[UCI]I804:24011-200000241126

2011년 2월

교육학석사(수학교육)학위논문

뉴튼 퓨조 알고리즘과 대수적 곡선의 특이점

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

박 성 운

뉴튼 퓨조 알고리즘과 대수적 곡선의 특이점

Newton-Puiseux algorithm and algebraic curve singularity

2011년 2월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

박 성 운

뉴튼 퓨조 알고리즘과 대수적 곡선의 특이점

지도교수 이 관 규

이 논문을 교육학석사(수학교육)학위 청구논문으로 제출함.

2010년 10월

조선대학교 교육대학원

수학교육전공

박 성 운

박성운의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

심사위원장 조선대학교 교수 강 성 권 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 강 은 실 인

심 사 위 원 조선대학교 교수 이 관 규 인

2010년 12월

조선대학교 교육대학원

목차

ABSTRACT ····· iv

제1장 서론 ····· 1

제2장 뉴튼 퓨조 알고리즘 ····· 6

제3장 예제 ····· 10

제1절 대수곡선에서 가지의 매개변수 방정식 구하기 I ··· 10

제2절 대수곡선에서 가지의 매개변수 방정식 구하기 II ··· 20

제4장 결론 ····· 41

참고문헌 ····· 42

그림목차

그림1 $x^3-y^2=0$ ····· 3

그림2 $y^2-x^2(1-x)=0$ ····· 3

그림3 x^4-xy+y^4의 뉴튼 다각형 ····· 5

그림4 $y^3-9x^3y-x^4=0$의 그림 ····· 10

그림5 $y^3-9x^3y-x^4$의 뉴튼 다각형 ····· 11

그림6 $3y_1+3y_1^2+y_1^3-9x_1-9x_1y_1$의 뉴튼 다각형 ····· 12

그림7 $3y_2+9x_2y_2+3x_2y_2^2+27x_2^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 14

그림8 $30y_3-81x_3+9x_3y_3-243x_3^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 15

그림9 $30y_4-\frac{2187}{10}x_4+9x_4y_4+243x_4^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 16

그림10 $\begin{cases} x=x_5^3 \\ y=x_5^4+3x_5^5-9x_5^7+\frac{27}{10}x_5^8+\frac{729}{100}x_5^9+x_5^{10}O \end{cases}$의 그림 ····· 18

그림11 $y^3-9x^3y-x^4=0$와

$\begin{cases} x=x_5^3 \\ y=x_5^4+3x_5^5-9x_5^7+\frac{27}{10}x_5^8+\frac{729}{100}x_5^9+x_5^{10}O \end{cases}$의 그림 ····· 19

그림12 $x^5-x^2y^2+y^5=0$의 그림 ····· 20

그림13 $x^5-x^2y^2+y^5$의 뉴튼 다각형 ····· 21

그림14 $x_1^5+y_1^5+5y_1^4+10y_1^3\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 23

그림15 $x_2^{20}y_2^5-\frac{5}{3}x_2^{20}y_2^4+\frac{10}{9}x_2^{20}y_2^3-\frac{10}{27}x_2^{20}y_2^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 24

그림16 $x_3^{40}y_3^5+\frac{5}{3}x_3^{40}y_3^4+\frac{10}{9}x_3^{40}y_3^3+\frac{10}{27}x_3^{40}y_3^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 25

그림17 $x_1^5y_1^5+5x_1^5y_1^4+10x_1^5y_1^3+10x_1^5y_1^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 28

그림18 $x_2^{25}y_2^5+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^4+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^3+\frac{5}{4}x_2^{25}y_2^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 29

그림19 $x_3^{45}y_3^5+\frac{25}{4}x_3^{45}y_3^4+\frac{125}{8}x_3^{45}y_3^3+\frac{625}{32}x_3^{45}y_3^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 31

그림20 $x_1^5y_1^5-5x_1^5y_1^4+10x_1^5y_1^3-10x_1^5y_1^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 33

그림21 $x_2^{25}y_2^5+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^4+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^3+\frac{5}{4}x_2^{25}y_2^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 34

그림22 $x_3^{45}y_3^5-\frac{25}{4}x_3^{45}y_3^4+\frac{125}{8}x_3^{45}y_3^3-\frac{625}{32}x_3^{45}y_3^2\cdots$의 뉴튼 다각형 ····· 35

그림23 $\begin{cases} x=x_4^3 \\ y=x_4^2-\frac{1}{3}x_4^7+\frac{1}{3}x_4^{12}-\frac{64}{81}x_4^{17}+x_4^{18}O \end{cases}$의 그림 ····· 38

그림24 $\begin{cases} x=x_4^2 \\ y=x_4^3+\frac{1}{2}x_4^8+\frac{5}{4}x_4^{13}+\frac{35}{8}x_4^{18}+x_4^{19}O \end{cases}$의 그림 ····· 38

그림25 $\begin{cases} x=x_4^2 \\ y=-x_4^3+\frac{1}{2}x_4^8-\frac{5}{4}x_4^{13}+\frac{35}{8}x_4^{18}+x_4^{19}O \end{cases}$의 그림 ····· 39

$x^5-x^2y^2+y^5=0$

그림26 $\begin{cases} x=x_4^3 \\ y=x_4^2-\frac{1}{3}x_4^7+\frac{1}{3}x_4^{12}-\frac{64}{81}x_4^{17}+x_4^{18}O \end{cases}$의 그림 ····· 40

$\begin{cases} x=x_4^2 \\ y=x_4^3+\frac{1}{2}x_4^8+\frac{5}{4}x_4^{13}+\frac{35}{8}x_4^{18}+x_4^{19}O \end{cases}$

ABSTRACT

Newton-Puiseux algorithm & algebraic curve singularity

Park Sung-woon
Advisor : Prof. Lee Gwan-gyu, Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

This research started from studying the features displayed on the singular points on an algebraic curve through several examples.

At singular points there exists more than one branch and each of these branches can be expressed through a parametric equation. I checked this facts by the use of several examples.

In order to use the Newton-Puiseux algorithm as a means to obtain this parametric equation I put an effort in comprehending and analyzing the principles of this algorithm.

Calculations were not easy in finding singular points, calculating the extent

of overlap, and in the Newton-Puiseux algorithm. I solved this problem by using the "Sage" mathematic software provided by the University of Washington.

제1장. 서론

이변수다항식 형태인

$$\sum_{r \geq 0,\ s \geq 0} p_{r,s} x^r y^s = 0$$

은 대수적 곡선을 정의한다. 우리는 이 대수 곡선 중에서 원점을 지나는 형태인 $p_{0,0} = 0$ 즉 상수항이 0인 이변수다항식만 다룰 것이다.

대수적 곡선위의 원점에서의 중복도(multiplicity)란 $\sum_{r \geq 0,\ s \geq 0} p_{r,s} x^r y^s = 0$의 전개식에서 계수가 0이 아닌 항들의 지수의 합 $r+s$값들 중에서 가장 작은 값인 m을 뜻한다.

예1) 대수곡선 $x^3 + y^3 - xy = 0$의 (0, 0)에 대한 중복도를 구하여라.
풀이) xy항의 차수인 2가 가장 낮은 차수이므로 $m = 2$이다.

또 원점에서의 중복도를 기하학적인 의미로 접근해보면 그 점에서의 접선의 방정식의 개수라고 볼 수 있다.
중복도가 m인 대수곡선 $\sum_{r \geq 0,\ s \geq 0} p_{r,s} x^r y^s = 0$에서 지수의 합이 m인 항 들의 합을 나타내면

$$\sum_{r+s=m} p_{r,\ s} x^r y^s$$

이다.

$$\begin{aligned} \sum_{r+s=m} p_{r,\ s} x^r y^s &= y^m \sum_{r+s=m} p_{r,\ s} \left(\frac{x}{y}\right)^r \\ &= y^m \sum_{r=0}^{m} p_{r,\ m-r} \left(\frac{x}{y}\right)^r \end{aligned}$$

인데 $\frac{x}{y}$의 해가 복소수 범위에서 m개 존재하므로

$$y^m \sum_{r=0}^{m} p_{r,\ m-r} (\frac{x}{y})^r = y^m (\frac{x}{y} - \alpha_1)(\frac{x}{y} - \alpha_2) \cdots (\frac{x}{y} - \alpha_m)$$
$$= (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \cdots (x - \alpha_m y)$$

을 만족한다. 그래서 m개의 접선의 방정식

$$y = \frac{1}{\alpha_1} x,\ y = \frac{1}{\alpha_2} x,\ \cdots,\ y = \frac{1}{\alpha_m} x$$

을 얻을 수 있다.

예2) 대수곡선 $x^3 + y^3 - xy = 0$의 $(0,\ 0)$에서 접선의 방정식을 구하여라.

풀이) 가장 낮은 차수 항인 xy에서 $xy = 0$이면 접선의 방정식은 $x = 0,\ y = 0$이다.

예3) 대수곡선 $x^5 + x^4 - xy^2 = 0$의 $(0,\ 0)$에서 접선의 방정식을 구하여라.

풀이) 가장 낮은 차수 항인 xy^2에서 $xy^2 = 0$이면 접선의 방정식은

$x = 0,\ y = 0,\ y = 0$이다.

