자.

덧셈 : $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$이고 $a+c$, $b+d$는 각각 유리수이므로 $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) \in A$

뺄셈 : $(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2}$이고 $a-c$, $b-d$ 는 각각 유리수이므로 $(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2}) \in A$

곱셈 : $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$이고 $ac+2bd$, $ad+bc$ 는 각각 유리수이므로 $(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2} \in A$

나눗셈 : 0으로 나누는 것을 제외하면

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}$$ (단, $c+d\sqrt{2}$는 0이 아니다)

이고 $\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ , $\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ 는 각각 유리수이므로

$$\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} \in A$$

따라서 집합 $A$는 사칙연산에 대해 닫혀있다.

## 2. 군(Group)의 구조

[정의4-2] 집합 $G$ $(\neq \phi)$ 위에 정의 된 연산 $\circ$에 대해 $G$는 닫혀있고, 즉

$$a, b \in G \quad \Rightarrow \quad a \circ b \in G$$

이고 다음이 성립할 때, $(G, \circ)$를 군이라고 한다.

G.1 : (결합법칙) 모든 $a, b, c \in G$에 대하여, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

G.2 : 특정한 원소 $e \in G$가 존재하여, 모든 $a \in G$에 대하여

$$a \circ e = a = e \circ a$$

이 원소 $e$를 $G$의($\circ$에 관한) 항등원(identity)이라고 한다.

G.3 : 각 $a \in G$에 대하여 $a \circ x = e = x \circ a$인 원소 $x \in G$가 존재하면

원소 $x$를 ($\circ$에 관한) $a$의 역원(inverse)이라하고, 이 $x$ 를 $a^{-1}$로 나타낸다.

$$즉,\ a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$$

이 경우에 $G$는 연산 $\circ$에 관하여 군을 이룬다고 말한다.

[정의4-3] 군 ( $G, \circ$)에 대하여 다음이 성립할 때, $(G, \circ)$를 Abel군(Abelian group) 또는 가환군(commutative group)이라고 한다.

G.4 : (교환법칙) 모든 $a, b \in G$에 대하여 $a \circ b = b \circ a$

(참고)

① 군 ( $G, \circ$) 가 Able 군이 아닐 때, 즉 $a \circ b \neq b \circ a$ 인 원소 $a, b \in G$가

적어도 한 쌍 존재할 때, 이 군을 비 Abel군(nonabelian group) 또는 비가환군(noncommutative group)이라고 한다.

② 연산 기호가 $\circ$ 또는 $\cdot$ 인 군을 곱셈군(multiplicative group)이라 하고 그 항등원을 $e$ 또는 1로 나타낸다. 연산기호가 + 인 군을 덧셈군(additive group)이라 한다. 덧셈군의 항등원을 0으로 나타내고 영원(zero element)이라고 하며, $a$의 역원을 $-a$로 나타낸다.

[예4-3] 정수 집합 $\mathbb{Z}$, 유리수 집합 $\mathbb{Q}$, 실수 집합 $\mathbb{R}$, 복소수 집합 $\mathbb{C}$는 덧셈에 관하여 Abel 군을 이루고

$$\mathbb{Q}* = \mathbb{Q}-\{0\},\quad \mathbb{R}* = \mathbb{R}-\{0\},\quad \mathbb{C}* = \mathbb{C}-\{0\}$$

$$\mathbb{Q}+ = \{ r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \},\quad \mathbb{R}+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

은 곱셈에 관하여 Abel 군을 이룬다.

이제 교과서 10-(가)를 통해 군과 관련된 개념을 살펴보자.

### 1) 수 집합

교과서에서는 다음과 같이 항등원과 역원을 일반적으로 정의한다. ([2] p.29)

수의 집합 $A$가 연산 $*$에 대하여 닫혀 있을 때, $A$의 임의의 원소 $a$에 대하여 $a*e = e*a = a$를 만족하는 $A$의 원소 $a$가 존재하면 $e$를 연산 $*$에 대한 항등원이라고 한다.
또 $A$집합 의 원소 $a$에 대하여 $a*x = x*a = e$를 만족시키는 $A$의 원소 $a$가 존재하면 $x$를 연산 $*$ 에 대한 $a$의 역원이라고 한다.

자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수, 다항식의 집합에서 자연수를 제외하면 모두 덧셈에 대한 항등원은 0이며, 곱셈에 대한 항등원은 모든 집합에서 1이다. 자연수, 정수, 유리수, 무리수 집합에 대한 항등원과 역원을 다음과 같은

문제로 제시하였다.

[예4-4] 다음 집합에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원이 각각 존재하는지를 말하여라.([2] p.30)

(1) 유리수 전체의 집합 (2) 홀수 전체의 집합

[예4-5] 다음수의 덧셈, 곱셈에 대한 역원을 각각 말하여라.([3] p.43)

(1) 3 (2) -2.5 (3) $\sqrt{2}$ (4) $1+\sqrt{2}$

교과서 상에서는 군이라는 표현은 쓰지 않지만, '실수의 연산에 대한 기본 성질'에서 군의 정의를 이해할 수 있게 한다. ([3] p.45)

실수 전체의 집합 ℝ의 임의의 원소 $a, b, c$ 에 대하여

| | 실수의 덧셈 | 실수의 곱셈 |
|---|---|---|
| 닫혀있다 | $a+b \in \mathbb{R}$ | $ab \in \mathbb{R}$ |
| 교환법칙 | $a+b=b+a$ | $ab=ba$ |
| 결합법칙 | $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(ab)c=a(bc)$ |
| 항등원 | $a+0=0+a=a$ | $a \cdot 1=1 \cdot a=a$ |
| 역원 | $a+(-a)=(-a)+a=0$ | $a \cdot \frac{1}{a}=\frac{1}{a} \cdot a=1$ ( $a \neq 0$) |

자연수 집합 ℕ은 덧셈에 대한 항등원 0이 존재하지 않으므로 군을 이루지 못함을 확인할 수 있고, 이 외에 정수, 유리수, 실수, 복소수 집합은 덧셈에 대하여 군을 이루며 집합 $\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}-\{0\}$, $\mathbb{C}-\{0\}$은 곱셈에 대해 군을 이룬다. 그리고 교환법칙도 성립하므로 Abel군이 된다.

