creative commons

COMMONS DEED

저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:24011-200000241099

２０１１年　２月

教育學碩士(數學教育)學位論文

그래프의 색칠에 관한 연구

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

鄭　哿　孿

그래프의 색칠에 관한 연구

The study of graph coloring

2011年 2月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

鄭 哿 孿

그래프의 색칠에 관한 연구

指導敎授　姜 恩 實

이 論文을 敎育學碩士(數學敎育)學位 請求論文으로 提出함.

2010年　10月

朝鮮大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

鄭　哿　孿

鄭哿孼의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長　朝鮮大學校 敎授　　김　남　권　印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授　　강　은　실　印

審 査 委 員　朝鮮大學校 敎授　　이　관　규　印

2010年　12月

朝鮮大學校 敎育大學院

목 차

ABSTRACT

Ⅰ. 서 론 ····· 1

Ⅱ. 그래프에 관한 기본적 개념과 성질 ····· 2

Ⅲ. 그래프의 색칠 ····· 7

1. 색채수 ····· 7

2. 색다항식 ····· 16

Ⅳ. 사색문제 ····· 23

1. 5색 ····· 24

2. 4색 ····· 29

Ⅴ.결론 ····· 36

참고문헌 ····· 37

ABSTRACT

The study of graph coloring

Jung Ka-young
Advisor : Prof. Kang Eun-sil Ph.D.
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Chosun University

The purpose of this study is to work on graph coloring which is a coloring vertices of a graph in a proper way.
In this paper, we study characteristics of chromatic number which is the minimum number of colors when coloring adjacent vertices in different colors in graph coloring and chromatic polynomial which represents the number of ways when coloring vertices in graph using the given number of colors.
And also we review the four color problem including a short summary of proof by Robertson & Sanders & Seymour & Thomas.

Ⅰ. 서 론

그래프 이론은 1736년 유명한 스위스 수학자인 Leonhard Euler에 의하여 제시된 königsber 다리문제가 잘 알려지면서 쓰여졌다.
처음에 그래프 이론은 퍼즐과 게임에서 유래되었지만 오늘날에는 유전학, 생태학, 사회학, 심리학, 화학, 네트워크 등등 많은 학문분야 안에서 중요하게 이용되고 있다. 그래프 이론에서 그래프와 함께 어떤 기본적인 수가 조합되어 나타내는 연구들이 있는데 이 논문에서는 이런 연구들 중 그래프 색칠에 관한 특정 색채수, 색다항식, 4색 문제 등에 대하여 연구하도록 하겠다. 4색 문제는 그래프 이론의 오래된 유명한 문제 중 하나인데 이는 지도에서부터 시작되었다. 이 문제는 경계선이 공통인 나라를 구별하기 위하여 서로 다른 색깔을 칠하는데 필요한 색의 종류는 몇 가지인가 하는 문제이다. 일반 지도를 그래프로 나타내기는 매우 쉽다. 각 나라를 하나의 점으로 보고 경계선이 공통인 서로 인접한 나라들을 변으로 연결하면 일반 지도는 그래프가 된다. 각 점이 각 나라에 대응하므로 그래프를 색칠하는 것은 점들을 색칠하는 것을 의미하고, 따라서 변으로 연결된 두 점은 다른 색으로 칠해져야 한다. 이러한 방법으로 점들을 색칠 할 수 있는 가장 작은 색깔의 수를 색채수라 하며, 이는 4색 문제와 함께 그래프 이론에서 중요한 역할을 해 왔다. 우리는 이 논문에서 주어진 그래프에 따라 색채수를 구하는 방법을 알아보고 더 나아가 일정한 수 k개의 색깔이 주어졌을 때 몇 가지 방법으로 그래프를 색칠할 수 있는지를 나타내는 k에 관한 색다항식에 대해 알아보도록 하겠다. 또한, 4색 문제와 관련해 가장 최근 증명한 것으로 알려진 Robertson, Sanders, Seymour, Thomas의 증명[7]을 간단히 요약하여 정리하도록 하겠다.