대수적 곡선에서 중복도를 m이라고 표현하는데 $m = 1$이면 일반점(regular point)이라 하고 $m \geq 2$이면 특이점(singular point)이라고 한다. 직관적으로 보았을 때 일반점은 곡선위의 매끄러운 점들 다시 말해 접선이 하나인 점들이고 반대로 특이점은 매끄럽지 않은 점, 접선이 2개 이상인 점들이다. 그리고 특이점에서 중복도 값은 그 점에서 접선의 개수라고도 표현 할 수 있다.

예4) 대수곡선 $x^3 - y^2 = 0$과 $y^2 - x^2(1 - x) = 0$은 $(0,\ 0)$에서 중복도가 2인 그래프이다.

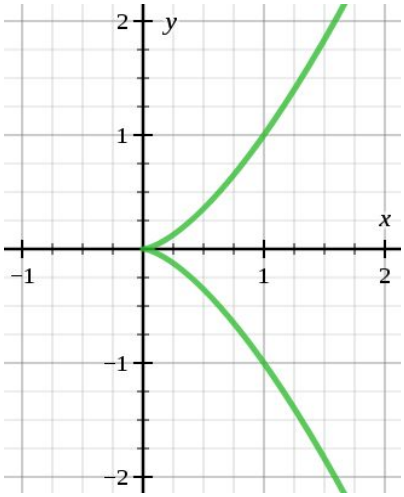


그림1 $x^3 - y^2 = 0$

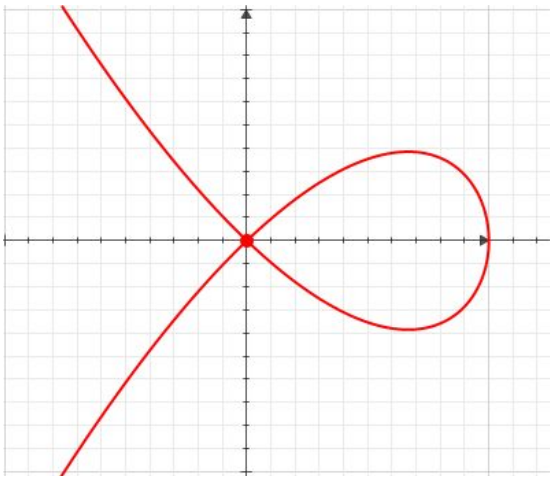


그림2 $y^2 - x^2(1-x) = 0$

우리는 이런 특이점들에서 나타나는 특징을 공부해보도록 할 것이다.

특이점은 여러 곡선들이 겹쳐지는 모양을 이루고 있는데 마치 그 곡선들은 나무의 가지모양을 띄고 있는 것처럼 보인다. 특이점에서 뻗어 나오는 가지 각각에 대해서

$$\sum p_{r,s} x^r y^s = 0$$

식에 대한 매개변수 방정식(parametric equation)을 구할 수 있는데

$$f(x,y)=\sum p_{,rs}x^r y^s$$

라고 놓고 f를 인수분해하면

$$f=f_1 f_2 f_3 \cdots f_n$$

식이 된다고 할 때 방정식 $f_i=0$ $(1 \le i \le n)$이 특이점에서 가지들이고 이 가지들을 매개변수 방정식으로 표현할 수 있는데 그 형태는 아래와 같다.

$$\begin{cases} x=t^a \\ y=c_1 t^{b_1}+c_2 t^{b_2}+c_2 t^{b_3}+\cdots \end{cases}$$

그러나 f의 인수분해를 통해서 방정식을 구하고 또 이 방정식들의 매개변수 표현으로 나타낸다는 것이 쉽지 않으므로 뉴튼 퓨조 알고리즘(newton puiseux algorithm)을 이용해서 구할 것이다. 식의 표현이 무한급수 형태이므로 전부 구하기는 불가능하므로 우리는 무한급수의 부분 합을 구할 것이다. 이 부분 합은 매개변수 방정식의 근사적인 형태라고 볼 수 있다.

뉴튼 다각형(newton polygon)이란

$$f(x,y)=\sum p_{r,s}x^r y^s$$

에서 각 항들의 지수인 r, s를 순서쌍으로 표현한 점$(r,\ s)$들을 r축과 s축으로 하는 좌표평면 위에 나타내고 각 점에 대해 $r \ge r_i$, $s \ge s_i$의 합집합으로 표현된 부등식영역을 볼록면의 가장자리(convex hull)로 표현한 도형이다.

예5) 대수곡선 $x^4-xy+y^4=0$의 뉴튼 다각형을 구해보면 아래 그림과 같다.

풀이)

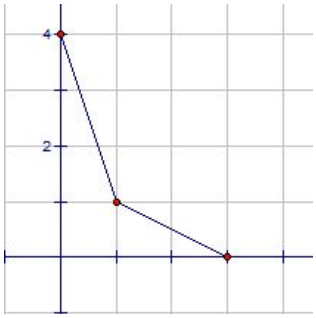


그림3 $x^4 - xy + y^4$의 뉴튼 다각형

뉴튼 다각형에서 n개의 변이 존재 할 때 각 변 m_i에 대하여 매개변수 방정식을 구할 수 있는데 이 변의 개수 이상으로 매개변수 방정식을 구할 수 있다.

선두 준동차 다항식(leading guasi homogeneous polynomial)이란 한 점 $(a,\ b)$에서 $a,\ b$를 무게라고 했을 때 $(x^a,\ x^b)$을 $f(x,\ y)$에 대입해 전개한 식에서 가장 낮은 차수를 갖는 항들을 말한다. 앞으로 f^σ을 한 점$(a,\ b)$에서 f의 선두 준동차 다항식이라고 하자.

예6) 대수곡선 $x^3 + xy^2 - xy - y^4 = 0$의 $(3,\ 1)$에서 f^σ를 구하여라.

풀이) $f(x,\ y) = x^3 + xy^2 - xy - y^4$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x^3,\ x) &= (x^3)^3 + (x^3)(x)^2 - (x^3)(x) - (x)^4 \\ &= x^9 + x^5 - x^4 - x^4 \end{aligned}$$

가장 낮은 무게를 갖는 항은 $-xy - y^4$이므로 $f^\sigma = -xy - y^4$이다.

제2장. 뉴튼 퓨조 알고리즘

이제 뉴튼 퓨조 알고리즘에 대해서 알아보자. 이 알고리즘은 서론에서 언급한 것처럼 대수 곡선

$$f(x,y)=\sum p_{r,s}x^r y^s$$

의 특이점에서 나타나는 가지의 매개 변수 방정식을 구하는 과정이다. 그런데 위 대수 곡선식을 이변수를 갖는 방정식

$$\sum p_{r,s}x^r y^s=0 \qquad ㉠$$

의 형태로 나타낸 식에 매개변수 방정식

$$\begin{cases} x=t^u \\ y=c_1t^{v_1}+c_2t^{v_1+v_2}+c_2t^{v_1+v_2+v_3+\cdots} \end{cases} \qquad ㉡$$

을 대입하면 성립한다는 것을 알 수 있는데 이 사실은 이 매개 변수 방정식이 ㉠식의 해를 뜻한다.

이제 ㉡식에서 u, v_i, c_i를 구하는 과정을 소개 할 것이다.

대수 곡선식을

$$f^{(i)}(x,y)=\sum p_{r,s}x_i^r y_i^s \qquad ⓐ$$

라 하면

$$\begin{cases} x_i=x_{i+1}^{\alpha} \\ y_i=x_{i+1}^{\beta}(c+y_{i+1}) \end{cases} \qquad ⓑ$$

형태로 x, y를 각각 치환한다.

$f^{(i)}$의 뉴튼 다각형에서 한 변인 m_i의 기울기가 $-\dfrac{b}{a}$일 때 ⓑ식에서 α, β값을 각각 $\alpha=a$, $\beta=b$로 나타내자. 이제 c값을 구해보자. c값은 식ⓐ에 식ⓑ를 대입한 전개식에서 x에 관한 가장 낮은 차수 항을 0으로 만드는 값이다. 가장 낮은 차수는 항상 뉴튼 다각형에서 변의 기울기를 결정하는 두 점에서 나타나므로

선두 준동차 다항식을 이용하면

$$f^{\sigma}(1,\ c)=0$$

을 만족시키는 해가 바로 c값이다. c값은 복소수 범위에서 차수만큼 존재하는데 우리는 계산상의 문제점 때문에 0이 아닌 실근과 유리수를 계수로 하는 허근만 생각하기로 하자.