또한 고등학교 수준에서는 다음과 같은 문제를 제시함으로써 군에 대한 정의를 이해할 수 있게 한다.

[예4-6] 임의의 실수 $a,b$에 대하여 연산 $*$ 를 $a*b=a+b-ab$로 정의할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 실수 전체의 집합은 연산 $*$ 에 대하여 닫혀 있는지 말하여라.

(2) 연산 $*$ 에 대한 항등원을 구하여라.

(3) 연산 $*$ 의 -2에 대한 역원을 구하여라.

풀이)

(1) 실수 집합 ℝ은 사칙연산에 대하여 닫혀있으므로

$$a*b=a+b-ab\in \mathbb{R}$$

이다. 따라서 집합 ℝ은 연산 $*$에 대하여 닫혀있다.

(2) 구하는 항등원을 $e$라고 하면 $a*e=e*a=a$ 에서 $a+e-ae=a$ 이므로 $e(1-a)=0$ 이다. 그런데 임의의 원소 $a$에 대하여 성립하여야 하므로 $e=0$이다.

(3) -2의 역원을 $x$라 하면 $-2*x=0$ 에서 $-2+x+2x=0$ 이므로 $x=\frac{2}{3}$ 이다.

그리고 연산 $*$는 $a*(b*c)=a+b+c-ab-bc-ca+abc=(a*b)*c$이므로 결합법칙이 성립한다. 따라서 실수 집합 ℝ은 연산 $*$에 관하여 군을 이룬다. 즉, ( ℝ , $*$ )는 군이다.

복소수에서도 실수의 범위에서 성립하는 연산에 대한 기본 법칙은 모두 성립한다. ([2] p.40)

복소수 전체집합 ℂ의 임의의 원소 $z_1, z_2, z_3$ 에 대하여

| | 복소수의 덧셈 | 복소수의 곱셈 |
|---|---|---|
| 닫혀있다 | $z_1+z_2\in\mathbb{C}$ | $z_1\cdot z_2\in\mathbb{C}$ |
| 교환법칙 | $z_1+z_2=z_2+z_1$ | $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ |

| | | |
|---|---|---|
| 결합법칙 | $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ | $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ |
| 항등원 | $z_1+0=z_1$ | $z_1\cdot 1=z_1$ |
| 역원 | $z_1+(-z_1)=0$ | $z_1\cdot\dfrac{1}{z_1}=1$ |

따라서 복소수의 집합 $\mathbb{C}$는 덧셈에 대하여 군이 되며, 집합 $\mathbb{C}-\{0\}$은 곱셈에 대하여 군을 이룬다.

<지도방안> ([7])

- 연산의 항등원, 역원을 알게 한다. 수의 집합에 따라 주어진 연산에 대하여 항등원과 역원이 존재할 수 있음을 알게 하고, 연산에 따라 항등원과 역원이 서로 다르다는 점을 이해하도록 한다.
- 복소수의 연산에 관한 성질을 알게 한다. 복소수의 집합에서는 연산에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하고 항등원과 역원이 존재함을 알게 하고, 실수의 집합과 똑같은 대수적 구조가 있음을 직관적으로 이해하게 한다.

### 2) 다항식

다항식과 그 연산에서 다항식은 사칙연산 중 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 관하여 닫혀있음에 관한 내용이 다루어진다. 다항식은 나눗셈에 관하여 닫혀있지 않은데, 이는 나눗셈정리를 이용하여 보여준다. ([3] p.80)

일반적으로, 다항식 $A$를 다항식 $B$ $(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q$, 나머지를 $R$라고 하면 $Q$, $R$는 다항식이고

$$A=BQ+R$$

이 성립한다. 이때, $R$의 차수는 $B$의 차수보다 낮다.

특히, $R=0$이면 $A$는 $B$로 나누어 떨어진다고 한다. 그러나 $R\neq 0$이면 $A$

는 $B$로 나누어 떨어지지 않으므로 다항식 전체의 집합은 나눗셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

이제 다항식 전체집합이 덧셈에 관하여 군을 이룸을 보이자.
다항식의 전체의 집합을 P라 하면 P는 덧셈에 관하여 군을 이룬다.
임의의 세 다항식 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ $\in$P에 대하여
① 덧셈에 대하여 닫혀있다.

$p(x)+q(x)\in \mathrm{P}$

② 결합법칙이 성립한다.

$(p(x)+q(x))+r(x)=p(x)+(q(x)+r(x))$

③ 항등원이 존재한다.

$p(x)+e=p(x)$ 를 만족하는 항등원 $e=0$ 이다.

④ 역원이 존재한다.

$p(x)+q(x)=0$ 을 만족하는 $p(x)$의 역원 $q(x)=-p(x)$

하지만 곱셈에 대해서는 군을 이루지 않는다.
곱셈에 대한 항등원 1은 존재하지만, $p(x)\cdot q(x)=1$을 만족하는 $p(x)$의 역원은 $q(x)=\dfrac{1}{p(x)}\not\in$ P 이므로 군이 되지 않는다.
다항식은 다음 장의 환에서 더 자세히 알아보자.

## 3. 환(Ring)과 체(Field)의 구조

[정의4-4] 집합 $R(\neq\varnothing)$ 위에 정의된 두 연산 덧셈 +과 곱셈 $\cdot$ 에 대해 $R$ 에서 닫혀있고, 즉

$$a,b\in R \quad\Rightarrow\quad a+b,\ a\cdot b\in R$$

이고 다음이 성립할 때, ($R$, +, $\cdot$)를 환이라 하고 $R$ 은 덧셈 +과 곱셈

. 에 관하여 환을 이룬다고 한다.

[A] : ( $R$ +)는 Abel군이다.