Ⅱ. 그래프에 관한 기본적 개념과 성질

1. 기본적 개념과 성질

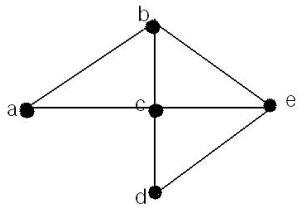
[정의2.1] 유한개의 정점(vertex)의 집합 V와 정점을 연결하는 변(edge)의 집합 E로 이루어진 순서쌍 $G=(V,E)$를 **그래프(graph)**라 한다. 여기서 두 정점 x와 y를 잇는 변을 나타낼 때 $e=\{x,y\}$라 나타낸다.

[정의2.2] 두 그래프 $G=(V,E)$와 $G'=(V',E')$ 에서 $\{a,b\}\in E \Leftrightarrow \{f(a),f(b)\}\in E'$를 만족하는 일대일 대응함수 $f: V\to V'$가 적어도 하나 존재하면 두 그래프 G와 G'을 **동형**이라 한다.

[정의2.3] 한 정점과 그 자신을 잇는 변을 **환(loop)**이라 하고 $e=\{x,x\}$로 나타낸다.

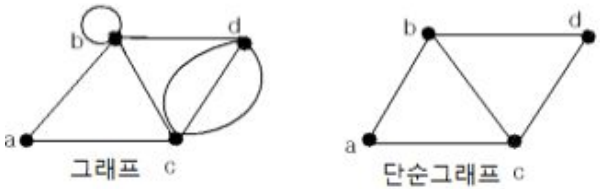
[정의2.4] 두 정점 x와 y사이에 2개 이상의 변이 있을 때 $e=\{x,x\}$를 **다중변(multiple edge)**이라 한다.

[정의2.5] 그래프에서 환과 다중변을 가지고 있지 않은 그래프를 **단순그래프(simple graph)**라 한다.



$G=(V,E)$
$V=\{a,b,c,d,e\}$
$E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{b,e\},\{a,c\}$
$\{c,e\},\{c,d\},\{e,d\}\}$

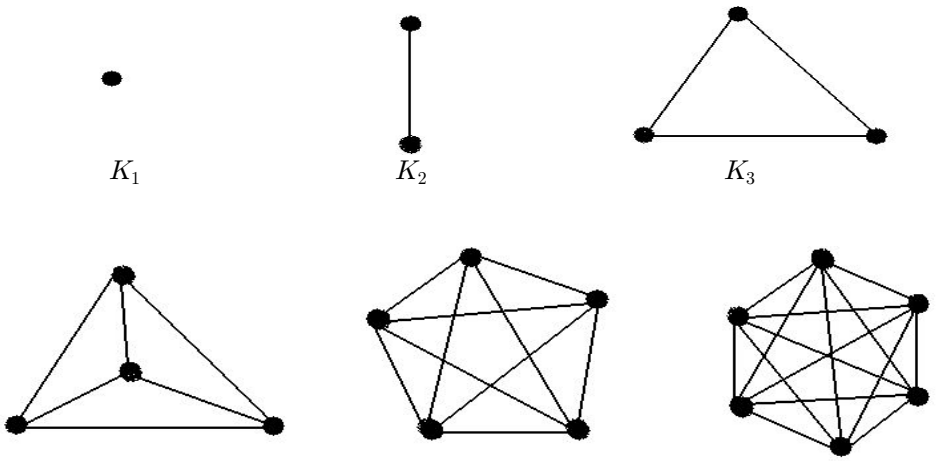
그림 1



$e = \{b, b\}$: loop
$e = \{c, d\}$: 다중변

그림 2

[정의2.6] 임의의 서로 다른 두 정점 사이에 항상 변이 있는 그래프를 **완전그래프**(complete graph)라 하고 n개의 정점을 갖는 완전그래프를 K_n으로 나타낸다.



