2015년 2월

박사학위 논문

Assumed Mode Method를 이용한 연결구조물 경계조건 및 고유진동수 규명에 관한 연구

조선대학교 대학원

선박해양공학과

박 정 희

Assumed Mode Method를 이용한 연결구조물 경계조건 및 고유진동수 규명에 관한 연구

The investigation on the boundary conditions and natural frequencies of connected structures using assumed mode method

2015년 2월

조선대학교 대학원

선박해양공학과

박 정 희

Assumed Mode Method를 이용한 연결구조물 경계조건 및 고유진동수 규명에 관한 연구

지도교수 : 윤 덕 영

이 논문을 공학 박사학위신청 논문으로 제출함

2015년 2월

조선대학교 대학원

선박해양공학과

박 정 희

박정희의 박사학위논문을 인준함

위원장	전남도립대학교	교 수	김 대 원 (인)
위 원	조선대학교	교 수	이 귀 주 (인)
위 원	조선대학교	교 수	박 제 웅 (인)
위 원	조선대학교	교 수	윤 덕 영 (인)
위 원	전남도립대학교	교 수	김 종 명 (인)

2015년 2월

조선대학교 대학원

CONTENTS

List of Tables

List of Figures

ABSTRACT

The investigation on the boundary conditions and natural frequencies of connected structures using assumed mode method

Park Jeong Hee
Advisor : Prof. Yun Duck-Young, Ph.D.
Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Graduate School of Chosun University

Many studies using the assumed mode method have been found for the free vibration analysis of stiffened plate with known elastic boundary conditions.

However many local structures such as tank edges and equipment foundations consist of connected structures and it is very difficult to find suitable elastic boundary conditions.

In this study combined polynomials which satisfy simply boundary conditions and fixed boundary conditions are proposed. The proposed method has been applied to tanks which bounded by bulkhead and a deck. The results of this study shows good agreements with these obtain by the FEA S/W.

제 1 장 서 론

제 1 절 연구배경

선박의 주요 기진원과 인접한 기관실 및 선미에는 선박 운항상 필요한 연료 및 청수Tank 구조가 많이 배치되어 있으며 항상 진동에 노출되어 있다. 건조나 인도 후에 진동 문제가 야기되면 보강비용 및 납기지연 등 선박 품질 측면에서 회사 이미지에 손실을 주게 된다. 따라서 이러한 진동문제를 설계 단계에서 예방하기 위한 방진설계 검토가 필요하고 이런 이유로 각 조선소는 자체적으로 설계실 실정에 맞게 근사 해석적인 진동 계산 프로그램을 개발하여 사용하고 있다.

최근에는 FEM 해석이 진동에 많이 사용되고는 있으나 모델링 시 M/H 증가, 진동이라는 전문성 때문에 여전히 설계 단계에서는 도면 담당자가 공진 검토를 위해서 프로그램을 사용하고 있다.

이러한 근사 해석적 계산 방법의 경우 주로 파형함수로 보 함수를 사용하나 연산과정이 복잡하여 이를 간소화하기 위한 보 함수 성질을 갖는 다항식 연구가 많이 진행되었다. 한 등[4],[5]은 경계 조건이 동일한 Euler보 고유함수[1],[2]를 조합하여 진동파형 함수를 정의하고 판에 대한 진동 해석을 수행하였으며, 김 등[6]은Timoshenko 보 함수 성질을 갖는 다항식을 이용 평판과 보의 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 고유진동 해석을 수행하였다. 정 등[3]은 판 유추 구조계의 경계 조건을 단순 및 고정지지의 중간 상태로 보고 적절한 경계 조건을 부여하기 위해 구조물 양단에 회전탄성 지지 조건을 고려하였으며 전단변형 및 회전관성 효과가 매우 큰 선체 이중저 판넬 구조와 같은 복판 panel 등의 진동 해석을 위해 Timoshenko 보함수 성질을 갖는 다항식 도출 방안을 제시하였다.

이처럼 구조물의 고유진동수 계산에 있어 경계 조건의 결정이 중요한 요소라 적절한 경계 조건을 찾기 위한 연구들이 그동안 많이 수행 되었지만 단일 구조

계산 방법들로 연결 구조물간 지지 조건과 구조물 특성(mass, stiffness)을 고려할 수 있는 고유진동수 계산 방법에 대한 연구는 지금까지 없었던 것 같다.

따라서, 연결구조의 실제 지지조건을 고려하고 부재간 특성을 반영 할 수 있는 고유진동수 계산 방법 마련이 필요한 실정이다.

단일 구조와 연결형 구조의 연결부위가 갖는 지지조건의 기여도를 확인하기 위해 양단 지지 조건을 고정-단순, 고정-고정 지지조건을 갖는 단일 보와 판의 고유진동수와 연결형 보와 판의 고유진동수를 범용 유한요소 프로그램 (PATRAN / NASTRAN)을 사용하여 비교 / 검토하였다.

제 2 절 연구방법

선체 구조는 판넬과 보강재가 연결된 구조물로 직사각형 형상뿐만 아리나 보강재, 질량물, Hole로 이루어진 다양한 형상을 갖는 구조물이다. 하지만 본 연구에서는 구속조건 별 정의된 파형가정함수를 이용한 정식화 방법의 유용성을 확인 하기위해 단순 보과 직각평판에 적용하였다.

이러한 구조물의 신뢰성 있는 고유진동수를 설계 단계에서 도출하여 방진설계를 하기 위해서는 연결된 구조물의 지지조건, 질량과 강성의 조합을 잘 이해하고 반영하는 것이 무엇보다 중요하다. 그래서, 실제 연결 구조물의 연결 구간에서의 거동을 확인하여 파형가정함수를 정의하고, 에너지 산식을 이용 고유진동수를 계산하는 방식으로 다음과 같은 연구를 진행하였다.

1) 단일 & 연결 구조물 Mode별 특성 검토

2) Euler 보와 Timoshenko 보함수 성질을 갖는 다항식을 이용한 방법 설명

3) Euler 보 성질을 갖는 지지조건 별 파형가정함수 정의

4) 판 구조물에 대한 파형가정함수 정의

5) 연결형 구조의 고유진동수 계산을 위한 부분모드 합성법

6) 고정 및 단순지지 파형함수에 의한 고유진동수 계산 방법

7) 자유도계 증가 문제를 해결하기 위한 Mode 합성법을 정립하여 연결 구조에 대한 고유진동수 계산을 별도의 자유도계 증가 없이 계산 할 수 있는 방법을 소개

8) 위에서 설명한 정식화 방법의 유용성 검증을 위해 범용 유한요소 프로그램 (PATRAN / NASTRAN)을 사용하여 비교 / 검토하였다.

제 2 장 근사해석 방법론 고찰

현재 사용되고 있는 프로그램의 해석 방법론을 관련 논문이나 문헌에서 검토해 본 결과, 주로 사용한 방법은 Euler 보 함수나 Timoshenko 보 함수를 이용하여 고유진동수를 계산하였다.

제 1 절 Euler 보 함수를 이용한 고유진동수 계산

보의 횡진동에 대한 미분방정식을 구하기 위해 그림 에 보인 보의 한 요소에 작용하는 힘과 모멘트를 고려하자.

V와 M은 전단과 굽힘 모멘트이고 p(x)는 보와 단위 길이당 힘이다.

y방향 힘을 합하면

$$dV - p(x)dx = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

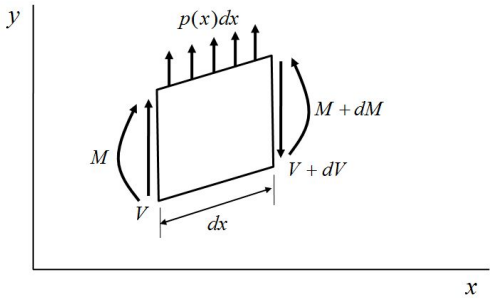


Fig.1 보에 작용하는 힘과 모멘트

요소의 우측면상의 임의점에 관한 모멘트를 합하면

$$dM - Vdx - \frac{1}{2}p(x)(dx)^2 = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

극한 과정에서 이 방정식들은 다음의 관계식을 갖는다.

$$\frac{dV}{dx}=p(x)\,,\quad \frac{dM}{dx}=V \tag{2-3}$$

식 (2-3)의 첫 번째 식은 보의 길이에 따른 전단 변화율이 단위 길이당 하중과 같음을 나타내고, 두 번째 식은 보의 길이에 따른 모멘트의 변화율이 전단과 같음을 의미한다.

식(2-3)으로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dV}{dx}=p(x) \tag{2-4}$$

Fig.1에 표시된 좌표계를 이용하면 다음과 같은 굽힘모멘트와 곡률과의 관계식을 얻을 수 있다.

$$M=EI\frac{d^2y}{dx^2} \tag{2-5}$$

이 관계식을 식(2-4)식에 대입하면

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)=p(x) \tag{2-6}$$

자중하에서 정적 평형위치에 관해 진동하는 보에서는 단위 길이당 힘은 질량과 가속도로 인한 관성력과 같다. Fig.1에 보인 바와 같이 관성력은 p(x)와 같은 방향이므로 조화 운동을 가정하면 다음과 같이 된다.

$$p(x)=\rho w^2 y \tag{2-7}$$

여기서 ρ는 보의 단위 길이당 질량이다. 이 관계를 이용하면 보의 횡진동 방정식은

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\rho w^2 y=0 \tag{2-8}$$

굽힘 강성 EI가 상수인 특별한 경우에 위의 방정식을 다시 쓰면

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}-\rho w^2 y=0 \tag{2-9}$$

그리고

$$\beta^4 = \rho \frac{w^2}{EI} \tag{2-10}$$

을 대입하면 균일보 진동에 대한 4차 미분 방정식을 얻게 된다.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \beta^4 y = 0 \tag{2-11}$$

식(2-11)의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = Acosh\beta x + Bsinh\beta x + Ccos\beta x + Dsin\beta x \tag{2-12}$$

위 결과를 얻기 위해서 가정한 해의 형태는

$y = e^{ax}$ 으로 미분 방정식을 만족하는 경우에는

$a = \pm\beta$, $a = \pm i\beta$

또한, $e^{\pm\beta x} = \cosh\beta x \pm \sinh\beta x$

$e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\sin\beta x$ 이므로 식(2-12) 형태의 해를 구할 수 있다.

식(2-10)으로부터 구한 고유 진동수는 다음과 같이 된다.

$$w_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \tag{2-13}$$

여기서 β_n의 값은 경계 조건에 의존한다. 다음 표는 전형적인 경계 조건에 대한 $(\beta_n l)^2$의 수치를 나타낸다.

Table1 Euler 보의 형상 영향 계수

보 형상	$(\beta_1 l)^2$ 기본 모드	$(\beta_2 l)^2$ 2차 모드	$(\beta_3 l)^2$ 3차 모드
단순지지	9.87	39.5	88.9
외팔보	3.52	22.0	61.7
자유-자유단	22.4	61.7	121.0
고정-고정단	22.4	61.7	121.0
고정-힌지단	15.4	50.0	104.0
힌지-자유단	0	15.4	50.0

Euler 보 방정식을 이용한 고유진동수 계산 방법은 일반해에 대한 복잡성 때문에 잘 사용되지 않고 있으며 Euler 성질을 이용한 다항식을 정리하여 많이 사용하였다.

제 2 절 Timoshenko 보 함수 성질을 갖는 다항식

회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko 보가 조화진동 $y(x,t)=Y(x)e^{iwt}$ $\theta(x,t)=\Theta(x)e^{iwt}$ 을 할 경우 운동방정식은 아래와 같다.

$$\frac{d}{dx}(EI\frac{d\theta}{dx})+KAG(\frac{dy}{dx}-\theta)-J\ddot{\theta}=0 \qquad (2\text{-}14)$$

$$m\ddot{y}-\frac{d}{dx}[KAG(\frac{dy}{dx}-\theta)]-p(x,t)=0 \qquad (2\text{-}15)$$

경계조건식에서,

$$Y(0)=0, Y(l)=0 \qquad (2\text{-}16)$$

$$\theta(0)=\frac{1}{K_{R1}}\theta'(0), \theta(l)=-\frac{1}{K_{R2}}\theta'(l) \qquad (2\text{-}17)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서, $y(x,y)$ 및 $\theta(x,t)$는 각각 보의 횡방향 처짐 변화와 굽힘에 의한 단면회전각이며 E 밑 G는 재료의 인장탄성계수 및 전단탄성계수이고 A, I 및 K는 각각 보의 단면적, 단면 2차 관성모멘트 및 전단계수이다.

$$K_{R1}=\frac{k_{R1}L}{EI} \quad , \qquad K_{R2}=\frac{k_{R2}L}{EI} \qquad (2\text{-}18)$$

이다.

상기 운동방정식에 대해 정 등[]은 Timoshenko 보함수 직교관계식

$$\int_0^l(\rho AY_mY_n+\rho I\Theta_m\Theta_n)dx=0 \quad \text{for } m\neq n$$

$$= 1 \quad \text{for } m=n$$

을 이용하여 Timoshenko 보함수 성질을 갖는 다항식을 구할 수 있다.

이런 Timoshenko 보함수 성질을 이용한 계산 방법 또한 식(2-18)에서 언급한 것과 같이 경계조건에 대한 정확한 설명없이 이미 정의된 값을 사용하는

수준이다. 실제로 Fig.2에서 나타낸 ‘ㄱ’자 형태의 연결 구조물에 대한 고유진동수를 계산하고자 할 때, 기존의 방법은 관심 대상의 구조물을 단순화시키고 양단 경계조건을 탄성지지 조건으로 치환하여 고유진동수를 구하는데 탄성지지 값에 대해서는 아직까지 정확한 설명을 하지 못하고 있다.

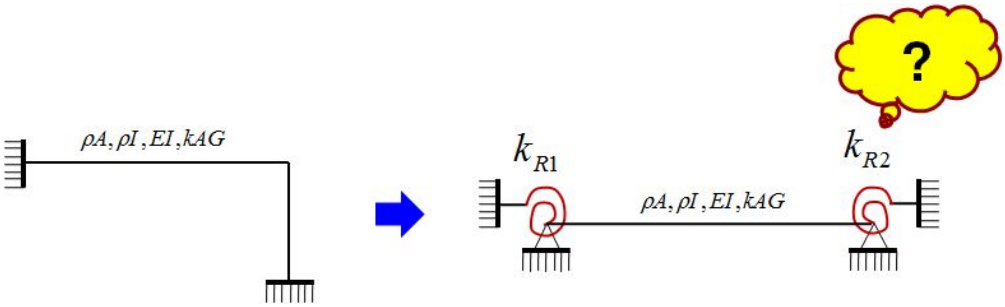


Fig.2 경계조건의 탄성지지화

이러한 제한적인 K값은 계산하고자 하는 구조물의 고유진동수 계산뿐만 아니라 모드 변화에 능동적이지 못하다는 문제점이 있다.

제 3 장 단일 및 연결 구조의 Mode별 특성 검토

제 1 절 보 구조의 고유진동수 비교

연결 구조물의 고유진동수를 계산하고자 할 때 연결 부분에서의 경계조건을 정의하기 어려워 보통 단일 구조로 이상화하고 경험식 등을 적용하여 고유진동수를 계산하는데, 이러한 접근 방식은 신뢰성 있는 결과를 얻는데 한계가 있음을 알 수 있다.

Fig.1은 단일 보와 연결형 보 구조를 유한요소 프로그램을 이용하여 간단한 해석을 수행하여 그 차이를 확인하였다.