[M.1] : (곱셈에 관한 결합법칙) 모든 $a, b, c \in R$에 대하여

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

[D] : (덧셈과 곱셈에 관한 분배법칙) 모든 $a, b, c \in R$에 대하여

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

[정의4-5] 환 ( $R$ +, . )이 다음 조건을 만족 시킬 때, 이 환을 가환환 (commutative ring)이라고 한다.

[M.2] : (곱셈에 관한 교환법칙) 모든 $a, b \in R$ 에 대하여 $a \cdot b = b \cdot a$

그리고 가환환이 아닌 환을 비가환환(noncommutative ring)이라고 한다.

[정의4-6] 환 ( $R$ +, . )이 다음 조건을 만족 시킬 때, 이 환을 항등원 1을 가진 환(ring with identity)이라고 한다.

[M.3] : 특정한 원소 $1 \in R$이 존재하여, 모든 원소 $a \in R$에 대하여

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

이때 $1 \in R$ 을 이 환의 곱셈에 대한 항등원이라고 한다.

[예4-7] 정수 집합 ℤ는 덧셈 +와 곱셈 . 에 관하여 항등원 1을 가진 가환환을 이룬다. 환 (ℤ, +, . )을 정수 환(ring of integer)이라고 한다. 마찬가지로 (ℚ, +, . ), (ℝ, +, . ), (ℂ, +, . )는 각각 항등원 1을 가진 가환환이다. 그러나 집합 2ℤ= { $2x$ | $x$ ∈ ℤ }는 덧셈과 곱셈에 관하여 가환환을 이루지만 이 환에는 항등원 1이 없다.

[정의4-7] 임의의 환 $R$ 의 원소 $a\,(\neq 0)$ 에 대하여

$$ab = 0 \quad \text{또는} \quad ba = 0$$

인 $b\,(\neq 0) \in R$ 가 존재할 때, $a$를 영인자 (zero divisor)라고 한다.

[정의4-8] 항등원 1을 가진 가환환 $R$이 영인자를 갖지 않을 때, $R$을 정역(integral domain)이라 한다.

[예4-8] 환 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$는 정역이다.

[정의4-9] 항등원 1을 가진 환(가환환 또는 비가환환) $R$에서 $a(\neq 0)$에 대하여 $aa^{-1}=1=a^{-1}a$ 인 원소 $a^{-1}\in R$ 가 존재할 때, $a$를 $R$의 단원(unit)이라 하고, $R$의 영원 아닌 모든 원소가 단원이면 $R$을 나눗셈 환(division ring) 또는 유사체(skew field)라고 한다.

[정의4-10] 가환인 나눗셈 환을 체(field)라 한다.

이제 10단계 교과서에서 환과 체의 개념이 어떻게 소개되었는지 살펴보자.

### 1) 수집합

앞의 내용에서 정수, 유리수, 실수, 복소수 집합들은 각각 덧셈에 관하여 군을 이루고 교환법칙이 성립하므로 가환군임을 보였다.

교과서에서는 실수와 복소수 집합에서 각각 곱셈에 대한 결합법칙과 덧셈과 곱셈에 대한 분배법칙이 성립함을 보여줌으로써, 실수집합 $\mathbb{R}$과 복소수 집합 $\mathbb{C}$가 덧셈 $+$과 곱셈 $\cdot$에 관하여 환을 이룸을 알 수 있다. 이와 같이 정수 집합 $\mathbb{Z}$, 유리수 집합 $\mathbb{Q}$도 덧셈 $+$과 곱셈 $\cdot$에 관하여 환을 이룬다. 이 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 는 곱셈에 대하여 교환법칙이 성립하므로 가환환이 되고 이들 집합은 모두 곱셈에 대한 항등원 1을 가지므로 항등원을 갖는 가환환이다. 또한 영인자가 존재하지 않으므로 정역이다. 그리고 유리수 집합 $\mathbb{Q}$, 실수 집합 $\mathbb{R}$, 복소수 집합 $\mathbb{C}$는 체의 조건을 모두 만족하지만, 정수 집합 $\mathbb{Z}$는 곱셈에 대한 역원이 존재하지 않으므로 체가 아니다.

[예4-2]를 이용해 집합 $A$가 체임을 확인해 보자.

집합 $A=\{x \mid x=m+n\sqrt{2},\ m, n$은 유리수$\}$에 대하여

① 덧셈의 교환법칙, 결합법칙을 만족하고 항등원, 역원이 존재한다.

② 곱셈의 교환법칙, 결합법칙을 만족하고 항등원, 역원이 존재한다.

③ 덧셈과 곱셈에 관한 분배법칙을 만족한다.

그러므로 집합 $A$는 체이다.

### 2) 다항식

[정의4-11] $R$을 항등원 1을 가진 가환환이라 하고 $x$를 부정원이라고 할 때, 다음과 같은 꼴의 형식적인 합을 환 $R$위의 ($x$에 관한) 다항식이라고 한다.

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad (a_i \in R)$$

(단, 유한개를 제외한 모든 $i$ 에 대하여 $a_i=0$ 이다.)

여기서 $a_i$를 다항식 $f(x)$의 계수(coefficient)라 하고 또 $R$위의 ($x$에 관한) 다항식 전체의 집합을 $R[x]$로 나타낸다.

모든 $i \geq n$ 에 대하여 $a_i=0$인 다항식을

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

으로 나타내고 $a_0, a_1x, \cdots, a_nx^n$ 을 다항식 $f(x)$의 항이라 하며 $a_0$를 특히 상수항이라 한다. 또 위의 다항식 $f(x)$에서 $a_1=\cdots=a_n=0$일 때, 이 다항식을 상수다항식이라 하고 특히 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$인 경우에 이 다항식을 영 다항식이라고 한다.

[정리4-12] 환 $R$위의 다항식 전체의 집합 $R[x]$의 임의의 두 원소

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad , \quad g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

의 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots$$

$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + \cdots$

그러면 $R[x]$는 덧셈과 곱셈에 관하여 환을 이룬다. 환 $R[x]$를 부정원 $x$에 관한 다항식환 (polynomial ring)이라 한다.
특히 $R$이 가환환이면 $R[x]$도 가환환이다. $R$이 항등원 1을 가지면 상수 다항식 $f(x)=1$은 $R[x]$의 항등원이다. 또 $R$이 정역이면 $R[x]$도 정역이다.