K_1 K_2 K_3

K_4 K_5 K_6

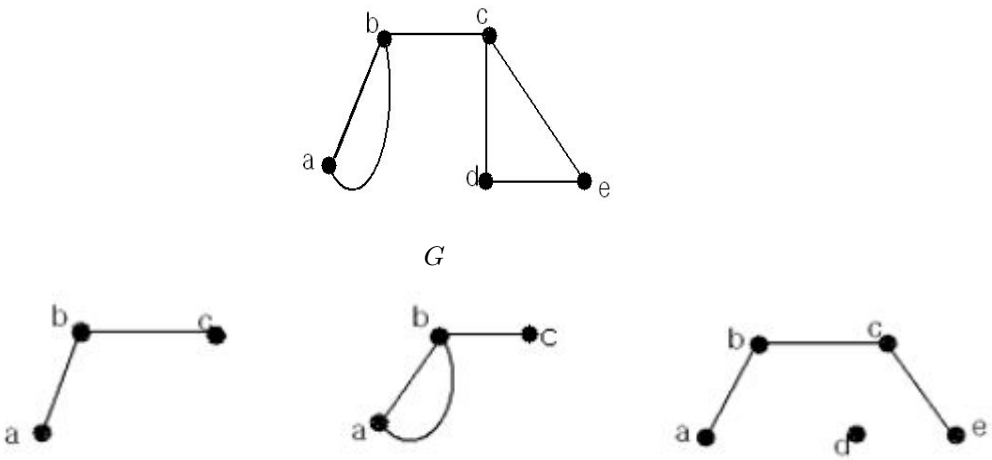
그림 3

[정의2.7] 어느 두 정점도 변으로 연결되어 있지 않은 그래프를 **무선그래프**(null graph)라 한다.

[정의2.8] 두 정점 x와 y가 변에 의해 연결되었을 때, 즉, $e = \{x, y\}$라는 변이 있을 때 x와 y가 **인접한다**(adjacent)고 한다.

[정의2.9] **정점 x에 인접해 있는 변**의 수를 **차수**(dgree)라 하고 기호로는 $\deg(x)$로 나타낸다.

[정의2.10] 그래프 G의 정점과 변의 일부로 이루어진 그래프를 G의 **부분그래프**(subgraph)라 한다. 또한 G의 모든 정점을 포함하는 부분그래프를 **생성 부분그래프**(spanning subgraph)라 하고, G의 부분그래프 중 주어진 정점들 사이를 연결하는 G의 모든 변을 가지고 있는 부분그래프를 **유도된 부분그래프**(induced graph)라 한다.

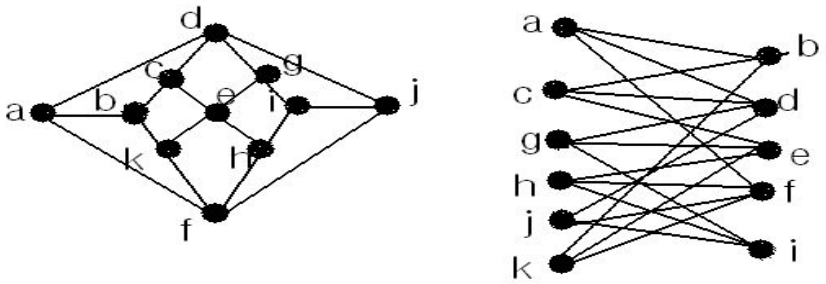


G의 부분그래프　　G의 유도된 부분그래프　　G의 생성부분그래프

그림 4

[정의2.11] 그래프 G의 정점 집합이 다음 두 가지 성질 '첫째, 모든 변이 집합 X와 집합 Y사이에만 존재한다. 둘째, X 또는 Y의 같은 부분에 속하는 어느 두 정점도 인접하지 않는다.'를 만족하는 공집합이 아닌 두 부분집합 X와 Y로 분할이 가능할 때 G를 **이분할그래프**(bipartitemultigraph)라 한다. 특히, 임의의 두 정점 $x \in X$, $y \in Y$가 항상 인접한 이분할그래프를 **완전 이분할그래프**(complete bipartitemultigrapph)라 하고, $|X| = m$, $|Y| = n$인 완전 이분할그래프를 $K_{m,n}$으로 나타낸다.

다음 그래프 G와 G'은 동형인 그래프이므로 G가 이분할그래프임을 알 수 있다.

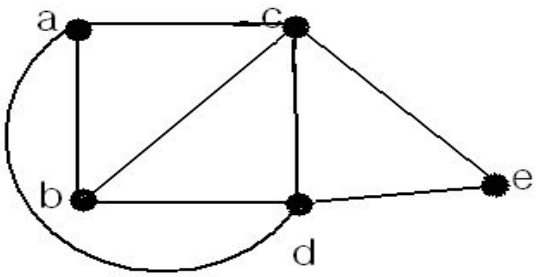


G G'

그림 5

[정의2.12] 그래프 G에서 정점 v_0에서 시작하여 인접한 정점들을 따라 정점 v_n에 도착할 때, 정점 v_i와 변 $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$를 나열한 $W : v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_n} v_n$를 **길**(walk)이라 한다.