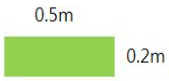


Table 1. 보의 물성치

Elastic Modulus [N/m^2]	Density [kg/m^3]
2.1E11	7850

Table 2. 보의 길이

Name	Length [m]
L_1	5
L_2	5
L_A	5
L_B	2.5

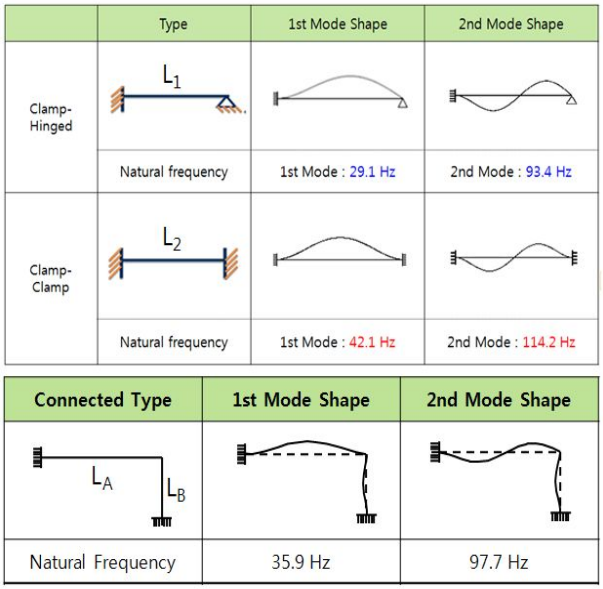


Fig.3 단일 vs 연결 보 FEA 결과 비교

연결형 구조에서 LB의 길이에 따라 단순과 고정지지 조건의 기여도가 결정되고 위 결과에서 LA : LB의 길이비가 2:1인 경우 연결 구조의 고유진동수는 단일 구조물의 단순과 고정지지 조건의 중간 값을 나타내고 있다.

제 2 절 판 구조의 고유진동수 비교

Fig.8은 단일 판과 연결 판 구조의 고유진동수와 고유모드를 유한요소 프로그램(PATRAN / NASTRAN)을 통해 수행한 결과이다. 연결형 판 구조물에서도 보 구조물의 경우와 같은 현상을 보여주고 있다.

연결형 판 구조물 중 주 구조물의 1,2차 고유진동수는 단일 판의 고정-단순지지와 고정-고정지지 조건의 중간 상태에 있음을 확인 할 수 있다.

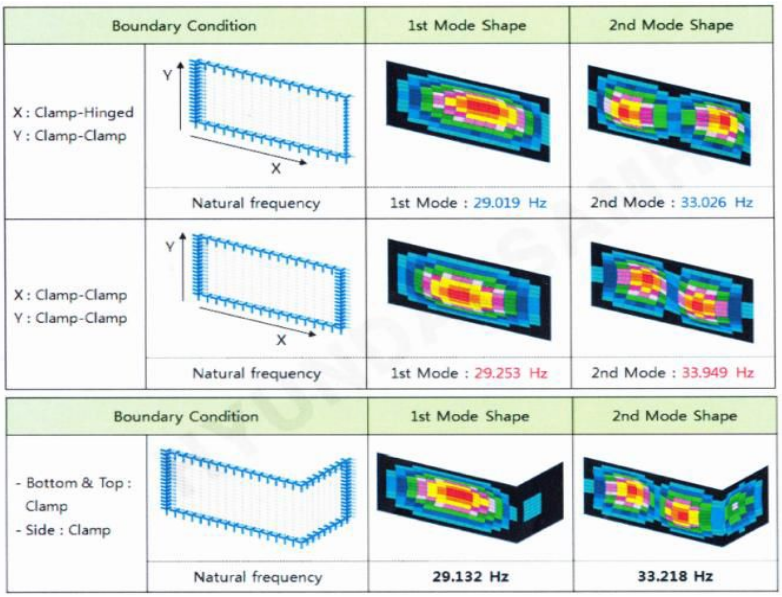


Fig.4 단일 및 연결 판넬 구조의 FEA 결과 비교

따라서, 본 연구에서는 단일구조 계산방식이 갖고 있는 지지조건의 한계를 고려하여 연결구조에 적용, 고유진동수를 계산하고자 한다.

따라서, 본 연구에서는 연결구조의 보나 판의 고유진동수 계산을 위해서 지지조건 별 특성을 갖는 파형함수를 정의하고 이들을 조합함으로써 실제적인 지지조건을 만족시키는 방법을 찾고자 하였다.

제 4 장 Euler 보 성질을 갖는 파형가정함수

제 1 절 지지조건 별 보의 파형가정함수

1. 고정-고정 지지조건의 보 파형가정함수

지지조건 별 Beam 파형함수는 Euler 보 함수 성질을 갖는 다항식으로 Euler 4차 방정식을 사용하였으며, 고정-고정 지지조건의 함수를 $\psi(x)$ 라 정의하고 양단 경계 조건을 이용하여 정리하여 기본 파형 함수를 얻었다.

수식 전개의 편리성을 위하여 무차원($\xi = \frac{x}{l}$)화 하였다.

$$\psi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \qquad (0 \leq \xi \leq 1) \qquad (4\text{-}1)$$

양단 경계조건 : $\psi(0) = 0, \psi(1) = 0, \psi'(0) = 0, \psi'(1) = 0$

$\psi(0) = 0 \rightarrow \ a_0 = 0$

$\psi(1) = 0 \rightarrow \ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

$\psi'(0) = 0 \rightarrow \ a_1 = 0$

$\psi'(1) = 0 \rightarrow \ 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0$

계수들을 정리하면, $a_2 = a_4$, $a_3 = -2a_4$를 (4-1)식에 대입하면

$\psi_1(\xi) = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2$

$$\psi_1(\xi) = \xi^2(\xi - 1)^2 \qquad (4\text{-}2)$$

고정-고정 지지조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 에너지 산식을 적용하여 고유진동수 계산시 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리하여 표현하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \qquad (-1 \leq \eta \leq 1) \qquad (4\text{-}3)$$

$$\psi_1(\eta) = A_1(\eta+1)^2(\eta-1)^2$$

$$\psi_1(\eta) = A(\eta^4 - 2\eta^2 + 1) \tag{4-4}$$

2차 모드 이상의 고정-고정 지지조건의 파형 함수는 (4-5)식을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\psi_k = A_k[\psi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \psi_{k-i}] \tag{4-5}$$

A_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값

(4-5)식에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i=j=1$에 만족하는 값으로

$$\int_{-1}^{1} \psi_i \cdot \psi_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \tag{4-6}$$

여기서, I, j는 진동차수이고, δ_{ij}는 Kronecker delta이다.

고정-고정 지지조건의 2차 모드 파형함수는

$$\psi_2(\eta) = A_2[\psi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \psi_1] \tag{4-7}$$

(4-7)식 양변에 ψ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot d\eta = A_2 \int_{-1}^{1} [\psi_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \psi_1^2] d\eta = 0 \tag{4-8}$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^{1} \psi_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \psi_1^2 \cdot d\eta} \tag{4-9}$$

(4-7)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용 A_2 계수를 구할 수 있다.

$$A_2^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \psi_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\psi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \psi_1]^2 \cdot d\eta} \tag{4-10}$$

A_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값

(4-9),(4-10)식을 (4-7)식에 대입하면 2차모드 파형함수에 필요한 계수를 모두 구할 수 있다.

고정-고정 지지조건의 3차모드 파형함수는,

$$\psi_3(\eta) = A_3[\psi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_2 - a_{32} \cdot \psi_1] \tag{4-11}$$

양변에 ψ_2를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \psi_2 \cdot \psi_3 \cdot d\eta = A_3 \int_{-1}^{1} [\psi_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_2^2 - a_{32} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2] d\eta = 0 \tag{4-12}$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{32} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^{1} \psi_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \psi_2^2 \cdot d\eta} \tag{4-13}$$

(4-11)식 양변에 ψ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \psi_1 \cdot \psi_3 \cdot d\eta = A_3 \int_{-1}^{1} [\psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 - a_{32} \cdot \psi_1^2] d\eta = 0 \tag{4-14}$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{31} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^{1} \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \psi_1^2 \cdot d\eta} \tag{4-15}$$

(4-11)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 적용 A_3 계수를 구할 수 있다.

$$A_3^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \psi_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\psi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \psi_2 - a_{32} \cdot \psi_1]^2 \cdot d\eta} \tag{4-16}$$

A_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수

4차 이상 모드함수는 (4-5)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

2. 고정-단순 지지조건의 보 파형가정함수

고정-단순 지지조건의 함수를 $\phi(x)$ 라 정의하고 양단 경계 조건을 이용하여 정리하면 기본 파형 함수를 얻을 수 있다.

수식 전개의 편리성을 위하여 무차원($\xi = \frac{x}{l}$)화 하였다.

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \qquad (0 \leq \xi \leq 1) \qquad (4\text{-}17)$$

양단 경계조건 : $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 0, \phi(1) = 0, \phi''(1) = 0$

$\phi(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$

$\phi'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$

$\phi(1) = 0 \rightarrow a_2 + a_3 + a_4 = 0$

$\phi''(1) = 0 \rightarrow 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 0$

계수들을 정리하면, $a_2 = \frac{3}{2}a_4$, $a_3 = -\frac{5}{2}a_4$를 (4-17)식에 대입하면

$$\phi_1(\xi) = \xi^4 - \frac{5}{2}\xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2$$

$$\phi_1(\xi) = \xi(\xi - 1)(2\xi^2 - 3\xi) \qquad (4\text{-}18)$$

(4-18)식 고정-단순 지지조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다.

그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형 함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \qquad (-1 \leq \eta \leq 1) \qquad (4\text{-}19)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1\left(\frac{\eta+1}{2}\right)^2\left(\frac{\eta-1}{2}\right)(\eta - 2)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1(\eta^4 - \eta^3 - 3\eta^2 + \eta + 2) \qquad (4\text{-}20)$$

2차 모드 이상의 고정-단순 지지 조건의 파형 함수는 (4-21)식을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\phi_k = B_k[\phi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \phi_{k-i}] \tag{4-21}$$

B_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값

(4-21)식에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i=j=1$에 만족하는 값으로

$$\int_{-1}^{1} \phi_i \cdot \phi_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \tag{4-22}$$

여기서, I, j는 진동차수이고, δ_{ij}는 Kronecker delta이다.

고정-단순 지지조건의 2차 모드 파형함수는

$$\phi_2(\eta) = B_2[\phi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1] \tag{4-23}$$

(4-23)식 양변에 ϕ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = B_2 \int_{-1}^{1} [\phi_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1^2] d\eta = 0 \tag{4-24}$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^{1} \phi_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \phi_1^2 \cdot d\eta} \tag{4-25}$$

(4-23)식 양변을 제곱하고 직교관계식을 이용 B_2 계수를 구할 수 있다.

$$B_2^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \phi_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\phi_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \phi_1]^2 \cdot d\eta} \tag{4-26}$$

B_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값

(4-25),(4-26)식을 (4-23)식에 대입하면 2차모드 파형함수에 필요한 계수를 모두 구할 수 있다.

고정-단순 지지조건의 3차모드 파형함수는,

$$\phi_3(\eta) = B_3[\phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1] \tag{4-27}$$

양변에 ϕ_2를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \phi_2 \cdot \phi_3 \cdot d\eta = B_3 \int_{-1}^{1} [\phi_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2^2 - a_{32} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2] d\eta = 0 \qquad (4\text{-}28)$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{32} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^{1} \phi_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \phi_2^2 \cdot d\eta} \qquad (4\text{-}29)$$

(4-27)식 양변에 ϕ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \phi_1 \cdot \phi_3 \cdot d\eta = B_3 \int_{-1}^{1} [\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1^2] d\eta = 0 \qquad (4\text{-}30)$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{31} \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^{1} \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \phi_1^2 \cdot d\eta} \qquad (4\text{-}31)$$

(4-27)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 이용 B_3 계수를 구할 수 있다.

$$B_3^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \phi_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\phi_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \phi_2 - a_{32} \cdot \phi_1]^2 \cdot d\eta} \qquad (4\text{-}32)$$

B_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수

4차 이상 모드함수는 (4-23)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

3. 단순-고정 지지조건의 보 파형가정함수

단순 -고정 지지조건의 함수를 $\gamma(x)$ 라 정의하고 양단 경계 조건을 이용하여 정리하면 기본 파형 함수를 얻을 수 있다.

수식 전개의 편리성을 위하여 무차원($\xi = \frac{x}{l}$)화 하였다.

$$\gamma(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \qquad (0 \leq \xi \leq 1) \qquad (4\text{-}33)$$

양단 경계조건 : $\gamma(0) = 0, \gamma''(0) = 0, \gamma(1) = 0, \gamma'(1) = 0$

$\gamma(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$

$\gamma''(0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$

$\gamma(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_3 + a_4 = 0$

$\gamma'(1) = 0 \rightarrow a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 0$

계수들을 정리하면, $a_1 = \frac{1}{2}a_4$, $a_3 = -\frac{3}{2}a_4$를 (4-33)식에 대입하면

$$\gamma_1(\xi) = \xi^4 - \frac{3}{2}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi$$

$$\gamma_1(\xi) = \xi(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) \qquad (4\text{-}34)$$

(4-34)식 단순-고정 지지조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \qquad (-1 \leq \eta \leq 1) \qquad (4\text{-}35)$$

$$\gamma_1(\eta) = C_1\left(\frac{\eta+1}{2}\right)\left(\frac{\eta^3 - 3\eta + 2}{4}\right)$$

$$\gamma_1(\eta) = C_1(\eta^4 + \eta^3 - 3\eta^2 - \eta + 2) \qquad (4\text{-}36)$$

2차 모드 이상의 단순-고정 지지 조건의 파형 함수는 아래 (4-37)식을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\gamma_k = C_k[\gamma_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \gamma_{k-i}] \tag{4-37}$$

B_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값

(4-37)식에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i=j=1$에 만족하는 값으로

$$\int_{-1}^{1} \gamma_i \cdot \gamma_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \tag{4-38}$$

여기서, I, j는 진동차수이고, δ_{ij}는 Kronecker delta이다.

단순-고정 지지조건의 2차 모드 파형함수는

$$\gamma_2(\eta) = C_2[\gamma_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1] \tag{4-39}$$

(4-39)식 양변에 γ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = C_2 \int_{-1}^{1} [\gamma_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1^2] d\eta = 0 \tag{4-40}$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^{1} \gamma_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \gamma_1^2 \cdot d\eta} \tag{4-41}$$

(4-39)식 양변을 제곱하고 직교관계식을 이용 C_2 계수를 구할 수 있다.

$$C_2^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \gamma_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\gamma_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \gamma_1]^2 \cdot d\eta} \tag{4-42}$$

C_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값

(4-41),(4-42)식을 (4-39)식에 대입하면 2차모드 파형함수를 구현 할 수 있다.

단순-고정 지지조건의 3차모드 파형함수는,

$$\gamma_3(\eta) = C_3[\gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1] \tag{4-43}$$

양변에 γ_2를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^{1} [\gamma_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2^2 - a_{32} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2] d\eta = 0 \tag{4-44}$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{32} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^{1} \gamma_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \gamma_2^2 \cdot d\eta} \tag{4-45}$$

(4-43)식 양변에 γ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^{1} [\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1^2] d\eta = 0 \tag{4-46}$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{31} \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^{1} \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \gamma_1^2 \cdot d\eta} \tag{4-47}$$

(4-43)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 이용 C_3 계수를 구할 수 있다.

$$C_3^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \gamma_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\gamma_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \gamma_2 - a_{32} \cdot \gamma_1]^2 \cdot d\eta} \tag{4-48}$$

C_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수

4차 이상 모드함수는 (4-43)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

4. 단순-단순 지지조건의 보 파형가정함수

단순 -단순 지지조건의 함수를 $\theta(x)$ 라 정의하고 양단 경계 조건을 이용하여 정리하면 기본 파형 함수를 얻을 수 있다.