[예4-9] 다항식환에는 $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$등이 있다.
특히 $\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$이다.

이제 교과서에서 다항식환을 어떻게 소개하고 있는지 살펴보자.

교과서에서는 다항식에 대해 다음과 같이 정의하고 있다. ([4] p.71)

> $8, -3x, 5xy$와 같이 몇 개의 수 또는 문자의 곱으로 이루어진 식을 단항식이라 하고, $8, -3x, 4x^2+5xy+3x+2y$ 는 모두 다항식이다. 다항식에서 특정한 문자에 대하여 생각할 때 각 항에서 그 문자가 곱해진 개수를 그 항의 차수라 하고, 각 항의 차수 중 가장 큰 것을 그 다항식의 차수라고 한다. 또 그 문자 이외의 부분을 그 항의 계수라고 하고 특정한 문자를 포함하지 않는 항을 상수항이라고 한다.

교과서에는 보기 문제를 통해 이를 확인하도록 한다.
[보기] $4x^2+5xy+3x+2y$를 문자에 대한 차수를 생각할 때, $5xy$는 2차이지만, 문자 $x$에 대해서만 생각하면 $5xy$는 1차이고 그 계수는 $5y$이다.
이 다항식은 $x$에 대하여 2차이며 상수항은 $2y$이다.

또한 다항식 집합의 연산에 대한 성질을 다음과 같이 말하고 있다.
([4] pp.72-73)

다항식의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀있고 다음과 같은 성질이 성립한다.

∗ 다항식의 덧셈에 대한 성질 ∗

| | |
|---|---|
| 다항식 A, B, C에 대하여 | |
| ① 닫혀있다 | A + B는 다항식이다. |
| ② 교환법칙 | A + B = B + A |
| ③ 결합법칙 | ( A + B ) + C = A + ( B + C ) |

∗ 다항식의 곱셈에 대한 성질 ∗

| | |
|---|---|
| 다항식 A, B, C에 대하여 | |
| ① 닫혀있다 | A · B는 다항식이다. |
| ② 교환법칙 | A · B = B · A |
| ③ 결합법칙 | ( A · B ) · C = A · ( B · C ) |
| ④ 분배법칙 | A·( B + C ) = A·B + A·C |

앞 절의 군의 분석에서 다항식의 집합은 덧셈에 대해 군이 됨을 알아보았다. 위와 같은 성질로부터 다항식의 집합은 덧셈에 대해 가환군이 되며, 곱셈에 대해 결합법칙이 성립하고 덧셈과 곱셈에 대해 분배법칙이 성립하므로 환이된다.

[정의4-13] $R$이 항등원 1을 가진 환일 때 $R$위의 다항식 $f(x)$의 차수(degree) 즉 $\deg f(x)$를 다음과 같이 정의한다.

(1) $f(x) \neq 0$ 인 경우

$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ , $a_n \neq 0$ 일 때 $\deg f(x) = n$

(2) $f(x) = 0$ (영 다항식) 일 때 $\deg f(x) = -\infty$

또, $\deg f(x) = n \geq 0$ 일 때 $f(x)$를 간단히 $n$차식이라고 한다.

[정리4-14] $R$이 정역일 때, $f(x)$ , $g(x) \in R[x]$ 이면 차수에 대해 다음이

성립한다.

(1) $\deg(f(x)+g(x)) = \max\{f(x), g(x)\}$

(2) $\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

[정리4-15] $R$이 정역이면 $R[x]$도 정역이다.

(증명) 앞에서 이미 $R[x]$가 항등원 1을 갖는 가환환임을 보였으므로 정역임을 보이기 위해 $R[x]$가 영인자를 갖지 않음을 보이면 충분하다.

$f(x), g(x) \in R[x]$는 0이 아닌 다항식이라 하자.

차수의 정의에 의해 $\deg f(x) \geq 0$ , $\deg g(x) \geq 0$ 을 만족하고 [정리4-14]에의해 $\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$이므로 $\deg(f(x)\cdot g(x)) \geq 0$이다. 그러므로 $f(x)\cdot g(x) \neq 0$ 이다. 따라서 $R[x]$는 정역이다.

[예4-10] 실계수 다항식환 $\mathbb{R}[x]$에서는 $(2x+1)(3x+2) = 6x^2+7x+2$ 으로 실수 집합 $\mathbb{R}$이 정역이므로 그 위의 다항식의 일차식과 일차식을 곱하면 이차식이 됨을 알 수 있다.

하지만 $Z_6[x]$에서는 $(2x+1)(3x+2) = 6x^2+7x+2 = x+2$ 으로 일차식과 일차식을 곱하여 이차식이 되지 않고 일차식이 된다. 왜냐하면 $Z_6[x]$가 정역이 아니므로 그 위의 다항식들은 [정리4-14]를 만족하지 못한다.

교과서에서는 $n$차 다항식과 $m$차 다항식을 곱하면 $n+m$차 다항식이 된다. 이것은 일반적인 다항식 환에서는 성립하지 않고 다항식 환이 정역일 때 가능하다. 고등학교 교과서에서 다루는 수 집합들은 모두 정역이므로 그들을 계수로 가지는 다항식 환들은 모두 정역이다. 따라서 위의 [정리4-14]를 적용할 수 있다.

[예4-11] $(3x+2)(x^2-2x+5)$를 계산하여라. ([2] pp.57- 58)

$$(3x+2)(x^2-2x+5) = 3x(x^2-2x+5)+2(x^2-2x+5) \qquad \text{(분배법칙)}$$

$$= 3x^3 - 6x^2 + 15x + 2x^2 - 4x + 10 \qquad \text{(분배법칙)}$$
$$= 3x^3 - 4x^2 + 11x + 10 \qquad \text{(동류항 계산)}$$

다항식의 곱셈은 위와 같이 분배법칙을 이용하여 전개할 수도 있지만, 9단계에서 배운 곱셈 공식을 이용하여 전개하면 편리하다.
이제 다항식 환에 관한 또 다른 성질들을 알아보자.