[정의2.13] 길 W에서 같은 변이 반복되지 않았을 때, 즉, $e_1, \cdots, e_n$이 모두 다를 때, W를 **경로**(path)라 하고, 시작점과 끝점이 같은 경로를 **회로**(cycle)라 한다.

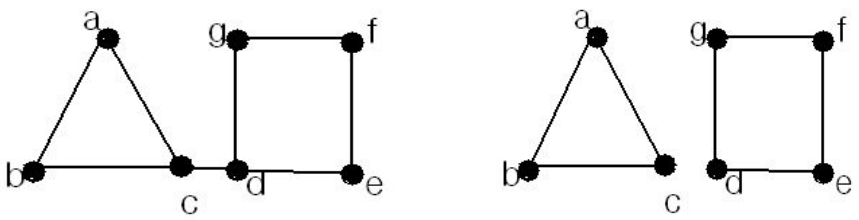


길 : a-c-b-d-a-c-e
경로 : a-c-b-d-e
회로 : a-c-b-d-a

그림 6

[정의2.14] 모든 정점의 차수가 2이고 정점의 개수와 변의 개수가 같은 단순 연결그래프를 **사이클그래프**(cycle graph)라 한다.

[정의2.15] 그래프 G에서 임의의 두 정점 x와 y을 잡았을 때 항상 길이 존재하면 이 그래프를 **연결그래프**(connected graph)라 한다.



연결그래프 비연결그래프

그림 7

[정의2.16] 회로를 가지고 있지 않은 연결그래프를 **수형도**(tree)라 한다.

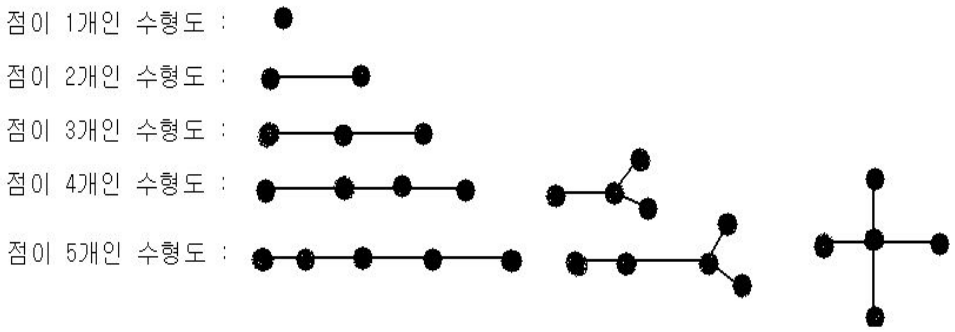


그림 8

[정의2.17] 평면상에 그래프를 그릴 때 변이 교차하지 않게 그릴 수 있는 그래프를 **평면그래프**(planar graph)라 한다.

Ⅲ. 그래프의 색칠

이 절에서는 환과 다중변이 없는 단순그래프만 다루겠다.

1. 색채수

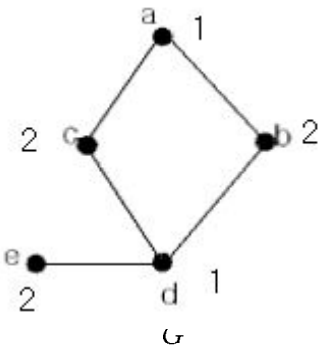
[정의3.1] (1) 그래프에서 서로 인접한 정점들은 다른 색깔이 되도록 그래프의 모든 정점을 색칠하는 것을 그래프의 **색칠**(coloring)이라고 한다.

(2) k개의 색으로 그래프를 색칠(coloring)하는 것을 k**-색칠**(k-coloring)이라 한다.

(3) 그래프 G를 k-coloring 가능하게 하는 이러한 자연수 k중 최소수를 G의 **색채수**(chromatic number)라 하고 기호로는 $\chi(G)$로 난타 낸다.

편의상 각 정점에 색깔을 지정할 때, 빨강, 노랑, 파랑,… 등을 대신해서 1, 2, 3,… 등으로 나타내겠다.