수식 전개의 편리성을 위하여 무차원($\xi = \frac{x}{l}$)화 하였다.

$$\theta(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \qquad (0 \leqq \xi \leqq 1) \qquad (4\text{-}49)$$

양단 경계조건 : $\theta(0) = 0, \theta''(0) = 0, \theta(1) = 0, \theta''(1) = 0$

$\theta(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$

$\theta''(0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$

$\theta(1) = 0 \rightarrow a_1 + a_3 + a_4 = 0$

$\theta''(1) = 0 \rightarrow 2a_1 + 6a_3 + 12a_4 = 0$

계수들을 정리하면, $a_1 = a_4$, $a_3 = -2a_4$를 (4-49)식에 대입하면

$$\theta_1(\xi) = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi$$

$$\theta_1(\xi) = \xi(\xi^3 - 2\xi^2 + 1) \qquad (4\text{-}50)$$

(4-50)식 단순 -단순 지지조건에서의 기본 파형함수를 생성할 수 있다. 그리고, 기함수, 우함수 성질을 이용하여 계산과정의 복잡함을 피하고자 파형함수의 수식을 재정리 하였다.

$$\eta = 2\xi - 1 \qquad (-1 \leqq \eta \leqq 1) \qquad (4\text{-}51)$$

$$\theta_1(\eta) = D_1\left(\frac{\eta+1}{2}\right)\left(\frac{\eta^3 - \eta^2 - 5\eta + 5}{8}\right)$$

$$\theta_1(\eta) = D_1(\eta^4 - 6\eta^2 + 5) \qquad (4\text{-}52)$$

2차 모드 이상의 단순-고정 지지 조건의 파형 함수는 아래 (4-53)식을 사용하여 일반화 할 수 있다.

$$\theta_k = D_k[\theta_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \theta_{k-i}] \tag{4-53}$$

D_k : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수값

(4-53)식에서 구한 파형함수의 운동 방정식에 직교 관계식을 이용하여 2차 및 3차 모드 이상의 파형함수를 구할 수 있다. $i=j=1$에 만족하는 값으로

$$\int_{-1}^{1} \theta_i \cdot \theta_j \cdot d\eta = \delta_{ij} \tag{4-54}$$

여기서, I, j는 진동차수이고, δ_{ij}는 Kronecker delta이다.

단순-고정 지지조건의 2차 모드 파형함수는

$$\theta_2(\eta) = D_2[\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1] \tag{4-55}$$

(4-55)식 양변에 θ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = C_2 \int_{-1}^{1} [\theta_1^2 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \tag{4-56}$$

$$a_{21} = \frac{\int_{-1}^{1} \theta_1^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \theta_1^2 \cdot d\eta} \tag{4-57}$$

(4-55)식 양변을 제곱하고 직교관계식을 이용 D_2 계수를 구할 수 있다.

$$D_2^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \theta_2^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\theta_1 \cdot \eta - a_{21} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \tag{4-58}$$

D_2 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수 값

(4-57),(4-58)식을 (4-55)식에 대입하면 2차 모드 가정파형함수를 구현 할 수 있다.

단순-단순 지지조건의 3차모드 파형함수는,

$$\theta_3(\eta) = D_3[\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1] \tag{4-59}$$

양변에 θ_2를 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = D_3 \int_{-1}^{1} [\theta_2^2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2^2 - a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2] d\eta = 0 \tag{4-60}$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{32} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{31} = \frac{\int_{-1}^{1} \theta_2^2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \theta_2^2 \cdot d\eta} \tag{4-61}$$

(4-59)식 양변에 θ_1을 곱하여 적분하면,

$$\int_{-1}^{1} \theta_1 \cdot \theta_3 \cdot d\eta = C_3 \int_{-1}^{1} [\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1^2] d\eta = 0 \tag{4-62}$$

직교관계식에 의해 $\int_{-1}^{1} a_{31} \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot d\eta = 0$이므로

$$a_{32} = \frac{\int_{-1}^{1} \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \eta \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \theta_1^2 \cdot d\eta} \tag{4-63}$$

(4-59)식 양변을 제곱하여 직교관계식을 이용 D_3 계수를 구할 수 있다.

$$D_3^2 = \frac{\int_{-1}^{1} \theta_3^2 \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} [\theta_2 \cdot \eta - a_{31} \cdot \theta_2 - a_{32} \cdot \theta_1]^2 \cdot d\eta} \tag{4-64}$$

D_3 : 정규화식의 크기를 만족시키는 상수

4차 이상 모드함수는 (4-59)식 일반화 함수를 이용하여 모드에 필요한 계수와 다항식을 구할 수 있다.

제 2 절 단일 판넬 구조의 파형가정함수

4장에서 보 구조물의 파형함수에 대해 언급하였다. Fig.7의 그림에서 X축과 Y축 모두 고정-고정 지지조건 $\psi(x)$ 을 갖고 수식 전개의 편리성을 위하여 무차원 ($\eta = \frac{2x}{l} - 1$)화 하면 식(4-65)와 (4-66)으로 정의할 수 있다.

$$x(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(\eta) \cdot P_{Ai}(t) \tag{4-65}$$

$$y(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \psi_i(\eta) \cdot P_{Bj}(t) \tag{4-66}$$

$P_{Ai}(t), P_{Bj}(t)$ 는 보 구조물 파형함수의 일반좌표계이다.

두식의 선형 조합으로 식 (4-67)로 판넬 구조물의 파형함수를 정의 할 수 있다.

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) \cdot \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta \tag{4-67}$$

$f_{ij}(t)$ 는 판넬 구조물 파형함수의 일반좌표계이다.

판넬 구조물의 지지조건에 따라 보 파형함수의 조합으로 판 파형함수를 구현할 수 있다. 예를 들어 X축 : 고정-단순지지, Y축 : 고정-고정지지 조건이면,

$$x(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(\eta) \cdot P_{Ai}(t) \tag{4-68}$$

$$y(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \psi_i(\eta) \cdot P_{Bj}(t) \tag{4-69}$$

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) \cdot \phi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta \tag{4-70}$$

식(4-70)은 판넬 구조의 양 변의 지지조건이 고정-단순, 고정-고정조건에서 판넬 파형 함수를 정의하였다.

또, X축 : 고정-단순지지, Y축 : 고정-단순지지조건 일 경우,

$$x(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(\eta) \cdot P_{Ai}(t) \tag{4-71}$$

$$y(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \phi_i(\eta) \cdot P_{Bj}(t) \tag{4-72}$$

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) \cdot \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta \tag{4-73}$$

식(4-73)은 판넬 구조의 양 변의 지지조건이 고정-단순, 고정-단순조건에서 판넬 파형 함수를 정의하였다.

다른 지지조건의 조합의 경우도 파형함수들의 조합으로 이루어짐으로 위에서 정의한 함수의 순서 차이만 있을 뿐 유사한 형태의 파형함수로 정의가 가능함으로 더 이상 다른 지지조건에 대한 정의는 생략하였다.

제 5 장 부분모드 합성법

연결구조물의 고유진동수 계산에 부분모드 합성법[7]을 사용하는데 일반적인 부분에 대한 설명을 하고 본 연구에서 사용된 고유진동수 계산 방법에 대해 설명하였다. 일반적인 부분모드 합성법은 두 구조물의 파형함수를 일반다항식을 사용하여 정의하고 연결지점에서 4가지 구속조건을 부여함으로써 구속조건을 수립하는 방법이다. 이렇게 수립한 구속방정식을 M,K 비감쇠 운동방정식에 대입함으로써 고유진동수를 얻을 수 있다.

Fig.3 'ㄱ'자 형태의 구조물에서 수평부재와 수직부재 각각의 파형함수를 $y_A(x)$와 $y_B(x)$라 하고, 연결지점에서의 각각의 횡 방향 변위함수를 $u_A(x)$, $u_B(x)$라 정의하면, 연결지점의 구속조건은 아래와 같이 적용된다.

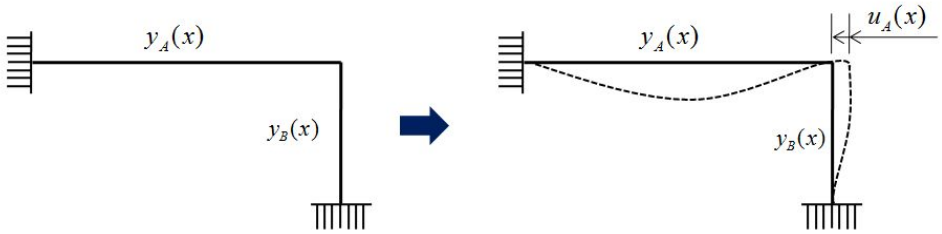


Fig.5 연결 보 구조의 횡방향 변위

$$u_A(l)+y_B(l)=0 \tag{5-1}$$

$$y_A(l)=0 \tag{5-2}$$

$$y'_A(l)-y'_B(l)=0 \tag{5-3}$$

$$EI[y''_A(l)+y''_B(l)]=0 \tag{5-4}$$

하지만, 본 연구에서는 횡방향 변위에 대한 부분은 Fig.5 FEA 결과에서 살펴본 바에 의하면 연결지점에서의 횡방향 변위는 부재 수직변위에 비해 변화량이 거의 '0'에 가까운 결과를 갖는다는 점을 확인하여 본 논문에서 고유진동

수를 구하기 위한 구속 방정식에서는 제외하였다. 또한, 4장에서 자세하게 기본 파형가정함수에 대해 설명하겠지만 변위 구속에 대한 부분을 파형함수를 정의하는 과정에서 사용함으로써 부분모드합성법의 구속 방정식에서는 제외시키고 경사각과 모멘트에 의한 구속조건만으로 고유진동수를 계산하는 방법이라 할 수 있다.

제 6 장 고정 및 단순지지 파형함수를 이용한 ‘ㄱ’자 연결 구조물의 고유진동수 계산

제 1 절 ‘ㄱ’자 연결 보 구조물의 고유진동수 계산

1. 파형함수를 이용한 고유진동수 계산

실제 구조물의 경우 단순 보나 판넬로 이루어진 경우는 드물고 많은 경우 연결 구조물로 되어있다. 연결구조물의 고유진동수 계산을 위해서는 연결 부위에 대한 구속조건의 적절한 보정 그리고 자유도계 증가로 인한 계산 성능의 저하를 가져오게 된다.

따라서, 복잡한 연결 구조물의 해석을 위해 전체 구조물의 연결부에서 연속 조건을 만족시키는 부분모드 합성법(Thomson,1993)[7]을 이용하고자 한다.

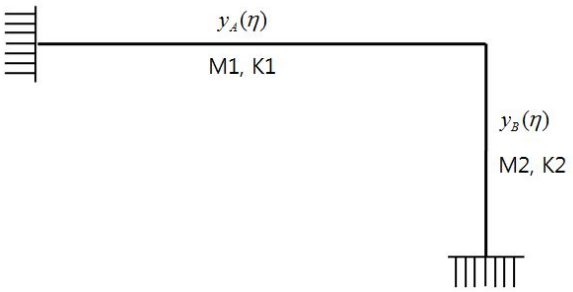


Fig.6 연결 보의 형상

Fig.6 과 같은 'ㄱ' 자 연결 구조의 수평 부재를 $y_A(\eta)$, 수직 부재를 $y_B(\eta)$ 라하고 두 연결 구조물의 파형함수는 아래와 같이 고정과 단순 두 지지 조건의 조합된 함수로 정의한다.

$$y_A(\eta) = \sum_{i=1}^{m} (\psi_i(\eta) p_{Ai}(\eta) + \phi_i(\eta) q_{Ai}(t)) \tag{6-1}$$

$$y_B(\eta) = \sum_{j=1}^{n} (\psi_j(\eta) p_{Bj}(\eta) + \phi_j(\eta) q_{Bj}(t)) \tag{6-2}$$

여기서, $p_{Ai}(t), q_{Ai}(t), p_{Bi}(t), q_{Bi}(t)$ 는 일반 좌표계이다.

이 두식은 다음과 같은 경사각과 모멘트에 대한 연속조건을 만족시켜야 한다.

[Slope Continuity]

$$\frac{y'_A(1)}{l_A} = \frac{y'_B(1)}{l_B} \tag{6-3}$$

$$\frac{1}{l_A}[\phi'_1 q_{A1} + \ldots\ldots + \phi'_m q_{Am}] = \frac{1}{l_B}[\phi'_1 q_{B1} + \ldots\ldots + \phi'_n q_{Bn}] \tag{6-4}$$

$$q_{Bn} = \frac{1}{\alpha}[\frac{\phi'_1}{\phi'_n} \cdot q_{A1} + \ldots + \frac{\phi'_m}{\phi'_n} \cdot q_{Am}] - [\frac{\phi'_1}{\phi'_n} \cdot q_{B1} + \ldots + \frac{\phi'_{n-1}}{\phi'_n} \cdot q_{Bn-1}] \tag{6-5}$$

[Moment Continuity]

$$\frac{y''_A(1)}{l_A^2} + \frac{y''_B(1)}{l_B^2} \tag{6-6}$$

$$\frac{1}{l_A^2}[\psi''_1 p_{A1} + \ldots + \psi''_m p_{Am}] + \frac{1}{l_B^2}[\psi''_1 p_{B1} + \ldots + \psi''_n p_{Bn}] \tag{6-7}$$

$$p_{Bn} = \frac{1}{\alpha^2}[\frac{\psi''_1}{\psi''_n} \cdot p_{A1} + \ldots + \frac{\psi''_m}{\psi''_n} \cdot p_{Am}] - [\frac{\psi''_1}{\psi''_n} \cdot p_{B1} + \ldots + \frac{\psi''_{n-1}}{\psi''_n} \cdot p_{Bn-1}] \tag{6-8}$$

위 식에서 보는 바와 같이 경사각에 대한 연속조건은 단순지지 조건을 만족시키는 q 자유도계만 관여하고, 고정지지 조건은 p자유도계만 관여함을 알 수 있다.

이런 관계를 matrix로 표현하면 확실히 알 수 있다.

또한, 부분모드 합성법을 이용함으로써 연결지점에서 2m+2n 개의 좌표계를 2m+2n-2개로 축약시켰다.

연결부위의 경사각과 모멘트 연속조건에 의해 생성된 (6-9)식을 다음에 언급할 (6-24)식에 대입함으로써 일반화 좌표계만큼의 고유진동수를 얻을 수 있다.

$$
\begin{Bmatrix} p_{A1} \\ \vdots \\ p_{Am} \\ q_{A1} \\ \vdots \\ q_{Am} \\ p_{B1} \\ \vdots \\ p_{Bn-1} \\ p_{Bn} \\ q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn-1} \\ q_{Bn} \end{Bmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\psi_1''}{\psi_n''} & \cdots & -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\psi_m''}{\psi_n''} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\psi_1''}{\psi_n''} & \cdots & \frac{\psi_{n-1}''}{\psi_n''} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\phi_1'}{\phi_n'} & \cdots & \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\phi_m'}{\phi_n'} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\phi_1'}{\phi_n'} & \cdots & \frac{\phi_{n-1}'}{\phi_n'}
\end{vmatrix}
\begin{Bmatrix} p_{A1} \\ \vdots \\ p_{Am} \\ q_{A1} \\ \vdots \\ q_{Am} \\ p_{B1} \\ \vdots \\ p_{Bn-1} \\ q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn-1} \end{Bmatrix}
\tag{6-9}
$$

2. 고유진동수 계산을 위한 에너지 산식

일반적으로 파형가정함수를 이용한 고전적 근사해법에 의한 진동 해석을 위해서는 해석 대상계의 탄성에너지 및 운동에너지 산식이 필요하다. 파형 가정함수는 Euler보 함수나 전단변형 효과를 고려한 Timoshenko 보 함수를 일반적으로 이용하고 있다.

Timoshenko 보 함수를 이용한 진동해석 방법에 대해서는 김 등[(2)]이나 정 등[(3)]에 의해 수식화 되었다. 따라서, 본 연구에서는 연결구조에 대한 진동해석 정식화 방법에 대한 유용성을 확인하기 위해 Euler 보 함수 성질을 갖는 다항식을 파형가정함수로 정의하였다.

Euler 보함수 성질을 이용한 파형가정함수는 1절에서 정의하였다.

- 고정-고정 지지조건의 파형가정함수 ($\psi(\eta)$)

$$y(x,t) = \sum_{i}^{m} \psi_i(x) \cdot p_i(t) \tag{6-10}$$

$p_i(t)$는 일반화 좌표, 직교 관계를 고려한 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int_0^l \dot{y}^2(x,t)dx \tag{6-11}$$

$$T = \frac{1}{2}\rho A \sum_i \sum_j \dot{p}_i(t) \cdot \dot{p}_j(t) \int_0^l \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx \tag{6-12}$$

$m = \rho A$, 일반화 질량은

$$m_{ij} = m \cdot \int_0^l \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx \tag{6-13}$$

무차원 길이 좌표 $\eta = \frac{2x}{l} - 1$ 를 사용하면,

$$m_{ij} = m \cdot \int_{-1}^{1} \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot \frac{l}{2} d\eta \tag{6-14}$$

$$m_{ij} = \frac{ml}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta \tag{6-15}$$

탄성에너지는

$$U = \frac{1}{2} \cdot EI \cdot \int_{0}^{l} y''^2(x,t) \cdot dx \tag{6-16}$$

$$U = \frac{1}{2} EI \sum_i \sum_j p_i(t) \cdot p_j(t) \cdot \int_{0}^{l} \psi''_i(x) \cdot \psi''_j(x) \cdot dx \tag{6-17}$$

일반화 강성은,

$$k_{ij} = EI \cdot \int_{0}^{l} \psi''_i(x) \cdot \psi''_j(x) \cdot dx \tag{6-18}$$

$$k_{ij} = EI \cdot \int_{-1}^{1} \frac{4}{l^2} \cdot \psi''_i(\eta) \cdot \frac{4}{l^2} \cdot \psi''_j(\eta) \cdot \frac{1}{2} \cdot d\eta \tag{6-19}$$

$$k_{ij} = \frac{8EI}{l^3} \cdot \int_{-1}^{1} \psi''_i(\eta) \cdot \psi''_j(\eta) \cdot d\eta \tag{6-20}$$

여기서, ρ는 보의 질량밀도, A는 보강재의 단면적, L은 보강재의 길이이며 EI는 보강재의 굽힘 강성을 나타낸다.

위의 수식을 보존계에 대한 Lagrange 운동 방정식에 대입함으로써 Beam에 대한 M, K 비감쇠 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{p}_i}\right) - \frac{\delta T}{\delta p_i} + \frac{\delta U}{\delta p_i} = 0 \tag{6-21}$$

$$\frac{ml}{2}[M]\{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3}[K]\{p\} = 0 \tag{6-22}$$

matrix (6-9)을 (6-22)식에 적용하면 아래 수식으로 표현 가능하다.

$$\frac{ml}{2}[M][C]\{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3}[K][C]\{p\} = 0 \tag{6-23}$$

$$\frac{ml}{2}[C'][M][C]\{\ddot{p}\} + \frac{8EI}{l^3}[C'][K][C]\{p\} = 0 \tag{6-24}$$

Fig.2에서 $y_A(\eta)$과 $y_B(\eta)$사이에 연성은 없으므로 질량 및 강성 행렬은 아래와 같은 형태를 갖는다.

$$[M]=\left[\begin{array}{c|c} m_A & 0 \\ \hline 0 & m_B \end{array}\right] \qquad [K]=\left[\begin{array}{c|c} k_A & 0 \\ \hline 0 & k_B \end{array}\right]$$

m_A : $y_A(\eta)$ 질량 $\qquad$ m_B : $y_B(\eta)$ 질량

k_A : $y_A(\eta)$ 강성 $\qquad$ k_B : $y_B(\eta)$ 강성

Fig.2 연결구조물 전체 질량 행렬과 강성 행렬은 아래처럼 표현할 수 있다

$$[m_A]=\frac{ml_A}{2}\cdot\begin{vmatrix} \psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_m & \psi_1\phi_1 & \cdots & \psi_1\phi_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m\psi_1 & \cdots & \psi_m\psi_m & \psi_m\phi_1 & \cdots & \psi_m\phi_m \\ \phi_1\psi_1 & \cdots & \phi_1\psi_m & \phi_1\phi_1 & \cdots & \phi_1\phi_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m\psi_1 & \cdots & \phi_m\psi_m & \phi_m\phi_1 & \cdots & \phi_m\phi_m \end{vmatrix} \tag{6-25}$$

$$[m_B]=\frac{ml_B}{2}\cdot\begin{vmatrix} \psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_n & \psi_1\phi_1 & \cdots & \psi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\psi_1 & \cdots & \psi_n\psi_n & \psi_n\phi_1 & \cdots & \psi_n\phi_n \\ \phi_1\psi_1 & \cdots & \phi_1\psi_n & \phi_1\phi_1 & \cdots & \phi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n\psi_1 & \cdots & \phi_n\psi_n & \phi_n\phi_1 & \cdots & \phi_n\phi_n \end{vmatrix} \tag{6-26}$$

$$[k_A]=\frac{8EI}{l_A^3}\cdot\begin{vmatrix} \psi_1''\psi_1'' & \cdots & \psi_1''\psi_m'' & \psi_1''\phi_1'' & \cdots & \psi_1''\phi_m'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m''\psi_1'' & \cdots & \psi_m''\psi_m'' & \psi_m''\phi_1'' & \cdots & \psi_m''\phi_m'' \\ \phi_1''\psi_1'' & \cdots & \phi_1''\psi_m'' & \phi_1''\phi_1'' & \cdots & \phi_1''\phi_m'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m''\psi_1'' & \cdots & \phi_m''\psi_m'' & \phi_m''\phi_1'' & \cdots & \phi_m''\phi_m'' \end{vmatrix} \tag{6-27}$$

$$[k_B]=\frac{8EI}{l_B^3}\cdot\begin{vmatrix} \psi_1''\psi_1'' & \cdots & \psi_1''\psi_n'' & \psi_1''\phi_1'' & \cdots & \psi_1''\phi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n''\psi_1'' & \cdots & \psi_n''\psi_n'' & \psi_n''\phi_1'' & \cdots & \psi_n''\phi_n'' \\ \phi_1''\psi_1'' & \cdots & \phi_1''\psi_n'' & \phi_1''\phi_1'' & \cdots & \phi_1''\phi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n''\psi_1'' & \cdots & \phi_n''\psi_n'' & \phi_n''\phi_1'' & \cdots & \phi_n''\phi_n'' \end{vmatrix} \tag{6-28}$$

위에서 나열한 행렬 값들을 식(6-24)에 대입함으로써 비감쇠 운동방정식으로부터 연결형 보 구조물의 고유진동수를 얻을 수 있으며 다음 절에서 에너지 산식을 이용한 고유진동수 계산 과정에 대해 설명하였다.

3. 연결 보 구조물의 고유진동수 계산

본 연구에서는 연결구조물의 대한 진동해석 정식화 방법에 대한 유용성 검증을 위해 먼저 Euler 보함수 성질을 갖는 다항식을 파형함수로 정의하여 고유진동수를 계산하였으며 Fig.2 'ㄱ'자 연결 beam 구조물 중 $y_B(\eta)$ 부재의 길이 변화에 따른 계산 결과와 유한요소법 해석 결과를 양단 경계 조건별 모드 영향계수 $(\beta_n l)^2$ 와 비교 / 검토 하였다.

모드 영향계수는 다음과 같이 정의하였다.

· Clamp - Clamp 조건

$$M = m \cdot \int_0^l \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx = \frac{ml}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta \tag{6-29}$$

$$K = EI \cdot \int_0^l \psi_i''(x) \cdot \psi_j''(x) \cdot dx = \frac{8EI}{l^3} \cdot \int_{-1}^{l} \psi_i''(\eta) \cdot \psi_j''(\eta) \cdot d\eta \tag{6-30}$$

$$w = \frac{\sqrt{K}}{M} = \sqrt{\frac{16EI}{ml^4}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-1}^{1} \psi_i''(\eta) \cdot \psi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta}} \tag{6-31}$$

식(6-31) 우변항에서 상수를 제외한 파형함수 적분값을 모드별 영향계수로 정의 하고 고정-고정지지 조건에서의 1차 모드 영향 계수는 식(6-32)와 같다.

$$(\beta_1 l)^2 = \sqrt{\frac{\int_{-1}^{1} \psi_i''(\eta) \cdot \psi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta}} \tag{6-32}$$

· Clamp-Hinged 조건

$$M = m \cdot \int_0^l \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot dx = \frac{ml}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta \tag{6-33}$$

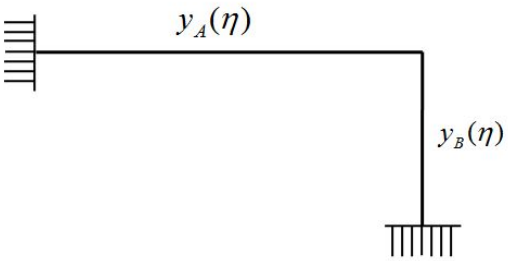
$$K = EI \cdot \int_0^l \phi_i''(x) \cdot \phi_j''(x) \cdot dx = \frac{8EI}{l^3} \cdot \int_{-1}^{l} \phi_i''(\eta) \cdot \phi_j''(\eta) \cdot d\eta \tag{6-34}$$

$$w = \frac{\sqrt{K}}{M} = \sqrt{\frac{16EI}{ml^4}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-1}^{1} \phi_i''(\eta) \cdot \phi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta}} \tag{6-35}$$

고정-단순지지 조건에서의 1차 모드 영향 계수는 식(3-36)와 같다.

$$(\beta_1 l)^2 = \sqrt{\frac{\int_{-1}^{1} \phi_i''(\eta) \cdot \phi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta}} \tag{6-36}$$

위 계산방법의 유용성을 검증하기 위한 모델은 Fig.2에서 언급한 'ㄱ'자 연결형 beam 구조이다. 이 구조의 Property는 아래와 같다.



Elastic Modulus [N/m²]	Density [kg/m³]
2.1E11	7850

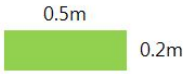


Fig.7 연결형 보의 특성치

Table 2 고정 및 단순지지 파형함수를 이용한 계산 방법

Mode Coefficient of Euler's Beam According to the Boundary Conditions: $(\beta_n l)^2$				
		1st order	2nd order	3rd order
Clamp-Clamp		22.4	61.7	121.0
Clamp-Hinged		15.4	50.0	104.0
Length Ratio (L_1 : L_2)		1st order	2nd order	3rd order
1:1	FEA	15.3	22.0	48.9
	계산결과	15.4	22.4	50.5
1:0.8	FEA	17.5	29.7	54.0
	계산결과	17.6	30.4	56.2
1:0.6	FEA	18.5	45.5	59.3
	계산결과	18.7	46.8	62.7
1:0.5	FEA	18.8	51.4	72.0
	계산결과	19.2	52.9	76.9
1:0.4	FEA	19.4	53.5	95.0
	계산결과	19.6	55.4	112.3
1:0.2	FEA	20.2	55.7	108.3
	계산결과	20.7	58.3	133.9

길이별 결과를 살펴보면, 두 연결 구조물의 길이 비가 1:1일 경우는 고정-단순, 고정-고정 지지 경계조건이 순차적으로 반복되어 나타남을 알 수 있다. 그리고, 길이 비에 차이가 발생할수록 1차 모드의 고유진동수는 고정-단순지지에서 고정-고정지지 경계조건으로 변화됨을 느낄 수 있으며 길이비가 1:0.6, 1:0.5, 1:0.4의 경우 연결 부위에서의 경계조건 기여도는 고정-고정과 고정-단순지지 조건이 서로 조화되어 작용한다는 것을 계산 결과를 통해 알 수 있다. 결과 중

1:0.5의 길이비를 갖는 구조물의 mode shape을 FEM 결과와 비교하여 Fig.4에 나타내었다.

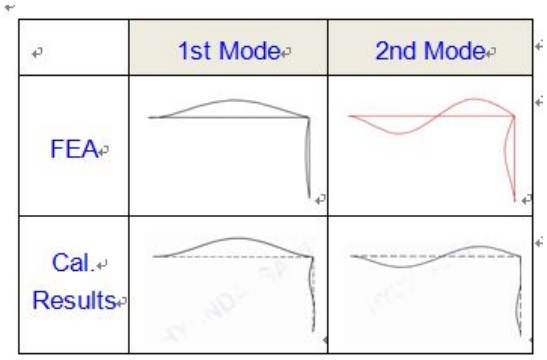


Fig. 8 FEA 결과와 고정 및 단순 파형함수에 의한 고유 모드형상 비교

또한, L2의 길이가 '0'에 가까워지면 고정-고정지지 경계조건이 beam 진동해석에 영향을 주고 있음을 알 수 있다.

위 계산 결과에서 확인하였듯이 본 연구에서 사용한 정식화 방법은 저 주파수 영역에서 FEM결과와 6% 이내의 결과를 보여주고 있다.

제 2 절 ‘ㄱ’자 연결 판넬 구조물의 고유진동수 계산

1. 파형함수 합성법

보의 파형함수 중 고정-고정 지지조건$\psi(\eta)$, 고정-단순 지지조건$\phi(\eta)$ 과 단순-고정 지지조건$\gamma(\eta)$을 만족시키는 1차 파형함수의 다항식은 식 (6-37)~(6-39)로 각각 표현 할 수 있다

$$\psi_1(\eta) = A_1(\eta+1)^2(\eta-1)^2 \qquad -1 \le \eta \le 1 \qquad (6\text{-}37)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1(\eta^4 - \eta^3 - 3\eta^2 + \eta + 2) \qquad (6\text{-}38)$$

$$\gamma_1(\eta) = C_1(\eta^4 + \eta^3 - 3\eta^2 - \eta + 2) \qquad (6\text{-}39)$$

계수A_1, B_1, C_1은 보 함수의 직교관계식을 이용하여 구현하였다.

$$\int_{-1}^{1} \psi_i \psi_j d\eta = \delta_{ij} \qquad (6\text{-}40)$$

$$\int_{-1}^{1} \phi_i \phi_j d\eta = \delta_{ij} \qquad (6\text{-}41)$$

$$\int_{-1}^{1} \gamma_i \gamma_j d\eta = \delta_{ij} \qquad (6\text{-}42)$$

여기서, I.j는 진동차수이고, δ_{ij}는 Kronecker delta이다.

$$A_1 = \frac{\int_{-1}^{1} \psi_1^2(\eta) \cdot d\eta}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (\eta^4 - 2\eta^2 + 1)^2 d\eta}} \qquad (6\text{-}43)$$

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} \phi_1^2(\eta) \cdot d\eta}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (\eta^4 - \eta^3 - 3\eta^2 + \eta + 2)^2 d\eta}} \qquad (6\text{-}44)$$

$$C_1 = \frac{\int_{-1}^{1} \gamma_1^2(\eta) \cdot d\eta}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (\eta^4 + \eta^3 - 3\eta^2 - \eta + 2)^2 d\eta}} \qquad (6\text{-}45)$$

그리고, 2차 모드 이상의 파형함수는 아래 식으로부터 구현 할 수 있다.

$$\psi_k = A_k[\psi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \psi_{k-1}] \tag{6-46}$$

$$\phi_k = B_k[\phi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} b_{ki} \cdot \phi_{k-1}] \tag{6-47}$$

$$\gamma_k = C_k[\gamma_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \cdot \gamma_{k-1}] \tag{6-48}$$

계수 a_{ki}, b_{ki}, c_{ki} 는 보 함수의 직교관계식과 위 (6-46)~(6-48)식으로 부터 구할 수 있다. Fig.9에서 $w_1(x,y)$ 판의 y축의 경우 갑판과 갑판 사이의 구조물로 구속되어 있으므로 파형함수를 고정-고정지지 조건만으로 가정하고 x축의 경우에는 고정 - 고정(Ψ)과 고정 - 단순(Φ) 파형 함수의 조합으로 표현하였다. $w_2(x,y)$ 의 경우도 위와 유사한 방법으로 정의하였으나 x축의 파형 함수를 단순 - 고정(γ) 파형 함수로 사용하여 정리하였다.

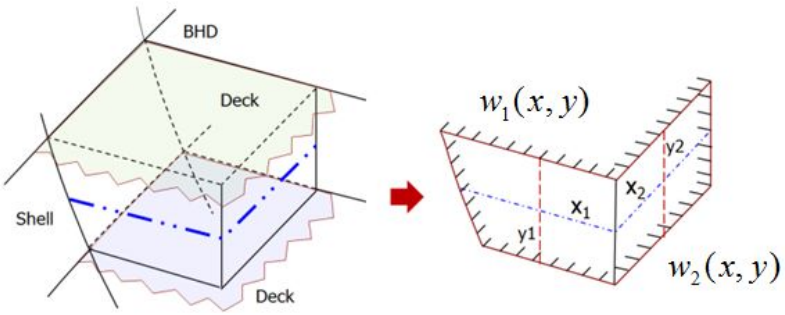


Fig.9 연결구조의 형상모드

$$x_1(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \left(\psi_i(\eta) p_{Ai}(t) + \phi_i(\eta) q_{Ai}(t)\right) \tag{6-49}$$

$$y_1(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\psi_j(\eta) p_{Bj}(t)\right) \tag{6-50}$$

$$w_1(x,y) = f_{A11}\psi_1\psi_1 + \ldots + f_{Amn}\psi_m\psi_n + \ldots + g_{A11}\phi_1\psi_1 + \ldots + g_{Amn}\phi_m\psi_n \qquad (6\text{-}51)$$

$$x_2(\eta) = \sum_{k=1}^{s}\left(\psi_k(\eta)p_{Ck}(t) + \phi_k(\eta)q_{Ck}(t)\right) \qquad (6\text{-}52)$$

$$y_2(\eta) = \sum_{l=1}^{u}\left(\psi_l(\eta)p_{Dl}(t)\right) \qquad (6\text{-}53)$$

$$w_2(x,y) = f_{B11}\psi_1\psi_1 + \ldots + f_{Bsu}\psi_s\psi_u + \ldots + g_{B11}\gamma_1\psi_1 + \ldots + g_{Bsu}\gamma_s\psi_u \qquad (6\text{-}54)$$

여기서, $p_{Ai}(t), q_{Ai}(t), p_{Bj}(t), p_{Ck}(t), q_{Ck}(t), p_{Dl}(t)$는 보 파형함수의 일반좌표계이며, $f_{A11}(t),\ldots f_{Amn}(t), g_{A11}(t),\ldots g_{Amn}(t), f_{B11}(t),\ldots f_{Bsu}(t), g_{B11}(t),\ldots g_{Bsu}(t)$는 'ㄱ'자 형태의 구조를 이루는 파형함수의 일반좌표계이다.

Fig.9는 선체 내부의 일반 탱크 구조물 형상을 표현한 것으로 이처럼 복잡한 연결 구조물의 해석을 위해 구조물 연결부에서 경계조건을 만족시키는 부분모드 합성법[6]을 이용하였다.

'ㄱ' 자 연결 구조의 연결부위에서는 다음과 같은 경사각과 모멘트에 대한 연속조건을 만족 시켜야 한다.

[경사각 연속조건]

$$\frac{\partial w_1}{\partial \eta}(1,y) - \frac{\partial w_2}{\partial \eta}(-1,y) = 0 \qquad (6\text{-}55)$$

$$\frac{1}{l_1}[g_{A11}\phi'_1\psi_1 + \ldots + g_{Amn}\phi'_m\psi_n] - \frac{1}{l_3}[g_{B11}\gamma'_1\psi_1 + \ldots + g_{Bsu}\gamma'_s\psi_u] = 0 \qquad (6\text{-}56)$$

$$g_{Bsu} = \frac{1}{\alpha}[g_{A11}\cdot\frac{\phi'_1\psi_1}{\gamma'_s\psi_u} + \ldots + g_{Amn}\cdot\frac{\phi'_m\psi_n}{\gamma'_s\psi_u}] - [g_{B11}\cdot\frac{\gamma'_1\psi_1}{\gamma'_s\psi_u} + \ldots + g_{Bsu-1}\cdot\frac{\gamma'_s\psi_{u-1}}{\gamma'_s\psi_u}] = 0 \qquad (6\text{-}57)$$

[모멘트 연속조건]

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2}(1,y)+\frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2}(-1,y)=0 \tag{6-58}$$

$$f_{Bsu}=-\frac{1}{\alpha^2}[f_{A11}\cdot\frac{\psi''_1\psi_1}{\psi''_s\psi_u}+\ldots+f_{Amn}\cdot\frac{\psi''_m\psi_n}{\psi''_s\psi_u}]-[f_{B11}\cdot\frac{\psi''_1\psi_1}{\psi''_s\psi_u}+\ldots+f_{Bsu-1}\cdot\frac{\psi''_s\psi_{u-1}}{\psi''_s\psi_u}]=0 \tag{6-59}$$

위 식에서 보는 바와 같이 경사각에 대해서 경계조건은 단순지지 경계조건을 만족시키는 g 자유도계만 관여하고, 모멘트 경계조건을 만족시키는 경우에는 f 자유도계만 관여함을 알 수 있다.

(6-57),(6-59)식을 Matrix로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{Bmatrix} f_{A11} \\ \vdots \\ f_{Amn} \\ g_{A11} \\ \vdots \\ g_{Amn} \\ f_{B11} \\ \vdots \\ f_{Bsu-1} \\ f_{Bsu} \\ g_{B11} \\ \vdots \\ g_{Bsu-1} \\ g_{Bsu} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\psi''_1\psi_1}{\psi''_s\psi_u} & \cdots & -\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\psi''_m\psi_n}{\psi''_s\psi_u} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\psi''_1\psi_1}{\psi''_s\psi_u} & \cdots & \frac{\psi''_s\psi_{u-1}}{\psi''_s\psi_u} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\phi'_1\psi_1}{\gamma'_s\psi_u} & \cdots & \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\phi'_m\psi_n}{\gamma'_s\psi_u} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\gamma'_1\psi_1}{\gamma'_s\psi_u} & \cdots & \frac{\gamma'_s\psi_{u-1}}{\gamma'_s\psi_u} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} f_{A11} \\ \vdots \\ f_{Amn} \\ g_{A11} \\ \vdots \\ g_{Amn} \\ f_{B11} \\ \vdots \\ f_{Bsu-1} \\ g_{B11} \\ \vdots \\ g_{Bsu-1} \end{Bmatrix} \tag{6-60}$$

식(6-60) 부분모드 합성법에 의해 얻어진 위의 matrix를 Lagrange 운동방정식에서 얻어진 M, K 비감쇠 운동방정식(6-24)식에 대입함으로써 일반좌표계 만큼의 고유진동수를 얻을 수 있다.

2. 고유진동수 계산을 위한 에너지 산식

근사해법에 의한 진동해석을 위해서는 해석 대상계의 탄성에너지 및 운동에너지 산식이 필요하며 보에 대한 에너지 산식에서도 언급하였듯이 Euler 보 성질을 이용한 다항식에 대해서 정의하였다.

운동에너지는,

$$T=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^b \dot{w}(x,y,t)^2 dxdy \tag{6-61}$$

여기서, ρ와 h는 판의 질량밀도 및 두께를 나타낸다.

변형에너지는 직사각형 평판을 일반성을 고려하기 위해 직교이방성 평판으로 간주하고 다음과 같이 표현하였다.

$$V=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4D_{xy}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \tag{6-62}$$

$(2D_1=D_x\nu_y+D_y\nu_x)$

여기서, D_x, D_y 및 D_{xy}는 직교 이방성 평판의 x축 및 y축 굽힘 강성과 비틂 강성을 나타낸다. 판에 대한 파형함수의 정의는 4장 1,2절에 언급하였다.

Fig.9의 'ㄱ'자 형태의 구조물에 대한 파형함수는 식(6-51)와 식(6-54)에 정의하였다. 위에서 정의한 에너지 산식을 수식 전개를 위해 무차원화 하면,

$$w(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\cdot dxdy,\quad \left(\xi=\frac{2x}{l_1}-1,\ \zeta=\frac{2x}{l_2}-1\right) \tag{6-63}$$

$$w(x,y)=X(\xi)\cdot Y(\zeta)\cdot\frac{l_1}{2}d\xi\cdot\frac{l_2}{2}d\zeta \tag{6-64}$$

$$w(x,y)=\frac{1}{4}\cdot l_1\cdot l_2\cdot X(\xi)\cdot Y(\zeta)d\xi d\zeta \tag{6-65}$$

Fig.9의 'ㄱ'자 형태의 질량 행렬식은,

$$[m_1]=0.25\cdot\rho\cdot l_1\cdot l_2\cdot t_1\cdot\begin{vmatrix}\psi_1\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_1\psi_m\psi_n & \psi_1\psi_1\phi_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_1\phi_m\psi_n\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_m\psi_n\psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_m\psi_n\psi_m\psi_n & \psi_m\psi_n\phi_1\psi_1 & \cdots & \psi_m\psi_n\phi_m\psi_n\\ \phi_1\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & \phi_1\psi_1\psi_m\psi_n & \phi_1\psi_1\phi_1\psi_1 & \cdots & \phi_1\psi_1\phi_m\psi_n\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \phi_m\psi_n\psi_1\psi_1 & \cdots & \phi_m\psi_n\psi_m\psi_n & \phi_m\psi_n\phi_1\psi_1 & \cdots & \phi_m\psi_n\phi_m\psi_n\end{vmatrix} \tag{6-66}$$

$$[m_2]=0.25\cdot\rho\cdot l_3\cdot l_4\cdot t_2\cdot\begin{vmatrix}\psi_1\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_1\psi_s\psi_u & \psi_1\psi_1\gamma_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_1\gamma_s\psi_u\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_s\psi_u\psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_s\psi_u\psi_s\psi_u & \psi_s\psi_u\gamma_1\psi_1 & \cdots & \psi_s\psi_u\gamma_s\psi_u\\ \gamma_1\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & \gamma_1\psi_1\psi_s\psi_u & \gamma_1\psi_1\gamma_1\psi_1 & \cdots & \gamma_1\psi_1\gamma_s\psi_u\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_s\psi_u\psi_1\psi_1 & \cdots & \gamma_s\psi_u\psi_s\psi_u & \gamma_s\psi_u\gamma_1\psi_1 & \cdots & \gamma_s\psi_u\gamma_s\psi_u\end{vmatrix} \tag{6-67}$$

탄성에너지 성분을 무차원화 하여 나타내면 아래와 같이 표현 가능하다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}=\frac{4}{l_1^2}\cdot X''(\xi)\cdot Y(\zeta) \tag{6-68}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)^2=\left(\frac{4}{l_1^2}\cdot X''(\xi)\cdot Y(\zeta)\right)^2 dxdy=\frac{16}{l_1^4}\cdot[X''(\xi)\cdot Y(\zeta)]^2\cdot\frac{l_1}{2}d\xi\cdot\frac{l_2}{2}\cdot d\zeta \tag{6-69}$$

$$\iint D_x\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dxdy=4\cdot D_x\cdot\frac{l_2}{l_1^3}\cdot\iint[X''(\xi)\cdot Y(\zeta)]^2 d\xi d\zeta \tag{6-70}$$

탄성에너지에 기여하는 성분들을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\iint D_x \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 = 4 \cdot D_x \cdot \frac{l_2}{l_1^3} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1''\psi_1\psi_1''\psi_1 & \cdots & \psi_1''\psi_1\psi_m''\psi_n & \psi_1''\psi_1\phi_1''\psi_1 & \cdots & \psi_1''\psi_1\phi_m''\psi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m''\psi_n\psi_1''\psi_1 & \cdots & \psi_m''\psi_n\psi_m''\psi_n & \psi_m''\psi_n\phi_1''\psi_1 & \cdots & \psi_m''\psi_n\phi_m''\psi_n \\ \phi_1''\psi_1\psi_1''\psi_1 & \cdots & \phi_1''\psi_1\psi_m''\psi_n & \phi_1''\psi_1\phi_1''\psi_1 & \cdots & \phi_1''\psi_1\phi_m''\psi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m''\psi_n\psi_1''\psi_1 & \cdots & \phi_m''\psi_n\psi_m''\psi_n & \phi_m''\psi_n\phi_1''\psi_1 & \cdots & \phi_m''\psi_n\phi_m''\psi_n \end{vmatrix} \quad (6-71)$$

$$\iint D_y \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right)^2 = 4 \cdot D_y \cdot \frac{l_1}{l_2^3} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1\psi_1''\psi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_1\psi_1''\psi_m\psi_n'' & \psi_1\psi_1''\phi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_1\psi_1''\phi_m\psi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m\psi_n''\psi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_m\psi_n''\psi_m\psi_n'' & \psi_m\psi_n''\phi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_m\psi_n''\phi_m\psi_n'' \\ \phi_1\psi_1''\psi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_1\psi_1''\psi_m\psi_n'' & \phi_1\psi_1''\phi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_1\psi_1''\phi_m\psi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m\psi_n''\psi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_m\psi_n''\psi_m\psi_n'' & \phi_m\psi_n''\phi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_m\psi_n''\phi_m\psi_n'' \end{vmatrix} \quad (6-72)$$

$$\iint 2D_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = 2D_1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{l_1} \cdot \frac{1}{l_2} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1''\psi_1\psi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_1''\psi_1\psi_m\psi_n'' & \psi_1''\psi_1\phi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_1''\psi_1\phi_m\psi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m''\psi_n\psi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_m''\psi_n\psi_m\psi_n'' & \psi_m''\psi_n\phi_1\psi_1'' & \cdots & \psi_m''\psi_n\phi_m\psi_n'' \\ \phi_1''\psi_1\psi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_1''\psi_1\psi_m\psi_n'' & \phi_1''\psi_1\phi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_1''\psi_1\phi_m\psi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m''\psi_n\psi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_m''\psi_n\psi_m\psi_n'' & \phi_m''\psi_n\phi_1\psi_1'' & \cdots & \phi_m''\psi_n\phi_m\psi_n'' \end{vmatrix} \quad (6-73)$$

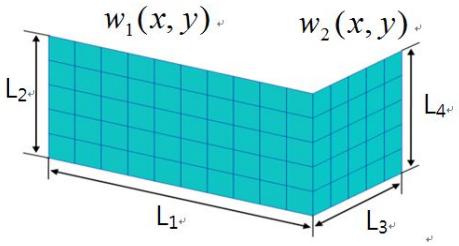
$$\iint 4D_{xy} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta}\right)^2 = 4 \cdot D_{xy} \cdot \frac{1}{l_1} \cdot \frac{1}{l_2} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1'\psi_1\psi_1\psi_1' & \cdots & \psi_1'\psi_1\psi_m'\psi_n' & \psi_1'\psi_1\phi_1\psi_1' & \cdots & \psi_1'\psi_1\phi_m'\psi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m'\psi_n'\psi_1\psi_1' & \cdots & \psi_m'\psi_n'\psi_m'\psi_n' & \psi_m'\psi_n'\phi_1\psi_1' & \cdots & \psi_m'\psi_n'\phi_m'\psi_n' \\ \phi_1'\psi_1\psi_1\psi_1' & \cdots & \phi_1'\psi_1\psi_m'\psi_n' & \phi_1'\psi_1\phi_1\psi_1' & \cdots & \phi_1'\psi_1\phi_m'\psi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m'\psi_n'\psi_1\psi_1' & \cdots & \phi_m'\psi_n'\psi_m'\psi_n' & \phi_m'\psi_n'\phi_1\psi_1' & \cdots & \phi_m'\psi_n'\phi_m'\psi_n' \end{vmatrix} \quad (6-74)$$

위 식들의 합을 (6-24)식에 대입하면 고유진동수를 얻을 수 있다.

위에서 정의한 값은$w_1(x_1,y_1)$ 판넬에 대한 것으로 $w_2(x_2,y_2)$도 같은 방법으로 구할 수 있다.

3. 연결형 판넬 구조물의 고유진동수 계산

본 연구에서는 연결구조물의 대한 진동해석 정식화 방법에 대해 유용성을 확인하고자 먼저 Euler 보함수 성질을 갖는 다항식을 파형 함수로 정의하여 고유진동수를 계산하였으며 정식화 방법의 유용성 검증을 위해 Fig.3 'ㄱ' 형태 벽면 구조물에 길이 변화에 따른 정식화 계산과 유한요소법(FEA) 결과를 비교 /검토 하였다. 유한요소 해석은 Patran / Nastran을 사용하였으며 'ㄱ'형태의 구조물은 Fig.10과 같은 형상을 모델로 하였다.



Elastic Modulus [N/m²]	Density [kg/m³]
2.1E11	7850

Fig.10 연결형 판넬 구조 모델

Fig.10처럼 주요 고려 대상인 구조물이 갑판과 격벽 등으로 구속되는 점을 감안하여 모서리 부분은 모두 고정 조건으로 고려하였다.

Table 3 고정 및 단순지지 파형함수를 이용한 판넬 계산 결과 [Unit : Hz]

L_1	L_2	L_3	L_4	Calculation Results				FEA			
				W_1 panel		W_2 panel		W_1 panel		W_2 panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	2m	2m	2m	28.2582	29.1719	39.6509	79.5598	28.119	29.150	38.911	78.265
10m	2m	4m	2m	28.2582	29.1710	30.1476	38.2295	28.117	29.132	30.067	37.318
10m	2m	6m	2m	28.2582	29.1707	28.8382	31.7294	28.116	29.161	28.752	31.631
10m	2m	8m	2m	28.2582	29.1706	28.4347	29.9250	28.114	29.141	28.323	29.910

L_1	L_2	L_3	L_4	Calculation Results				FEA			
				W_1 panel		W_2 panel		W_1 panel		W_2 panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	4m	2m	4m	7.3174	8.4221	24.2613	66.5475	7.299	8.4139	22.595	65.952
10m	4m	4m	4m	7.3174	8.4211	9.9257	20.4227	7.2926	8.3736	9.9945	20.678
10m	4m	6m	4m	7.3174	8.4209	8.0618	11.9233	7.2894	8.4561	8.06	12.036
10m	4m	8m	4m	7.3174	8.4207	7.5330	9.4307	7.2854	8.3852	7.5275	9.4263

L_1	L_2	L_3	L_4	Calculation Results				FEA			
				W_1 panel		W_2 panel		W_1 panel		W_2 panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	5m	2m	5m	4.8210	6.0355	22.7025	65.2687	4.8372	6.1126	21.289	64.061
10m	5m	4m	5m	4.8210	6.0346	7.7592	18.7341	4.8271	6.0555	7.9146	19.248
10m	5m	6m	5m	4.8210	6.0343	5.6593	9.8768	4.8218	6.1803	5.7169	10.156
10m	5m	8m	5m	4.8208	6.0342	5.0606	7.1596	4.8151	6.0707	5.105	7.2607

L_1	L_2	L_3	L_4	Calculation Results				FEA			
				W_1 panel		W_2 panel		W_1 panel		W_2 panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	6m	2m	6m	3.4765	4.7952	21.9302	64.6035	3.5219	4.9357	20.579	63.508
10m	6m	4m	6m	3.4764	4.7944	6.6836	17.8992	3.5076	4.8633	6.8827	18.545
10m	6m	6m	6m	3.4764	4.7942	4.4059	8.8678	3.4994	5.0291	4.5038	9.2425
10m	6m	8m	6m	3.4764	4.7940	3.7410	6.0089	3.451	3.559	4.715	5.081

L_1	L_2	L_3	L_4	정식화 계산				FEA			
				W_1 panel		W_2 panel		W_1 panel		W_2 panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	8m	2m	8m	2.1660	3.6533	19.9793	63.9653	2.1509	3.7996	19.815	62.33
10m	8m	4m	8m	2.1658	3.6527	5.7362	16.6369	2.2379	3.7774	5.9676	17.907
10m	8m	6m	8m	2.1658	3.6525	3.2489	7.9454	2.2234	4.0017	3.3912	8.4389
10m	8m	8m	8m	2.1658	3.6525	2.4780	4.9726	2.206	3.8013	2.6315	5.2166

L_1	L_2	L_3	L_4	정식화 계산				FEA			
				W_1 panel		W_2 panel		W_1 panel		W_2 panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	10m	2m	10m	1.5860	3.1835	19.6919	63.6776	1.6688	3.438	19.569	61.910
10m	10m	4m	10m	1.5858	3.1830	5.3571	16.8109	1.6906	3.3351	5.5970	17.634
10m	10m	6m	10m	1.5858	3.1829	2.7747	7.6042	1.6697	3.6048	2.9365	8.112
10m	10m	8m	10m	1.5858	3.1829	1.9366	4.5556	1.6448	3.3624	2.1369	4.8292

길이 변화에 따른 정식화 방법 계산 결과를 살펴보면, 1차 모드는 FEA 결과와 유사하지만, 2차 모드의 경우 길이(L1, L3) : 높이(L2, L4)비가 1:0.6보다 작을 경우에는 비교적 FEA 결과와 유사하지만 (5% 이내), 1:1의 경우10% 정도의 차이가 나타난다. 하지만, 실제 선박의 탱크 구조는 선박의 종류에 따라 차이가 있지만 길이 : 높이비가 통상1:0.5보다 작다. 그리고 FEA 결과에서도 10% 마진을 고려하는데 초기 설계 단계에서 판 구조물의 공진 검토를 위한 것으로 조선소에서 관심 있는 저 주파수 영역에서 FEA결과와 유사함을 보여 주고 있다.

제 7 장 Mode by Mode 합성법을 이용한 ‘ㄱ’자 연결 구조물의 고유진동수 계산

제 1 절 ‘ㄱ’자 연결 보 구조물의 고유진동수 계산

1. 모드 합성법

2절에서도 언급하였지만 실제 구조물의 경우 단순 Beam이나 Plate로 이루어진 경우는 거의 없다. 하지만, 단일 구조물로 이상화하여 계산하는 이유 중 하나가 연결구조로 문제를 접근할 경우 증가하는 자유도계 때문일 것이다. 특히, 근사해석적 접근 방법으로 문제를 풀기 위해서는 계산 성능 또한 무시 할 수 없기 때문일 것이다.

2절의 부분모드합성법[5]을 통해 연결부위에서 2m+2n개중 연속조건 수만큼 자유도계를 감소시켰지만 여전 2m+2n-2개의 자유도계를 가지고 있다.

Fig.2에서 언급한 바와 같이 'ㄱ' 자 연결 구조의 수평 부재를 $y_{A(\eta)}$, 수직 부재를 $y_B(\eta)$ 라 하면 연결구조의 파형함수는 아래와 같이 두 지지 조건의 조합된 함수로 정의 할 수 있다.

$$y_A(\eta) = \sum_{i=1}^{m}(\psi_i(\eta)p_{Ai}(\eta) + \phi_i(\eta)q_{Ai}(t)) \tag{7-1}$$

$$y_B(\eta) = \sum_{j=1}^{n}(\psi_j(\eta)p_{Bj}(\eta) + \phi_j(\eta)q_{Bj}(t)) \tag{7-2}$$

여기서, $p_{Ai}(t), q_{Ai}(t), p_{Bi}(t), q_{Bi}(t)$ 는 일반 좌표계이다.

이 두식은 다음과 같은 경사각과 모멘트에 대한 연속조건을 만족시켜야 한다.

[Slope Continuity]

$$\frac{y'_A(1)}{l_A} = \frac{y'_B(1)}{l_B} \tag{7-3}$$

$$\frac{1}{l_A}[\phi'_1 q_{A1} + \cdots\cdots + \phi'_m q_{Am}] = \frac{1}{l_B}[\phi'_1 q_{B1} + \cdots\cdots + \phi'_n q_{Bn}] \tag{7-4}$$

[Moment Continuity]

$$\frac{y''_A(1)}{l_A^2}+\frac{y''_B(1)}{l_B^2} \tag{7-5}$$

$$\frac{1}{l_A^2}[\psi''_1 p_{A1}+\ldots+\psi''_m p_{Am}]+\frac{1}{l_B^2}[\psi''_1 p_{B1}+\ldots+\psi''_n p_{Bn}] \tag{7-6}$$

식(4-4),(4-6)을 행렬로 나타내면, 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\phi'_1}{l_1} & \cdots & \frac{\phi'_m}{l_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\phi'_1}{l_2} & \cdots & -\frac{\phi'_n}{l_2} \\ \frac{\psi''_1}{l_1^2} & \cdots & \frac{\psi''_m}{l_1^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\psi''_1}{l_2^2} & \cdots & \frac{\psi''_n}{l_2^2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{A1} \\ \vdots \\ p_{Am} \\ q_{A1} \\ \vdots \\ q_{Am} \\ p_{B1} \\ \vdots \\ p_{Bn} \\ q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn} \end{Bmatrix} = 0 \tag{7-7}$$

식(4-7)에서 2m+2n개의 좌표계가 나타나는데, 이 중 Slope과 모멘트 구속 조건에 의해 최종 2m+2n-2개의 좌표계로 표현 가능하다.

여기에 연결형 보 구조물의 좌표계를 감소시키기 위한 방법으로 본 연구에서는 y_1과 y_2의 파형함수를 구성하는 각각의 형상 함수와 경계 조건이 같다는 조건을 부여하였다. 식(4-7)로부터

$$\frac{1}{l_1}\cdot\begin{bmatrix}\phi'_1 & \cdots & \phi'_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{A1} \\ \vdots \\ q_{Am}\end{Bmatrix}-\frac{1}{l_2}\cdot\begin{bmatrix}\phi'_1 & \cdots & \phi'_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn}\end{Bmatrix}=0 \tag{7-8}$$

$$\frac{1}{l_1^2}\cdot\begin{bmatrix}\psi''_1 & \cdots & \psi''_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_{A1} \\ \vdots \\ p_{Am}\end{Bmatrix}+\frac{1}{l_2^2}\cdot\begin{bmatrix}\psi''_1 & \cdots & \psi''_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_{B1} \\ \vdots \\ p_{Bn}\end{Bmatrix}=0 \tag{7-9}$$

위 식에서 m=n 같고, $\alpha = \frac{l_2}{l_1}$ 라 할 때, 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} q_{A1} \\ \vdots \\ q_{Am} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\alpha} \cdot \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn} \end{Bmatrix} \tag{7-10}$$

$$\begin{Bmatrix} p_{A1} \\ \vdots \\ p_{Am} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \begin{Bmatrix} q_{B1} \\ \vdots \\ q_{Bn} \end{Bmatrix} \tag{7-11}$$

식(7-1),(7-2)에서 y_1과 y_2는 서로 다른 좌표계를 갖는 파형함수이다. 하지만 동일 형상함수와 경계조건을 도입함으로써 구조물간 하나의 동일 좌표계로 표현하였다. 동일 형상함수와 경계조건을 갖는다는 가정하에 y_1, y_2 파형함수를 재정리 하면 아래와 같다.

$$y_1(\xi) = -\frac{1}{\alpha^2}\psi_1(\xi)p_1 - \cdots - \frac{1}{\alpha^2}\psi_m(\xi)p_m + \frac{1}{\alpha}\phi_1(\xi)q_1 + \cdots + \frac{1}{\alpha}\phi_m(\xi)q_m \tag{7-12}$$

$$y_2(\xi) = \psi_1(\xi)p_1 + \cdots + \psi_m(\xi)p_m + \phi_1(\xi)q_1 + \cdots + \phi_m(\xi)q_m \tag{7-13}$$

두 식에 의해 정의된 파형함수를 에너지 산식에 적용함으로써 고유진동수를 계산 할 수 있다.

2. 고유진동수 계산을 위한 에너지 산식

파형가정함수를 이용한 고전적 근사해법에 의한 진동 해석을 위한 해석 대상계의 에너지 산식은 2절에서 정의한 내용과 동일하다.

Lagrange 운동 방정식으로 부터 M, K 비감쇠 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{p}_i}\right)-\frac{\delta T}{\delta p_i}+\frac{\delta U}{\delta p_i}=0 \tag{7-14}$$

$$\frac{ml}{2}M\{\ddot{p}\}+\frac{8EI}{l^3}K\{p\}=0 \tag{7-15}$$

식(3-9)을 (7-15)식에 적용하면 아래 수식으로 표현 가능하다.

$$\frac{ml}{2}[C]'[M][C]\{\ddot{p}\}+\frac{8EI}{l^3}[C]'[K][C]\{p\}=0 \tag{7-16}$$

질량 및 강성 행렬은 파형가정함수에 대한 에너지 산식에 의해 구하고 식(7-16)에 대입하면 고유진동수를 얻을 수 있다.

$y_1(\eta)$에 대한 질량행렬

$$[m_1]=ml_1\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_n & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\phi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^4}\psi_m\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_m\psi_n & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_m\phi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_m\phi_n \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_1\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_1\psi_n & \frac{1}{\alpha^2}\phi_1\phi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_m\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_m\psi_n & \frac{1}{\alpha^2}\phi_m\phi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_m\phi_n \end{vmatrix} \tag{7-17}$$

$y_2(\eta)$에 대한 질량행렬

$$[m_2] = ml_2 \begin{vmatrix} \psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_n & \psi_1\phi_1 & \cdots & \psi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m\psi_1 & \cdots & \psi_m\psi_n & \psi_m\phi_1 & \cdots & \psi_m\phi_n \\ \phi_1\psi_1 & \cdots & \phi_1\psi_n & \phi_1\phi_1 & \cdots & \phi_1\phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m\psi_1 & \cdots & \phi_m\psi_n & \phi_m\phi_1 & \cdots & \phi_m\phi_n \end{vmatrix} \tag{7-18}$$

$y_1(\eta)$에 대한 강성행렬

$$[k_1] = \frac{EI}{l_1^3} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_n'' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\phi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\phi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^4}\psi_m''\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_m''\psi_n'' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_m''\phi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_m''\phi_n'' \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_1''\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_1''\psi_n'' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_1''\phi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_1''\phi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_m''\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_m''\psi_n'' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_m''\phi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_m''\phi_n'' \end{vmatrix} \tag{7-19}$$

$y_2(\eta)$에 대한 강성행렬

$$[k_2] = \frac{EI}{l_2^3} \begin{vmatrix} \psi_1''\psi_1'' & \cdots & \psi_1''\psi_n'' & \psi_1''\phi_1'' & \cdots & \psi_1''\phi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m''\psi_1'' & \cdots & \psi_m''\psi_n'' & \psi_m''\phi_1'' & \cdots & \psi_m''\phi_n'' \\ \phi_1''\psi_1'' & \cdots & \phi_1''\psi_n'' & \phi_1''\phi_1'' & \cdots & \phi_1''\phi_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m''\psi_1'' & \cdots & \phi_m''\psi_n'' & \phi_m''\phi_1'' & \cdots & \phi_m''\phi_n'' \end{vmatrix} \tag{7-20}$$

두 구조물의 전체 질량(M)과 강성(K)을 계산함으로써 연결 구조물이 갖고 있는 특성을 모두 고려하여 고유진동수를 계산 할 수 있다.

$$[M]=ml_2\begin{vmatrix} \psi_1\psi_1(1+\frac{1}{\alpha^5}) & \cdots & \psi_1\psi_n(1+\frac{1}{\alpha^5}) & \psi_1\phi_1(1-\frac{1}{\alpha^4}) & \cdots & \psi_1\phi_n(1-\frac{1}{\alpha^4}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m\psi_1(1+\frac{1}{\alpha^5}) & \cdots & \psi_m\psi_n(1+\frac{1}{\alpha^5}) & \psi_m\phi_1(1-\frac{1}{\alpha^4}) & \cdots & \psi_m\phi_n(1-\frac{1}{\alpha^4}) \\ \phi_1\psi_1(1-\frac{1}{\alpha^4}) & \cdots & \phi_1\psi_n(1-\frac{1}{\alpha^4}) & \phi_1\phi_1(1+\frac{1}{\alpha^3}) & \cdots & \phi_1\phi_n(1+\frac{1}{\alpha^3}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m\psi_1(1-\frac{1}{\alpha^4}) & \cdots & \phi_m\psi_n(1-\frac{1}{\alpha^4}) & \phi_m\phi_1(1+\frac{1}{\alpha^3}) & \cdots & \phi_m\phi_n(1+\frac{1}{\alpha^3}) \end{vmatrix} \tag{7-21}$$

$$[K]=\frac{EI}{l_2^3}\begin{vmatrix} \psi_1''\psi_1''(1+\frac{1}{\alpha}) & \cdots & \psi_1''\psi_n''(1+\frac{1}{\alpha}) & \psi_1''\phi_1''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) & \cdots & \psi_1''\phi_n''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_m''\psi_1''(1+\frac{1}{\alpha}) & \cdots & \psi_m''\psi_n''(1+\frac{1}{\alpha}) & \psi_m''\phi_1''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) & \cdots & \psi_m''\phi_n''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) \\ \phi_1''\psi_1''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) & \cdots & \phi_1''\psi_n''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) & \phi_1''\phi_1''(1+\alpha) & \cdots & \phi_1''\phi_n''(1+\alpha) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m''\psi_1''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) & \cdots & \phi_m''\psi_n''(1-\frac{l_2^3}{l_1^3}\cdot\frac{1}{\alpha^3}) & \phi_m''\phi_1''(1+\alpha) & \cdots & \phi_m''\phi_n''(1+\alpha) \end{vmatrix} \tag{7-22}$$

fig.5은 위에서 설명한 정식화 방법의 결과를 그림으로 표현 한 것으로 두 구조물의 파형 함수가 동일 형상함수와 경계조건을 갖는다면 'ㄱ' 자 연결구조는 그림처럼 y2구조물의 질량과 강성을 y1구조물의 질량과 강성에 추가함으로써 연결구조에 대한 고유진동수 계산을 좌표계 증가 없이 단일 구조물에 대한 계산식으로 처리하였다.

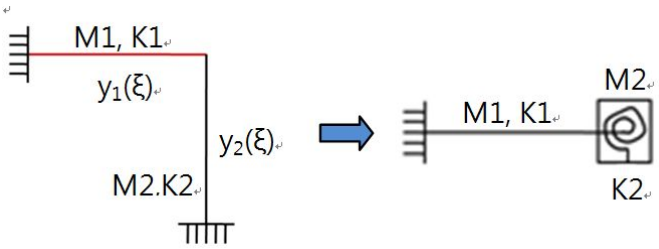


Fig. 11 연결구조물의 좌표계 단순화

위 정식화 방법에서 두 구조물 y1, y2의 길이가 같다면 두 구조물은 각기 동일한 고유진동수와 모드를 갖고 y2의 길이가 0에 가까워질 경우 y1구조물의

연결부위는 어떤 경계 조건의 성질을 갖게 될 것인지 확인하였다. 식(5-12) y1의 파형함수에서 α 에 주목 할 필요가 있다. 파형함수에서 고정지지 조건의 계수는 $\frac{1}{\alpha^2}$이고 단순지지 조건은 $\frac{1}{\alpha}$이다. $\alpha << 1$면 고정지지 조건의 계수가 단순지지 조건의 계수에 비해 상대적으로 큰 값을 갖게 된다.

따라서, y2의 길이가 짧아질수록 고정 지지 조건에 가까운 구속조건을 갖게 됨을 확인하였다.

3. 연결형 보 구조물의 고유진동수 계산

본 연구에서는 연결구조물의 고유진동수 계산에 있어 동일 형상함수와 경계조건을 갖는다는 제약 조건을 도입함으로써 좌표계 증가 없이 연결구조의 고유진동수를 계산하는 정식화 방법에 대한 유용성 검증을 위해 2절에서 비교한 방법과 동일한 방법, 유한요소법 해석 결과를 양단 경계 조건별 모드 영향계수 $(\beta_n l)^2$와 비교 / 검토 하였다.

식의 무차원화를 위해 $\eta = \frac{2x}{l} - 1$,

· Clamp - Clamp 조건

$$M = m \cdot \int_0^l \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) \cdot dx \quad = \frac{ml}{2} \cdot \int_{-1}^1 \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta \qquad (7\text{-}23)$$

$$K = EI \cdot \int_0^l \psi_i''(x) \cdot \psi_j''(x) \cdot dx \quad = \frac{8EI}{l^3} \cdot \int_{-1}^l \psi_i''(\eta) \cdot \psi_j''(\eta) \cdot d\eta \qquad (7\text{-}24)$$

$$w = \frac{\sqrt{K}}{M} = \sqrt{\frac{16EI}{ml^4}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-1}^1 \psi_i''(\eta) \cdot \psi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta}} \qquad (7\text{-}25)$$

식(7-25) 우변항에서 상수를 제외한 파형함수 적분값을 모드별 영향계수로 정의하고 고정-고정지지 조건에서의 1차 모드 영향 계수는 식(7-26)와 같다.

$$(\beta_1 l)^2 = \sqrt{\frac{\int_{-1}^1 \psi_i''(\eta) \cdot \psi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^1 \psi_i(\eta) \cdot \psi_j(\eta) \cdot d\eta}} \qquad (7\text{-}26)$$

· Clamp-Hinged 조건

$$M = m \cdot \int_0^l \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot dx \quad = \frac{ml}{2} \cdot \int_{-1}^1 \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta \qquad (7\text{-}27)$$

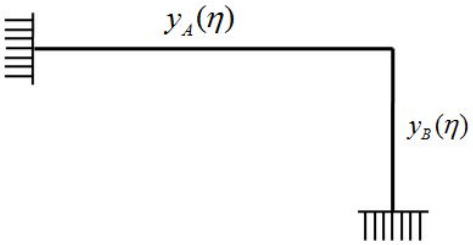
$$K = EI \cdot \int_0^l \phi_i''(x) \cdot \phi_j''(x) \cdot dx = \frac{8EI}{l^3} \cdot \int_{-1}^{l} \phi_i''(\eta) \cdot \phi_j''(\eta) \cdot d\eta \qquad (7\text{-}28)$$

$$w = \frac{\sqrt{K}}{M} = \sqrt{\frac{16EI}{ml^4}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-1}^{1} \phi_i''(\eta) \cdot \phi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta}} \qquad (7\text{-}29)$$

고정-단순지지 조건에서의 1차 모드 영향 계수는 식(4-30)와 같다.

$$(\beta_1 l)^2 = \sqrt{\frac{\int_{-1}^{1} \phi_i''(\eta) \cdot \phi_j''(\eta) \cdot d\eta}{\int_{-1}^{1} \phi_i(\eta) \cdot \phi_j(\eta) \cdot d\eta}} \qquad (7\text{-}30)$$

위 계산방법의 유용성을 검증하기 위한 모델은 Fig.2에서 언급한 'ㄱ'자 연결형 보구조이다. 이 구조의 Property는 아래와 같다.



Elastic Modulus [N/m²]	Density [kg/m³]
2.1E11	7850

Fig. 12 연결형 보의 특성치

Table 4 모드 합성법에 의한 연결보 계산 결과

Mode Coefficient of Euler's Beam According to the Boundary Conditions: $(\beta_n l)^2$				
		1st order	2nd order	3rd order
Clamp-Clamp		22.4	61.7	121.0
Clamp-Hinged		15.4	50.0	104.0
Length Ratio (L_1 : L_2)		1st order	2nd order	3rd order
1:1	FEA	15.3	22.0	48.9
	계산결과	15.5	22.4	53.9

1:0.8	FEA	17.5	29.7	54.0
	계산결과	17.6	30.3	56.4
1:0.6	FEA	18.5	45.5	59.3
	계산결과	18.7	46.8	62.6
1:0.5	FEA	18.8	51.4	72.0
	계산결과	19.1	53.0	77.4
1:0.4	FEA	19.4	53.5	95.0
	계산결과	19.6	55.5	106.6
1:0.2	FEA	20.2	55.7	108.3
	계산결과	20.7	58.4	127.3

길이 별 결과를 살펴보면, 두 연결 구조물의 길이 비가 1:1일 경우는 고정-단순, 고정-고정 지지 경계조건이 순차적으로 반복되어 나타남을 알 수 있다. 그리고, 길이 비에 차이가 발생할수록 1차 모드의 고유진동수는 고정-단순지지에서 고정-고정지지 경계조건으로 변화됨을 느낄 수 있으며 길이비가1:0.6, 1:0.5, 1:0.4의 경우 연결 부위에서의 경계조건 기여도를 살펴보면 고정-고정과 고정-단순지지 조건이 서로 조화되어 작용한다는 것을 계산 결과를 통해 알 수 있다. 또한, L2의 길이가 '0'에 가까워지면 순수하게 고정-고정지지 경계조건의 영향계수만이 beam 진동 해석에 영향을 주고 있음을 알 수 있다.

위 계산 결과에서 확인 하였듯이 본 연구에서 사용한 정식화 방법은 저 주파수 영역에서 FEM 결과와 10% 이내의 결과를 보여주고 있다.

제 2 절 ‘ㄱ’자 연결 판 구조물의 고유진동수 계산

1. 모드 합성법

판 구조물의 경우 단일 보의 조합으로 구성됨을 설명하였고 그리고 단일 보에 대한 정의는 2장 3절에서 언급하였다. 본 절에서는 판 구조물에 자유도계 합성법을 이용하여 자유도계 증가 없이도 고유진동수 계산 결과가 부분모드 합성법과 유사하게 나타나는지 확인하였다.

먼저 파형함수 정의에 있어서 X축의 연결 구조는 보 구조물에서 정의한 (7-12)식을 사용하였고 Y축의 경우는 일반적인 고정-고정 파형함수 $\psi(\eta)$를 사용하였다.

$$x_1(\eta) = -\frac{1}{\alpha^2}\psi_1(\eta)p_1 - \cdots - \frac{1}{\alpha^2}\psi_m(\eta)p_m + \frac{1}{\alpha}\phi_{i+1}(\eta)q_1 + \cdots + \frac{1}{\alpha}\phi_{2m}(\eta)q_m \quad (7\text{-}31)$$

$$y_1(\eta) = \psi_1(\eta)p_1 + \cdots + \psi_n(\eta)p_n \quad (7\text{-}32)$$

판의 파형함수는 두 함수의 조합으로 표현됨으로,

$$w(x,y) = X(\eta) \cdot Y(\eta) \quad (7\text{-}33)$$

$$w(x,y) = [-\frac{1}{\alpha^2}\psi_1\psi_1 - \cdots - \frac{1}{\alpha^2}\psi_m\psi_n + \frac{1}{\alpha}\phi_{i+1}\psi_1 + \cdots + \frac{1}{\alpha}\phi_{2m}\psi_n] \quad (7\text{-}34)$$

따라서, 식(7-34)을 에너지 산식에 대입하여 얻은 질량과 강성 행렬을 식(3-24)에 대입함으로써 고유진동수를 얻을 수 있다.

2. 고유진동수 계산을 위한 에너지 산식

식(7-34)에서 얻은 파형함수를 운동에너지식에 대입하여 질량 행렬을 구할 수 있다.

$$[m_1]=\rho\cdot l_1\cdot l_2\cdot t_1\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_1\psi_k\psi_l & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\psi_1\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\psi_1\phi_{2k}\psi_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^4}\psi_i\psi_j\psi_1\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_i\psi_j\psi_k\psi_l & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_i\psi_j\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_i\psi_j\phi_{2k}\psi_l \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{i+1}\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{i+1}\psi_1\psi_k\psi_l & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{i+1}\psi_1\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{i+1}\psi_1\phi_{2k}\psi_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2i}\psi_j\psi_1\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2i}\psi_j\psi_k\psi_l & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2i}\psi_j\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2i}\psi_j\phi_{2k}\psi_l \end{vmatrix} \tag{7-35}$$

$$[m_2]=\rho\cdot l_3\cdot l_4\cdot t_2\cdot\begin{vmatrix} \psi_1\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_1\psi_k\psi_l & \psi_1\psi_1\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & \psi_1\psi_1\phi_{2k}\psi_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_i\psi_j\psi_1\psi_1 & \cdots & \psi_i\psi_j\psi_k\psi_l & \psi_i\psi_j\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & \psi_i\psi_j\phi_{2k}\psi_l \\ \phi_{i+1}\psi_1\psi_1\psi_1 & \cdots & \phi_{i+1}\psi_1\psi_k\psi_l & \phi_{i+1}\psi_1\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & \phi_{i+1}\psi_1\phi_{2k}\psi_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{2i}\psi_j\psi_1\psi_1 & \cdots & \phi_{2i}\psi_j\psi_k\psi_l & \phi_{2i}\psi_j\phi_{k+1}\psi_1 & \cdots & \phi_{2i}\psi_j\phi_{2k}\psi_l \end{vmatrix} \tag{7-36}$$

연결형 판 구조물의 전체 질량행렬은 (7-35)과 (7-36)식의 합으로 사용한다. (3-62)식의 탄성에너지에 의한 강성 행렬도 w1과 w2 각각 구하여 합을 사용한다.

$$\iint D_x \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2}\right)^2 = D_X \cdot \frac{l_2}{l_1^3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_1\psi_1'\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_1\psi_k''\psi_l & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1'\psi_1\phi_{k+1}''\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\psi_1\phi_{2k}''\psi_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_j\psi_1'\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_j\psi_k''\psi_l & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1'\psi_j\phi_{k+1}''\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\psi_j\phi_{2k}''\psi_l \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}''\psi_1\psi_1'\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}''\psi_1\psi_k''\psi_l & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}''\psi_1\phi_{k+1}''\psi_l & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}''\psi_1\phi_{2k}''\psi_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}''\psi_j\ \psi_1'\psi_1 & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}''\psi_j\psi_{k+1}''\psi_l & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}''\psi_j\psi_{k+1}''\psi_1 & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}''\psi_j\psi_{2k}''\psi_l \end{vmatrix} \tag{7-37}$$

$$\iint D_y \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right)^2 = D_y \cdot \frac{l_1}{l_2^3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_1'\psi_1\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_1'\psi_k\psi_l'' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\psi_1''\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\psi_1''\phi_{2k}\psi_l'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_j'\psi_1\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1\psi_j'\psi_k\psi_l'' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\psi_1''\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1\psi_j''\phi_{2k}\psi_l'' \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}\psi_1'\psi_1\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}\psi_1'\psi_k\psi_l'' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}\psi_1'\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}\psi_j''\phi_{2k}\psi_l'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}\psi_j'\psi_1\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}\psi_j'\psi_k\psi_l'' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}\psi_j'\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}\psi_j''\phi_{2k}\psi_l'' \end{vmatrix} \tag{7-38}$$

$$\iint 4D_{xy} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \cdot \partial \zeta}\right)^2 = 4D_{xy} \cdot \frac{1}{l_1} \cdot \frac{1}{l_2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^4}\psi_1'\psi_1\psi_1'\psi_1' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1'\psi_1\psi_k'\psi_l' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1'\psi_1'\phi_{k+1}'\psi_1' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1'\psi_1'\phi_{2k}'\psi_l' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^4}\psi_1'\psi_j'\psi_1'\psi_1' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1'\psi_j'\psi_k'\psi_l' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1'\psi_1'\phi_{k+1}'\psi_1' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1'\psi_j'\phi_{2k}'\psi_l' \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}'\psi_1'\psi_1'\psi_1' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}'\psi_1'\psi_k'\psi_l' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}'\psi_1'\phi_{k+1}'\psi_1' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}'\psi_1'\phi_{2k}'\psi_l' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}'\psi_1'\psi_1'\psi_1' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}'\psi_j'\psi_k'\psi_l' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}'\psi_j'\phi_{k+1}'\psi_1' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}'\psi_j'\phi_{2k}'\psi_l' \end{vmatrix} \tag{7-39}$$

$$\iint 2D_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = 2D_1 \cdot \frac{1}{l_1^2} \cdot \frac{1}{l_2^2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_1\psi_1\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_1\psi_k\psi_1'' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\psi_1\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\psi_1\phi_{2k}\psi_l'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_j\psi_1\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^4}\psi_1''\psi_j\psi_k\psi_1'' & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\psi_j\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\psi_1''\psi_j\phi_{2k}\psi_l'' \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}''\psi_1\psi_1\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{l+1}''\psi_1\psi_k\psi_1'' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}''\psi_1\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{l+1}''\psi_1\phi_{2k}\psi_l'' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}''\psi_j\psi_1\psi_1'' & \cdots & -\frac{1}{\alpha^3}\phi_{2l}''\psi_j\psi_k\psi_l'' & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}''\psi_j\phi_{k+1}\psi_1'' & \cdots & \frac{1}{\alpha^2}\phi_{2l}''\psi_j\phi_{2k}\psi_l'' \end{vmatrix} \tag{7-40}$$

탄성에너지 식으로부터 얻은 (7-37)~(7-40)를 Lagrange 운동방정식 (3-24)에 대입함으로써 고유진동수를 얻을 수 있다.

3. 연결형 판넬 구조물의 고유진동수 계산

정식화 방법의 유용성 검증을 위해 Fig.11에서 'ㄱ' 형태 벽면 구조물에 길이 변화에 따라 유한요소법(FEA) 결과와 비교 /검토 하였다.

Table 5 모드 합성법에 의한 판넬 계산 결과 비교 [Unit : Hz]

L1	L2	L3	L4	Mode By Mode 일치법				고정 및 단순 파형함수 계산결과				FEA			
				W1 Panel		W2 Panel		W1 Panel		W2 Panel		W1 Panel		W2 Panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	2m	**2m**	2m	28.2797	29.2433			28.2593	29.1707	39.6515	78.7547	28.119	29.150	38.911	78.265
10m	2m	**4m**	2m	28.2799	29.2547			28.258	29.171	30.1476	38.229	28.117	29.132	30.067	37.318
10m	2m	**6m**	2m	28.2813	29.3515			28.258	29.1707	28.8382	31.7294	28.116	29.161	28.752	31.631
10m	2m	**8m**	2m	28.2816	29.3667			28.258	29.1706	28.4347	29.9250	28.114	29.141	28.323	29.910

L1	L2	L3	L4	Mode By Mode 일치법				고정 및 단순 파형함수 계산결과				FEA			
				W1 Panel		W2 Panel		W1 Panel		W2 Panel		W1 Panel		W2 Panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	5m	**2m**	5m	4.8786	6.3292			4.8212	6.0355	22.7025	65.2687	4.8372	6.1126	21.289	64.061
10m	5m	**4m**	5m	4.8684	6.3311			4.8212	6.0346	7.7592	18.7341	4.8271	6.0555	7.9146	19.248
10m	5m	**6m**	5m	4.8636	6.6024			4.8212	6.0343	5.6593	9.8768	4.8218	6.1803	5.7169	10.156
10m	5m	**8m**	5m	4.8576	6.5358			4.8210	6.0342	5.0606	7.1596	4.8151	6.0707	5.1050	7.2607

L1	L2	L3	L4	Mode By Mode 일치법				고정 및 단순 파형함수 계산결과				FEA			
				W1 Panel		W2 Panel		W1 Panel		W2 Panel		W1 Panel		W2 Panel	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10m	8m	**2m**	8m	2.2770	4.1117			2.1660	3.6533	19.9793	63.9653	2.1509	3.7996	19.815	62.330
10m	8m	**4m**	8m	2.2539	4.1009			2.1658	3.6527	5.7362	16.6369	2.2379	3.7774	5.9676	17.907
10m	8m	**6m**	8m	2.2395	3.4629			2.1658	3.6525	3.2489	7.9454	2.2234	4.0017	3.3912	8.4389
10m	8m	**8m**	8m	2.2223	2.6545			2.1658	3.6525	2.4780	4.9726	2.2060	3.8013	2.6315	5.2166

검토결과 부분 모드합성법 결과와 매우 유사한 결과를 보이고 있으며 FEA 결과와도 10% 내외의 오차를 보이고 있어 설계단계에서 초기 공진 검토를 위한 계산 방법으로 유용할 것으로 판단된다.

제 8 장 정식화 계산 결과의 특성

정식화 계산(고정 및 단순지지 파형함수를 이용한 고유진동수 계산, Mode be Mode 합성법)을 이용하여 연결구조에 대한 고유진동수 계산을 수행하여 FEA 결과와 비교하였다. 아래 그림은 'ㄱ'자 연결 보 구조의 계산 결과를 y2 길이 변화에 따라 나타내었다.

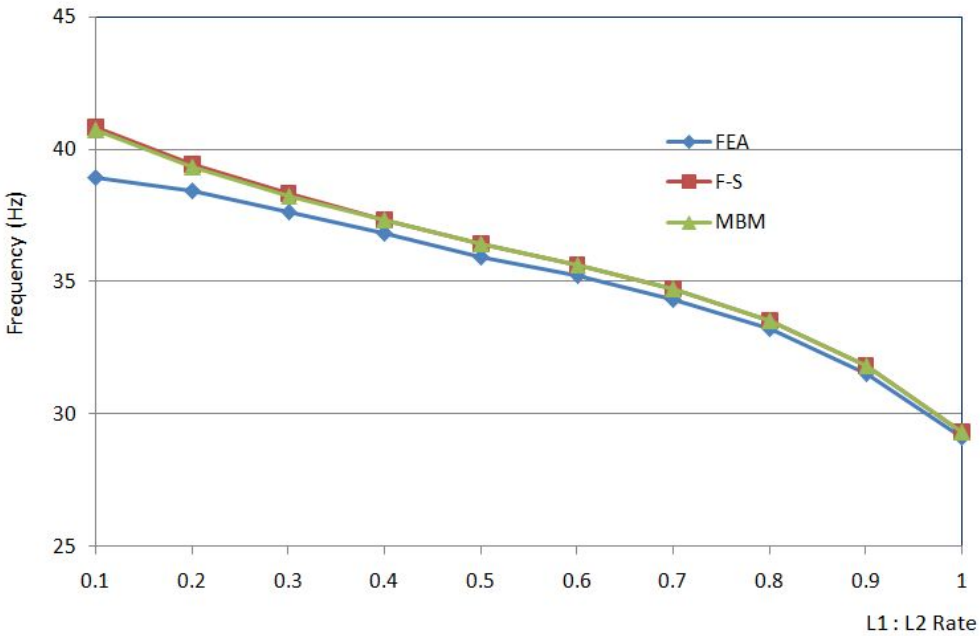


Fig.13 1차 모드 고유진동수 계산 결과 비교

길이비에 따른 그래프 추이를 살펴보면, 두 구조물의 길이가 동일한 경우 연결지점에서 서로 독립적인 관계를 형성한다. 1차 모드는 단순조건, 2차는 고정조건을 갖는다. 그리고 y2의 길이가 짧아지면 고정 지지조건에 근접한 결과를 보인다. 그리고, 중간 길이에서는 고정과 단순의 조합된 형태의 결과로 나타난다.

그리고, 본 연구에서 사용한 고정 및 단순지지 파형함수를 이용하여 2m+2n 개의 자유도계를 가지고 계산한 결과와 Mode 합성법을 이용하여 연결 구조물 중 한 구조물의 자유도계를 제거하고 2m개 자유도계만으로 계산한 고유진동수간 결과가 유사한 변화 추이를 보이고 있다. 비록, 과도한 경계조건을 적용하여 계산을 단순화 하였지만 길이에 상관없이 전 구간에서 고유진동수 계산에 충분히 유용성이 있음을 확인 할 수 있다.

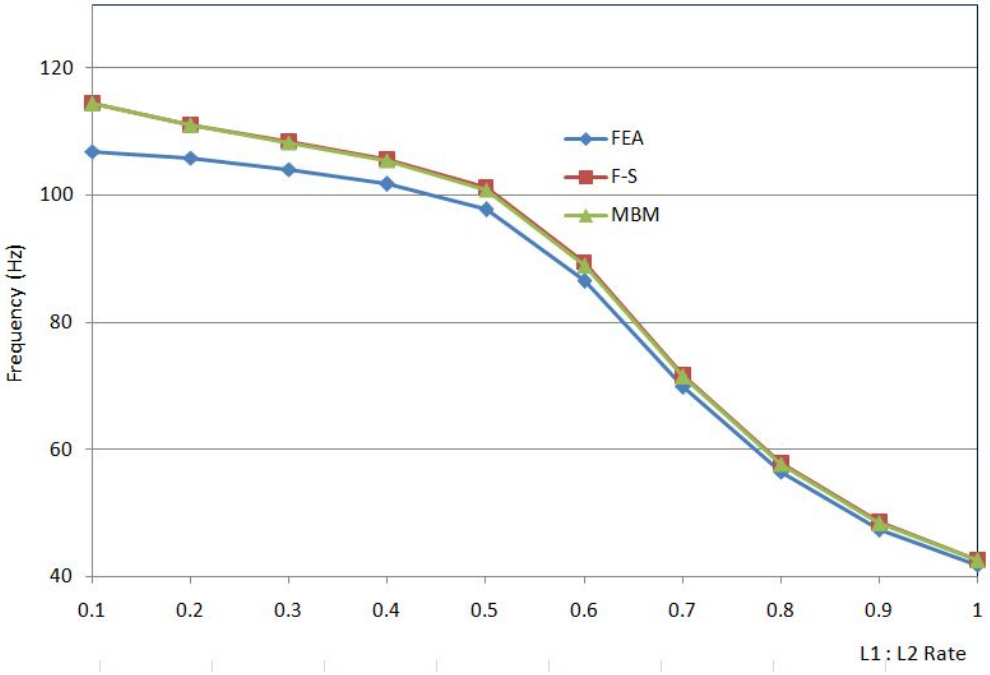


Fig.14 2차 모드 고유진동수 계산 결과 비교

그래프 변화 추이에서 길이비가 0.5를 기점으로 FEA와 정식화 간에 오차가 점점 벌어짐을 알 수 있다. 오차가 증가하는 이유는 길이가 짧아지면서 모드 변화시 증가된 강성이 실제 FEA 해석 결과와 차이가 발생하는 것으로 판단됩니다. 또한, 저차모드에 관심이 있어 4차 모드까지만 파형함수를 정의하여 계산에 사용하였고 본 연구에서 사용한 FEM Tool은(Patran/Nastran) 다자유도계로 해석으로 결과에 차이를 발생시키는 원인이라 판단됩니다.

그러나, 조선소에서 FEA 해석 오차를 10%를 주고 있고, 실제 선박 Tank 격벽 구조의 경우 길이가 최소 0.5이상의 범위로 형성되어 있다는 점을 고려해 볼 때 정식화 방법이 설계 단계에서 충분히 공진 검토를 할 수 있는 방법이라 생각됩니다.

제 9 장 결 론

선박 운항에 필요한 Tank 구조는 엔진룸이나 선미 부분에 주로 배치되어 주요 기진력에 언제나 노출되어있어 진동에 취약하고 문제 발생 시 조선소 측면에서 많은 손실이 발생할 수 밖에 없다. 따라서, 각 조선소에서는 실정에 맞게 근사해법을 이용한 계산식을 개발하여 설계단계에서 공진 검토를 수행하고 있으나 단일 평판에 대한 계산 방식으로 연결부분의 구속조건에 따라 결과가 차이가 발생하여 신뢰감을 주지 못한다. 하지만, 본 연구에서는 실제적인 경계조건을 반영한 연결형 구조물의 고유진동수를 계산하기 위하여 다음과 같은 연구를 수행하였다.

1. 단일 사각평판 모델단위가 아닌 연결형 평판을 채택함으로서 보강판들 사이에 실질적인 경계조건(변위, 모멘트 및 경사각)을 반영하였다.

2. 고유진동수 결정에 중요한 영향을 미치는 경계조건을 단순지지나 고정지지가 아닌 두 조건의 조합된 형태의 파형함수를 정의하여 고유진동수 계산에 이용하였다.

3. 연결형 보 구조물 뿐만 아니라 연결형 판 구조물에 적용하여 유한요소법(Patran / Nastran) 결과와 비교하여 계산 방식에 대한 유용성을 검토하였다.

4. 연결 구조물의 경우 자유도계 증가가 발생하여 계산 성능에 문제가 되지만 연결형 구조를 단일 부재화 할 수 있도록 자유도계를 감소시킬 수 있는 방법을 개발하여 그 결과를 유한요소법 결과와 비교하여 계산 방식에 대한 유용성을 검토하였다.

결론적으로, 본 연구에서 정의한 계산 방법에 의한 결과와 FEA에서 얻은 결과를 비교해 보면 연결형 보나 판 구조물에서 모두 10% 이내의 오차로 설계단계에서 유용하게 사용할 수 있는 근거를 마련하였다.

[참 고 문 헌]

[1] Ahn,C.W. ,Kim,D.Y. ,Choi,S.C. ,Park,I.S., 2001. A Study on the Optimal Position Determination of Middle Supporting points to Maximize the First Natural Frequency of a Beam, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering. 11(1),89-95.

[2] Bhat,R.B., 1985. Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomoals in Rayleigh-Riz Method. Jounral of Sound and Vibration 102(4),493-499.

[3] Chung, J.H, Chung,T.Y. and Kim, K.C., 1992. Vibration Analysis of Mindlin Plates Using Polynomials Having the Property of Timoshenko Beam Functions, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, 29(1), 158-172

[4] Han, S.Y., 1994. Vibration Analysis of Local Plate for the Hull Structure. Bulletin of the Society of Naval Architects of Korea, 31(3), 33-35.

[5] Han, S.Y. Kweon, H., 2000. Development of the Program for Vibration Analysis of Local Plate with Appendage. Proceedings of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering Conference, 311-321.

[6] Kim,B.H., Kim,J.H. and Cho,D.S.,2004. Free Vibration Analysis Stiffened Plates Using Polynomials Having the Property of Timoshenko Beam Functions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering Conference, 623-628.

[7] William T. THOMSON, 1993. Theory of Vibration with Applications. 4th Edition, Prentice Hall. New Jersey, 360-365.

[후 기]

대학에 입학하여 석사과정을 마치고 이 후기를 쓰기까지 16년이라는 시간이 흘렸다. 이 시간 동안 내 주변에 많은 것들이 변했다. 하지만, 20년이 넘도록 변하지 않는게 한 가지 있다. 바로 부족한 나를 20년 이란 시간동안 변함없이 지켜봐 주시고 조언과 격려를 아끼지 않고 해주신 윤덕영 교수님, 언제나 마음속 깊이 감사드립니다. 그리고, 역시 수십 년 전이나 지금이나 가르침을 주신 이귀주 교수님과 박제웅 교수님께도 감사드립니다.

그리고, 회사 생활 때문에 대신 일을 처리해준 실험실 후배 철민이와 신승이에게도 고맙다는 말을 전합니다.

주말에만 만나는 남편, 아빠인데도 일요일이면 학교에 공부한다고 가버려 아내와 애들에게 많이 미안했는데 싫은 소리 한번 없이 몇 년을 지켜봐 준 사랑하는 아내 김현주, 그리고, 주말에 우리 아빠는 공부하러 학교 간다고 했다가 다른 아이들에게 거짓말쟁이가 된 딸 가은이, 아직 아무것도 모르고 공룡을 좋아하며 장래 희망이 강력한 힘을 가진 파워레인저가 되고 싶어 하는 아들 건우에게도 정말 고맙고 사랑한다는 말을 전하고 싶습니다.

산학과제를 하도록 지원해 준 회사와 과를 책임지면서 과제가 잘 수행되도록 지원해준 변민섭 부장님, 진동 업무를 같이하면서 여러 가지 도움을 주시는 라기웅 부장님, 회사에서 열심히 생활하고 시운전 가면 언제나 합방하는 신한철 사우에게도 감사드립니다. 또한, 선각설계 과원 분들 모두에게도 감사의 마음을 전합니다.

결혼을 하면서 아버지, 어머니가 한분씩이 더 생깁니다. 운암동 어머니와 유덕동 어머니, 두 분 모두 시운전이라도 나가면 바다 날씨에 전전긍긍 대며 걱정해주시고 묵묵히 아들이 잘 되기만을 바라시며 지원해 주신 분들이십니

다. 두 분께 머리 숙여 감사드립니다. 말씀이 없으시다가 가끔 버럭 하시는게 매력이신 유덕동 아버님, 언제나 '고생이 많고만' 이라며 격려해 주시고 걱정해 주셔서 감사합니다. 언제나 건강하십시오.

이제 지역에 상관없이 명절 때나 얼굴을 보게 되는 형, 형수, 매형, 누나 그리고 경기도 용인까지 가서 공부하는 찬이, 그 뒤를 따라가려는 다원이, 그리고 유덕동 형님께도 모두 감사드립니다. 저에게는 모두 든든한 지원군입니다. 그리고, 마지막으로 작년에 하늘 나라로 가신 아버지, 정이 많으셨던 아버지. 하늘에서 우리 가족 모두를 지켜주고 계시겠지요. 언제나 든든한 버팀목이 되어주신 아버지. 모든 것에 감사드립니다. 언제까지나 가슴 속에 아버지와 함께 할 것입니다. 사랑합니다.