[정리4-16] $F$가 체이면 $F[x]$는 정역이다.

[정리4-15]에 의해 [정리4-16]은 성립한다. 그러나 $F[x]$가 체는 아니다. 그 이유는 $x$가 $F[x]$에서 가역원이 아니기 때문이다. 즉, $x \cdot F[x] = 1$을 만족하는 다항식 $f(x) \in F[x]$는 존재하지 않는다.

[정리4-17] $F$가 체인 다항식 $F[x]$환 에 대해
임의의 $f(x), g(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$

$$g(x) = f(x) \cdot q(x) + r(x)$$

인 다항식 $q(x), r(x) \in F[x]$ 가 존재한다.
( 단, $r(x) = 0$ 또는 $0 \leqq \deg r(x) < \deg f(x)$ )
여기서 $r(x) \neq 0$ 이면 $g(x)$는 $f(x)$로 나누어 떨어지지 않고, $r(x) = 0$ 이면 $g(x)$는 $f(x)$로 나누어 떨어진다고 말한다.

여기서 주의할 것은 체가 아닌 환 $R$위의 다항식환 $R[x]$에서는 [정리4-17]이 성립하지 않을 수 있다.
예를 들어 다항식 $x^2 + x + 1$, $2x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$에 대하여 [정리4-17]를 만족하는 $g(x)$와 $r(x)$가 $\mathbb{Z}[x]$내에 존재하지 않는다. 즉 $f(x)$의 최고차항의 계수가 가역원이 되어야 한다. 만약 $\mathbb{Z}[x]$에서 두 다항식들의 나눗셈이 성립하려면 나누는 다항식의 최고차 계수가 1, -1 ($\mathbb{Z}$의 가역원)일 때 가능하고, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$에서는 0을 제외한 모든 계수들이 가역원이므로 항상 나눗셈이 가능하

며 몫과 나머지가 유일하게 존재한다.

10-(가) 교과서에서는 [정리4-17]를 나머지 정리와 인수정리로 도입했다. ([4] pp.79-81)

$x$에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$라고 하면, $R$는 상수이고

$$f(x) = (x-a)Q(x)+R$$

가 성립한다. 이것은 $x$에 대한 항등식이므로 양변에 $x=a$를 대입하면

$$f(a)=(a-a)Q(a)+R$$

$$f(a)=0\cdot Q(a)+R$$

$$\therefore\ R=f(a)$$

따라서 다음과 같은 나머지 정리가 성립한다.

$x$에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라고 하면 $R$ = $f(a)$

교과서의 예를 통해 이를 확인하자.

[예4-12] 다항식 $x^2+3x-3$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라. ([3] p.85)

(1) $x+1$ (2) $x-1$ (3) $x+2$

[예4-13] $x$에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b\ (a\neq 0)$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$임을 보여라. ([4] p.79)

(증명) $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$라고 하면 $f(x)$ = $(ax+b)\cdot Q(x)$ + $R$ 라 할 수 있고, 이것은 $x$에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-\frac{b}{a}$를 대입하면 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ = $R$ 을 만족한다.

따라서 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

나머지정리에 의하여 $f(a)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $x-a$로 나누어 떨어지고, 이 역도 성립함을 알 수 있다. 따라서 다음과 같은 인수정리를 얻는다.

$x$에 대한 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어 떨어지기 위한 필요 충분 조건은 $f(a)=0$이다.

나머지정리나 인수정리에 의해 다항식 $f(x)=(x-a)\cdot Q(x)$을 만족하면 $f(x)$는 인수분해 가능하다.

[정의4-18] 체 $F$위의 다항식환 $F[x]$에서 $f(x), g(x) \in F[x]$ 에 대하여

$$g(x) = f(x) \cdot h(x)$$

인 다항식 $h(x) \in F[x]$가 존재할 때, $f(x)$를 $g(x)$의 약수 또는 인수라 하고, $g(x)$를 $f(x)$의 배수라고 한다. 또 이 사실을 $f(x) \mid g(x)$로 나타낸다.

약수와 배수의 의미는 이미 초등학교에서부터 배워왔다. $a$가 자연수일 때 $a$를 $b$로 나누어 나머지가 $0$이면, $a$는 $b$로 나누어 떨어지고 이때 $b$를 $a$의 약수라 한다. 그리고 이 때 $a=b\cdot q$ ($q$는 자연수)로 나타내고 $a$를 $b$의 배수라 한다. 특히 1보다 큰 자연수 중에서 자기 자신과 1이외의 약수를 가지지 않는 수를 소수라 하고 수를 소수들의 곱으로 표현하는 소인수분해에 대해 배웠다. 이처럼 중학교 때까지 다뤄왔던 약수와 배수는 자연수 집합에서만 취급하였다. 그러나 10-(가)에서는 약수와 배수의 성질을 다항식 집합에서까지 다루고 있다.

다음 내용을 살펴보면 그 구조가 자연수 집합에서의 성질과 같음을 알 수 있다.([3] p.93)

정수에서와 같이 다항식 $A$가 다항식 $B(\neq 0)$로 나누어 떨어지면, 즉

$$A = B \cdot Q \quad (Q\text{는 다항식})$$

일 때, $B$를 의 $A$약수, $A$를 $B$의 배수라 한다. 이때 $A$는 $Q$로도 나누어 떨어지므로 $Q$는 $A$의 약수이고, $A$는 $Q$의 배수이기도 하다.

보기문제를 통해 이를 확인한다.

[보기] $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$이므로 $x+2$와 $x-3$은 $x^2-x-6$의 약수이고, $x^2-x-6$은 $x+2$와 $x-3$의 배수이다.