[예3.1] 아래 그래프 G를 색칠해 보면 다음과 같다.



a에 색깔 1지정
b에 색깔 2지정
c에 색깔 2지정
d에 색깔 1지정
e에 색깔 2지정

그림 9

따라서, 그래프 G는 2-coloring 가능하고, 한 가지 색깔로는 G

를 색칠할 수 없으므로 2가 G의 색채수, 즉, $\chi(G)=2$이다.

□

위와 같은 방법 등으로 서로 인접한 정점들끼리 다른 색깔이 되도록 색칠하면 그래프의 색칠을 얻을 수 있다.

[정리3.1] 정점의 개수가 $n(\geq 1)$개인 그래프 G에 대해,

1) G의 색채수는 $1 \leq \chi(G) \leq n$이고,
2) 그래프 G가 완전그래프일 필요충분조건은 $\chi(G)=n$이며,
3) 그래프 G가 무선그래프일 필요충분조건은 $\chi(G)=1$이다.

<증명>

1) 정점의 개수가 1개 이상이므로 그래프 G을 색칠할 때 최소 1개의 색깔이 필요하고 정점의 개수가 n개 이므로 모든 정점을 서로 다른 색깔로 칠하면 G의 n-coloring이 되므로 coloring의 최소수인 색채수는 $1 \leq \chi(G) \leq n$이다.
2) 그래프 G가 완전그래프이면, G의 모든 정점들은 서로 인접하므로 임의의 서로 다른 두 정점은 같은 색깔로 색칠 할 수 없다. 따라서 정점의 개수인 n개의 색깔이 필요하고, $\chi(G)=n$이다. 역으로, 만약 G가 완전그래프가 아니면 인접하지 않은 서로 다른 두 정점 x와 y가 존재하게 된다. 그러면 이 두 정점 x와 y은 같은 색깔로 색칠하고, x와 y를 제외한 나머지 정점들을 다른 색깔로 색칠 했을 때, G의 $(n-1)$-coloring을 얻을 수 있다. 즉, $\chi(G) \leq n-1$, $\chi(G) \neq n$이다.
3) 그래프 G가 무선그래프이면 어떤 서로 다른 두 정점도 인접하지 않으므로 모든 정점을 같은 색깔로 지정 할 수 있다. 즉, $\chi(G)=1$이다. 역으로, 만약 G가 무선그래프가 아니면 인접한 서로 다른 두 정점 x와 y가 존재하여 이 두 정점은 같은 색깔로 지정 할 수 없다. 따라서 최소 2개의 색깔이 필요하고, $\chi(G) \neq 1$이다.

■

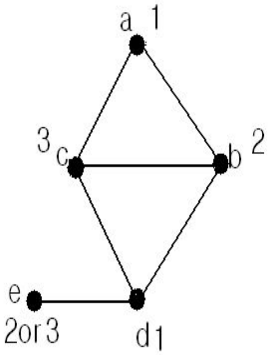
[정리3.2] H가 그래프 G의 부분그래프이면 $\chi(H) \leq \chi(G)$이다. 따라서 그래프 G가 정점이 p개인 완전그래프 K_p를 부분그래프로 가지면

$p \le \chi(G)$이다.

<증명> 그래프 G의 색채수를 k라 하면, G의 k-coloring으로부터 H의 k-coloring을 얻을 수 있다. 따라서 H의 색채수는 $\chi(H) \le k$, 즉, $\chi(H) \le \chi(G)$이다.

□

[예3.2] 다음 그래프 G의 색채수를 구하여라.



G

a에 색깔 1지정
b에 인접한 정점 a와 다른 색깔 2지정
c에 인접한 정점 a, b와 다른 색깔 3지정
d에 인접한 정점 b, c와 다른 색깔 1지정
e에 인접한 정점 a와 다른 색깔 2 또는 3지정

그림 10

먼저, 그래프 G의 coloring을 하나 찾으면 그림 10과 같이 3-coloring이 가능하여 G의 색채수는 $\chi(G) \le 3$가 된다. 그런데 G는 K_3을 부분그래프로 가지므로 $3 \le \chi(G)$이다. 따라서 $\chi(G) = 3$이다.

□

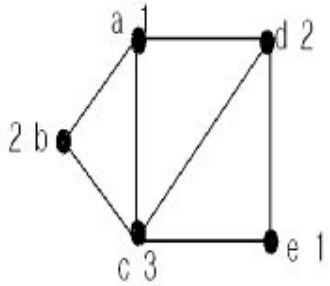
그래프 $G = (V, E)$를 1, 2, $\cdots$, k의 색깔로 k-coloring했을 때, G의 정점 집합 V는 같은 색깔로 칠해진 정점들로만 이루어진 k개의 집합 $V_1, V_2, \cdots, V_k$, 즉, $V_i = \{v \in V \mid v\text{는 색깔 } i\text{가 칠해진 정점}\}\ (i = 1, 2, \cdots, k)$로 분할될 수 있다. 이때, $V_1, V_2, \cdots, V_k$를 G의 **색분할(color partition)**이라 부른다.

[정리3.3] 그래프 G의 색분할 V_1, V_2, $\cdots$, V_k를 각각 정점 집합으로 가지는 G의 유도된 부분그래프 $G_{V_1}, G_{V_2}, \cdots, G_{V_k}$는 무선그래프이다.

<증명> $V_1, V_2, \cdots, V_k$는 같은 색깔인 정점들만 모아 놓은 것이므로 V_i 안의 서로 다른 어느 두 정점도 인접하지 않는다. 따라서 G_{V_i}는 무선그래프이다.

■

[예3.3] 아래 그래프 G를 색칠해 보면 다음과 같다.



G

a에 색깔 1지정
b에 인접한 정점 a와 다른 색깔 2지정
c에 인접한 정점 a, b와 다른 색깔 3지정
d에 인접한 정점 a, c와 다른 색깔 2지정
e에 인접한 정점 c, d와 다른 색깔 1지정

그림 11

따라서, 그래프 G는 위와 같은 3-coloring을 가지게 되어 $V_1 = \{a, e\}, V_2 = \{b, d\}, V_3 = \{c\}$로 색분할 되며, 정리 3.3에 의해 3개의 무선그래프를 유도된 부분그래프로 가진다.

□

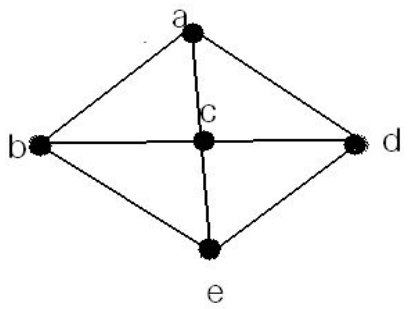
[정리3.4] $V_1, V_2, \cdots, V_k$를 n개의 정점을 가지는 그래프 G의 색분할이라 하고 q를 각 V_i들의 정점 수 중 가장 큰 수라고 하자. 그러면 $k \geq \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$ 이다.

<증명> $|V_i|$를 V_i의 정점의 개수라 하자. 그러면 $|V_1|+|V_2|+\cdots+|V_k| = n$이고 가정에 의해 $|V_i| \leq q\,(i = 1, 2, \cdots, k)$이다. 따라서 $n \leq kq$이고 $k \geq \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$ 가 성립한다.

■

위 정리 3.4에서 $k=\chi(G)$이면 $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$ 가 성립한다.

[예3.4]



G

그림 12

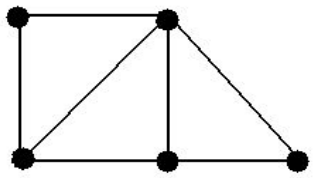
그래프 G는 $V_1=\{a\,,\,e\}, V_2=\{b\,,\,d\}, V_3=\{c\}$로 색분할이 되고 이 중 가장 많은 정점의 개수는 $q=2$이다. 따라서, 정리 3.4에 의해 $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$이 되어 그래프 G을 색칠할 때 적어도 3개의 색이 필요하다.

□

그래프 G의 정점집합의 부분집합 중 서로 인접한 변들이 없는 정점 집합을 **독립집합**(independent set)이라 하고, 이러한 독립집합 중 원소의 개수가 최대인 집합의 원소 개수를 **독립수**(independent number)라 한다.

[따름정리3.5] n개의 정점을 가지는 그래프 G에 대하여 $\alpha(G)$가 독립수이면 $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil$