creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[UCI]I804:24011-200000266649

2018년 2월

석사학위논문

섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격

조선대학교 대학원

항공우주공학과

오 승 렬

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격

Real-time Spacecraft Intercept Under External Disturbances

2018년 2월 23일

조선대학교 대학원

항공우주공학과

오 승 렬

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격

지도교수 이 현 재

이 논문을 공학석사학위 신청 논문으로 제출함

2017년 10월

조선대학교 대학원

항공우주공학과

오 승 렬

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

오승렬의 석사학위논문을 인준함

위원장 조선대학교 교수 김 태 규 (인)

위 원 조선대학교 교수 이 현 재 (인)

위 원 조선대학교 교수 이 창 열 (인)

2017년 11월

조선대학교 대학원

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

목차

I. 서론 1

II. 본론 3

1.상대 운동방정식 3

1) 좌표계 정의 3

2) 두 물체의 상대 운동방정식 4

2.추력기를 고려한 궤도 운동방정식 5

1) 질량유량 6

2) 비추력 6

3) 추진시간에 의한 오차 8

3.편평도에 의한 섭동 8

1) 중력포텐셜 9

2) 섭동을 고려한 궤도 운동방정식 11

3) 섭동에 의한 오차 11

4.최적화 문제 14

1) 성능지표 14

2) 최적 에너지 요격조건 16

3) 최적 에너지 요격조건과 호만전이 19

5.유전 알고리즘을 이용한 최적화 20

1) 초기값 설정 문제 20

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

2) 유전자 알고리즘 21
3) 시뮬레이션 27
6. 섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격 28
1) 실시간 요격 알고리즘 연구 28
2) 수치 시뮬레이션 30
III. 결론 **42**
[참고문헌] **43**
[부록] **46**

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

ABSTRACT

Real-time Spacecraft Intercept Under External Disturbances

Snyoll Oghim
Advisor : Prof. Henzeh Leeghim, Ph.D.
Department of Aerospace Engineering,
Graduate School of Chosun University

This paper deals with spacecraft interception problem considering perturbation. The Earth is not perfectly spherical, so it has gravity imbalance. Therefore, spacecraft rotating around the earth will under perturbation due to gravity imbalance. The effect of perturbation is included in the equation of motion using 2nd zonal harmonics, J_2.

Interceptor require active control to intercept the target in consideration of perturbation. In this paper, active control using a thruster is assumed. Likewise, the thrust equation are included in the spacecraft equation of motion to account for thruster.

In order to intercept the target using fixed thrust, the direction of thrust is required. Optimization technique can be used to determine the direction of thrust. In this paper, the lagrange coefficients and universal variable are used to construct the optimization problem in order to deal with not only coplanar circular orbit, but also non-coplanar elliptic orbit.

The optimization problem is solved by numerical analysis. However the spacecraft intercept problem has strong nonlinear system, so it includes many local solutions. Therefore, it is important to guess the initial value. In this paper, a genetic algorithm is used to guess the initial value.

The optimization problem finds the optimal solution based on impulse. This mean

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

that there is no change in position during the orbit transfer of the interceptor. Therefore, if this optimal solution is used for the equation of montion including perturbation and thrust, the interceptor can not intercept the target at the final position.

In order to solve the position error in the final position, this paper proposes real-time guidance. the optimal solution as the propulsion direction will be used, but calculate the optimal solution at every moment and continue to change the propulsion direction. In this paper, the simulation is carried out considering various situations in order to verify this method.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

I. 서론

우주 임무에 있어서 궤도전이(Orbit transfer)는 가장 기본이 되고 임무에 직접적인 영향을 줄 수 있는 중요한 문제이다. 그중에서도 특정한 대상을 목표로 하는 랑데부(Rendezvous)나 요격(Intercept), 혹은 행성 간 이동이 임무에 포함될 경우에는 궤도전이 문제가 핵심이 된다. 이러한 중요도 때문에 궤도전이 문제는 지난 수십 년 동안 많은 연구들이 진행되어 왔으며, 주로 특정한 성능지표(Performance index)에 대해 최적궤도를 찾는 최적화 문제로써 다루어져 왔다[1].

주어진 임무에 대한 최적궤도를 찾는 문제는 시간이 제한되어 있는지(Fixed-time) 혹은 제한되어 있지 않은지에 따라 구분할 수 있다. 시간이 제한되어 있을 경우에는 두 개의 위치 정보와 비행시간(Time-of-flight)이 주어져 있을 때를 가정하여 해당 위치에서의 속도 정보를 찾는 문제로써 램버트 문제(Lambert's problem)가 대표적이다[2]. 이 외에도 여러 번의 순간추력(Multi-impulse)을 통해 우주비행체를 제어하거나[3, 4], 여러 번의 공전(Multi-revolution)을 고려하는[5, 6] 등의 연구가 있다. 특히, Lawden은 프라이머 벡터(Primer vector)를 도입하여 고정된 시간에서 여러 번의 순간추력을 이용하는 궤도전이 문제의 필요조건을 유도하였으며[7], 이는 훗날 아폴로의 랑데부 문제에 적용되기도 하였다. 시간이 제한되어 있지 않을 경우에는 최적해를 얻기 위한 최적의 비행시간을 추가로 찾아야만 한다. 이에관한 연구로는 공면(Coplanar)의 원 궤도 간 궤도전이를 다루는 호만전이(Hohmann transfer)가 대표적이다.

최적화 문제는 최적화 하고자 하는 대상에 따라 구분할 수도 있다. 우주비행체의 궤도전이 문제에서 가장 많이 다루어 지는 것은 연료이다[8, 9]. 연료의 경우 우주비행체의 수명과 직접적으로 연관이 되어있으며, 임무 기간, 개발 비용 등과도 연관되어 있기 때문에 매우 중요한 요소이다. 뿐만 아니라 연료를 사용하지 않거나 조금 더 소모하더라도 빠른 시간으로 임무를 수행해야하는 경우에는 시간을 최적화 하는 문제로 다루어진다[10, 11]. 이 외에도 궤도전이 문제는 전역 탐색 알고리즘을 이용하거나[12, 13], 섭동을 고려하는 등[14] 다양한 분야에서 다양한 접근으로 연구가 진행중이다.

본 논문에서는 섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격 문제를 다룬다. 실제 임무에서 우주비행체는 지구의 중력 불균형의 영향으로 궤도 섭동을 일으킨다. 이러한 섭동은 태양에 대하여 항상 일정한 각도를 유지하는 태양동기궤도(Sun-synchronous orbit)를 위해 이용되기도 하지만 태양동기궤도 이외의 대부분의 경우에서는 섭동으로 인한 궤도 변화에 대응하기 위한 방안이 요구된다. 그리고 이러한 섭동에 대응하기 위해서는 적절한 속도변화가 필요하다. 여기서 속도변화는 순간적으로 일어날

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

수 없으며, 속도변화에 따른 위치변화가 동반되고, 결국 궤도 섭동과 속도변화에 따른 위치변화는 우주비행체가 목적지에 도달했을 때 오차가 발생하는 원인이 된다.

본 논문에서는 이러한 위치오차를 보정하기 위해 실시간 유도 방법을 제안하고 있다. 매 순간 최적해를 찾고 얻어진 최적해를 기반으로 우주비행체를 제어하여 최종적으로 타겟을 요격하는 것이다. 이때, 실시간성을 최대한 보장하기 위해 최적해를 찾기위한 초기값은 이전 최적해를 사용한다. 그리고 이전 최적해를 알 수 없는 최초의 초기값의 경우에는 초기값을 찾기 위한 방안으로 전역 탐색 알고리즘 중 하나인 유전 알고리즘을 사용한다.

본 논문에서는 제안하는 방법을 검증하기 위해 섭동과 고정추력을 고려한 운동방정식을 사용하며, 공면의 원 궤도 간 궤도전이 문제부터 비공면(Non-coplanar)의 타원궤도 간 궤도전이 문제까지 다양한 상황에 적용하여 그 유효성을 입증하고자 한다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

II. 본론

1. 상대 운동방정식

우주비행체의 운동방정식은 뉴턴역학을 따르는 2체 문제(Two-body problem)을 기반으로 하며, 본 장에서는 해당 운동방정식에 대한 유도과정을 간략하게 살펴본다.

1) 좌표계 정의

우주비행체의 운동방정식에서 사용하는 대표적인 좌표계는 지구를 중심으로 하는 관성좌표계(Earth Centered Inertial Frame, ECI)이다. Fig. 1은 지구 중심 관성좌표계를 보여준다. 이 관성좌표계는 지구의 중심을 기준으로 춘분점(Vernal equinox) 방향을 x축으로 정의하며, z축은 지구의 자전축이다. 그리고 x축과 z축을 직교하는 축을 y축으로 정의한다.

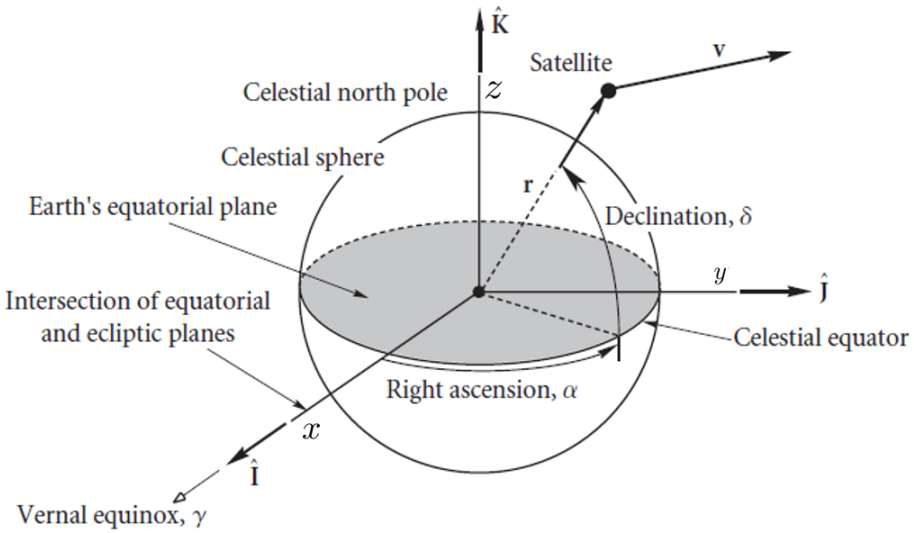


Fig. 1 Earth centered inertial frame

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

2) 두 물체의 상대 운동방정식

Fig. 2는 지구 중심 관성좌표계에서 두 물체 m_1과 m_2를 보여주며, 위치 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{R}_1 = x_1\hat{\mathbf{I}} + y_1\hat{\mathbf{J}} + z_1\hat{\mathbf{K}} \tag{1}$$

$$\mathbf{R}_2 = x_2\hat{\mathbf{I}} + y_2\hat{\mathbf{J}} + z_2\hat{\mathbf{K}} \tag{2}$$

$\mathbf{r}$을 m_1에 대한 m_2의 위치 벡터라고 하면,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \tag{3}$$

m_1은 m_2의 방향으로 중력이 작용하며, 이 힘을 만유인력이라 한다. 뉴턴의 만유인력의 법칙으로부터 두 물체 사이의 힘을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \tag{4}$$

여기서 G는 만유인력 상수를, r은 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$로 정의되는 $\mathbf{r}$의 크기를 나타내며, $\hat{\mathbf{u}}_r$은 m_1에서 m_2로의 방향을 나타내는 단위벡터이다. 뉴턴의 가속도 법칙을 m_1에

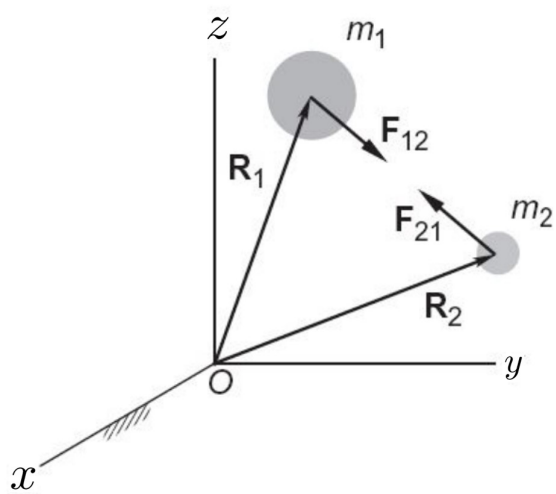


Fig. 2 Two masses located in an intertial frame

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

적용하면 $\mathbf{F}_{12} = m_1\ddot{\mathbf{R}}_1$이며, Eq. (4)와 함께 사용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \tag{5}$$

이와 유사하게, 뉴턴의 작용-반작용 법칙으로부터 m_2에 대해 표현하면,

$$m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \tag{6}$$

상대 가속도 벡터를 얻기 위해 Eq. (3)을 시간에 대해 두 번 미분하면 다음과 같다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 \tag{7}$$

Eq. (4)와 Eq. (5)를 Eq. (7)에 대입하고 정리하면,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{8}$$

여기서 μ는 $G(m_1 + m2)$로 정의되는 중력 매개변수(Gravitational parameter)를 나타내며, 우주비행체에 대한 지구의 중력 매개변수는 398,600 $\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$이다[15]. 최종적으로, 두 물체의 우주비행체의 궤도 운동방정식은 2차 미분방정식의 형태로 나타낼 수 있다. 이 운동방정식은 두 개의 벡터를 가지고 있으며 각각 3개의 스칼라 성분을 갖는다. 따라서, Eq. (8)은 6개의 성분으로 구성된다.

2. 추력기를 고려한 궤도 운동방정식

궤도전이를 위해서는 전이궤도를 만들기 위한 속도변화 $\Delta\mathbf{v}$가 요구된다. 호만전이나 램버트 문제와 같이 궤도전이를 위한 속도변화를 찾는 대부분의 방법들은 이러한 속도변화를 순간추력(Impulse)로 가정한다. 즉, 궤도전이를 위한 속도변화가 순간적으로 발생하고 그동안의 위치벡터의 변화가 없다고 가정하는 것이다. 그러나 실제 임무에서 우주비행체의 기동을 위한 속도변화는 상당한 시간을 요구하며, 그 시간 동안 우주비행체의 위치는 계속 변화한다. 따라서 이러한 점들이 우주비행체의 운동방정식에 포함되어야만 한다.

본 논문에서는 섭동으로 인한 궤도변화에 대응하기 위해 고정추력을 갖는 추력기를 사용하며, 순간추력이 아닌 우주비행체의 운동방정식을 사용한다. 이러한 우주비행체의 운동방정식을 유도하기

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Eq. (8)에 외력을 포함 시키면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{9}$$

여기서 m은 우주비행체의 질량이다. 만약 이 외력이 속도변화 벡터인 $\Delta\mathbf{v}$ 방향으로의 추력 T 라고 한다면, $\mathbf{F} = \mathrm{T}\Delta\mathbf{v}/\Delta v$이며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathrm{T}}{m}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta v} \tag{10}$$

여기서 Δv는 $\Delta\mathbf{v}$의 크기를 나타낸다.

1) 질량유량

우주비행체가 추진한다는 것은 로켓의 연소물이 노즐을 통해 우주로 분사되는 것을 의미한다. 이때, 연소물이 우주로 분사되면서 우주비행체의 질량이 감소하게 되는데 이러한 질량 감소는 질량유량(Mass flow rate)이라는 이름으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m} \tag{11}$$

여기서 $\dot{m}$을 상수라고 가정하다면, 우주비행체의 질량유량은 다음과 같이 시간에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t \tag{12}$$

여기서 m_0는 추진하기 전의 우주비행체의 초기 질량을 의미한다.

2) 비추력

비추력(Specific impulse) I_{sp}는 로켓의 성능을 나타내는 중요한 매개변수이며, 해수면을 기준으로 추진제 1 kg이 1초 동안 소비될 때 발생하는 추력으로 정의된다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$I_{sp} = \frac{\mathrm{T}}{\dot{m}g_0} \tag{13}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

여기서 g_0는 표준 해수면에서의 중력가속도이다. 이 식을 추력과 질량 유량에 대해 다시 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{T} = I_{sp}\dot{m}g_0 \tag{14}$$

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{T}}{I_{sp}g_0} \tag{15}$$

비추력은 로켓의 성능을 나타내는 매개변수지만 비추력이 높다고 로켓의 성능이 뛰어난 것은 아니다. 화학 로켓의 비추력은 일반적으로 고체연료 일 때 200-300초, 액체연료일 때 250-450초를 갖는다. 이온 추진 시스템은 10^4초 이상의 비추력을 갖지만 질량 유량이 매우 낮기 때문에 화학 로켓보다 훨씬 작은 추력을 생성한다. Fig. 3는 질량 유량과 추력, 그리고 비추력 간의 관계를 보여주는데, 추력이 증가할수록 비추력이 같이 증가하지만 질량 유량이 증가할수록 비추력이 급격히 감소하는 것을 볼 수 있다. 실제로 아폴로 우주선에서 사용된 새턴 5 로켓의 제 1단은 액체산소/케러신을 사용하였는데 비추력과 추력이 각각 260초와 34.0MN이였으며, 제 2단과 3단의 추력은 각각 5.0 MN과 1.0 MN, 비추력은 420초인 액체산소/액체수소를 사용했다.

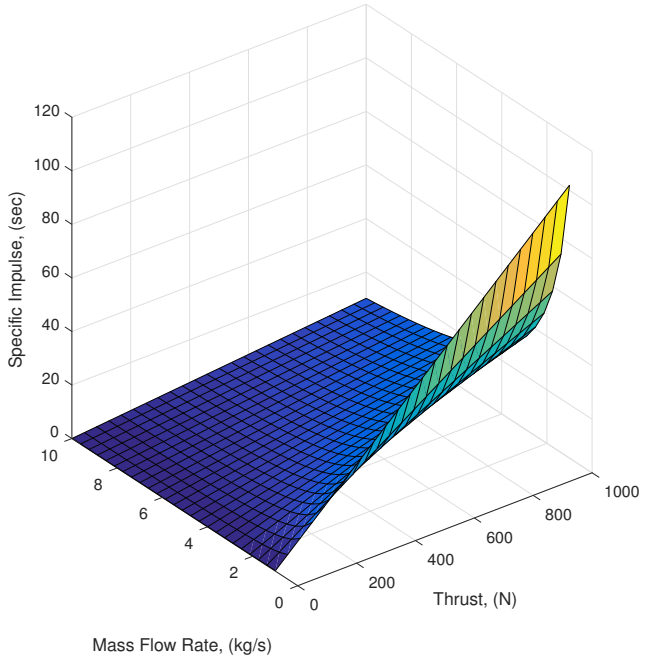


Fig. 3 Mass flow rate vs. thrust vs. specific impulse

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Eq. (14)과 Eq. (15)을 우주비행체의 궤도 운동방정식인 Eq. (8)에 대입하여 정리하면 최종적으로 추력을 고려한 궤도 운동방정식을 얻을 수 있다. 그리고 이를 미분방정식의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ m \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \\ \ddot{r}_z \\ \dot{m} \end{bmatrix} \quad f(t, \boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ -\mu \frac{X_1}{r^3} + \frac{\mathrm{T}}{m} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta v} \\ -\mu \frac{X_2}{r^3} + \frac{\mathrm{T}}{m} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta v} \\ -\mu \frac{X_3}{r^3} + \frac{\mathrm{T}}{m} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta v} \\ -\frac{\mathrm{T}}{I_{sp} g_0} \end{bmatrix} \tag{16}$$

상태벡터(State vector) $\boldsymbol{X}$는 위치와 속도벡터인 6개의 구성요소에 질량 m을 더하여 총 7개의 요소로 구성된다.

3) 추진시간에 의한 오차

순간추력으로 도달하는 최종 위치와 추진시간을 고려했을 때의 최종 위치를 비교하면 추진시간에 의해 발생하는 위치 오차를 알 수 있다. 여기서 추진시간을 고려했을 때의 최종 위치는 Eq. (16)을 주어진 시간동안 전파(Propagation)하는 것으로 알 수 있다.

오차를 확인하기 위해, 700 km의 고도를 갖는 원 궤도에서 1,000 km의 고도를 갖는 원 궤도로 가는 상황을 고려한다. 우주비행체의 초기 질량은 50 kg이며, 추력기의 비추력은 300초로 가정한다. 이러한 초기조건에서 추력을 1 N에서 100 N까지 변화시키면 추력의 증가에 따라 추진시간은 감소하게 되며 약 4,000초에서 40초까지 감소한다. 그리고 Fig. 4는 순간추력으로 도달하는 최종위치를 기준으로 추진시간에 따라 도달할 수 있는 최종 위치의 차이를 보여준다. 보이는 바와 같이 추진시간이 길어질수록 최종위치에서의 오차가 커지는 것을 확인할 수 있다.

3. 편평도에 의한 섭동

본 장에서는 우주비행체의 궤도 섭동에 의한 오차를 알아본다. 지구를 포함한 대부분의 천체들은 자전으로 인해 적도부근의 반경이 더 커진다. 실제로 지구의 적도 방향 반경은 극 방향의 반경보다 약 21 km 더 크다. 이처럼 자전에 의해 천체가 찌그러지는 정도를 편평도(Oblateness)라 불리며 다음과

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

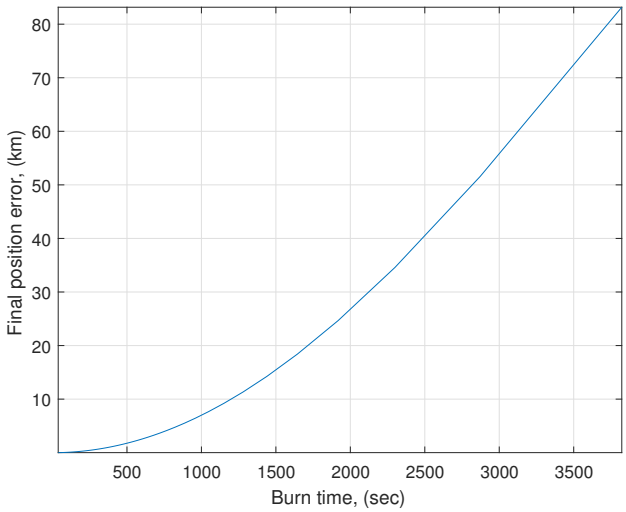


Fig. 4 Burn time vs. Position error

같이 정의된다.

$$\text{Oblateness} = 1 - \frac{\text{Polar radious}}{\text{Equatorial radious}} \tag{17}$$

지구는 편평도를 갖는 타원체이며 완벽한 대칭이 아니다. 이것은 지구 주변을 회전하는 위성에 작용하는 중력의 힘이 지구 중심을 향하지 않는 다는 것을 의미한다. 완벽하게 구형인 행성의 중력은 행성의 중심으로부터의 거리에만 의존하는 반면, 편평도를 갖는 행성의 경우 위도 변화를 일으키며, 적도 또는 극으로부터의 각거리에 의존한다. 즉, 이 처럼 중력이 지구 중심을 향하지 않기 때문에 지구 주변을 돌고 있는 우주비행체들의 궤도는 시간이 지날수록 조금씩 변하게 된다.

1) 중력포텐셜

편평도가 우주비행체에 끼치는 영향을 알기 위해서는 섭동 가속도에 대해 알아야만 한다. 그리고 섭동 가속도는 포텐셜함수(Potential function) ϕ로부터 구할 수 있다. 만약 포텐셜함수를 알 수 있다면 타원체인 지구의 섭동 가속도(Perturbation acceleration)를 다음 식으로부터 찾을 수 있다.

$$a = \nabla\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x}\hat{\mathbf{I}} + \frac{\delta\phi}{\delta y}\hat{\mathbf{J}} + \frac{\delta\phi}{\delta z}\hat{\mathbf{K}} \tag{18}$$

Vinti는 르장드르 다항식(Legendre polynomials)과 Zonal harmonics를 사용하여 다음과 같은

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

포텐셜함수를 유도하였다[16].

$$\phi = \frac{\mu}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_e}{r}\right)^n P_n \sin L\right] \tag{19}$$

여기서 μ/r은 지구를 원형이라고 가정하여 단순화한 지구의 중력포텐셜이며, J_n은 지구의 편평도가 궤도에 끼치는 주된 영향을 정량화한 무차원 매개변수인 Zonal harmonics이다. 그리고 r_e는 지구의 적도반경, P_n은 르장드르 다항식을 의미한며, L은 위도를 의미한다. 여기서 $\sin L$은 z/r로 대체할 수 있다. 계속해서 식(19)의 르장드르 다항식을 6차까지 전개해보면,

$$\begin{aligned}\phi = \frac{\mu}{r}\Bigg[&1 - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{r_e}{r}\right)^2\left(3\frac{z^2}{r^2} - 1\right) - \frac{1}{2}J_3\left(\frac{r_e}{r}\right)^3\left(5\frac{z^3}{r^3} - 3\frac{z}{r}\right)\\ &- \frac{1}{8}J_4\left(\frac{r_e}{r}\right)^4\left(35\frac{z^4}{r^4} - 30\frac{z^2}{r^2} + 3\right) - \frac{1}{8}J_5\left(\frac{r_e}{r}\right)^5\left(63\frac{z^5}{r^5} - 70\frac{z^3}{r^3} + 15\frac{z}{r}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{20}$$

각 방향에 대한 섭동 가속도는 Eq. (18)과 같이 편미분을 하는 것으로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\ddot{r}_x = \frac{\delta\phi}{\delta r_x} = -\frac{\mu}{r^3}r_x\Bigg[&1 - \frac{3}{2}J_2\left(\frac{r_e}{r}\right)^2\left(5\frac{r_z^2}{r^2} - 1\right) + \frac{5}{2}J_3\left(\frac{r_e}{r}\right)^3\left(3\frac{r_z}{r} - 7\frac{r_z^3}{r^3}\right)\\ &- \frac{5}{8}J_4\left(\frac{r_e}{r}\right)^4\left(3 - 42\frac{r_z^2}{r^2} + 63\frac{r_z^4}{r^4}\right) - \frac{3}{8}J_5\left(\frac{r_e}{r}\right)^5\left(35\frac{r_z}{r} - 210\frac{r_z^3}{r^3} + 231\frac{r_z^5}{r^5}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{21a}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r}_y = \frac{\delta\phi}{\delta r_y} = -\frac{\mu}{r^3}r_y\Bigg[&1 - \frac{3}{2}J_2\left(\frac{r_e}{r}\right)^2\left(5\frac{r_z^2}{r^2} - 1\right) + \frac{5}{2}J_3\left(\frac{r_e}{r}\right)^3\left(3\frac{r_z}{r} - 7\frac{r_z^3}{r^3}\right)\\ &- \frac{5}{8}J_4\left(\frac{r_e}{r}\right)^4\left(3 - 42\frac{r_z^2}{r^2} + 63\frac{r_z^4}{r^4}\right) - \frac{3}{8}J_5\left(\frac{r_e}{r}\right)^5\left(35\frac{r_z}{r} - 210\frac{r_z^3}{r^3} + 231\frac{r_z^5}{r^5}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{21b}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r}_z = \frac{\delta\phi}{\delta r_z} = -\frac{\mu}{r^3}r_z\Bigg[&1 - \frac{3}{2}J_2\left(\frac{r_e}{r}\right)^3\left(5\frac{r_z^2}{r^2} - 3\right) + \frac{3}{2}J_3\left(\frac{r_e}{r}\right)^2\left(10\frac{r_z}{r} - \frac{35}{3}\frac{r_z^3}{r^3} - \frac{r}{r_z}\right)\\ &- \frac{5}{8}J_4\left(\frac{r_e}{r}\right)^4\left(15 - 70\frac{r_z^2}{r^2} + 63\frac{r_z^4}{r^4}\right) - \frac{1}{8}J_5\left(\frac{r_e}{r}\right)^5\left(315\frac{r_z}{r} - 945\frac{r_z^3}{r^3} + 693\frac{r_z^5}{r^5} - 15\frac{r}{r_z}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{21c}$$

Zonal hamonics J_n의 값들은 Table 1에 나와있다[2]. 이 Zonal harmonics는 지구의 남북축에 대해 대칭인 질량 분포에만 의존하는데, 짝수 번째 harmonics는 적도면에 대해 대칭이며 홀수 번째 harmonics는 비대칭이다. Zonal harmonics 외에도 위도와 경도 모두에 의종하는 Tesseral harmonics와 위도에만 의존하는 Sectorial harmonics도 존재한다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Table. 1 The value of zonal harmonics for each order

Zonal harmonics	Value
J_2	1.08×10^{-3}
J_3	-2.50×10^{-6}
J_4	-1.60×10^{-6}
J_5	-0.15×10^{-6}

2) 섭동을 고려한 궤도 운동방정식

지구의 편평도에 의한 섭동을 고려하기 위해서는 궤도 운동방정식인 Eq. (10)에 Eq. (21)을 포함해야 한다. 최종적으로 섭동을 고려한 우주비행체의 운동방정식은 다음과 같이 미분방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \\ \ddot{r}_z \end{bmatrix} \quad f(t, \boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ -\mu \frac{X_1}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^2}{r^2}\left(1 - 5\frac{X_3^2}{r2}\right)\right) \\ -\mu \frac{X_2}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^2}{r^2}\left(1 - 5\frac{X_3^2}{r2}\right)\right) \\ -\mu \frac{X_3}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^3}{r^3}\left(3 - 5\frac{X_3^2}{r2}\right)\right) \end{bmatrix} \tag{22}$$

3차 Zonal harmonics 부터는 그 영향이 매우 작기 때문에 본 논문에서는 2차 Zonal harmonics인 J_2까지만 고려한다. 지구의 J_2값은 1.082×10^-3이다. Table 2는 달을 포함한 태양계 각 행성들의 편평도와 J_2값을 정리해 놓은 것이다[17].

3) 섭동에 의한 오차

Eq. (22)을 이용하는 것으로 지구 편평도에 의한 궤도 오차를 확인할 수 있다. Fig. 5는 고도 670 km, 경사각 45도를 갖는 원 궤도의 우주비행체가 지구를 다섯 번 공전(약 8시간) 하는 동안 발생하는 오차를 보여주고 있다. 시간이 오래지날 수록 초기 궤도와의 오차가 커지는 것을 알 수 있다. Fig. 6는 우주비행체가 다섯 번의 공전을 하고 난 후, 경사각 변화에 따른 위치 변화를 보여준다. 마지막으로 Fig. 7은 섭동을 고려하지 않은 초기 궤도와 섭동을 고려한 여섯 번 째의 공전 궤도를 보여주고 있다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Table. 2 Oblatenee and second zonal harmonics

Planet	**Oblatness**	J_2
Mercury	0.0000	$60 \times 10^{-}6$
Venus	0.0000	$4.4580 \times 10^{-}6$
Earth	0.0034	$1.0826 \times 10^{-}3$
(Moon)	0.0012	$2.0270 \times 10^{-}8$
Mars	0.0065	$1.9605 \times 10^{-}3$
Jupiter	0.0649	$1.4736 \times 10^{-}2$
Saturn	0.0980	$1.6298 \times 10^{-}2$
Uranus	0.0229	$3.3434 \times 10^{-}3$
Neptune	0.0171	$3.4110 \times 10^{-}3$

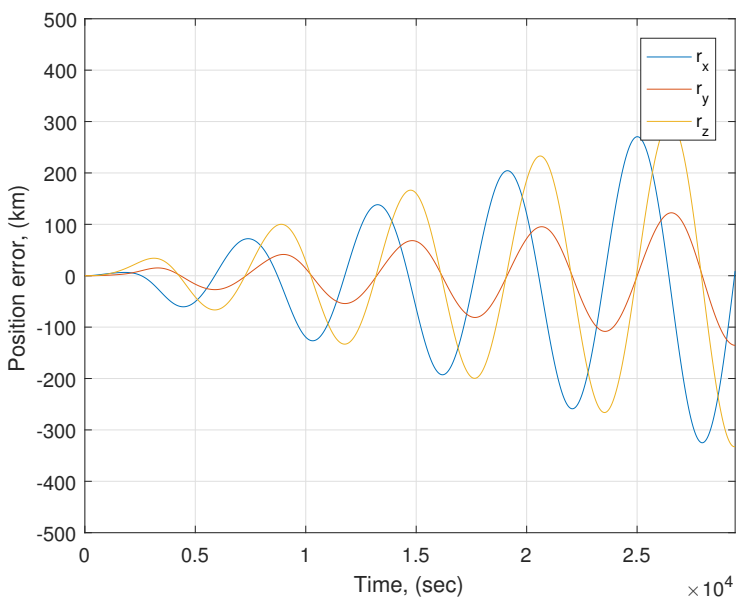


Fig. 5 Position error along time-of-flight

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

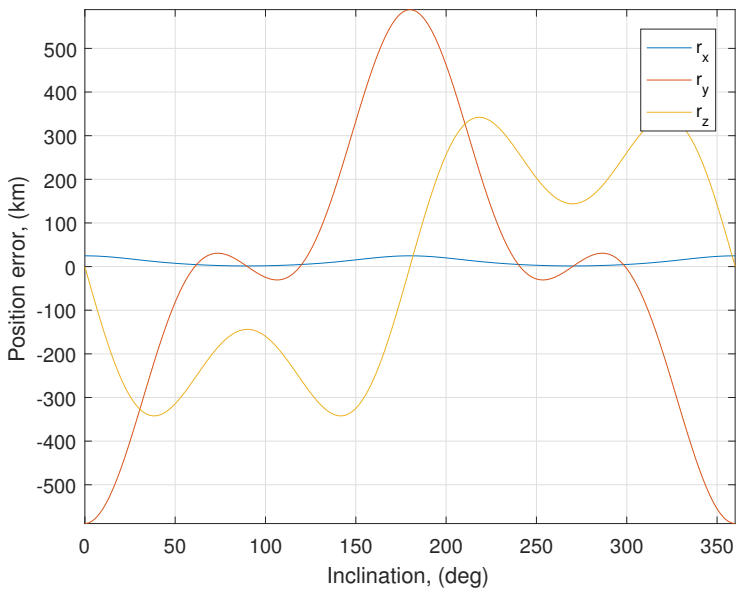


Fig. 6 Position error along change of inclination angle

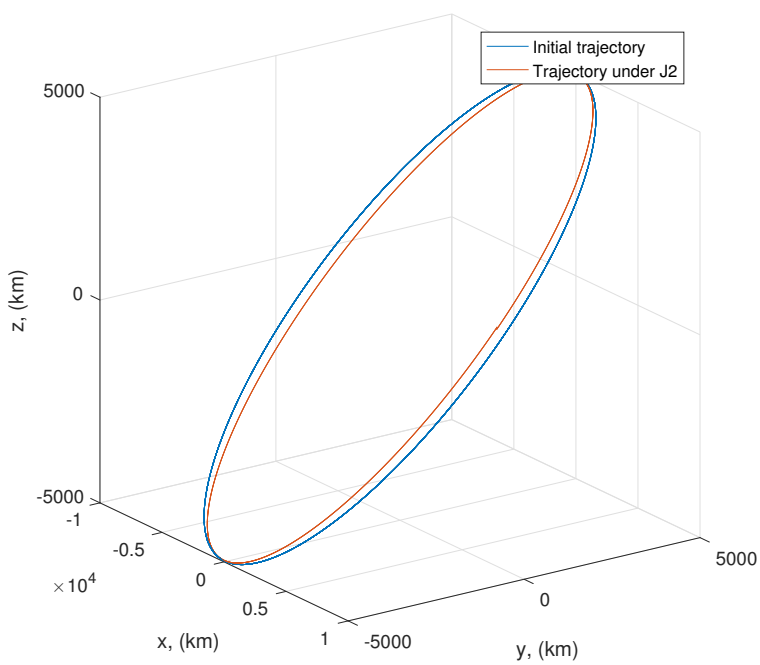


Fig. 7 Orbit perturbation of spacecraft by J2

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

4. 최적화 문제

우주비행체의 요격을 위해서는 인터셉터가 목적지까지 도달할 수 있는 전이궤도를 구해야만 한다. 이러한 전이궤도를 결정지을 수 있는 주요 매개변수는 인터셉터의 속도변화 벡터와 비행시간이다. 만약 둘 중 어느것 하나라도 알 수 없다면, 전이궤도를 특정지을 수 없다. 예를 들어, 비행시간이 주어져 있다면 인터셉터의 목적지를 특정지을 수 있지만 속도변화 벡터를 알 수 없으며, 반대로 속도변화 벡터가 주어져 있더라도 비행시간을 모른다면 인터셉터의 목적지를 특정지을 수 없다.

속도변화 벡터와 비행시간으로 부터 전이궤도를 특정지었다 하더라도 그 전이궤도는 무수한 해 중 하나에 불과하다. 따라서 많은 해 중에서도 유의미한 해를 도출할 수 있는 적절한 기준이 요구되며, 이러한 해를 도출하기 위해 최적화 기법이 사용된다.

1) 성능지표

최적화 기법을 적용하기 위해서는 우선 최적화를 하고자 하는 대상을 정해야 하며, 이를 성능지표(Performance index)라고 부른다. 본 논문에서는 이러한 성능지표로서 에너지를 고려한다. 에너지를 최적화 한다는 것은 속도변화를 최적화 한다는 것을 의미하며[18], 이것은 또한 추진시간(Burn-time)을 최적화하고 나아가서 연료소모의 최적화를 의미한다.

이러한 속도변화와 추진시간에 대한 관계식은 다음과 같이 Eq. (14), Eq. (15)와 뉴턴의 가속도 법칙으로부터 얻을 수 있다.

$$\mathrm{F} = ma, \qquad \mathrm{T} = ma, \qquad gI_{sp}\dot{m} = (m_0 - \dot{m}t)a \tag{23}$$

이 식을 가속도 a에 대해 정리하면,

$$a = gI_{sp}\frac{\dot{m}}{m_0 - \dot{m}t} \tag{24}$$

Eq. (24)을 시간에 대해 적분하면 속도를 구할 수 있다.

$$v = gI_{sp} = \left[\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right)\right] \tag{25}$$

Eq. (25)을 로켓 방정식이라 부르며, 이 식을 다시 시간에 대해 정리하면 추진시간 식을 얻을 수

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

있다.

$$t_b = \frac{m_0}{\dot{m}}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{gI_{sp}}\right)\right] \tag{26}$$

이어서 직접적인 성능지표가 되는 에너지를 속도변화 벡터로 표시하면 다음과 같다[18].

$$\epsilon = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}^T\Delta\mathbf{v} = \frac{1}{2}\Delta v^2 \tag{27}$$

Eq. (26)과 Eq. (27)를 이용하면 추진시간과 에너지의 관계를 알 수 있으며, Fig. 8은 그 결과를 보여준다. 보이는 바와 같이 에너지가 작을수록 추진시간 또한 작아지는 것을 알 수 있다. 실제 우주비행체의 임무에 있어서 연료소모가 적어진다는 것은 우주비행체의 무게를 줄이고 나아가서 개발비용을 줄일 수 있게 된다. 따라서 최적화 문제의 성능지표로써 에너지를 최적화 한다는 것은 실제 개발에 있어서 상당히 유의미한 선택이라고 할 수 있다. 최종적으로 최적화 문제를 위한 성능지표는 다음과 같다.

$$J = \epsilon = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}^T\Delta\mathbf{v} \tag{28}$$

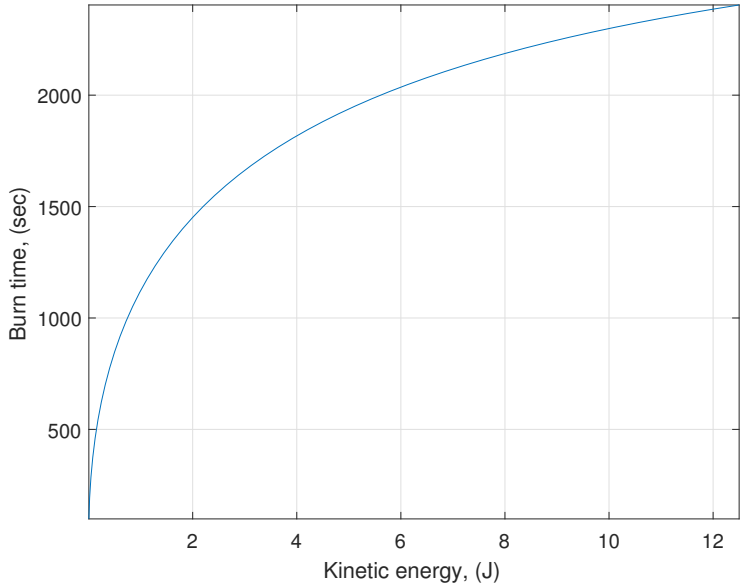


Fig. 8 Energy vs. burn time

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

2) 최적 에너지 요격조건

우주비행체를 요격하기 위해 에너지를 최적화하는 속도벡터와 비행시간을 찾는 최적화 문제는 케플러 방정식(Kepler's equation)으로부터 시작한다.

$$M = E - e \sin E \tag{29}$$

여기서 M는 Mean anomaly를 나타내며, E는 Eccentric anomaly를, e는 이심률을 의미한다. 이 케플러 방정식은 식의 특성상 이심률 e가 1에 가까워질수록 계산정확도가 낮아지는 특성을 띈다. 이러한 수치적 문제는 다음과 같이 정의된 범용변수(Universal variable)을 사용하는 것으로 해결할 수 있다[2].

$$\dot{\chi} = \frac{\sqrt{\mu}}{r} \tag{30}$$

범용변수를 사용하면 범용 케플러 방정식(Universal Kepler's equation)이라고 불리는 우주비행체의 위치와 시간에 대한 식을 얻을 수 있다[2].

$$\sqrt{\mu} t = a(\chi - \sqrt{a} \sin \frac{\chi}{\sqrt{a}}) + a \frac{\mathbf{r}_0^T \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu}} (1 - \cos \frac{\chi}{\sqrt{a}}) + r_0 \sqrt{a} \sin \frac{\chi}{\sqrt{a}} \tag{31}$$

여기서 $\mathbf{r}_0$와 $\mathbf{v}_0$는 우주비행체의 초기 위치와 속도벡터를 나타내며, a는 궤도의 장반경(Semi-major axis)를 나타낸다. Eq. (31)를 사용하여 타겟과 인터셉터의 운동방정식을 세울 수 있다.

$$\eta_1 (\bar{\chi}, t) = \bar{a} \left(\bar{\chi} - \sqrt{\bar{a}} \sin \frac{\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{a}}} \right) + \frac{\bar{\mathbf{r}}_0^T \bar{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \cos \frac{\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{a}}} \right) + \bar{r}_0 \sqrt{\bar{a}} \sin \frac{\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{a}}} - \sqrt{\mu} t \tag{32}$$

$$\eta_2 (\chi, t, \Delta \mathbf{v}_0) = a \left(\chi - \sqrt{a} \sin \frac{\chi}{\sqrt{a}} \right) + \frac{\mathbf{r}_0^T (\mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0)}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \cos \frac{\chi}{\sqrt{a}} \right) + r_0 \sqrt{a} \sin \frac{\chi}{\sqrt{a}} - \sqrt{\mu} t \tag{33}$$

Eq. (32)은 타겟을, Eq. (33)는 인터셉터의 운동방정식을 의미하며, $\Delta \mathbf{v}_0$는 인터셉터의 초기 위치에서의 속도변화를 나타낸다. 이 식들은 최적화 문제를 풀기위한 구속조건으로 사용된다.

우주비행체를 요격한다는 것은 최종 위치에서 두 우주비행체의 위치가 일치한다는 것을 의미한다. 이러한 요격조건 또한 최적화 문제를 풀기위한 구속조건으로써 사용될 수 있으며, 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = 0 \tag{34}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

여기서 $\bar{\mathbf{r}}$와 $\mathbf{r}$는 타겟과 인터셉터의 최종 위치를 나타낸다. 그리고 이 최종 위치는 라그랑지 계수(Lagrange coefficient)를 사용하는 것으로 초기 위치와 속도에 대해 표현될 수 있으며, 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0 \tag{35}$$

$$\mathbf{v} = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\mathbf{v}_0 \tag{36}$$

각각의 라그랑지 계수는 범용변수를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$f = 1 - \frac{a}{r_0}\left(1 - \cos\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{37}$$

$$g = t - \frac{a}{\sqrt{\mu}}\left(x - \sqrt{a}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{38}$$

$$\dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r r_0}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}} \tag{39}$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{a}{r}\left(1 - \cos\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{40}$$

최종적으로 요격조건을 라그랑지 계수를 사용하여 표현하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = \left(\bar{f}\bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{g}\bar{\mathbf{v}}_0\right) - \left(f\mathbf{r}_0 + g\left(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0\right)\right) = 0 \tag{41}$$

우주비행체 요격 문제는 타겟과 인터셉터의 범용변수 $\bar{\chi}$, χ, 비행시간 t, 속도변화 벡터 $\Delta\mathbf{v}_0$로 총 여섯개의 미지수를 사용하고 있다. 하지만 주어진 식은 다섯개 뿐이므로 온전한 해를 찾을 수 없다. 따라서 이 다섯개의 식을 구속조건으로 사용하고 성능지표 Eq. (28)과 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)를 이용하여 최적화 문제를 구성함으로써 성능지표를 최적화하기 위한 요격 조건식을 유도할 수 있다. 라그랑지 승수를 사용하여 해밀토니안(Hamlitonian)을 구성하면 다음과 같다.

$$H = J + \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta} + \mathbf{\Phi}^T\left(\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\right) \tag{42}$$

여기서 $\mathbf{\Lambda}$와 $\mathbf{\Phi}$는 라그랑지 승수를 원소로하는 벡터로써 $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2]^T$와 $\mathbf{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]^T$이다. 이렇게 늘어난 미지수들에 대하여 성능지표를 최적화하기 위한 필요조건은 각 미지수에 대해

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

해밀토니안을 편미분 하는 것으로 다음과 같이 구할 수 있다[19].

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{\chi}} = \lambda_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\chi}} + \mathbf{\Phi}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\chi}} = 0 \tag{43}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \chi} = \lambda_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \chi} - \mathbf{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} = 0 \tag{44}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\sqrt{\mu}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) + \mathbf{\Phi}^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} = \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} + \lambda_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \mathbf{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} = 0 \tag{46}$$

여기서 Eq. (43)과 Eq. (44)로부터 라그랑지 승수 $\mathbf{\Lambda}$에 대해 정리하면,

$$\lambda_1 = -\mathbf{\Phi}^T \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\chi}}\right)^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\chi}} \tag{47}$$

$$\lambda_2 = \mathbf{\Phi}^T \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \chi}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} \tag{48}$$

라그랑지 승수 $\mathbf{\Lambda}$를 Eq. (45)에 대입하면,

$$\mathbf{\Phi}^T \left[\left(\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\chi}}\right)^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\chi}} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \chi}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)\right] = 0 \tag{49}$$

마찬가지로 라그링지 승수 λ_2를 Eq. (46)에 대입하고, 라그랑지 승수 $\mathbf{\Phi}$에 대하여 정리하면,

$$\mathbf{\Phi}^T = \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_0}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \chi}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} \frac{\eta_2}{\Delta \mathbf{v}_0}\right)^{-1} \tag{50}$$

최종적으로, 라그랑지 승수 $\mathbf{\Phi}$를 Eq. (49)에 대입하는 것으로 최적해를 결정하기 최적 에너지 요격조건식을 얻을 수 있다.

$$h = \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_0}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \chi}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} \frac{\eta_2}{\Delta \mathbf{v}_0}\right)^{-1} \left[\left(\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\chi}}\right)^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\chi}} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \chi}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)\right] = 0 \tag{51}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

3) 최적 에너지 요격조건과 호만전이

최적해는 주어진 여섯 개의 식과 수치적인 방식을 통해 얻을 수 있다. 이를 검증하기 위해 최적 에너지 궤도전이로 잘 알려진 호만전이를 사용한다. 검증을 위해 사용된 초기조건은 고도 700 km 에서 3,000 km로 가는 두 원궤도 사이의 요격 문제이다. 호만전이로 부터 계산되는 최적 에너지를 갖는 속도변화 벡터와 비행시간은 각각 $\Delta\mathbf{v}_{opt} = [0, 0.51, 0]^T$ km/s와 $t_{opt} = 3714$s 이다.

앞서 유도된 식들을 사용하여 수치적인 방식으로 최적해를 구하면: $\bar{\chi} = 250$, $\chi = 285$, $t = 3714$s, 그리고 $\Delta\mathbf{v}_0 = [0, 0.51, 0]^T$ km/s로 비행시간과 속도변화 벡터가 호만전이의 해와 일치하는 것을 알 수 있다.

이러한 최적해가 최적 요격조건을 만족하고, 성능지표를 최소화 하는지를 확인 하기 위해 램버트 문제를 이용할 수 있다. 비행시간을 3,200초에서 4,200초까지 변화시켜 가면서 램버트 문제를 풀면, Fig. 9과 같은 그래프를 얻을 수 있다. 이 그래프는 시간의 변화에 따른 성능지수와 최적 에너지 요격조건의 변화를 보여주는 그래프이다. 이 그래프가 보여주는 바와 같이 해로써 얻어진 3,714초에서 최적 요격조건이 만족하고 성능지수가 최소가 되고 있음을 확인 할 수 있다. Fig. 10는 최적해를 사용했을 때의 전이궤도를 보여준다.

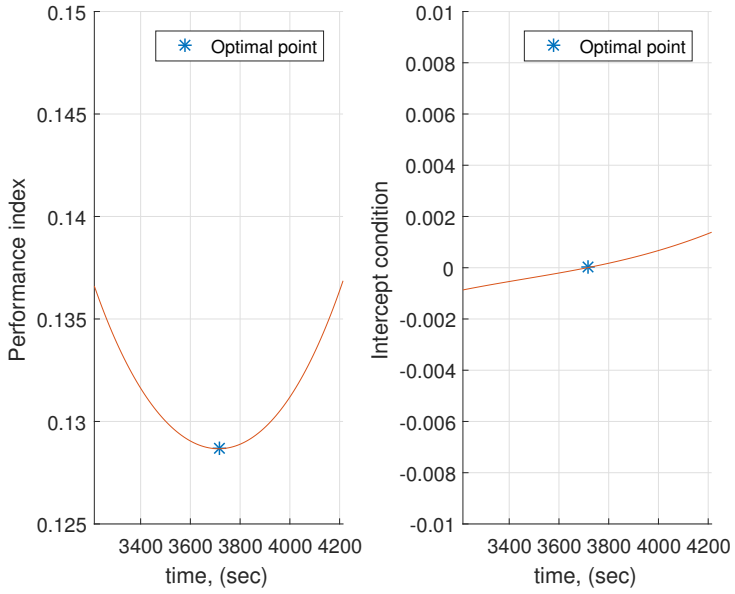


Fig. 9 Performance index and optimal intercept condition with respect to time

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

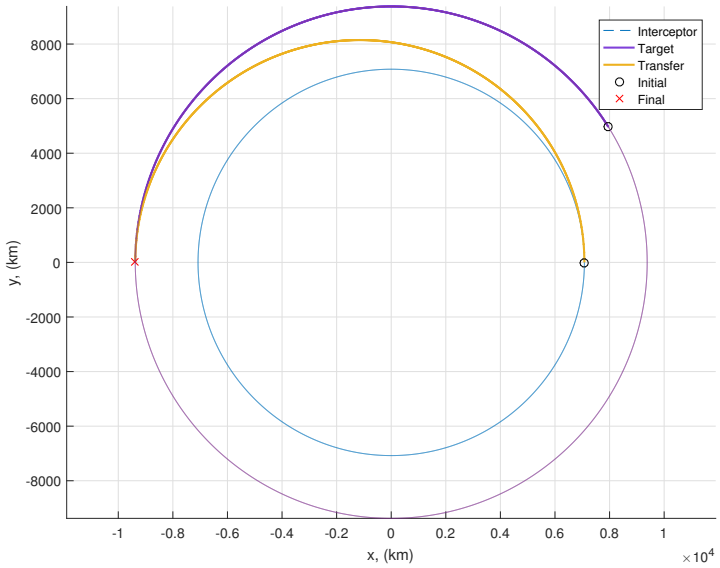


Fig. 10 Trajectories from the optimal solution

5. 유전 알고리즘을 이용한 최적화

1) 초기값 설정 문제

최적 에너지 요격을 위한 최적화 문제는 수치적인 방법을 통해 해를 얻을 수 있다. 그러나 풀고자 하는 문제의 시스템은 비선형성이 매우 강하고 그에 따른 많은 지역해를 포함한다. 시스템에 지역해가 많다는 것은 수치적으로 해를 얻고자 할 때 초기값에 따라 도달하는 해가 달라질 수 있음을 의미한다. 이는 구속조건을 만족하는 최적해를 얻었다고 하더라도 마찬가지로 구속조건을 만족하면서 성능지표를 보다 최적화할 수 있는 다른 해가 있을 여지를 제공한다. 따라서 수치적으로 최적화 문제를 풀기 위해서는 적절한 초기값을 찾는 문제 또한 해결해야할 중요한 문제이다.

본 논문에서는 이러한 초기값을 찾기 위해 유전 알고리즘을 사용한다. 유전 알고리즘은 자연계의 진화원리를 모방한 알고리즘으로써 전역 탐색 알고리즘 중 하나이다. 이 알고리즘은 복잡한 시스템에도 적용하기 쉽다는 장점을 갖고 있지만, 구속조건을 완전히 만족하는 해를 찾기는 어렵다는 단점이 있다. 이러한 단점은 유전 알고리즘을 사용하여 최적화 문제를 풀고자 할 때 치명적일 수 있다. 하지만 본 논문에서는 유전 알고리즘을 통해 구속조건을 만족시키는 해를 찾는 것이 목적이 아닌, 수치 시뮬레이션에 사용하기 위한 의미있는 초기값을 찾고자 사용하기 때문에 해당 알고리즘이 갖고 있는

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

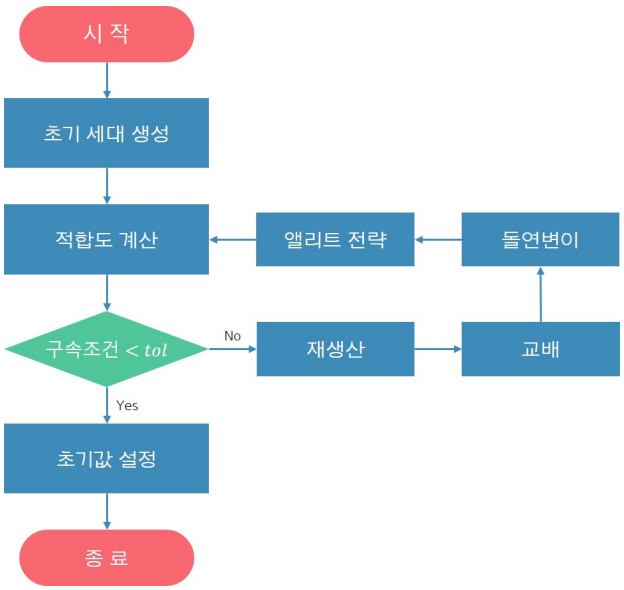


Fig. 11 Overall flowchart of genetic algorithm

단점은 큰 영향을 주지 못한다.

2) 유전자 알고리즘

유전 알고리즘은 주어진 탐색공간(Search space) 내에서 잠재적인 임의의 해 집단(Population)을 하나의 세대(Generation)로 구성한다. 이 세대는 유전 연산자를 통해 더 나은 적합도를 갖는 세대로 진화를 하게 되고, 이러한 모의진화를 반복하는 것으로 점차 최적해에 접근한다. 여기서 유전 연산자는 자연계의 진화원리를 인위적으로 모사한 것으로 세 종류로 대별된다: 재생산(Reprduction), 교배(Crossover), 돌연변이(Mutation). 각각의 연산자마다 다양한 방법론이 존재하며 그에따른 장단점이 있다. 사용자는 유전 알고리즘을 적용하고자 하는 문제에 따라서 방법론을 선택하고 유전 알고리즘을 구성해야 한다. Fig. 11는 유전 알고리즘의 전체적인 진행을 보여준다.

염색체 표현

초기의 유전 알고리즘들은 자연계의 진화과정을 충실히 모사하기 위해 해공간(Solution space)과 부호공간(Coding space) 상에서 작동하도록 개발되었다. 유전 연산자들은 부호공간 상에서 동작하고, 각 개체의 적합도를 계산할 때에는 해공간에서 이루어지는 것이다. 따라서 해공간 상의 파라미터들은 유전 연산자를 적용하기 위해 적합한 부호공간 상의 파라미터로 변환된다.

해공간 상의 파라미터를 부호공간 상의 파라미터로 변환하는 과정을 부호화(Encoding)라고 하며

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

변환된 결과를 스트링 또는 염색체라 부른다. 그 반대의 과정을 복호화(Decoding)라고 한다. 유전 알고리즘에서 사용되는 전통적인 부호화 방식은 이진수를 이용한 이진코딩(Binary coding) 방식이다. 이진코딩 방식은 이론적인 분석을 용이하게 하고 비트 당 최대의 스키마(Schema) 수를 제공하는 강점을 가지지만[20], 큰 탐색공간을 갖기 때문에 고정밀도의 해가 요구되거나 구속조건이 존재할 경우에는 사용이 어렵다.

이러한 단점을 보완하는 방법 중 하나로 실수코딩(Real coind) 방식이 있다. 실수코딩 방식의 염색체는 직관적으로 문제공간에 가깝고 연산자를 쉽게 구현할 수 있도록 해준다. 또한, 부호화, 복호화 과정이 필요없어지므로 탐색속도를 높일 수 있으며, 복잡한 구속조건을 다루기 쉬워진다. 이러한 실수코딩 방식으로 표현된 염색체는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{s}(k) = \mathbf{X}^T(k) = \{\mathrm{X}_1(k),\ \mathrm{X}_2(k),\ \cdots,\ \mathrm{X}_j(k),\ \cdots,\ \mathrm{X}_n(k)\}^T \tag{52}$$

여기서 $\mathbf{X}(k) \in \mathbb{R}^n$는 해 벡터이며, $\mathrm{X}_j(k)$는 j 번째 유전자, n은 벡터의 차원으로써 염색체의 길이를 나타낸다.

집단은 염색체의 집합으로 구성되며, k세대의 집단은 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{P}(k) = \{\boldsymbol{s}_1(k),\ \boldsymbol{s}_2(k),\ \cdots,\ \boldsymbol{s}_i(k),\ \cdots,\ \boldsymbol{s}_N(k)\} \tag{53}$$

여기서 $\boldsymbol{s}_i$는 $\{\mathrm{X}_{i1}(k),\ \mathrm{X}_{i2}(k),\ \cdots,\ \mathrm{X}_{ij}(k),\ \cdots,\ \mathrm{X}_{in}(k)\}^T$로 i번째 염색체를 뜻하고 N은 집단의 크기를 나타낸다. 집단의 크기는 세대에 바뀌어도 변하지 않는 고정된 값이다. 초기 집단은 탐색공간 내에서 무작위로 초기화된다. 즉,i 번째 염색체의 j 번째 요소는 정의구간 $[\mathrm{X}_j^L,\ \mathrm{X}_j^U]$ 내에서 무작위로 초기화되는 것이다.

유전 연산자: 재생산

재생산은 다윈의 적자생존을 모사한 인위적인 메커니즘이다. 이 연산자는 적합도 값을 기반으로 개체를 선택하고 교배급원(Mating pool)을 구성한다. 집단의 평균 적합도는 세대가 거듭될수록 증가하게 되고 점차적으로 최적해에 도달하게 된다. 대표적인 재생산 연산자는 룰렛휠 선택(Roulette wheel selection), 토너먼트 선택(Tournament selection)[21] 등이 있다. 룰렛휠 선택은 부모개체의 선택확률을 기반으로 진행되기 때문에, 만약 초기 세대에서 초우량 개체가 등장하게 된다면 해당 개체가 집단을 지배하게 되는 유전적 다양성(Genetic diversity)이 감소하게 된다. 유전적 다양성의 감소는 지역최적해에 도달하게 하는 원인이 된다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

이 문제를 극복하기 위해, 구배와 유사한 재생산(Gradient-like reproduction)을 사용한다[22]. 이 연산자는 우량 개체의 다중 복제를 막음으로써 유전적 다양성을 유지하고 재생산 연산 중에 발생할 수 있는 최적 개체의 소멸 등의 문제를 완화할 수 있다. 구배와 유사한 생산자는 다음 세 단계를 집단의 크기만큼 반복하는 것으로 적용된다.

- 단계 1: 집단 $\boldsymbol{P}(k)$를 평가하고 최적 개체를 찾는다.

$$\boldsymbol{s}_b(k) = \{\mathrm{X}_{b1}(k),\ \mathrm{X}_{b2}(k),\ \cdots,\ \mathrm{X}_{bn}(k)\} = \underset{1 \le i \le N}{arg\max}[f_i(k)] \tag{54}$$

$$\mathrm{f}_b(k) = \max_{1 \le i \le N}[\mathrm{f}_i(k)] \quad (> 0) \tag{55}$$

- 단계 2: 다음 식을 사용하여 각 개체에 새로운 값을 할당한다.

$$\mathrm{X}_{ij}(k+1) = \mathrm{X}_{ij}(k) + \xi_i \frac{[\mathrm{f}_b(k) - \mathrm{f}_i(k)]}{\mathrm{f}_b(k)}[\mathrm{X}_{bj}(k) - \mathrm{X}_{ij}(k)] \quad (1 \le i \le N,\ 1 \le j \le N) \tag{56}$$

- 단계 3: 새 개체를 교배급원에 복제한다.

$$\boldsymbol{P}(k+1) = \{\boldsymbol{s}_1(k+1),\ \boldsymbol{s}_2(k+2),\ \cdots,\ \boldsymbol{s}_N(k+1)\} \tag{57}$$

여기서 $\mathrm{X}_{ij}(k)$와 $\mathrm{X}_{ij}(k)$는 각각 $\mathbf{X}_i(k)$와 $\mathbf{X}_b(k)$의 j 번째 요소이며, $\mathrm{f}_i(k)$는 i 번째 개체의 적합도이다. ξ_i는 양의 상수로써 각 개체마다 다른 값이 적용된다.

유전 연산자: 교배

교배 연산자는 자연계의 유성생식을 모사하는 인위적인 메커니즘이다. 이 연산자는 교배급원으로부터 부모 염색체 쌍을 임의로 선택하고 부모의 염색체를 교환하는 것으로 자손을 생성한다. 대표적인 교배 연산자는 단순 교배(Simple crossover)[23], 산술적 교배(Arithmetical crossover)[24], BLX-α 교배(BLX-α crossover)[25] 등이 있다. 본 논문에서는 부모 염색체 쌍으로부터 두 개의 자손을 생성하는 대표적인 교배 방법인 수정 단순 교배(Modified simple crossover)를 사용하며 교배 절차는 다음과 같다.

- 단계 1: 교배급원으로부터 부모 염색체 쌍을 임의로 선택한다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

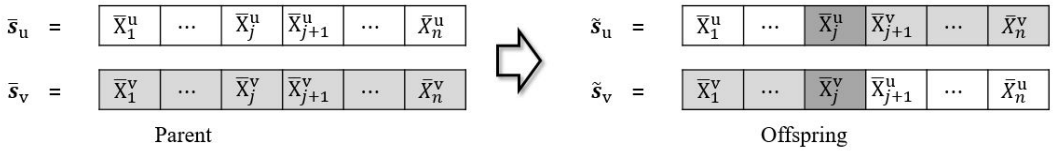


Fig. 12 Modified simple crossover

- 단계 2: 교배확률을 기반으로 교배 여부가 결정된다면, 다음과 같은 식을 통해 자손의 j 번째 요소를 계산한다.

$$\tilde{\mathrm{x}}_j^{\mathrm{u}} = \rho\bar{\mathrm{x}}_j^{\mathrm{v}} + (1-\rho)\bar{\mathrm{x}}_j^{\mathrm{u}} \tag{58}$$

$$\tilde{\mathrm{x}}_j^{\mathrm{v}} = \rho\bar{\mathrm{x}}_j^{\mathrm{u}} + (1-\rho)\bar{\mathrm{x}}_j^{\mathrm{v}} \quad (1 \le j \le n) \tag{59}$$

  여기서 ρ는 범위 [0, 1] 내의 난수이며, 두 염색체에 대해 교배점 $j \in [1,\ N-1]$이 무작위로 선택되면 j 번째 요소는 선형결합되고 그 후의 요소들은 서로 교환되어 자손을 생성한다.

- 단계 3: 생성된 자손들을 집단에 복제한다.

Fig. 12는 수정 단순 교배의 결과를 보여준다.

유전 연산자: 돌연변이

유전 알고리즘을 통해 인위적인 진화가 계속되는 동안, 재생산 연산자와 교배 연산자는 집단의 적합도를 높여가면서 개체들을 서로 유사하게 만든다. 이 현상이 세대의 말기에 있다면 바람직한 현상이다. 그러나 만약 이것이 세대 초기에 발생한다면 그것은 유전적 다양성의 결여를 야기하며 지역최적해에 수렴하게 하는 원인이 된다. 재생산과 교배 연산자는 이러한 지역최적해로부터 빠져나갈 수 있는 방법을 포함하고 있지 않다. 그러므로 원하지 않는 해에서 빠져나올 수 있는 메커니즘이 요구되며, 돌연변이 연산자가 이 역할을 수행한다.

자연계의 돌연변이 현상을 모사한 돌연변이 연산자는 돌연변이 확률을 기반으로 임의의 염색체를 임의 값으로 변화시킨다. 이것은 초기 세대의 집단이 우량 염색체에 지배되는 것을 예방하고 탐색공간을 넓혀준다. 이러한 돌연변이 연산자는 균등 돌연변이(Unifrom mutation)[24], 실수크리프돌연변이(Real number creep mutation)[26], 동적 돌연변이(Dynami mutation)[27] 등의 방식이 존재한다. 본 논문에서는 미세 조정이 가능한 동적 돌연변이를 사용하며, 다음과 같은 절차로 진행된다.

- 단계 1: 염색체에서 개체 하나를 선택한다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

- 단계 2: 돌연변이 확률에 따라 선택된 개체의 돌연변이 유무를 결정한다. 만약 j 번째 개체에서 돌연변이가 발생하면, X_j는 다음 식으로부터 그 값이 결정된다.

$$\mathrm{X}_j = \begin{cases} \tilde{\mathrm{X}}_j + \Delta(k,\ \mathrm{X}_j^{(U)} - \tilde{\mathrm{X}}_j) & \text{if } \tau = 0 \\ \tilde{\mathrm{X}}_j - \Delta(k,\ \tilde{\mathrm{X}}_j - \mathrm{X}_j^{(L)}) & \text{if } \tau = 1 \end{cases} \tag{60}$$

  여기서 τ는 0 또는 1의 난수이며 $\Delta(k, \mathrm{y})$는 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta(k, \mathrm{y}) = \mathrm{y} \cdot \gamma \cdot (1 - \frac{k}{\Gamma})^b \tag{61}$$

  또한, γ는 0과 1 사이의 난수이며, Γ는 알고리즘이 실행되는 최대 세대수이고, b는 불균등 정도를 나타내는 매개변수로써 사용자가 결정하는 값이다. 이 함수는 범위 $[0, \mathrm{y}]$에서 값을 가지는데, 세대수 k가 증가함에 따라 0에 가까운 수를 발생시킬 확률이 높아진다.

- 단계 3: 선택된 개체를 집단에 복제한다.

이 연산자는 세대 초기에는 모든 탐색공간을 균등한 확률로 탐색하다가 세대 말기에는 매우 지역적으로 탐색할 수 있다.

앨리트 전략

집단의 최적 개체는 재생산 과정에서는 필수적으로 선택되지만 교배와 돌연변이 과정에서 사라질 가능성이 존재한다. 만약 교배 혹은 돌연변이 과정에서 최적 개체가 소멸한다면, 좋은 특성을 갖는 유전자의 소실을 야기하고 유전 알고리즘의 전체적인 탐색 능력을 저하시킨다. 그러므로 이를 막기 위해 앨리트 전략[28]을 사용한다.

앨리트 전략은 세대 초기에 최적 개체를 저장한 다음 유전 연산자를 거친 세대에서 해당 최적 개체가 소멸했을 경우 그 세대 최악의 개체를 앞서 저장해 두었던 최적 개체로 교체한다. 이렇게 함으로써 최적 개체의 생존을 보장하고 전체 알고리즘의 탐색 능력 저하를 방지할 수 있다.

적합도 함수

집단의 인위적인 진화는 해당 세대에서 각 개체의 적합도를 기반으로 수행하며, 개체의 적합도를 계산하기 위한 함수를 적합도 함수(Fitness function)라 부른다. 유전 알고리즘을 사용하기 위해서는 적합도 함수를 반드시 정의해야 하는데 풀고자하는 문제에 따라 달라진다. 본 논문에서는 최적

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

에너지 우주비행체 요격 문제에 적용하기 때문에, 앞 장에서 보인 성능지표와 구속조건으로 적합도 함수를 구성할 수 있다. 이러한 적함도 함수는 다음과 같다.

$$\mathcal{F} = 1/\left[W_1 J + W_2|\eta_1| + W_3|\eta_2| + W_4\left\|\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\right\|\right] \tag{62}$$

여기서 W_1, W_2, W_3 그리고 W_4는 가중치를 의미하며, 적합도 함수를 구성하는 요소들의 차원을 일치시키거나 중요도에 따라 사용자가 임의로 값을 정한다.

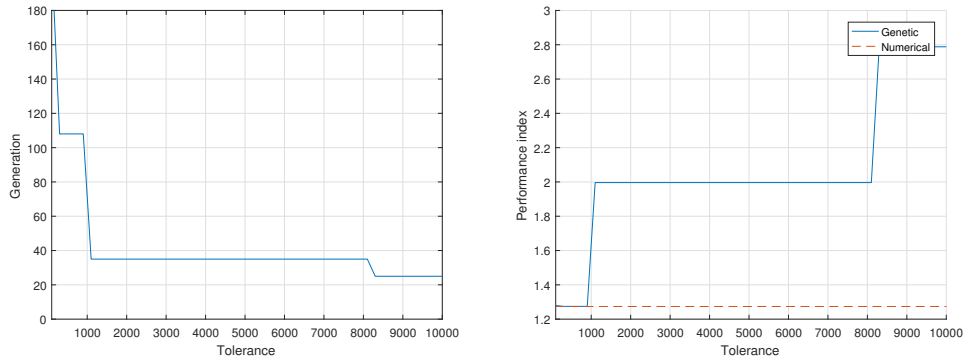
모의진화의 종료조건

확률을 기반으로 하는 유전 알고리즘의 특성으로 인해 구속조건을 완전히 만족하는 해를 찾기 위해서는 많은 계산 시간을 필요로 한다. 그러나 본 논문에서는 구속조건을 완전히 만족하는 해를 찾기 위해 사용하는 것이 아닌, 수치 시뮬레이션을 위한 대략적인 초기값을 찾는 것이 목적이다. 따라서 구속조건의 만족도를 어느정도까지 허용할 것인지에 대한 지표가 필요하며, 이를 허용오차 (Tolerance)라 부른다.

세대의 진화는 주어진 구속조건이 설정한 허용오차를 만족할 때까지 계속 이루어진다. 만약 허용오차 값이 매우 크다면 유전 알고리즘의 계산 시간은 줄어들지만 초기값으로 부적절할 수도 있다. 반대로 허용오차 값이 매우 작다면 초기값으로 적절할 수 있겠지만 그 만큼 계산 시간이 늘어날 것이다. Fig. 13(a)는 유전 알고리즘이 반복된 횟수(세대 수)와 허용오차의 관계를 보여주고 있다. 허용오차가 커질수록 세대가 줄어들고 있는 것을 알 수 있다. 이는 허용오차가 커질수록 유전 알고리즘이 반복된 횟수가 줄어들고 그만큼의 계산량이 감소함을 의미한다. Fig. 13(b)는 허용오차에 따른 성능지표의 변화를 보여준다. 허용오차가 커질수록 유전 알고리즘은 빨리 종료되며 그에따라 도출된 해의 성능지표는 큰 값을 갖게 된다. 그러나 성능지표가 더 큼에도 불구하고 수치 시뮬레이션을 위한 초기값으로 사용하였을 때의 결과가 일치하는 것을 볼 수 있다. 허용오차 값을 100을 사용하는 것과 10,000을 사용하는 것의 결과가 최종적으로 일치하는 것이다. 즉, 100의 허용오차 값을 사용하는 것보다 10,000의 허용오차를 사용하는 것이, 같은 결과를 얻으면서 계산 시간을 줄일 수 있다는 것이다. 주의해야할 것은 풀고자 하는 문제마다 적절한 허용오차 값이 달리지고 이를 찾기 위해서는 사용자의 경험에 전적으로 의존한다는 것이다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



(a) GA iteration number (generation) with respect to the tolerance for termination condition (b) Performance index with respect to the tolerance.

Fig. 13 Features of GA corresponding to the termination condition

Table. 3 Parameters of genetic algorithm

Parameter	Value
W_1	1
W_2	10^-4
W_3	10^-4
W_4	10^-2
Population size	300
Probability of crossover	0.8
Probability of mutation	0.02
Tolerance	10,000

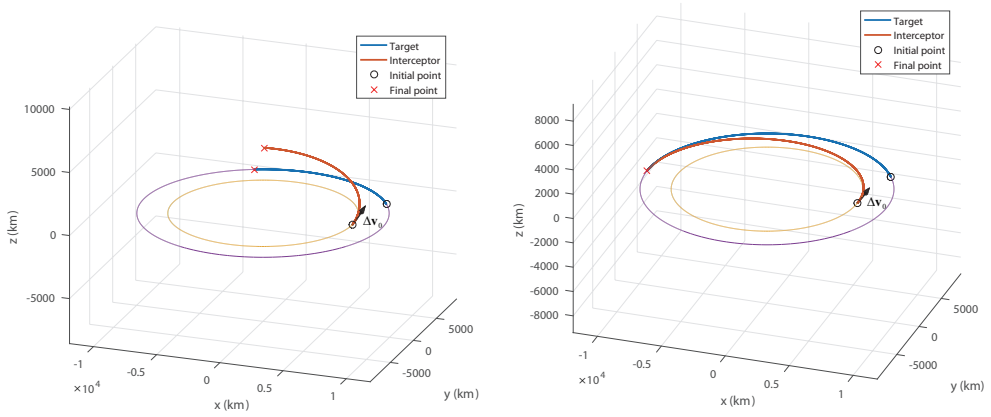
3) 시뮬레이션

이번 장에서는 유전 알고리즘을 사용하여 초기값을 찾고, 해당 초기값을 사용한 수치 시뮬레이션의 결과를 보여준다. 검증을 위해 최적 에너지 문제인 호만 전이가 사용된다.유전 알고리즘을 위한 초기 조건은 Table 3에 정리되어 있으며, 우주비행체의 초기 조건은 고도 700 km 갖는 원 궤도와 고도 3,000 km를 갖는 원 궤도이다.

주어진 초기 조건에서 호만 전이를 푸는 것으로 에너지를 최소화하는 최적해를 얻을 수 있으며 이는 다음과 같다: $t_{opt} = 3714$s, $\Delta\mathbf{v}_{opt} = [0, 0.51, 0]^T$ km/s. 마찬가지의 조건에서 유전 알고리즘을 사용하게 되면 다음과 같은 해를 얻을 수 있다: $\bar{\chi} = 138$, $\chi = 164$, $t_{GA} = 2053$s, and $\Delta\mathbf{v}_{GA} = [0.05, 0.71, 1.55]^T$ km/s. 마지막으로, 이 값들을 최적화 문제의 초기값으로 사용하여 수

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY



(a) Trajectory generated by the only genetic algorithm

(b) Trajectory optimized by using the numerical analysis with the initial guess obtained by the genetic algorithm

Fig. 14 A hohmann transfer example

치적으로 해를 구한다면 다음과 같은 해를 얻을 수 있다: $\bar{\chi} = 250$, $\chi = 285$, $t_{GA} = 3714$s, and $\Delta\mathbf{v}_{GA} = [0, 0.51, 0]^T$ km/s.

위의 결과를 살펴보면, 호만 전이로부터 얻은 최적해와 유전 알고리즘을 통해 얻은 해는 매우 큰 차이가 나는 것을 알 수 있다. 그러나 유전 알고리즘을 초기값으로 사용하여 얻은 해는 호만 전이의 해와 정확히 일치한다. 즉, 유전 알고리즘을 적절한 허용오차로 얻어낸 해가 최적화 문제의 수치 시뮬레이션을 위한 초기값으로 잘 동작함을 볼 수 있었다. Fig. 14(a)는 유전 알고리즘으로 얻은 해의 궤도를 보여주며, Fig. 14(b)는 유전 알고리즘으로부터 얻은 해를 초기값으로 사용했을 때의 결과를 보여준다.

6. 섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격

1) 실시간 요격 알고리즘 연구

앞서 설명한 바와 같이 실제 우주비행체는 궤도 섭동이 존재하며 그에 따른 오차가 발생한다. 이러한 오차를 고정추력을 사용하여 보정하고 추력기의 추진 방향은 최적해를 기반으로 한다. 그러나 이 최적해는 고정추력을 고려하는 해가 아닌 순간추력을 고려하여 얻어지는 해이기 때문에 최적해를 기반으로 추진을 한다 하더라도 추진에 따른 오차가 발생한다. 이러한 오차 또한 두 우주비행체의

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

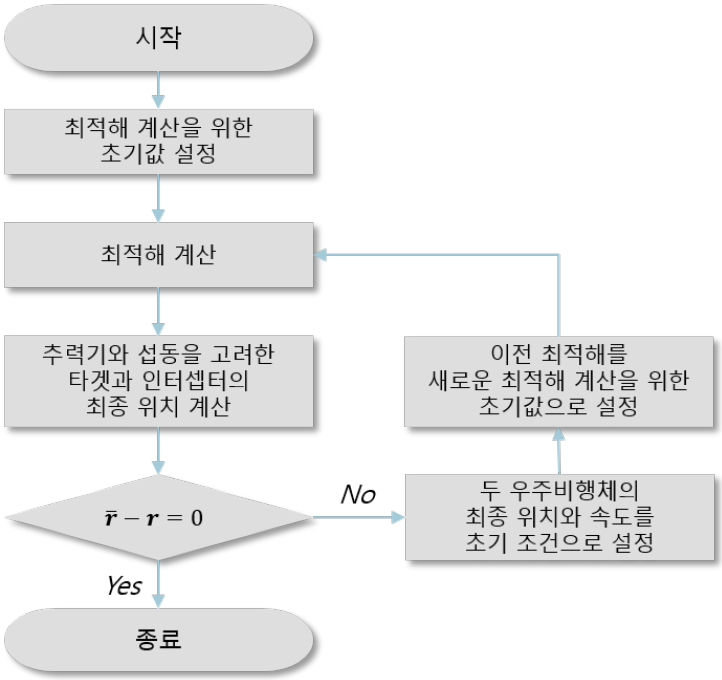


Fig. 15 Flow chart for real-time intercept

최종 위치가 일치할 때 까지 실시간으로 최적해를 구하는 것으로 해결할 수 있다. Fig. 15는 섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격을 위한 전체 흐름도를 보여준다.

최적화 문제를 해결하기 위해 사용되는 미분방정식은 추력기 섭동이 함께 고려되어야만 하며, 이는 Eq. (16)와 Eq. (22)를 이용해 다음과 같이 만들 수 있다.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ m \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \\ \ddot{r}_z \\ \dot{m} \end{bmatrix} \quad f(t, \boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ -\mu \frac{X_1}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^2}{r^2}\left(1 - 5\frac{X_3^2}{r2}\right)\right) + \frac{\mathrm{T}}{m}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta v} \\ -\mu \frac{X_2}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^2}{r^2}\left(1 - 5\frac{X_3^2}{r2}\right)\right) + \frac{\mathrm{T}}{m}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta v} \\ -\mu \frac{X_3}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{r_e^3}{r^3}\left(3 - 5\frac{X_3^2}{r2}\right)\right) + \frac{\mathrm{T}}{m}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta v} \\ -\frac{\mathrm{T}}{I_{sp} g_0} \end{bmatrix} \tag{63}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Table. 4 Specification of thruster

Parameter	Value	Unit
Specific impulse	220	sec
Thrust	30	N
Total mass	150	kg
Mass flow rate	0.014	kg/s

2) 수치 시뮬레이션

본 논문에서 다루고자 하는 문제는 총 세 가지 이다: 1) 공면의 원 궤도 2) 공면의 타원 궤도 3) 비공면의 타원 궤도. 가장 간단하면서도 시스템의 복잡도가 낮은 공면의 원 궤도부터 가장 일반적인 상황이면서도 시스템이 복잡한 비공면의 타원 궤도까지 살펴본다.

문제에서 상대적으로 작은 궤도 반경을 갖는 우주비행체를 인터셉터, 큰 궤도 반경을 갖는 우주비행체를 타겟이라 칭한다. 두 우주비행체의 초기 위치와 속도가 주어져 있다고 가정하며 이 초기조건은 문제에 따라 조금씩 달라진다.

인터셉터는 추력을 이용하여 제어를 하는 능동비행체이고 타겟은 제어를 하지 않고 궤도를 표류하는 수동비행체이다. 인터셉터의 능동제어를 위해 사용하는 추력기는 1960년대부터 사용되기 시작하여, 현재까지 널리 사용되고 있는 하이드라진 추력시스템을 고려한다[29]. 한국항공우주연구원에서는 달탐사를 위해 30N급 하이드라진 추력기 개발이 수행되고 있으며[30], 이를 우주비행체 요격을 위한 추력기로 사용하고자 한다. 해당 추력기의 정보는 Table 4에 나와 있다.

공면의 원 궤도에서의 우주비행체 요격

공면의 원 궤도를 갖는 두 우주비행체 요격 문제는 시스템 복잡도가 가장 낮은 이상적인 상황이라고 할 수 있다. 첫 번째 문제에서 사용되는 초기조건은 다음과 같다: 타겟의 궤도 반경 $\bar{r} = 10600$ km 그리고 인터셉터의 궤도 반경 $r = 7589$ km, 초기 위치에서 인터셉터의 속도 $\Delta v_0 = 7.25$ km/s.

주어진 초기 조건에서 최적화 문제를 풀었을 때, 인터셉터의 최적 에너지 속도변화 Δv_0는 0.5877 km/s이고 4,270초의 비행시간을 갖는다. 이는 J_2 섭동을 고려하지 않고 순간추력을 고려하는 최적해이며, Fig. 16는 이 때의 궤도를 보여준다. 만약 여기서 고정추력과 J_2섭동을 고려한다면, 인터셉터는 0.5877 km/s의 속도변화를 일으키기 위해 2,572초 동안 추진을 해야하며 최종 목적지에서 두 우주비행체는 4,126 km의 위치오차를 갖게 된다. Fig. 17는 이때의 궤도를 보여준다. 여기서 추력벡터

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

(Thtrust vector)는 실시간 유도를 하지 않기 때문에 일정한 방향과 크기를 갖는다.

이 오차를 보정하기 위해 제안하는 방법으로 실시간 유도를 수행하면, 우주비행체는 기존의 4,270초가 아닌 9,040초의 비행시간을 갖게 되지만 최종 위치에서 두 우주비행체의 위치오차가 4,126 km에서 0 km로 완전히 일치하게 된다. 이때 사용되는 연료의 양은 약 125 kg이다. Fig. 18은 실시간 유도를 했을 때와 안했을 때의 비행시간에 따른 두 우주비행체의 위치오차를 로그 스케일로 보여주고 있다. 이 그림을 통해 유도를 하지 않을경우 위치오차가 줄어들지 않지만, 실시간 유도를 했을 경우 위치오차가 감소하는 것을 알 수 있다. Fig. 19는 비행시간에 따른 각 방향의 추력을 보여준다. 약 3,500초부터 추력의 방향이 대칭성을 이루는 것을 볼 수 있는데, 이는 최적해로 얻어진 속도변화의 크기가 추력보다 작아지면서 발생하는 일종의 채터링(Chattering) 현상이다. Fig. 20는 z 방향의 추력을 일부분 확대한 것으로 채터링 현상을 보여주고 있다. Fig 21은 최종적인 요격궤도를 보여준다. 여기서 추력벡터는 매 순간 요구되는 속도변화의 방향과 크기를 나타낸다. 보이는 바와 같이 시간이 지남에 따라 방향이 바뀌며 크기가 줄어드는 것을 알 수 있다. 이 추력벡터는 두 우주비행체가 만나는 순간까지 계속 계산되지만 어느 순간부터 요구되는 속도변화가 매우 작아지면서 해당 그래프에는 보이지 않게 된다.

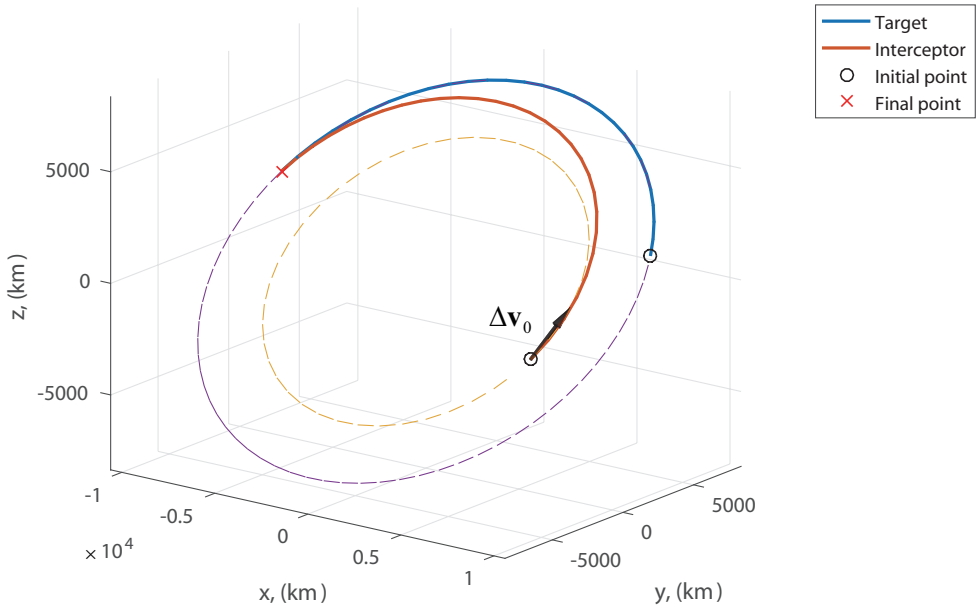


Fig. 16 Optimal intercept trajectory between coplanar circle orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

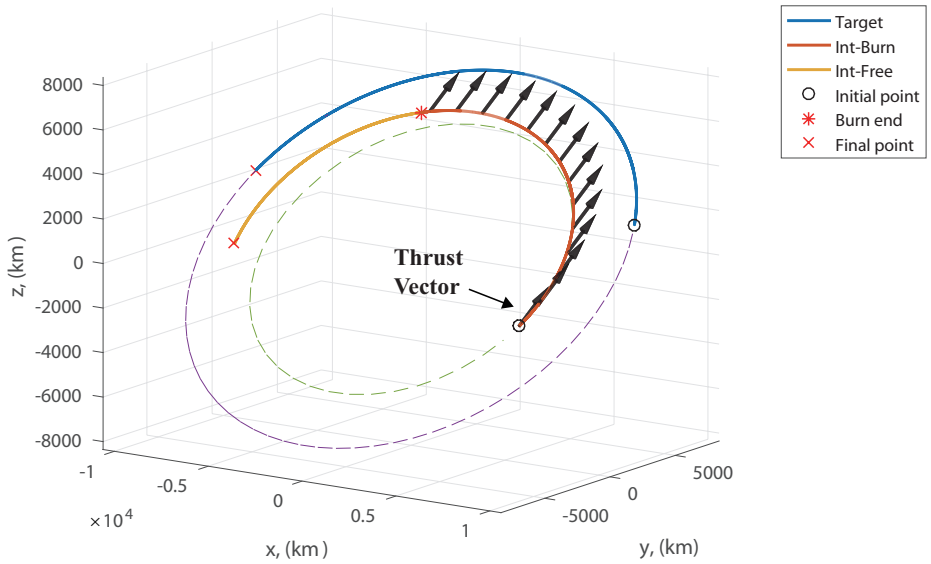


Fig. 17 Intercept trajectory between coplanar circle orbits

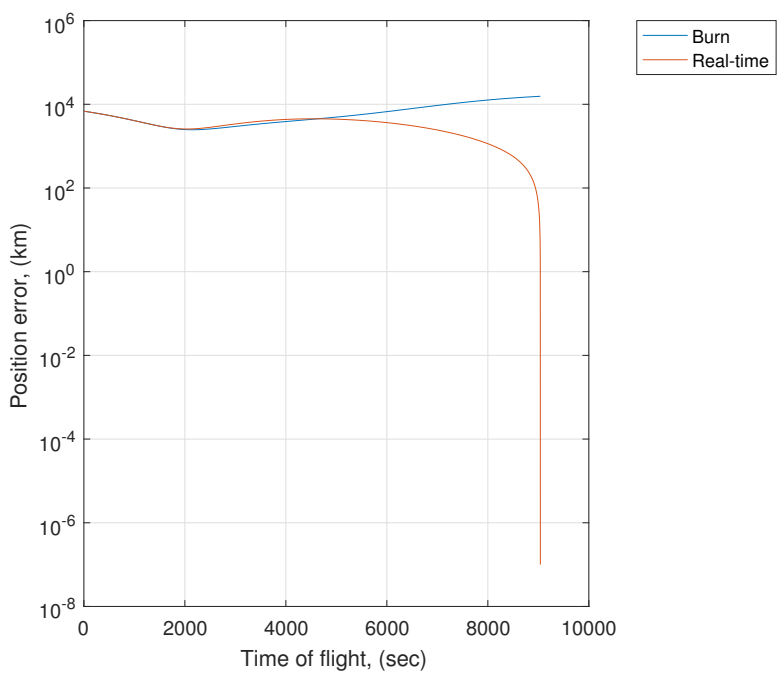


Fig. 18 Position error with respect to time-of-flight between coplanar circle orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

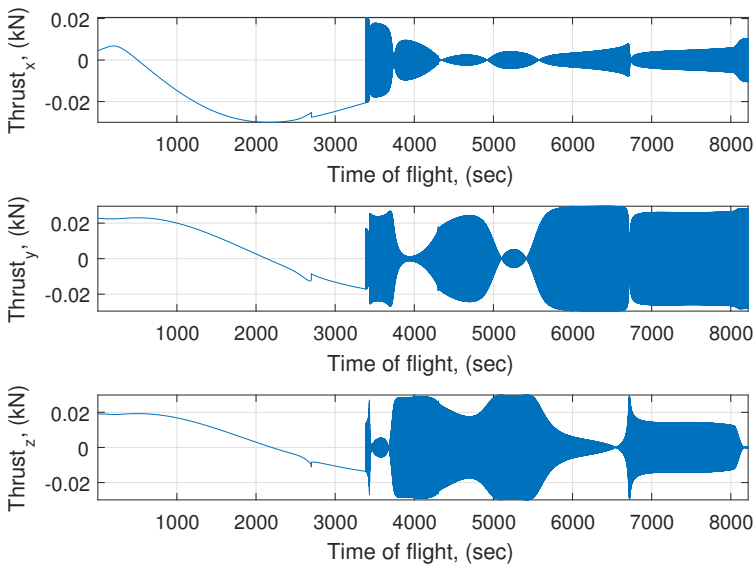


Fig. 19 Thrust of each direction with respect to time-of-flight between coplanar circle orbits.

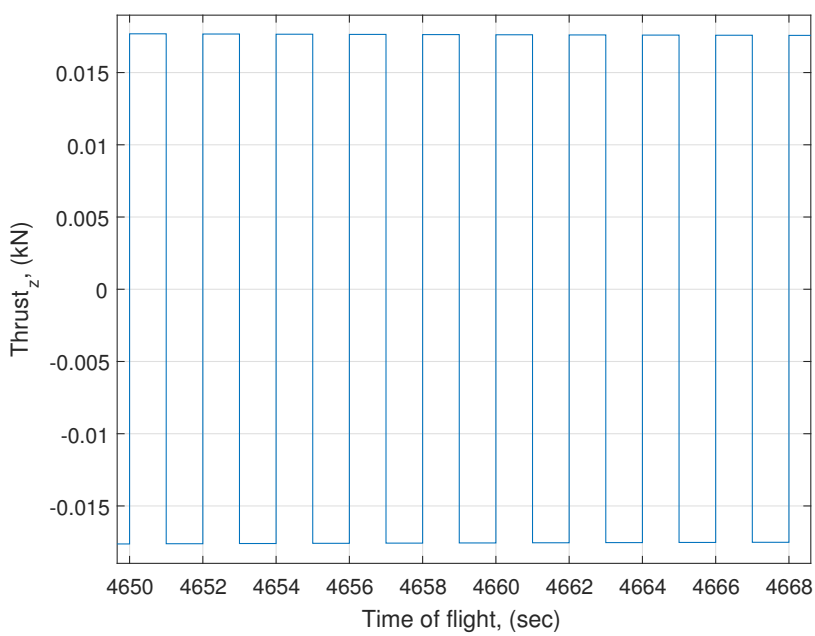


Fig. 20 Part of thrust of z-axis direction

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

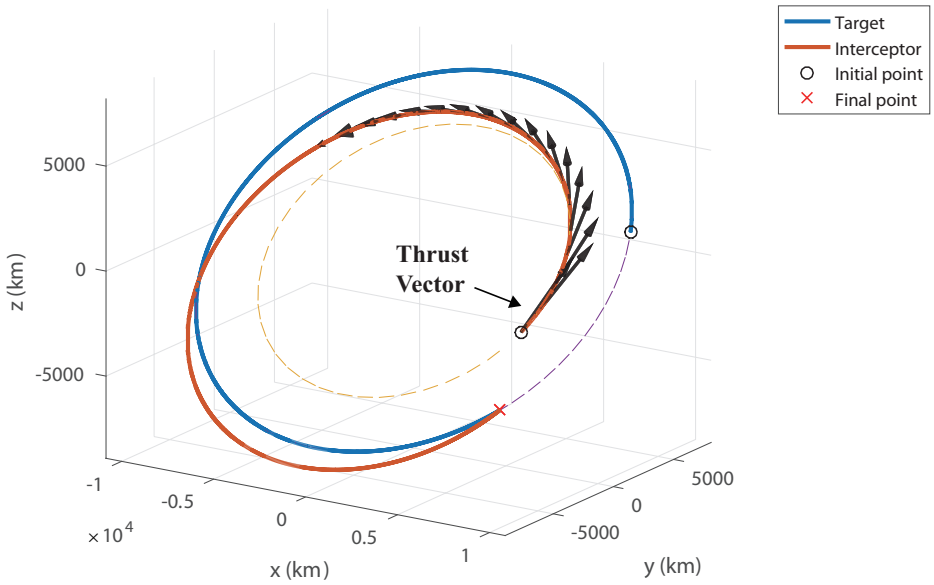


Fig. 21 Real-time intercept trajectory between coplanar circle orbits

공면의 타원 궤도에서의 우주비행체 요격

두 번째 문제는 첫 번째 문제보다 복잡한 시스템을 갖는 공면의 타원 궤도에서의 우주비행체 요격 문제를 다룬다. 두 번째 문제에서 사용된 두 우주비행체의 초기조건은 Table 5에 정리되어 있다.

이와 같은 초기조건에서 인터셉터와 타겟이 만나기 위해서는 0.1428 km/s의 순간적인 속도변화와 6,729초의 비행시간이 필요하다. 이 최적해 또한 J_2 섭동을 고려하지 않고 순간추력을 가정하였을 때 얻어진 해 이며, Fig. 22과 같은 궤도를 갖는다. 이 최적해를 고정추력과 J_2 섭동이 고려된 시스템에 적용한다면, 인터셉터는 0.1428 km/s의 속도변화를 발생시키기 위해 691초의 추진시간을 필요로하게 되며, 최종 위치에서 두 우주비행체는 288 km의 위치 오차를 갖게 된다. Fig. 23은 얻어진 최적해를 고정추력과 J_2를 고려한 시스템에 적용했을 때의 궤도를 보여준다. 첫 번째 예제와 마찬가지로 실시간 유도가 포함되어 있지 않으므로 추력벡터는 변하지 않는다.

위치오차를 보정하기 위해 실시간 유도를 진행하였으며, Table 6에 정리되어 있다. 비행시간은 6,729초에서 6,707초로 변하였으며, 약 93.24 kg의 연료가 소모된다. 실시간 유도를 했을 때와 안했을 때의 비행시간에 따른 두 우주비행체의 위치오차 변화는 Fig. 24에 나와있다. 이 그림은 두 우주비행체의 위치 오차가 288 km에서 0.0004 km로 보정되었음을 보여준다. Fig. 25는 시간에 따른 각 방향의 추력 변화를 보여준다. 최종적으로, 인터셉터의 실시간 유도 궤도가 Fig. 26에 나와 있다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Table. 5 Initial condition for the intercept problem between coplanar elliptic orbits

Parameter	**Target**	**Interceptor**	**Unit**
Angular momentum, h	65,000	55,000	km^2/s
Eccentricity, e	0.3	0.6	-
Right ascension, Ω	0	0	Deg.
Inclination, i	20	20	Deg.
Argument of perigee, ω	0	0	Deg.
True anomaly, θ	75	140	Deg.

Table. 6 Results of the intercept problem between coplanar elliptic orbits

Parameter	**Impulse**	**Thrust and J_2**	**Real-time**	**Unit**
Time of flight	6,729	6,729	6,707	sec
Burn time	-	691	6,707	sec
Position error	0	288	0.0004	km
Consumed propellant	-	4.00	93.24	kg

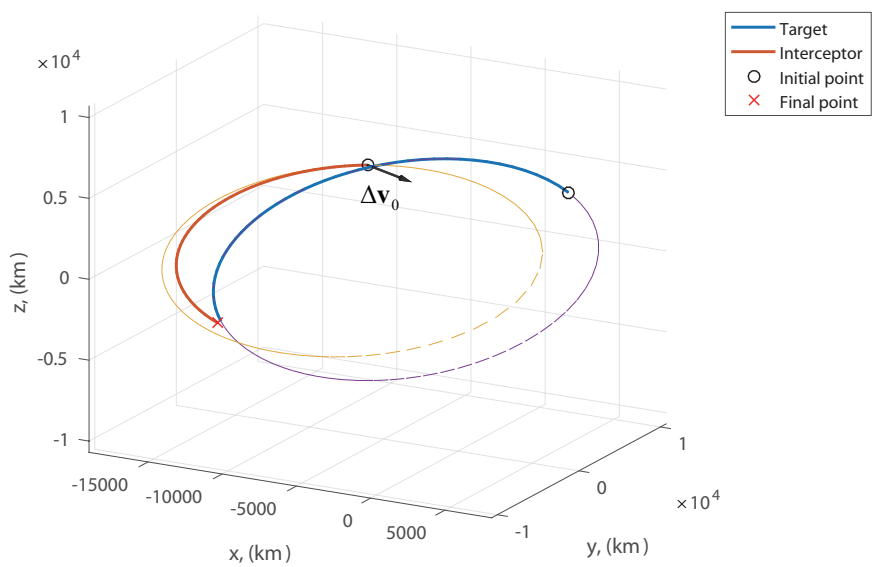


Fig. 22 Optimal intercept trajectory between coplanar elliptic orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

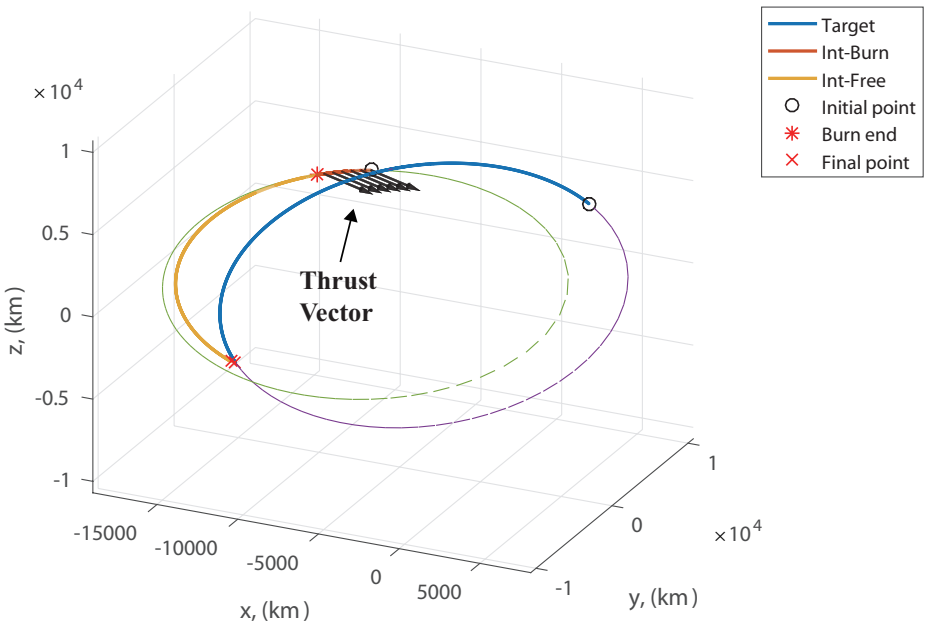


Fig. 23 Intercept trajectory between coplanar elliptic orbits

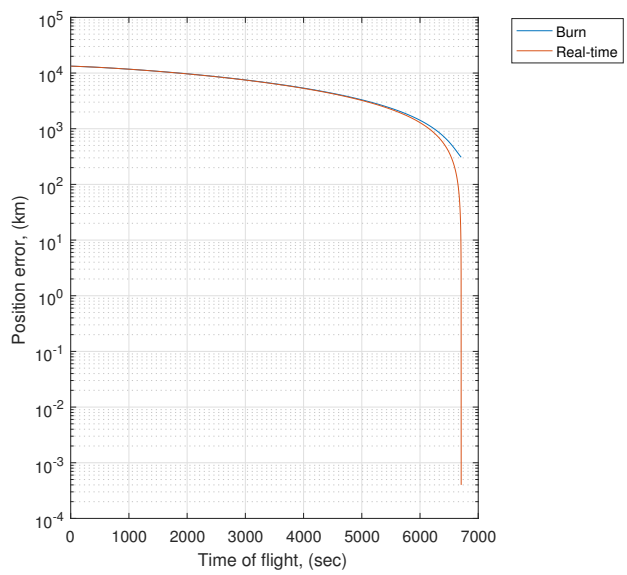


Fig. 24 Position error with respect to time-of-flight between coplanar elliptic orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

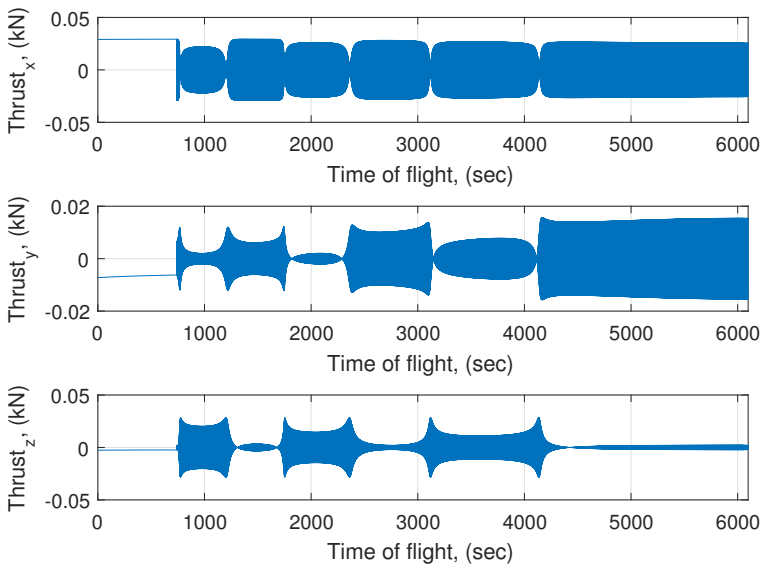


Fig. 25 Thrust of each direction with respect to time-of-flight between coplanar circle orbits

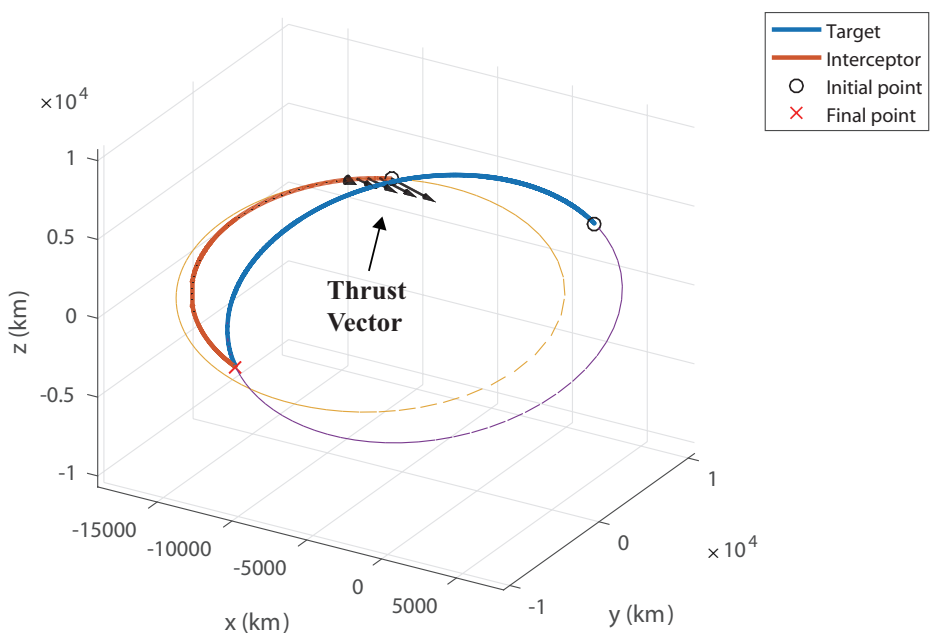


Fig. 26 Real-time intercept trajectory between coplanar elliptic orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

비공면의 타원 궤도에서의 우주비행체 요격

마지막으로 살펴 볼 예제는 가장 일반적인 임무상황이라고 할 수 있는 비공면의 타원 궤도에서의 요격 문제이다. 두 우주비행체의 초기조건이 Table 7에 정리되어 있다.

이와 같은 초기조건에서 인터셉터는 $\Delta\mathbf{v}_0 = [-1.20, -0.03, 0.03]^T$ km/s의 순간 속도변화와 4,936초의 비행을 통해 최적의 에너지로 타겟을 요격할 수 있다. Fig. 27은 이와 같은 상황에서의 인터셉터의 요격 궤도를 보여준다.

그러나 해당 속도변화와 비행시간은 앞에서 다룬 두 예제와 마찬가지로 추진시간과 J_2 섭동을 고려하지 않고 있다. 만약 실제 우주비행체의 임무처럼 두 요소를 고려한다면 인터셉터는 3,072초의 추진시간을 갖을 것이고 최종 위치에서 6,084 km의 위치 오차가 있을 것이다. Fig. 28는 해당 궤도를 보여준다.

이러한 오차의 보정을 위해 실시간 요격을 수행한다. 인터셉터는 타겟을 요격하기위해 4,668초의 시간동안 실시간으로 위치오차를 보정해 나가고 최종 위치에서 약 0.00005 km까지 접근하게 된다. 이때 소모한 연료는 64.89 kg이다. Fig. 29은 비행시간에 따른 두 우주비행체의 위치오차 변화를 보여주며 Fig. 30는 추력 변화를 보여준다. 최종결과는 Table 8에 정리되어 있으며, Fig. 31은 인터셉터의 실시간 요격 궤도를 보여준다.

Table. 7 Initial condition for the intercept problem between non-coplanar elliptic orbits

Parameter	**Target**	**Interceptor**	**Unit**
Angular momentum, h	65,000	55,000	km^2/s
Eccentricity, e	0.2	0.4	-
Right ascension, Ω	20	-10	Deg.
Inclination, i	35	-10	Deg.
Argument of perigee, ω	20	-10	Deg.
True anomaly, θ	-40	30	Deg.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

Table. 8 Results of the intercept problem between non-coplanar elliptic orbits

Parameter	**Impulse**	**Thrust and J_2**	**Real-time**	**Unit**
Time of flight	5,375	5,375	5,366	sec
Burn time	-	3,422	5,366	sec
Position error	0	4,033	0.00005	km
Consumed propellant	-	47.57	74.59	kg

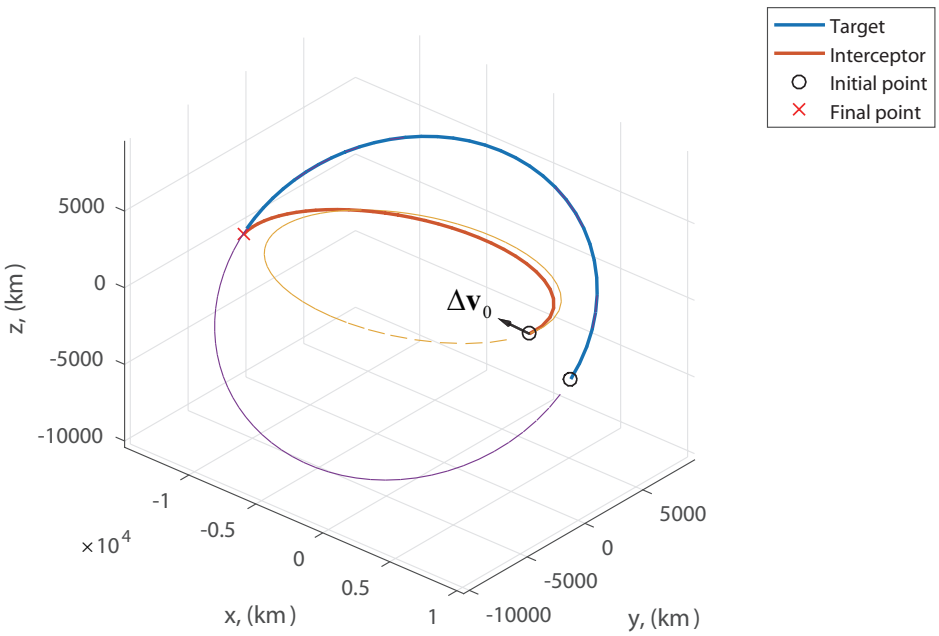


Fig. 27 Optimal intercept trajectory between non-coplanar elliptic orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

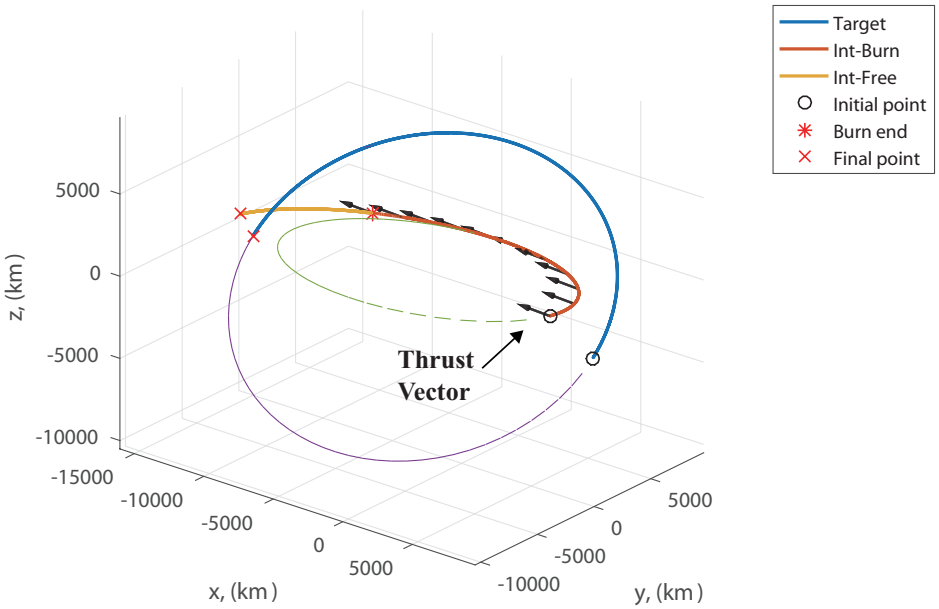


Fig. 28 Intercept trajectory between non-coplanar elliptic orbits

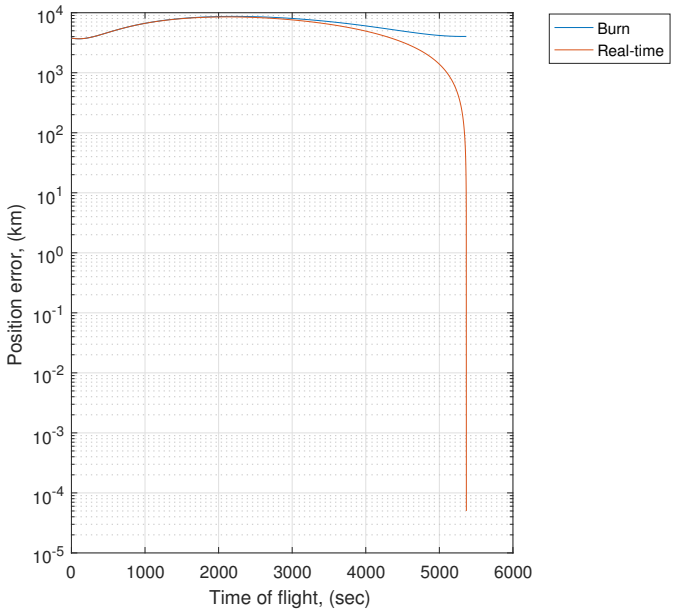


Fig. 29 Position error with respect to time-of-flight between coplanar elliptic orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

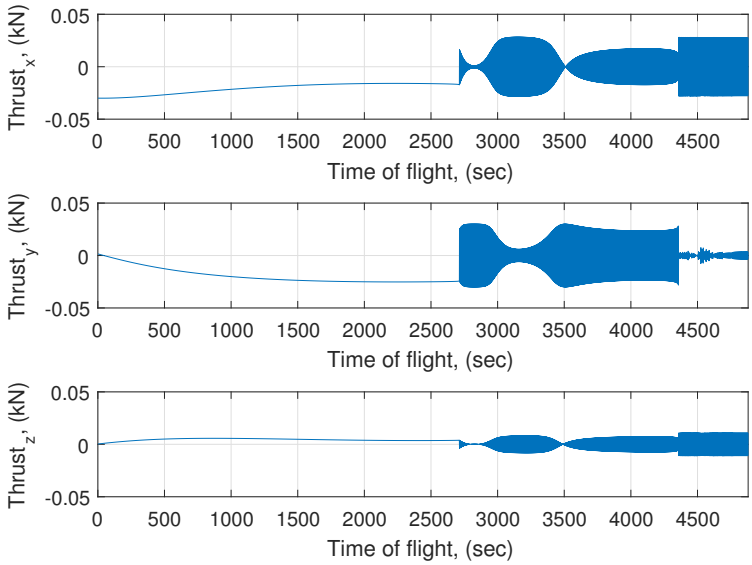


Fig. 30 Thrust of each direction with respect to time-of-flight between coplanar circle orbits

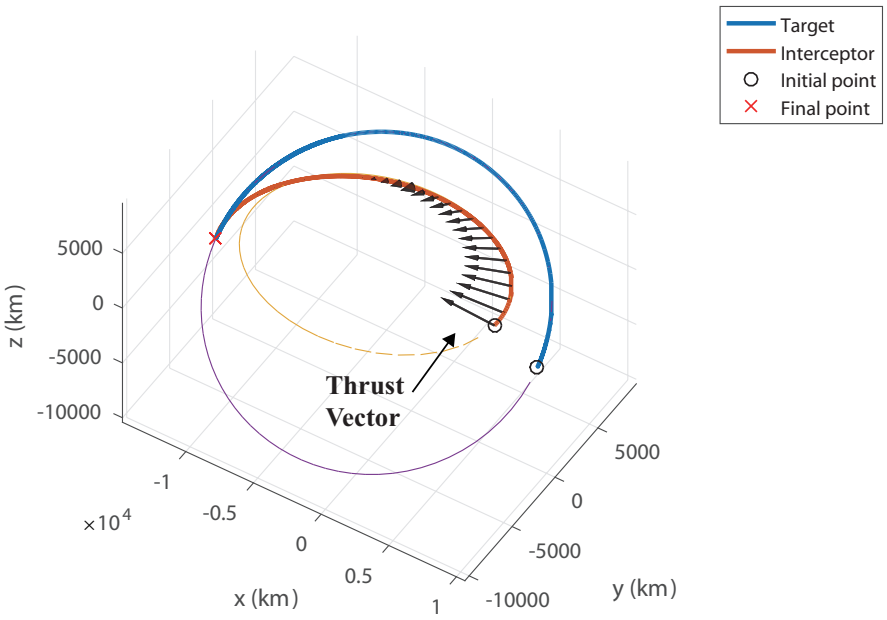


Fig. 31 Real-time intercept trajectory between non-coplanar elliptic orbits

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

III. 결론

본 논문에서는 섭동을 고려한 실시간 우주비행체 요격문제를 다루고 있다. 지구 편평도에 의한 궤도 섭동은 그 복잡성과 상대적으로 작은 영향력 때문에 많은 연구에서 배제되어 왔다. 하지만 보다 정확한 임무 묘사를 위해서는 이러한 중력구배가 고려되어야 한다. 마찬가지로 이러한 중력구배의 영향을 보완하고 정확한 임무 묘사를 위해 순간추력이 아닌 고정추력을 기반으로 한다. 고정추력을 사용한다는 것은 순간추력에서는 요구되지 않는 추진시간을 고려한다는 것을 뜻한다. 즉, 기존의 방법과 비교하여 중력구배와 고정추력에 의한 추진시간이 요격문제를 위해 사용된다는 특징을 갖는다. 이외에도 제한된 궤도가 아닌 임의의 궤도를 고려한다는 점에서 문제 적용의 유연성을 갖는다.

기존의 많은 문제들이 그렇듯 본 논문에서 다루는 문제 또한 최적화 문제를 기반으로 하고 있다. 최적화 문제를 해결하기 위해 성능지표를 설정하고 라그랑지 승수를 이용하여 구속조건을 유도한다. 최종적으로 유도된 구속조건들을 사용하여 수치적으로 최적해를 찾는다. 이러한 최적해는 타겟을 요격하기 위한 추진방향으로써 사용된다. 그러나 이 최적해는 순간추력을 기반으로 얻어진 최적해이기 때문에 고정추력을 사용하는 시스템에 적용하게 되면 그에 따른 오차가 발생하게 된다.

이러한 오차들을 보정하기 위한 방법으로 실시간 유도를 수행한다. 매 순간 최적해를 계산하고 그에 따라 추진방향을 조금씩 바꿔나간다. 이러한 실시간 유도는 인터셉터가 타겟을 요격할 때까지 계속해서 반복 수행된다.

본 논문에서 제안하는 실시간 유도 방법을 검증하기 위해 우주비행체의 임무 상황을 세 가지의 경우로 대별하여 시뮬레이션을 수행하였다. 결과적으로 두 우주비행체가 최종 위치에서 수 미터 단위까지 접근하는 것을 보였다. 이러한 결과는 위치오차가 없는 완전한 요격이라고 하기에는 다소 어려움이 있을 수 있다. 하지만 수치적인 오차를 고려하였을 때 수 미터라는 결과는 충분히 만족스러운 결과라고 할 수 있다. 본 논문에서 제안하는 방법은 비단 요격문제 뿐 아니라 랑데부나 그 밖의 다른 궤도전이 문제에서도 유용하게 사용되리라 생각된다.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

참고문헌

[1] J. T. Betts, "Survey of numerical methods for trajectory optimization," *Journal of Guidance control and dynamics*, vol. 21, no. 2, pp. 193–207, 1998.

[2] R. R. Bate, D. D. Mueller, and J. E. White, *Fundamentals of astrodynamics*. Courier Corporation, 1971.

[3] J. E. Prussing and J.-H. Chiu, "Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 9, no. 1, pp. 17–22, 1986.

[4] J.-H. Chiu, "Optimal multiple-impulse nonlinear orbital rendezvous," 1984.

[5] H. Shen and P. Tsiotras, "Optimal two-impulse rendezvous using multiple-revolution lambert solutions," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 26, no. 1, pp. 50–61, 2003.

[6] G. Zhang, D. Mortari, and D. Zhou, "Constrained multiple-revolution lambert's problem," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 33, no. 6, p. 1779, 2010.

[7] D. F. Lawden, *Optimal trajectories for space navigation*. Butterworths, 1963.

[8] T. Carter and M. Humi, "Fuel-optimal rendezvous near a point in general keplerian orbit," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 10, no. 6, pp. 567–573, 1987.

[9] L. Du, W. Huang, X. Liu, and Y. Li, "Fuel-optimal and low-thrust rendezvous in elliptical orbits with fixed terminal-approach direction," in *Control and Decision Conference (CCDC), 2015 27th Chinese*. IEEE, 2015, pp. 1570–1576.

[10] T. Jayaraman, "Time-optimal orbit transfer trajectory for solar sail spacecraft," *J. GUID. AND CONTR.*, vol. 3, no. 6, pp. 536–542, 1980.

[11] C.-H. Won, "Fuel- or time-optimal transfers between coplanar, coaxial ellipses using lambert's theorem," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 22, no. 4, pp. 536–542, 1999.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[12] Y. H. Kim and D. B. Spencer, "Optimal spacecraft rendezvous using genetic algorithms," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 39, no. 6, pp. 859–865, 2002.

[13] A. Mereta, D. Izzo, and A. Wittig, "Machine learning of optimal low-thrust transfers between near-earth objects," pp. 543–553, 01 2017.

[14] S. Zhao and J. Zhang, "Minimum-fuel station-change for geostationary satellites using low-thrust considering perturbations," *Acta Astronautica*, vol. 127, pp. 296–307, 2016.

[15] J. Ries, R. Eanes, C. Huang, B. Schutz, C. Shum, B. Tapley, M. Watkins, and D. Yuan, "Determination of the gravitational coefficient of the earth from near-earth satellites," *Geophysical research letters*, vol. 16, no. 4, pp. 271–274, 1989.

[16] J. P. Vinti, "Zonal harmonic perturbations of an accurate reference orbit of an artificial satellite," *J. Res. NBS B*, vol. 67, pp. 191–222, 1963.

[17] H. D. Curtis, *Orbital mechanics for engineering students.* Butterworth-Heinemann, 2013.

[18] H. Leeghim and B. A. Jaroux, "Energy-optimal solution to the lambert problem," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 33, no. 3, p. 1008, 2010.

[19] A. E. Bryson, *Applied optimal control: optimization, estimation and control.* CRC Press, 1975.

[20] D. E. Goldberg and J. H. Holland, "Genetic algorithms and machine learning," *Machine Learning*, vol. 3, no. 2, pp. 95–99, 1988.

[21] D. E. Goldberg *et al.*, "A note on boltzmann tournament selection for genetic algorithms and population-oriented simulated annealing," *Complex Systems*, vol. 4, no. 4, pp. 445–460, 1990.

[22] D. Pham and G. Jin, "Genetic algorithm using gradient-like reproduction operator," *Electronics Letters*, vol. 31, no. 18, pp. 1558–1559, 1995, doi: 10.1049/el:19951092.

[23] A. H. Wright *et al.*, "Genetic algorithms for real parameter optimization," *Foundations of genetic algorithms*, vol. 1, pp. 205–218, 1991.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

[24] Z. Michalewicz and M. Schoenauer, "Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems," *Evolutionary computation*, vol. 4, no. 1, pp. 1–32, 1996.

[25] L. J. Eshelman and J. D. Schaffer, "Real-coded genetic algorithms and interval-schemata," in *Foundations of genetic algorithms*. Elsevier, 1993, vol. 2, pp. 187–202.

[26] L. Davis, "Handbook of genetic algorithms," 1991.

[27] C. Z. Janikow and Z. Michalewicz, "An experimental comparison of binary and floating point representations in genetic algorithms." in *ICGA*, 1991, pp. 31–36.

[28] K. A. De Jong, "Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems," 1975.

[29] S.-K. Kim, J.-W. Chae, S.-H. Won, and H.-Y. Jun, "Status and Prospect of Spacecraft Propulsion System," *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, vol. 44, pp. 695–701, 2016.

[30] S. K. Kim, S. H. Won, H. D. Kam, J. H. Lee, J. W. Lee, and H. Y. Jun, "A Development of 30N Class Hydrazine Thruster DM," vol. 2. The Korean Society of Propulsion Engineers, 2015, pp. 173–176.

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

부록

부록에서는 최적 에너지 우주비행체 요격조건인 Eq. 49의 편미분들을 정리하였다. 해당 식이 요구하는 편미분들은 다음과 같다:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\chi}},\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \chi},\ \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\chi}},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi},\ \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},\ \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_0},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0},\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} \tag{64}$$

먼저, $\bar{\chi}$와 χ에 대한 η의 각각의 편미분은

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\chi}} = \bar{r},\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \chi} = r \tag{65}$$

라그랑지 계수를 기반으로 하는 타겟과 인터셉터의 위치벡터는 다음과 같이 정의 된다.

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{f}\,\bar{\mathbf{r}}_0 + \bar{g}\,\bar{\mathbf{v}}_0 \tag{66}$$

$$\mathbf{r} = f\,\mathbf{r}_0 + g\,\mathbf{v}_0 \tag{67}$$

여기서 각각의 라그랑지 계수는 다음과 같다.

$$\bar{f} = 1 - \frac{\bar{a}}{\bar{r}_0}\left(1 - \cos\frac{\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{a}}}\right) \tag{68}$$

$$\bar{g} = t - \frac{\bar{a}}{\sqrt{\mu}}\left(\bar{\chi} - \sqrt{\bar{a}}\sin\frac{\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{a}}}\right) \tag{69}$$

$$f = 1 - \frac{a}{r_0}\left(1 - \cos\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{70}$$

$$g = t - \frac{a}{\sqrt{\mu}}\left(\chi - \sqrt{a}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{71}$$

우선, $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\chi}}$과 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi}$는

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{\chi}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\chi}}\bar{\mathbf{r}}_0 + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\chi}}\bar{\mathbf{v}}_0 \tag{72}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} = \frac{\partial f}{\partial \chi}\mathbf{r}_0 + \frac{\partial g}{\partial \chi}\left(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0\right) \tag{73}$$

여기서 범용변수에 대한 랑그랑지 계수들의 편미분은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\chi}} = -\frac{\sqrt{\bar{a}}}{\bar{r}_0}\sin\frac{\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{a}}} \tag{74}$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\chi}} = -\frac{\bar{a}}{\sqrt{\mu}}\left(1 - \cos\frac{\bar{\chi}}{\sqrt{\bar{a}}}\right) \tag{75}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = -\frac{\sqrt{a}}{r_0}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}} \tag{76}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \chi} = -\frac{a}{\sqrt{\mu}}\left(1 - \cos\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{77}$$

이와 유사하게 $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t}$와 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$는

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} = \bar{\mathbf{v}}_0,\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0 \tag{78}$$

다음으로, 속도변화 벡터 $\Delta\mathbf{v}_0$에 대한 성능지Table J의 편미분은 간단하게 구할 수 있다.

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta\mathbf{v}_0} = \Delta\mathbf{v}_0^T \tag{79}$$

인터셉터의 장반경 a는 속도변화에 대한 함수이다. 따라서 $\Delta\mathbf{v}_0$에 대한 $\mathbf{r}$의 편미분은 연쇄법칙(Chain rule)으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta\mathbf{v}_0} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \Delta\mathbf{v}_0}\mathbf{r}_0 + \frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \Delta\mathbf{v}_0}\left(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0\right) + gI_{3\times3} \tag{80}$$

여기서 $I_{3\times3}$ 3×3 단위행렬이며, a에 대한 라그랑지 계수들의 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{1}{r_0}\left(1 - \cos\frac{\chi}{\sqrt{a}} - \frac{\chi}{2\sqrt{a}}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{81}$$

$$\frac{\partial g}{\partial a} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\chi - \frac{3\sqrt{a}}{2}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}} + \frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \tag{82}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta\mathbf{v}_0} = \frac{2a^2}{\mu}\left(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0\right)^T \tag{83}$$

Collection @ chosun

조선대학교
CHOSUN UNIVERSITY

마지막으로, 속도변화 벡터에 대한 η_2의 편미분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} = \frac{\partial \eta_2}{\partial a}\frac{\partial a}{\Delta \mathbf{v}_0} + \frac{a}{\sqrt{\mu}}\left(1 - \cos\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right)\mathbf{r}_0^T \tag{84}$$

여기서

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_2}{\partial a} &= \chi - \sqrt{a}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}} + \frac{a}{2}\left(\frac{\chi}{a}\cos\frac{\chi}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{r}_0^T\left(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0\right)}{\sqrt{\mu}}\left(1 - \cos\frac{\chi}{\sqrt{a}} - \frac{\chi}{2\sqrt{a}}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right) + \frac{r_0}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\chi}{\sqrt{a}} - \frac{\chi}{a}\cos\frac{\chi}{\sqrt{a}}\right)\end{aligned} \tag{85}$$

Collection @ chosun