<지도방안> ([8])

- 다항식의 집합도 덧셈, 뺄셈, 곱셈 등에 관해 닫혀있는 대수적 구조임을 알게 한다.
- 다항식을 전개할 때, 그 연산법칙에 근거하고 있음을 알게 한다.
- 나머지정리의 결과만을 형식적으로 고착시키지 말고 항등식의 성질을 이용하여 얻어진 과정을 이해하게 하여 다른 상황에서도 활용할 수 있도록 지도에 유의한다.
- 다항식의 약수와 배수의 지도 시, 수의 약수와 배수를 구하는 것에서 확장하여 다항식의 약수와 배수를 쉽게 이해할 수 있도록 한다. 정수를 계수로 갖는 다항식은 정수와 유사한 성질을 가짐을 이해시킨다.

### 3) 유리식

[정리4-16]에 의해 $F$는 체이지만 $F[x]$는 정역이지 체가 되지는 않는다. 하지만 $F[x]$를 확대하여 분수체 $F(x)$를 구성할 수 있다. 이것은 정수를 확장하여 유리수를 만드는 방법과 같이 생각해 볼 수 있다.

정수로부터 실수를 만드는 과정 중에서 한 가지 중요한 단계는 정수로부터 유리수를 만드는 과정이다. 이와 같이 정수환 $\mathbb{Z}$로부터 유리수체 $\mathbb{Q}$를 만드는 과정은 정수환 $\mathbb{Z}$가 정역이라는 사실에 근거한다.

정역 $D$에서 '$a \neq 0$, $b \neq 0$ $\Rightarrow$ $ab \neq 0$' 이 성립한다는 특성을 이용하면, 다음과 같은 새로운 체 $F$를 정의 할 수 있다.

[정의4-19] 정역 $D$에 대하여 다음과 같이 정의된 체

$$F = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in D, \quad b \neq 0 \}$$

를 정역 $D$의 분수체(field of fractions) 또는 상체(field of quotients)라 한다.

[보기] 정의에 의하여 유리수체 $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$는 정수환 $\mathbb{Z}$의 분수체이다. 그리고 $\mathbb{Q}$의 원소 $\frac{a}{b}(b \neq 0)$를 유리수라 한다.

[정의4-20] 정역 $D$ 위의 다항식환 $D[x]$는 정역이다. 정역 $D[x]$의 분수체를 $D$위의 ($x$에 관한) 유리식체라 하고 이 체를 $D(x)$로 나타내며, 또 $D(x)$의 각 원소를 ($x$에 관한) 유리식(rational expression)이라고 한다.

$$D(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in D[x],\ g(x) \neq 0 \right\}$$

특히, 체 F 위의 분수체 $F(x)$는 다음과 같다.

$$F(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in F[x],\ g(x) \neq 0 \right\}$$

이처럼 유리수체와 유리식체가 같은 구조적 특징을 가지므로 유리수의 계산과 유리식의 계산은 근본적으로 같다.

이제 교과서에서 유리식을 어떻게 소개하고 있는지 살펴보자. ([2] p.84)

두 정수 $a, b$에 대하여 $\frac{a}{b}(b \neq 0)$ 꼴로 나타내어진 수를 유리수라고 하듯이, 두 다항식 $A, B$에 대하여 $\frac{A}{B}(B \neq 0)$ 꼴로 나타내어진 식을 유리식이라 한다. 특히 분모에 상수가 아닌 문자를 포함한 유리식을 분수식이라고

한다.

이를테면 $\frac{1000}{1-0.1x}$, $\frac{x+1}{x}$, $\frac{x-3}{2}$ 은 모두 유리식이다.

이 중에서 $\frac{1000}{1-0.1x}$, $\frac{x+1}{x}$ 은 분수식이고, $\frac{x-3}{2}$ 은 다항식이다.

유리식에서 문자는 수를 대신하므로 유리수에서와 같이 유리식은 다음과 같은 성질을 가진다. ([2] p.85)

**✱유리식의 성질✱**

| |
|---|
| 다항식 $A$, $B$ $C$ ( $B\neq0$ , $C\neq0$)에 대하여 |
| ① $\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$   ② $\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$ |

또한 유리식도 유리수와 마찬가질 통분과 약분을 할 수 있다.
분수식의 분자, 분모를 그들의 공통인수로 나누어 분수식을 약분하면 분자, 분모가 서로소인 분수식을 얻는다.

분수식의 덧셈, 뺄셈은 분수의 덧셈, 뺄셈과 같은 방법으로 하고 분모가 다른 경우는 통분하여 계산한다. ([2] p.86)

**✱분수식의 덧셈, 뺄셈✱**

| |
|---|
| 다항식 $A$, $B$, $C$ ( $C\neq0$) 에 대하여 |
| ① $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$   ② $\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$ |

분수식의 곱셈, 나눗셈도 문자는 수를 대신하므로 분수의 곱셈, 나눗셈과 마찬가지 방법으로 계산한다. ([2] p.87)

＊분수식의 곱셈, 나눗셈＊

| |
|---|
| 다항식 $A, B, C, D$ ($B \neq 0$, $D \neq 0$)에 대하여 |
| ① $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$ |
| ② $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$ $(C \neq 0)$ |

<지도방안> ([8])

- 유리수 전체집합과 유리식 전체의 대수적 구조가 같기 때문에 중학교에서 배운 유리수의 개념을 바탕으로 유리식의 의미를 이해하고 그 기본 성질을 알게 한다.

## 4. 대수 영역의 지도를 위한 방안

이제까지 10단계 학생들에서 대수적 구조를 지도하고 이해시키기 위해 10-(가) 교과서에서 나타난 군, 환, 정역, 체에 대한 대수적 구조를 교과서의 내용과 예제를 통해 살펴보았다. 교과서에 나타난 대수적 구조를 분석하면서 자연스럽게 알 수 있는 것은 학생들이 교과의 내용을 학습함에 있어 군, 환, 정역, 체 등 대수적 구조에 대한 용어와 일반적인 이론을 학습하지는 않지만, 실제로 대수적 구조를 배우고 있다는 것이다.

수학 교과과정 중 대수영역에서 다루어지고 있는 내용은 대수적 구조에 대한 이론을 바탕으로 구성되어진 것으로 대수적 구조를 떼어놓고 생각하는 것은 상상 할 수 없는 일이다. 이처럼 대수적 구조에 대한 이론은 고등학교 수학교과의 내용과 밀접하며 강한 연계성을 가지고 있다.

하지만 교과의 내용과 대수적 구조가 무관한 것처럼 느껴진다. 이러한 가장 큰 이유는 실제 교육현장에서 이루어지고 있는 교육환경 때문일 것이다. 대학수학능력시험을 치르는 체제로 대학입시제도가 변하면서 수학교육도 많은 변화를 가져온 것은 사실이며, 이러한 여건들이 대수영역의 여러 가지 성질

과 구조를 충분히 지도하기에는 쉽지 않은 것이 현실이다.

「참고문헌[15]의 Ⅳ. 변수 개념 지도의 실태 분석과, 참고문헌[18 pp.105-125]의 3.대수적 사고요소의 학습실태 파악」에서 살펴본 문제점들을 해결해야 한다는 생각을 바탕으로 교육과정 해설서에 따라 대수적 구조의 지도방안과 지도상의 유의점을 제시한다.

1) 지도방안

① 변수를 나타내는 기호가 다르면 학생들은 그 대상까지도 다르다고 생각하기도 하고, 변수를 변하는 '대상'이 아닌 변하는 '수'로 인식하는 경향이 있어 변수에 수 이외의 것을 대입할 때 곤란함을 겪는 경우가 생긴다. 대수에서 핵심적인 변수의 개념은 대수에서 추상적인 방법으로 사고하는 학습을 위한 기본이 되므로 변수의 개념을 확실히 지도해야한다.([17])

학교에서 배우는 변수의 정의는 함수와 함께 다루어진다. 그러나 변수와 관련된 많은 실제 지도는 방정식의 풀이에서 하나의 수를 대신하는 미지수의 개념으로 다루어지고 있으므로 이 과정에서 변수의 동적인 측면과 다양한 수를 대표 할 수 있다는 측면을 강조한다.

② 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수, 다항식 전체의 집합을 덧셈과 곱셈의 연산에 대하여 닫혀있고, 모두 연산법칙(교환법칙, 결합법칙, 배분법칙)이 성립하므로 이 집합들이 덧셈과 곱셈에 관한 구조가 같다는 것을 알 수 있다. 또 유리수, 실수, 복소수의 집합은 서로 같은 체의 대수적 구조를 갖는다. 이처럼 같은 대수적 구조를 가지는 수 체계를 연계 및 지도하여 학생들이 개념을 일반화하고 추상화하는 것을 도와야 한다.

③ 연산에 대하여 연산이 성립하는 수 집합과 성립하지 않는 수 집합을 비교 설명하여 다른 수 집합이 주어졌을 때, 연산의 성립여부를 비교하여 스스로 판단할 수 있게 지도한다. 나아가 새로운 집합이 주어지면 기존의 알고 있는 집합과 비교하여 새로운 집합의 대수적 구조를 파악할 수 있게 하여야 한다.

④ 항등원과 역원이 방정식의 풀이에 활용되는 중요성을 이해시켜야 한다.

⑤ 수를 확장함에 있어 수를 확장하는 근거를 제시한다.

예를 들면, 실수에서 복소수로 확장하는 경우, 실계수 방정식이 실수범위에서 근이 존재하지 않고 허근이 존재함을 이해시켜 복소수로의 확장의 근거를 제시하여 수 체계 확장의 필요성을 인식시킨다.

2) 지도상의 유의점

① 학생들이 수학적 개념의 상호 관련성을 인식할 수 있도록 지도하고, 기본 개념과 원리를 충실히 이해시키기 위해 기본개념의 이해를 도울 수 있는 구체적인 예를 많이 제시한다.

② 대수적 구조의 기본정리 이론을 단계적으로 이해시켜 수학 외 다른 분야와 연계 시키고 상호간의 관계를 이해할 수 있게 한다.

③ 생활주변이나 다른 교과에서 접할 수 있는 대수학과 관련된 문제를 통해 학생 스스로 수학에 대한 흥미와 관심을 가지게 하고, 수학의 필요성을 느낄 수 있게 한다.

④ 수 체계 지도 시 복소수 체계까지 확장하여 대수적 구조를 이해시키도록 하되, 고등학교의 수학교육의 목표에 벗어나지 않도록 한다.

# Ⅴ. 결 론

본 논문은 3차 교육과정 때부터 강조되었던 수학적 구조에 대해 그 본래의 의미를 되새겨 보고자, 대학에서의 대수학과 고등학교 1학년 과정인 10단계에서 나타나는 대수적 구조를 비교하여 살펴보았다. 그리하여 10단계에서는

- 중학교에서 배운 수집합을 실수에서 복소수까지 확장하고
- 실수와 복소수 집합은 체의 구조를 가지고 있으며
- 다항식 집합은 다항식환이라는 대수적 구조를 이루고, 또 이를 분수체로 확장시키는 대수적 구조를 이루고 있음을 알아보았다.

이처럼 고등학교에서 배우는 수학의 내용은 대수적 구조와 많은 연계성을 가지고 있다. 하지만 대다수의 학생들은 교과서의 내용을 배울 때 정의를 바탕으로 하여 개념을 파악하기보다는, 대수의 여러 규칙과 절차를 암기하는데 의존하고 있으며 수학은 규칙이 기본이고 수학 학습은 암기라고 생각하고 있다. 하지만 7차 교육과정에서 중요시 하는 문제제기와 문제 해결력의 신장을 위해서는 기본 개념과 원리를 이해하고 그 위에서 문제를 해결하는 능력을 키우는 것이 필수적으로 요구된다. 만약, 기본 개념이나 원리의 이해 없이 단순히 암기 하는 방법으로 문제를 해결하는 것만을 배운다면 특정한 경우의 문제는 해결할 수 있을지 모르지만, 새로운 문제에 부딪혔을 때 이전의 문제해결 경험을 바탕으로 하여 그 문제를 분석하고 구조를 파악하는 등의 일은 거의 불가능 할 것이다.

이를 조금이나마 해결하고자 본 논문의 Ⅳ장에서 제시한 대수 영역의 지도 방안을 바탕으로 하여 대수 영역을 지도함에 있어서 몇 가지 구체적 제안을 하고자 한다.

첫째, 학교에서는 대수영역을 지도함에 있어 수학의 기본적인 체계를 이해하

고 개념과 원리에 대한 좀 더 구체적인 지도가 필요하다. 수학적인 개념에 있어서 명확한 개념의 이해 없이는 연계성 있는 학습이 될 수 없으므로, 암기위주의 주입식 계산 교육에서 탈피하여 이론적 배경에 쉽게 접근할 수 있게 하기 위하여 무엇보다도 기본 개념과 원리를 철저히 이해하도록 하는데 중점을 두고 학생들을 지도해야 한다.

둘째, 기본 개념과 원리를 충실히 이해시키기 위해서는 기본개념의 이해를 도울 수 있는 구체적인 예를 많이 제시하고, 실생활과 관련된 문제들을 많이 다룸으로써 우리의 생활 속에 수학이 있다는 것을 학생들에게 인식시키고 이러한 문제를 능동적으로 해결하도록 지도하는 것이 중요하다.

셋째, 대수교육과정을 '행하는 것(doing)'에서 벗어나 '사고하는 것(thinking)'에 주안점을 두고 지도한다. 그 이유는 현재 컴퓨터나 계산기가 지루한 계산이나 기호조작과정, 그래픽 작업 등을 대신해 주므로 대수적으로 사고하는데 좀 더 많은 시간을 투자할 수 있기 때문이다. ([16])

Wagner와 Parke가 이야기 하고 있듯이 과거의 알고리즘적인 대수에서 앞으로의 문제해결 대수로의 과정을 위해서 교과서 저자나 교사의 계속적인 노력이 있어야 할 것이다. ([24])

넷째, 교수·학습 면에서 볼 때 단원 학습에 들어가기 전에 수학적 구조를 지도하면 단원의 전반적인 구조 파악에 도움을 줄 수 있다. 그리고 나서 실제 수업지도 시, 하나의 새로운 정의가 나올 때 학생이 이미 습득한 구조에 적용해 볼 수 있도록 지도한다.

만약 습득되어 있어야 할 지식이 완전하지 않는 학생이라면 보충학습을 통해 학습하도록 한 후 새로운 정의를 적용하도록 하고, 능력이 있는 학생들에게는 알고 있는 수학적 구조에 맞추어 스스로 무엇인가를 해보는 발전적 노력을 시도한다면 학생들은 더욱 흥미를 가지고 사고력이나 문제 해결력 그리고 사고의 유연성, 무엇보다도 자신감 같은 수학적 힘을 키울 수 있을 것이다.

본 연구에서 제시하고 있는 고등학교 수학의 대수 영역 지도 방향이 실제 대수 교육을 지도하는데 도움이 되길 기대한다. 또한 후속 연구 논문을 통해 본 연구에서 제시한 지도방향보다 더욱 효과적이고 구체화 된 지도방안으로 학교 수학의 대수영역 지도개선에 영향을 미치기를 기대한다.

## 참고 문헌

[1] 김응태, 박승안 (2003). 현대대수학. 서울 : 경문사

[2] 최봉대 외 6인 (2002). 고등학교 수학 10-(가). 서울 : (주)중앙교육진흥연구소

[3] 박윤범 외 5인 (2005). 고등학교 수학 10-(가). 서울 : 대한교과서(주)

[4] 임재훈 외 7인 (2002). 고등학교 수학 10-(가). 서울 : (주)두산

[5] 우정호 (2003). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울 : 서울대학교 출판부

[6] 우정호 (2003). 학교수학의 교육적 기초. 서울 : 서울대학교 출판부

[7] 교육부 (1998). 수학과 교육과정[별책8]. 서울 : 교육부

[8] 교육부 (2001). 고등학교 교육 과정 해설. 서울 : 대한 교과서(주)

[9] 공정택 (1998). 수학적 구조 지도의 재음미. 서울대학교 대학원 석사학위논문

[10] 김승원 (1999). 대수적 구조의 분석. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문

[11] 박정훈 (2000). 고등학교 수학교과서에 적용된 대수적 개념과 구조에 관한 연구 및 지도방안. 대진대학교 교육대학원 석사학위논문

[12] 신은정 (2002). 고등학교 수학 교과의 대수적 구조 지도연구. 홍익대학교 교육대학원 석사학위논문

[13] 오지은 (1997). 고교 수학에 있어서 대수학 개념 도입에 관한 연구. 한양대학교 교육대학원 석사학위논문

[14] 최미정 (2000). 공통수학에 나타나는 대수적 구조연구. 충남대학교 교육대학원 석사학위논문

[15] 김남희 (1992). 변수 개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사 학위논문

[16] 김남희 (1994). 대수적 사고에 관한 고찰:산술과의 관련성과 변수개념. 서울대학교 대학원 박사학위논문

[17] 김성준 (2002). 수학 학습에서 이행에 관한 고찰(산술과 대수를 중심으

로). 서울대학교 대학원 박사학위논문

[18] 김성준 (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위논문

[19] 김선희. 이종희 (2003). 기호학 관점에서의 문자와 식 분석. 대한수학교육학회지 <학교수학> 제5권 제1호

[20] 현종익 (1993). 수학과 학습지도연구. 서울 : 경문사

[21] 황혜정 외 5인 (2004). 수학교육학신론. 서울 : 문음사

[22] 김양희 (2005). 수학교육론 특강. 서울 : 10101

[23] 구광조외 공역. NCTM에서 발간한 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. 경문사

[24] S. Wagner, & S. Parke (1993), Advancing Algebra, Research Ideas for the Classroom/High School Mathematics, NCTM