완성된 ⓐ식을 $f^{(i)}(x_i,\ y_i)$에 대입하면

$$f^{(i)}(x_{i+1}^{a_{i+1}},\ x_{i+1}^{b_{i+1}}(c_{i+1}+y_{i+1}))=0$$

이 되고 이 식을 공통인수인 x^k로 약분한 새로운 식은

$$f^{(i+1)}(x_{i+1,}\ y_{i+1})=x_{i+1}^{-k}f^{(i)}(x_{i+1}^{a_{i+1}},\ x_{i+1}^{b_{i+1}}(c_{i+1}+y_{i+1}))$$

이다.

f^{i+1}의 뉴튼 다각형을 구하고 한 변을 택해 지금까지 진행한 과정을 계속 반복하면 아래와 같은 치환 식을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} x=x_1^{a_1} \\ y=x_1^{b_1}(c_1+y_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=x_2^{a_2} \\ y_1=x_2^{b_2}(c_2+y_2) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=x_3^{a_3} \\ y_2=x_3^{b_3}(c_3+y_3) \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=x_4^{a_4} \\ y_3=x_4^{b_4}(c_4+y_4) \end{cases} \quad \cdots$$

이 치환 식들을 통해 매개변수 방정식을 구해보자. 각각의 치환 식을 대입을 함으로써 매개변수 방정식이 완성 되는데 x의 지수인 a_i는 $i \geq n$부터는 1이 계속 반복된다. 그래서 매개변수 방정식이 어느 시점을 넘어서면 일정한 규칙을 가지게 된다. c_i값에 따른 단계별 매개변수 방정식을 구해보자.

c_1 $\begin{cases} x=x_1^{a_1} \\ y=x_1^{b_1}(c_1+y_1) \end{cases}$

$$c_2 \quad \begin{cases} x = (x_2^{a_2})^{a_1} = x_2^{a_1 a_2} \\ y = (x_2^{a_2})^{b_1}(c_1 + x_2^{b_2}(c_2 + y_2)) = c_1 x_2^{a_2 b_1} + c_2 x_2^{a_2 b_1 + b_2} y_2 \end{cases}$$

$$c_3 \quad \begin{cases} x = (x_3^{a_2})^{a_1 a_2} = x_3^{a_1 a_2 a_3} \\ y = ((x_3^{a_3})^{a_2})^{b_1}(c_1 + (x_3^{a_3})^{b_2}(c_2 + x_3^{b_3}(c_3 + y_3)) \\ \quad = c_1 x_3^{a_2 a_3 b_1} + c_2 x_3^{a_2 a_3 b_1 + a_3 b_2} + c_3 x_3^{a_2 a_3 b_1 + a_3 b_2 + b_3} + x_3^{a_2 a_3 b_1 + a_3 b_2 + b_3} y_3 \end{cases}$$

$$c_4 \quad \begin{cases} x = (x_4^{a_4})^{a_1 a_2 a_3} = x_4^{a_1 a_2 a_3 a_4} \\ y = (((x_4^{a_4})^{a_3})^{a_2})^{b_1}(c_1 + ((x_4^{a_4})^{a_3})^{b_2}(c_2 + (x_4^{a_4})^{b_3}(c_3 + x_4^{b_4}(c_4 + y_4))) \\ \quad = c_1 x_4^{a_2 a_3 a_4 b_1} + c_2 x_4^{a_2 a_3 a_4 b_1 + a_3 a_4 b_2} + c_3 x_4^{a_2 a_3 a_4 b_1 + a_3 a_4 b_2 + a_4 b_3} + c_4 x_4^{a_2 a_3 a_4 b_1 + a_3 a_4 b_2 + a_4 b_3 + b_4} \\ \qquad + x_4^{a_2 a_3 a_4 b_1 + a_3 a_4 b_2 + a_4 b_3 + b_4} y_4 \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$c_n \quad \begin{cases} x = (x_n^1)^{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}} = x_n^{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}} \\ y = c_1 x_n^{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_1} + c_2 x_n^{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_1 + a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_2} + \cdots \\ \qquad + c_n x_n^{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_1 + a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_2 + a_4 \cdots a_{n-1} b_3 + \cdots + a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} + b_n} \end{cases}$$

c_n이후부터는 x의 지수가 1이므로 $x = x_i^{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}}$로 고정되고 그로인해 y값은

c_{n+1}이면

$y = c_1 x_{n+1}^{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_1} + \cdots + c_{n+1} x_{n+1}^{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_1 + a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_2 + a_4 \cdots a_{n-1} b_3 + \cdots + a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} + b_n + b_{n+1}}$

처럼 마지막항의 지수에 b_{n+1}이 더해진다.

이런 규칙을 생각하면 $x_i = t$로 치환하여 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} x = t^{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \\ y = c_1 t^{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_1} + c_2 t^{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_1 + a_3 a_4 \cdots a_{n-1} b_2} + \cdots \end{cases}$$

$$+ c_n t^{a_2 a_3 + \cdots + b_n} + c_{n+1} t^{a_2 a_3 + \cdots + b_n + b_{n+1}} + c_{n+2} t^{a_2 a_3 + \cdots + b_n + b_{n+1} + b_{n+2}} + \cdots$$

위 식이 바로 뉴튼 퓨조 알고리즘을 이용해 구해본 가지의 매개변수 방정식의 일반적인 형태이다.

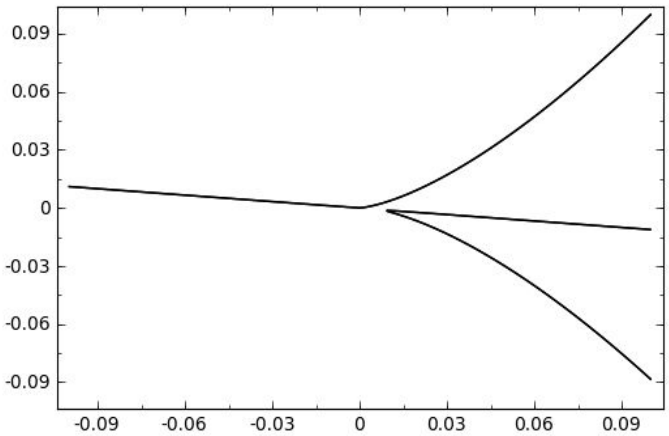
제3장 예제

제1절 대수곡선에서 가지의 매개변수 방정식 구하기 I

대수곡선

$$y^3 - 9x^3y - x^4 = 0$$

은 아래 그림과 같이 원점에서 특이한 모양을 하고 있다. 한눈에 봐도 원점에서 매끄럽지 않음을 알 수 있다.



이는 원점에서 특이점을 갖는 것이라고 할 수 있는데 원점에서 중복도와 접선의 방정식 그리고 가지의 매개변수 방정식을 구해보도록 하자.

위 곡선 식에서 계수가 0이 아닌 항 중에서 지수의 합이 가장 작은 것이 y^3이므로 원점에서 중복도가 3이다. 중복도가 3이므로 접선의 방정식도 3개 존재하는데

$$y^3 = 0$$

이므로 접선의 방정식은

$$y=0$$

이다.

그림을 보면 원점에서 하나의 가지가 존재한다는 것을 알 수 있는데 이제 이 가지의 매개변수 방정식을 뉴튼 퓨조 알고리즘을 이용해 구해보도록 할 것이다.

대수곡선식

$$y^3-9x^3y-x^4=0$$

을

$$f^{(0)}(x,\ y)=y^3-9x^3y-x^4$$

라 놓자.

$f^{(0)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 나타내면

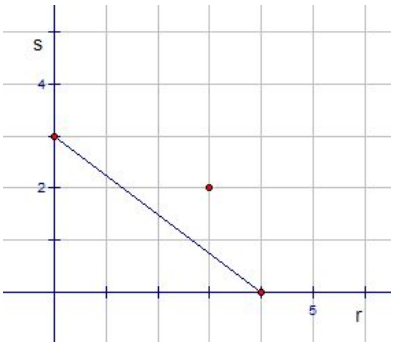


그림4 $y^3-9x^3y-x^4$의 뉴튼 다각형

와 같다.

변 $m_1=-\dfrac{3}{4}$이므로

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{3}{4},\ a_1=3,\ b_1=4$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x = x_1^3 \\ y = x_1^4(c_1 + y_1) \end{cases} \qquad ①$$

이제 c_1값을 구해보자. 이때 선두 준동차 다항식을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

(3, 4)에서 $f^{(0)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = y^3 - x^4$$

식이 되고 $(1,\ c_1)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_1) = c_1^3 - 1$$

$f^{\sigma}(1,\ c_1) = 0$을 만족하는 c_1값을 구하면

$$c_1 = 1,\ c_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2},\ c_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$$

이 되는데 이들 중 $c_1 = 1$만 생각해보자.

$$f^{(1)}(x_1,\ y_1) = x_1^{-12} f(x_1^3,\ x_1^4(1 + y_1))$$

$$f^{(1)}(x_1,\ y_1) = 3y_1 + 3y_1^2 + y_1^3 - 9x_1 - 9x_1 y_1$$

$f^{(1)}(x_1,\ y_1)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

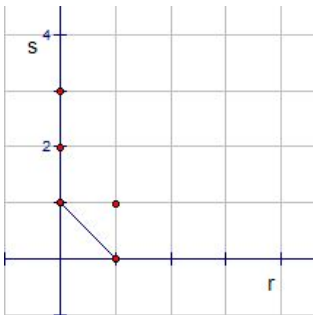


그림5 $3y_1 + 3y_1^2 + y_1^3 - 9x_1 - 9x_1 y_1$의 뉴튼 다각형

$m_2 = -1$이므로

$$\frac{a_2}{b_2} = 1,\ a_2 = 1,\ b_2 = 1$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = x_2(c_{2+}y_2) \end{cases} \qquad ②$$

이제 c_2값을 구해보자.

$(1,\ 1)$에서 $f^{(1)}(x_1,\ y_1)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x_1,\ y_1) = 3y_1 - 9x_1$$

식이 되고 $(1,\ c_2)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_2) = 3c_2 - 9$$

$f^{\sigma}(1,\ c_2) = 0$을 만족하는 c_2값을 구하면

$$c_2 = 3$$

$$f^{(2)}(x_2,\ y_2) = x_2^{-1} f^{(1)}(x_2,\ x_2(3 + y_2))$$

$$f^{(2)}(x_2,\ y_2) = 3y_2 + 9x_2y_2 + 3x_2y_2^2 + 27x_2^2 + 27x_2^2y_2 + 9x_2^2y_2^2 + x_2^2y_2^3$$

$f^{(2)}(x_2,\ y_2)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

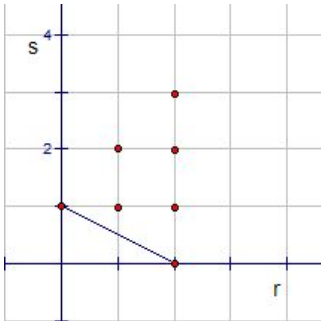


그림6 $3y_2+9x_2y_2+3x_2y_2^2+27x_2^2\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_3=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{1}{2},\ a_3=1,\ b_3=2$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_2=x_3 \\ y_2=x_3^2(c_3+y_3) \end{cases} \qquad ③$$

$(1,\ 2)$에서 $f^{(2)}(x_2,\ y_2)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x_2,\ y_2)=3y_2+27x_2^2$$

식이 되고 $(1,\ c_3)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_3)=3c_3+27$$

$f^{\sigma}(1,\ c_3)=0$을 만족하는 c_3값을 구하면

$$c_3=-9$$

$$f^{(3)}(x_3,\ y_3)=x_3^{-2}f^{(2)}(x_3,\ x_3^2(-9+y_3))$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x_3,\ y_3)=&30y_3-81x_3+9x_3y_3-243x_3^2+243x_3^3-54x_3^3y_3+3x_3^3y_3^2+729x_3^4-162x_3^4y_3 \\ &+9x_3^4y_3^2-729x_3^6+243x_3^6y_3-27x_3^6y_3^2+x_3^6y_3^3 \end{aligned}$$

$f^{(3)}(x_3,\ y_3)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

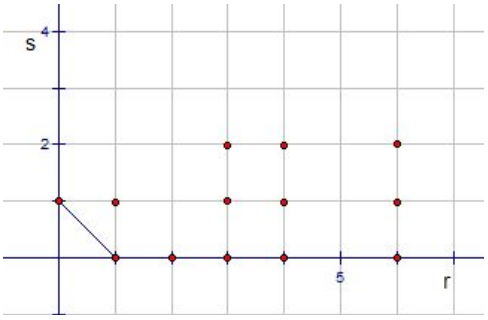


그림7 $30y_3-81x_3+9x_3y_3-243x_3^2\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_4=-1$이므로

$$\frac{a_4}{b_4}=1,\ a_4=1,\ b_4=1$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_3=x_4 \\ y_3=x_4(c_4+y_4) \end{cases} \qquad ④$$

$(1,\ 1)$에서 $f^{(3)}(x_3,\ y_3)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x_3,\ y_3)=30y_3-81x_3$$

식이 되고 $(1,\ c_4)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_4)=30c_4-81$$

$f^{\sigma}(1,\ c_4)=0$을 만족하는 c_4값을 구하면

$$c_4=\frac{27}{10}$$

$$f^{(4)}(x_4,\ y_4)=x_4^{-1}f^{(3)}(x_4,\ x_4(\frac{27}{10}+y_4))$$

$$f^4(x_4,\ y_4) = 30y_4 - \frac{2187}{10}x_4 + 9x_4y_4 + 243x_4^2 + \frac{2916}{5}x_4^3 - 54x_4^3y_4 - \frac{41553}{100}x_4^4 - \frac{729}{5}x_4^4y_4$$
$$+ 3x_4^4y_4^2 - \frac{66339}{100}x_4^5 + 243x_4^5y_4 + 9x_4^5y_4^2 + \frac{6561}{10}x_4^6 + 243x_4^6y_4 - \frac{19683}{100}x_4^7 - \frac{729}{5}x_4^7y_4$$
$$- 27x_4^7y_4^2 + \frac{19683}{1000}x_4^8 + \frac{2187}{100}x_4^8y_4 + \frac{81}{10}x_4^8y_4^2 + x_4^8y_4^3$$

$f^{(4)}(x_4,\ y_4)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

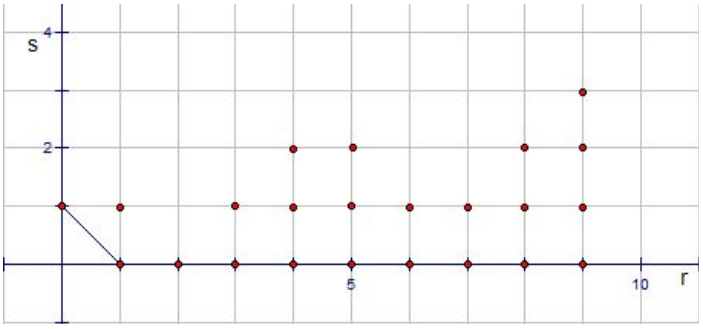


그림8 $30y_4 - \frac{2187}{10}x_4 + 9x_4y_4 + 243x_4^2 \cdots$의 뉴튼 다각형

$m_5 = -1$이므로

$$\frac{a_4}{b_4} = 1,\ a_4 = 1,\ b_4 = 1$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_4 = x_5 \\ y_4 = x_5(c_5 + y_5) \end{cases} \qquad ⑤$$

(1, 1)에서 $f^{(4)}(x_4,\ y_4)$에 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = -\frac{2187}{10}x_5 + 30y_5$$

식이 되고 $(1,\ c_5)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_5) = 30c_5 - \frac{2187}{10}$$

$f^{\sigma}(1,\ c_5) = 0$을 만족하는 c_5값을 구하면

$$c_5 = \frac{729}{100}$$

이 과정을 계속 할 수 있지만 c값은 여기까지만 구하고 매개변수 방정식을 나타내보자.

앞에서 구한 매개변수 식 ①, ②, ③, ④을 차례로 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{cases} x = x_1^3 \\ y = x_1^4(1+y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2^3 \\ y = x_2^4(1+x_2(3+y_2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_3^3 \\ y = x_3^4(1+x_3(3+x_3^2(-9+y_3))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_4^3 \\ y = x_4^4(1+x_4(3+x_4^2(-9+x_4(\frac{27}{10}+y_4)))) = x_4^4 + 3x_4^5 - 9x_4^7 + \frac{27}{10}x_4^8 + x_4^8 y_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_5^3 \\ y = x_5^4(1 + x_5(3 + x_5^2(-9 + x_5(\frac{27}{10} + x_5(\frac{729}{100} + y_5))))) = x_5^4 + 3x_5^5 - 9x_5^7 + \frac{27}{10}x_5^8 \\ \qquad + \frac{729}{100}x_5^9 + x_5^{10}O \end{cases}$$

지금까지 구한 $f(x,\ y)$의 매개변수 방정식과 $f(x,\ y)$의 그림을 통해서 어떤 특징이 있는지 알아보도록 하자.

$$\begin{cases} x = x_5^3 \\ y = x_5^4 + 3x_5^5 - 9x_5^7 + \frac{27}{10}x_5^8 + \frac{729}{100}x_5^9 + x_5^{10}O \end{cases}$$

의 그림은 아래와 같다.

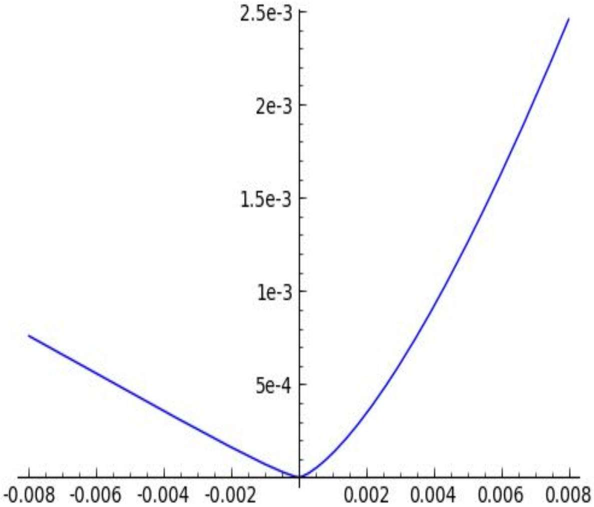


그림10 $\begin{cases} x = x_5^3 \\ y = x_5^4 + 3x_5^5 - 9x_5^7 + \frac{27}{10}x_5^8 + \frac{729}{100}x_5^9 + x_5^{10}O \end{cases}$

대수곡선과 가지의 매개변수 방정식의 그림을 합쳐서 나타내면 아래처럼 두 그림이 일치하는 것을 볼 수 있다.

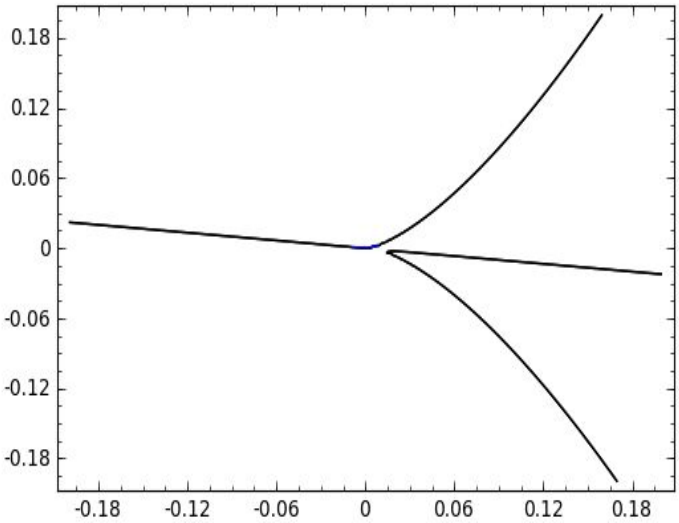


그림11 $y^3-9x^3y-x^4=0$와

$$\begin{cases} x=x_5^3 \\ y=x_5^4+3x_5^5-9x_5^7+\dfrac{27}{10}x_5^8+\dfrac{729}{100}x_5^9+x_5^{10}O \end{cases}$$

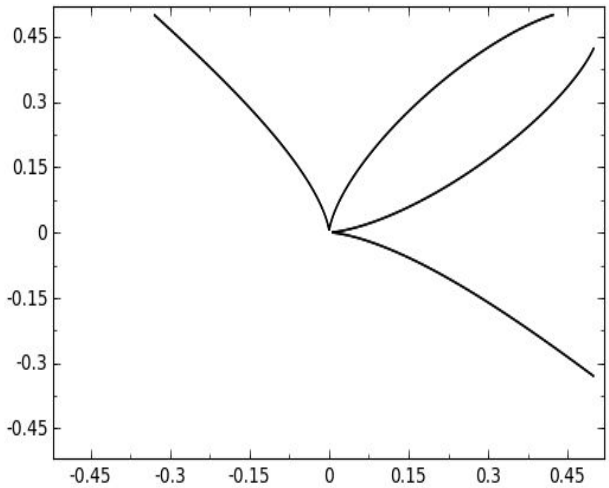
위 사실을 통해서 서론에서 언급한 것처럼 매개변수 방정식이 $f(x,\ y)$의 그림의 가지의 일부분임을 알 수 있을 것이다.

제2절 대수곡선에서 가지의 매개변수 방정식 구하기Ⅱ

대수곡선

$$x^5 - x^2y^2 + y^5 = 0$$

은 아래 그림처럼 원점에서 특이점을 갖고 있다.



위 대수 곡선의 원점에서 중복도와 접선의 방정식 마지막으로 특이점에서 나타나는 가지의 매개변수 방정식을 구해보도록 하자.

계수가 0이 아닌 항 중에서 지수의 합이 가장 작은 것이 $-x^2y^2$이므로 원점에서 중복도가 4이다. 중복도가 4이므로 접선의 방정식도 4개 존재하는데

$$x^2y^2 = 0$$

이므로 접선의 방정식은

$$x = 0,\ y = 0$$

이다.

그리고 위 그림은 원점에서 가지가 2개 존재 하는 것을 볼 수 있는데 이 가지들의 매개변수 방정식을 각각 구해 보도록 하자.

대수곡선식

$$x^5 - x^2y^2 + y^5 = 0$$

을

$$f^{(0)}(x,y) = x^5 - x^2y^2 + y^5$$

라 놓자.

먼저 $f^{(0)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

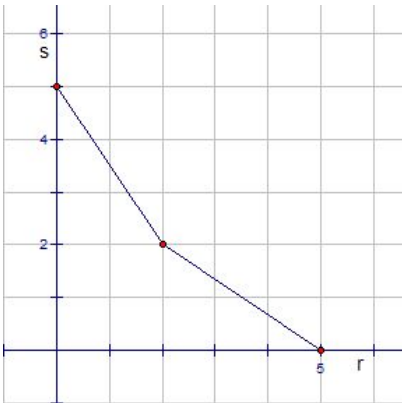


그림12 $x^5 - x^2y^2 + y^5$의 뉴튼 다각형

$m_1^{(1)} = -\dfrac{3}{2},\ m_1^{(2)} = -\dfrac{2}{3}$

뉴튼 다각형에 변이 두 개이므로 앞에서 언급한 것처럼 두 개의 매개변수 방정식이 존재한다.

(1) $m_1^{(1)} = -\dfrac{3}{2}$인 경우

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{2},\ a_1 = 3,\ b_1 = 2$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x = x_1^3 \\ y = x_1^2(c_1 + y_1) \end{cases} \qquad ①$$

(3, 2)에서 $f^{(0)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = y^5 - x^2y^2$$

식이 되고 $(1,\ c_1)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_1) = c_1^5 - c_1^2$$

$f^{\sigma}(1,\ c_1) = 0$을 만족하는 c_1값을 구하면

$$c_1^2(c_1^3 - 1) = 0$$

이므로 위 방정식의 해는

$$c_1 = 0,\ c_1 = 1,\ c_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2},\ c_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$$

이 값들 중에 $c_1 = 1$일 경우

$$f^{(1)}(x_1,\ y_1) = x_1^{-10} f(x_1^3,\ x_1^2(1 + y_1))$$

$$f^{(1)}(x_1,\ y_1) = x_1^5 + y_1^5 + 5y_1^4 + 10y_1^3 + 9y_1^2 + 3y_1$$

$f^{(1)}(x_1,\ y_1)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

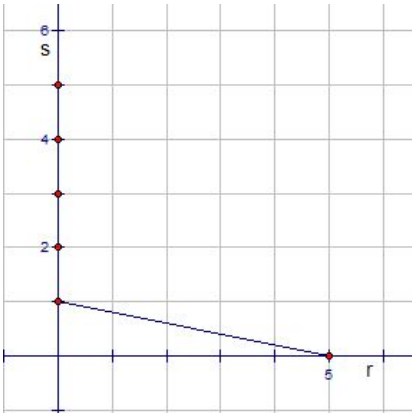


그림13 $x_1^5+y_1^5+5y_1^4+10y_1^3\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_2^{(1)}=-\dfrac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{1}{5},\ a_2=1,\ b_2=5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=x_2^5(c_{2+}y_2) \end{cases} \qquad ②$$

$(1,\ 5)$에서 $f^{(1)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y)=x_1^5+3y_1$$

식이 되고 $(1,\ c_2)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_2)=1+3c_2$$

$f^{\sigma}(1,\ c_2)=0$을 만족하는 c_2값을 구하면

$$c_2=-\frac{1}{3}$$

$$f^{(2)}(x,\ y)=x_2^{-5}f^{(1)}(x_2,\ x_2^5(-\frac{1}{3}+y_2))$$

$$f^{(2)}(x,\ y)=x_2^{20}y_2^5-\frac{5}{3}x_2^{20}y_2^4+\frac{10}{9}x_2^{20}y_2^3-\frac{10}{27}x_2^{20}y_2^2+\frac{5}{81}x_2^{20}y_2-\frac{1}{243}x_2^{25}+5x_2^{15}y_2^4$$
$$-\frac{20}{3}x_2^{15}y_2^3\frac{10}{3}\cdots x_2^5-3y_2$$

$f^{(2)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

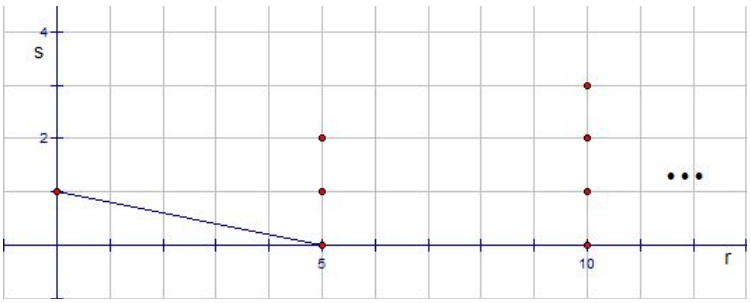


그림14 $x_2^{20}y_2^5-\frac{5}{3}x_2^{20}y_2^4+\frac{10}{9}x_2^{20}y_2^3-\frac{10}{27}x_2^{20}y_2^2\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_3^{(1)}=-\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{1}{5},\ a_3=1,\ b_3=5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases}x_2=x_3\\ y_2=x_3^5(c_3+y_3)\end{cases} \qquad ③$$

$(1,\ 5)$에서 $f^{(2)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y)=x_2^5-3y_2$$

식이 되고 $(1,\ c_3)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_3)=1-3c_3$$

$f^{\sigma}(1,\ c_3)=0$을 만족하는 c_3값을 구하면

$$c_3=\frac{1}{3}$$

$$f^{(3)}(x,\ y)=x_3^{-5}f^{(2)}(x_3,\ x_3^2(\frac{1}{3}+y_3))$$

$$f^{(3)}(x,\ y)=x_3^{40}y_3^5+\frac{5}{3}x_3^{40}y_3^4+\frac{10}{9}x_3^{40}y_3^3+\frac{10}{27}x_3^{40}y_3^2+\frac{5}{81}x_3^{40}y_3+\frac{1}{241}x_3^{45}-\frac{5}{3}x_3^{35}y_3^4$$
$$-\frac{20}{9}x_3^{35}y_3^3-\frac{10}{9}x_3^{35}y_3^2-\frac{20}{81}x_3^{35}y_3+\cdots-\frac{64}{27}x_3^5-3y_3$$

$f^{(3)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

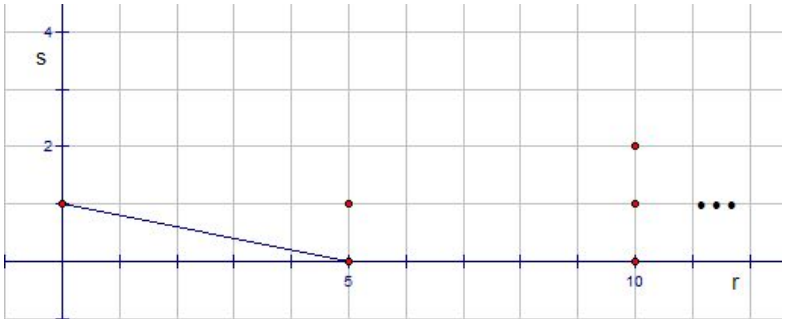


그림15 $x_3^{40}y_3^5+\frac{5}{3}x_3^{40}y_3^4+\frac{10}{9}x_3^{40}y_3^3+\frac{10}{27}x_3^{40}y_3^2\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_4^{(1)}=-\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_4}{b_4}=\frac{1}{5},\ a_4=1,\ b_4=5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_3 = x_4 \\ y_3 = x_4^5(c_4 + y_4) \end{cases} \qquad ④$$

(1, 5)에서 $f^{(3)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = -\frac{64}{27}x_3^5 - 3y_3$$

식이 되고 $(1,\ c_4)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_4) = -\frac{64}{27} - 3c_4$$

$f^{\sigma}(1,\ c_4) = 0$을 만족하는 c_4값을 구하면

$$c_4 = -\frac{64}{81}$$

이 과정을 계속 할 수 있지만 식이 복잡해지는 관계로 c값은 여기 까지만 구하고 매개변수 방정식을 나타내보자.

앞에서 구한 매개변수 식 ①, ②, ③, ④을 차례로 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{cases} x = x_1^3 \\ y = x_1^2(1 + y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2^3 \\ y = x_2^2(1 + x_2^5(-\frac{1}{3} + y_2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_3^3 \\ y = x_3^2(1 + x_3^5(-\frac{1}{3} + x_3^5(\frac{1}{3} + y_3))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_4^3 \\ y = x_4^2(1 + x_4(-\frac{1}{3} + x_4^5(\frac{1}{3} + x_4^5(-\frac{64}{27} + y_4)))) = x_4^2 - \frac{1}{3}x_4^7 + \frac{1}{3}x_4^{12} - \frac{64}{81}x_4^{17} + x_4^{17}y_4 \end{cases}$$

(2) $m_1^{(2)} = -\frac{2}{3}$인 경우

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{3},\ a_1 = 2,\ b_1 = 3$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x = x_1^2 \\ y = x_1^3(c_1 + y_1) \end{cases} \qquad ①$$

(2, 3)에서 $f(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^\sigma(x,\ y) = x^5 - x^2y^2$$

식이 되고 $(1,\ c_1)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^\sigma(1,\ c_1) = 1 - c_1^2$$

$f^\sigma(1,\ c_1) = 0$을 만족하는 c_1값을 구하면

$$c_1 = 1,\ c_1 = -1$$

c_1값이 두 개 이므로 각각에 대한 매개변수 방정식이 두 개 존재한다.

㉠ $c_1 = 1$ 일 때

$$f^{(1)}(x,y) = x_1^{-10} f(x_1^2,\ x_1^3(1+y_1))$$

$$f^{(1)}(x,\ y) = x_1^5 y_1^5 + 5x_1^5 y_1^4 + 10x_1^5 y_1^3 + 10x_1^5 y_1^2 + 5x_1^5 y_1 + x_1^5 - y_1^2 - 2y_1$$

$f^{(1)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

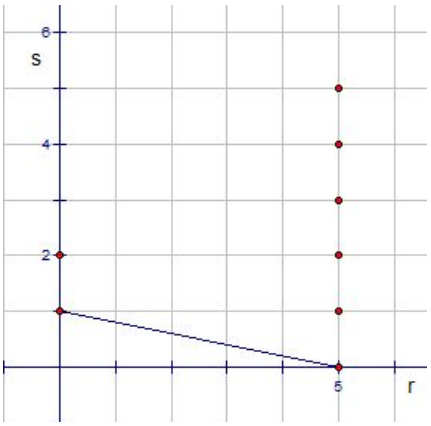


그림16 $x_1^5 y_1^5 + 5x_1^5 y_1^4 + 10x_1^5 y_1^3 + 10x_1^5 y_1^2 \cdots$의 뉴튼 다각형

$m_2^{(2)} = -\dfrac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{1}{5},\ a_2 = 1,\ b_2 = 5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = x_2^5(c_{2+}y_2) \end{cases} \qquad ②$$

(1, 5)에서 $f^{(1)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = x_1^5 - 2y_1$$

식이 되고 $(1,\ c_2)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_2) = 1 - 2c_2$$

$f^{\sigma}(1,\ c_2) = 0$을 만족하는 c_2값을 구하면

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x,\ y) = x_2^{-5} f^{(1)}(x_2,\ x_2^5(\frac{1}{2} + y_2))$$

$$f^{(2)}(x,\ y) = x_2^{25}y_2^5 + \frac{5}{2}x_2^{25}y_2^4 + \frac{5}{2}x_2^{25}y_2^3 + \frac{5}{4}x_2^{25}y_2^2 + \frac{5}{16}x_2^{25}y_2 + \frac{1}{32}x_2^{25} - x_2^{20}y_2^5 + \frac{5}{2}x_2^{20}y_2^4$$
$$+ \frac{15}{2}x_2^{20}y_2^3 + \frac{25}{4}x_2^{20}y_2^2 + \frac{35}{16}x_2^{20}y_2 + \frac{9}{30}x_2^{20} + \cdots + \frac{5}{2}x_2^5 - 2y_2$$

$f^{(2)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

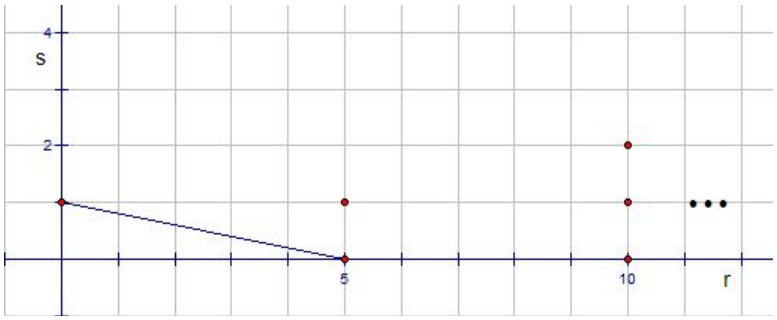


그림17 $x_2^{25}y_2^5 + \frac{5}{2}x_2^{25}y_2^4 + \frac{5}{2}x_2^{25}y_2^3 + \frac{5}{4}x_2^{25}y_2^2 \cdots$의 뉴튼 다각형

$m_3^{(2)} = -\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{1}{5},\ a_3 = 1,\ b_3 = 5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = x_3^5(c_3 + y_3) \end{cases} \qquad ③$$

$(1,\ 5)$에서 $f^{(2)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = \frac{5}{2}x_2^5 - 2y_2$$

식이 되고 $(1,\ c_3)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_3) = \frac{5}{2} - 2c_3$$

$f^{\sigma}(1,\ c_3) = 0$을 만족하는 c_3값을 구하면

$$c_3 = \frac{5}{4}$$

$$f^{(3)}(x,\ y) = x_3^{-5} f^{(2)}(x_3,\ x_3^2(\frac{5}{4} + y_3))$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x,\ y) = {} & x_3^{45}y_3^5 + \frac{25}{4}x_3^{45}y_3^4 + \frac{125}{8}x_3^{45}y_3^3 + \frac{625}{32}x_3^{45}y_3^2 + \frac{3125}{256}x_3^{45}y_3 + \frac{3125}{1024}x_3^{45} - x_3^{40}y_3^5 \\ & - \frac{15}{4}x_3^{40}y_3^4 - \frac{25}{8}x_3^{40}y_3^3 + \frac{125}{32}x_3^{40}y_3^2 + \frac{1875}{256}x_3^{40}y_3 + \cdots + \frac{35}{4}x_3^5 - 2y_3 \end{aligned}$$

$f^{(3)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

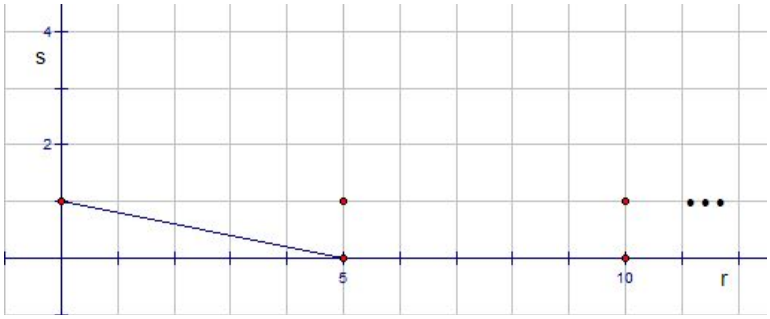


그림18 $x_3^{45}y_3^5+\frac{25}{4}x_3^{45}y_3^4+\frac{125}{8}x_3^{45}y_3^3+\frac{625}{32}x_3^{45}y_3^2\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_4^{(2)}=-\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_4}{b_4}=\frac{1}{5},\ a_4=1,\ b_4=5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_3=x_4 \\ y_3=x_4^5(c_4+y_4) \end{cases} \qquad ④$$

(1, 5)에서 $f^{(3)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y)=\frac{35}{4}x_3^5-2y_3$$

식이 되고 $(1,\ c_4)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_4)=\frac{35}{4}-2c_4$$

$f^{\sigma}(1,\ c_4)=0$을 만족하는 c_4값을 구하면

$$c_4=\frac{35}{8}$$

앞에서 구한 매개변수 식 ①, ②, ③, ④을 차례로 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{cases} x = x_1^2 \\ y = x_1^3(1+y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2^2 \\ y = x_2^3(1+x_2^5(\frac{1}{2}+y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_3^2 \\ y = x_3^3(1+x_3^5(\frac{1}{2}+x_3^5(\frac{5}{4}+y_3))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_4^2 \\ y = x_4^3(1+x_4^5(\frac{1}{2}+x_4^5(\frac{5}{4}+x_4^5(\frac{35}{8}+y_4)))) = x_4^3+\frac{1}{2}x_4^8+\frac{5}{4}x_4^{13}+\frac{35}{8}x_4^{18}+x_4^{19}O \end{cases}$$

이제 두 번째 c_1값에 대한 매개변수 방정식을 구해보자.

㉡ $c_1 = -1$ 일 때

$$f^{(1)}(x,y) = x_1^{-10}f(x_1^2,\ x_1^3(-1+y_1))$$

$$f^{(1)}(x,\ y) = x_1^5y_1^5 - 5x_1^5y_1^4 + 10x_1^5y_1^3 - 10x_1^5y_1^2 + 5x_1^5y_1 - x_1^5 - y_1^2 + 2y_1$$

$f^{(1)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

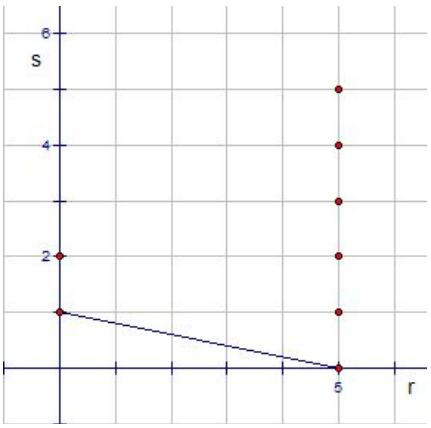


그림19 $x_1^5y_1^5-5x_1^5y_1^4+10x_1^5y_1^3-10x_1^5y_1^2\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_2^{(2)}=-\dfrac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{1}{5},\ a_2=1,\ b_2=5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=x_2^5(c_{2+}y_2) \end{cases} \qquad ②$$

$(1,\ 5)$에서 $f^{(1)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y)=-x_1^5+2y_1$$

식이 되고 $(1,\ c_2)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_2)=-1+2c_2$$

$f^{\sigma}(1,\ c_2)=0$을 만족하는 c_2값을 구하면

$$c_2=\frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x,\ y)=x_2^{-5}f^{(1)}(x_2,\ x_2^5(\frac{1}{2}+y_2))$$

$$f^{(2)}(x,\ y)=x_2^{25}y_2^5+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^4+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^3+\frac{5}{4}x_2^{25}y_2^2+\frac{5}{16}x_2^{25}y_2+\frac{1}{32}x_2^{25}-x_2^{20}y_2^5-\frac{15}{2}x_2^{20}y_2^4$$
$$-\frac{25}{2}x_2^{20}y_2^3-\frac{35}{4}x_2^{20}y_2^2-\frac{45}{16}x_2^{20}y_2+\cdots+\frac{5}{2}x_2^5+2y_2$$

$f^{(2)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

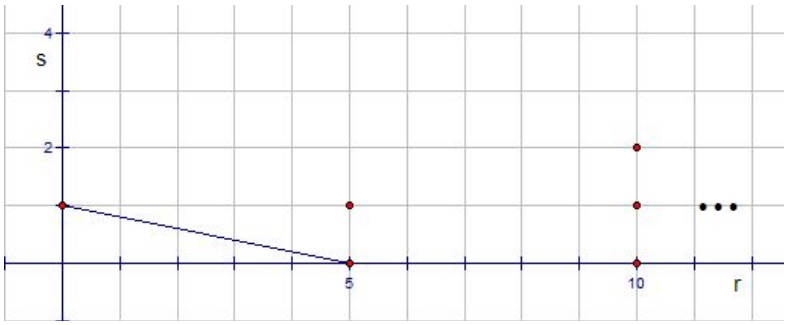


그림20 $x_2^{25}y_2^5+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^4+\frac{5}{2}x_2^{25}y_2^3+\frac{5}{4}x_2^{25}y_2^2\cdots$의 뉴튼 다각형

$m_3^{(2)}=-\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{1}{5},\ a_3=1,\ b_3=5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases}x_2=x_3\\ y_2=x_3^5(c_3+y_3)\end{cases} \qquad ③$$

(1, 5)에서 $f^{(2)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = \frac{5}{2}x_2^5 + 2y_2$$

식이 되고 $(1,\ c_3)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_3) = \frac{5}{2} + 2c_3$$

$f^{\sigma}(1,\ c_3) = 0$을 만족하는 c_3값을 구하면

$$c_3 = -\frac{5}{4}$$

$$f^{(3)}(x,\ y) = x_3^{-5} f^{(2)}(x_3,\ x_3^2(-\frac{5}{4} + y_3))$$

$$f_3(x,\ y) = x_3^{45}y_3^5 - \frac{25}{4}x_3^{45}y_3^4 + \frac{125}{8}x_3^{45}y_3^3 - \frac{625}{32}x_3^{45}y_3^2 + \frac{3125}{256}x_3^{45}y_3 - \frac{3125}{1024}x_3^{45} - x_3^{40}y_3^5$$
$$+ \frac{35}{4}x_3^{40}y_3^4 - \frac{225}{8}x_3^{40}y_3^3 + \frac{1375}{32}x_3^{40}y_3^2 - \frac{8125}{256}x_3^{40}y_3 + \cdots - \frac{35}{4}x_3^5 + 2y_3$$

$f^{(3)}(x,\ y)$의 뉴튼 다각형을 구하면 아래와 같다.

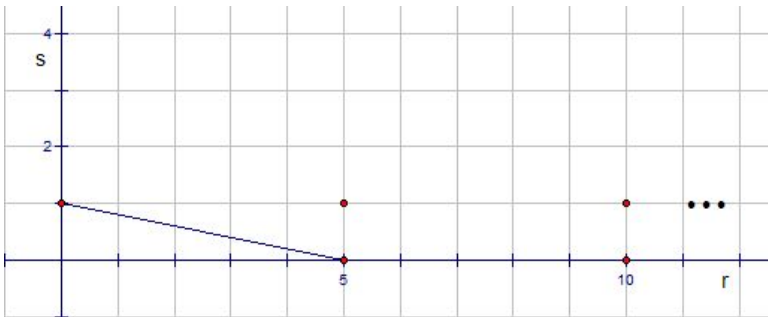


그림21 $x_3^{45}y_3^5 - \frac{25}{4}x_3^{45}y_3^4 + \frac{125}{8}x_3^{45}y_3^3 - \frac{625}{32}x_3^{45}y_3^2 \cdots$의 뉴튼 다각형

$m_4^{(2)} = -\dfrac{1}{5}$이므로

$$\frac{a_4}{b_4} = \frac{1}{5},\ a_4 = 1,\ b_4 = 5$$

이고 아래처럼 치환한다.

$$\begin{cases} x_3 = x_4 \\ y_3 = x_4^5(c_4 + y_4) \end{cases} \qquad ④$$

$(1,\ 5)$에서 $f^{(3)}(x,\ y)$에 선두 준동차 다항식을 구하면

$$f^{\sigma}(x,\ y) = -\frac{35}{4}x_3^5 + 2y_3$$

식이 되고 $(1,\ c_4)$를 대입하면 아래와 같다.

$$f^{\sigma}(1,\ c_4) = -\frac{35}{4} + 2c_4$$

$f^{\sigma}(1,\ c_4) = 0$을 만족하는 c_4값을 구하면

$$c_4 = \frac{35}{8}$$

앞에서 구한 매개변수 식 ①, ②, ③, ④을 차례로 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{cases} x = x_1^2 \\ y = x_1^3(-1 + y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2^2 \\ y = x_2^3(-1 + x_2^5(\frac{1}{2} + y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_3^2 \\ y = x_3^3(-1 + x_3^5(\frac{1}{2} + x_3^5(-\frac{5}{4} + y_3))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_4^2 \\ y = x_4^3(-1 + x_4^5(\frac{1}{2} + x_4^5(-\frac{5}{4} + x_4^5(\frac{35}{8} + y_4)))) = -x_4^3 + \frac{1}{2}x_4^8 - \frac{5}{4}x_4^{13} + \frac{35}{8}x_4^{18} + x_4^{19}O \end{cases}$$

지금까지 결과로 보면

$$x^5 - x^2y^2 + y^5 = 0$$

에 대한 매개변수 방정식이 3개 존재하는 것 같지만 사실 2개이다. 뉴튼 다각형에서 구해진 변 $m_1^{(1)} = -\frac{3}{2}$, $m_1^{(2)} = -\frac{2}{3}$ 각각에 대해서 2개가 존재한다. $m_1^{(2)}$에서 두 개가 구해지긴 하지만 첫 방정식 x_i에 $-x_i$를 대입하면 두 번째 방정식을 구할 수 있으므로 이 두 개의 매개변수 방정식은 서로 같은 것이다.

이제 그림으로 두 개의 매개변수 방정식과 $x^5 - x^2y^2 + y^5 = 0$와의 관계를 알아보자.

첫 번째 매개변수 방정식인

$$\begin{cases} x = x_4^3 \\ y = x_4^2 - \frac{1}{3}x_4^7 + \frac{1}{3}x_4^{12} - \frac{64}{81}x_4^{17} + x_4^{18}O \end{cases}$$

의 그림은 아래와 같다.

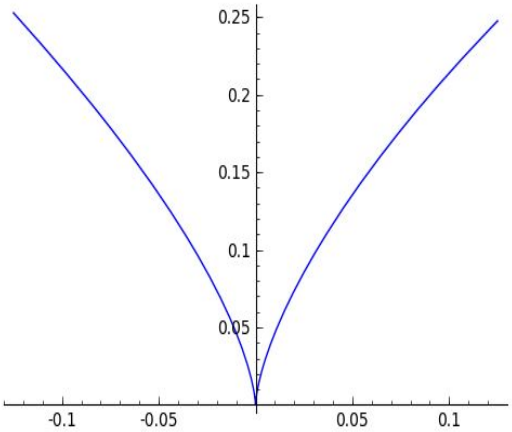


그림23 $\begin{cases} x = x_4^3 \\ y = x_4^2 - \frac{1}{3}x_4^7 + \frac{1}{3}x_4^{12} - \frac{64}{81}x_4^{17} + x_4^{18}O \end{cases}$

두 번째 매개변수 방정식

$$\begin{cases} x = x_4^2 \\ y = x_4^3 + \frac{1}{2}x_4^8 + \frac{5}{4}x_4^{13} + \frac{35}{8}x_4^{18} + x_4^{19}O \end{cases}$$

의 그림은 아래와 같다.

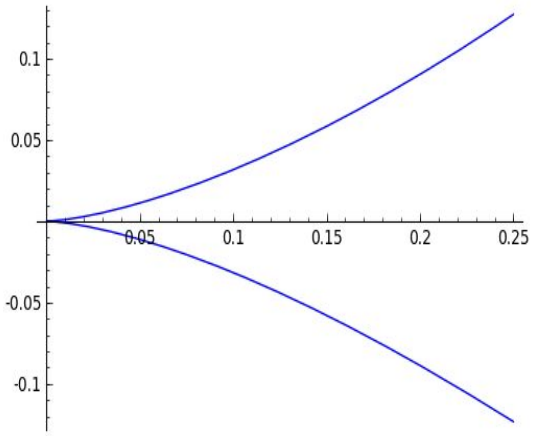


그림24 $\begin{cases} x = x_4^2 \\ y = x_4^3 + \frac{1}{2}x_4^8 + \frac{5}{4}x_4^{13} + \frac{35}{8}x_4^{18} + x_4^{19}O \end{cases}$

세 번째 매개변수 방정식

$$\begin{cases} x = x_4^2 \\ y = -x_4^3 + \frac{1}{2}x_4^8 - \frac{5}{4}x_4^{13} + \frac{35}{8}x_4^{18} + x_4^{19}O \end{cases}$$

의 그림은 아래와 같다.

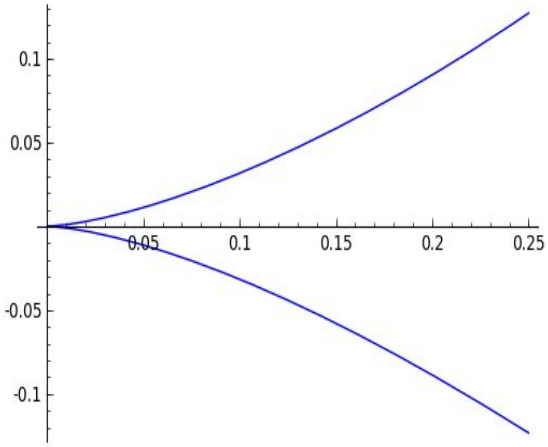
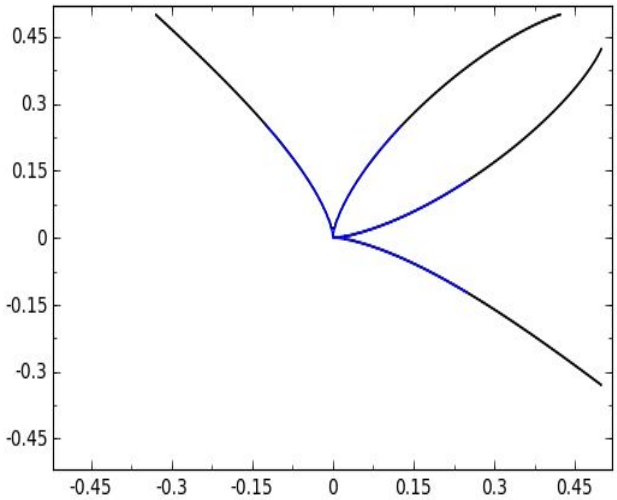


그림25 $\begin{cases} x = x_4^2 \\ y = -x_4^3 + \frac{1}{2}x_4^8 - \frac{5}{4}x_4^{13} + \frac{35}{8}x_4^{18} + x_4^{19}O \end{cases}$

마지막 두 개의 그림이 동일한데 이는 두 매개변수 방정식이 같은 것이기 때문이다. 이제 대수곡선과 앞에서 구한 두 개의 매개변수 방정식의 그림을 합쳐서 그리면 아래와 같다.



$$x^5 - x^2y^2 + y^5 = 0$$

그림26 $$\begin{cases} x = x_4^3 \\ y = x_4^2 - \frac{1}{3}x_4^7 + \frac{1}{3}x_4^{12} - \frac{64}{81}x_4^{17} + x_4^{18}O \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_4^2 \\ y = x_4^3 + \frac{1}{2}x_4^8 + \frac{5}{4}x_4^{13} + \frac{35}{8}x_4^{18} + x_4^{19}O \end{cases}$$

그림에서 나타나듯이 두 가지가 원 주의에서 유사하게 일치하는데 이 사실을 통해서 뉴튼 퓨조 알고리즘을 이용해 구한 두 개의 매개변수 방정식이 원점에서 대수 곡선의 가지임을 알 수 있다.

제4장 결론

지금까지 우리는 대수 곡선위의 특이점에서 나타나는 특징들에 대해서 공부해 보았다. 한 점에서 중복도가 2이상일 때 그 점을 특이점이라고 하는데 이 특이점에서 대수 곡선에 대한 접선의 방정식이 중복도의 개수만큼 존재한다는 사실을 예제를 통해서 알아보았다. 또 특이점에서는 한개 이상의 가지가 존재하는데 가지의 수만큼 매개변수 방정식이 존재한다는 것을 예제를 통해서 확인해 보았다.

이 논문에서는 매개변수 방정식을 구하는 방법으로 뉴튼 퓨조 알고리즘을 이용했고 이 뉴튼 퓨조 알고리즘의 구조를 이해하여 일반적으로 누구나 쉽게 보고 적용할 수 있도록 나름대로 정리를 해보았다.

뉴튼 퓨조 알고리즘을 이용해서 구한 매개변수 방정식이 주어진 대수 곡선의 가지인지는 두 그림을 합쳐서 나타냄으로써 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Robert J. Walker. algebraic curves. Dover publication, inc 1950
2. C. T. C. Wall. singular points of plane curves. London mathematical society 2004
3. Nicholas J. Willis. Newton-Puiseux algorithm. 2003
4. Sagemath http://www.sagemath.com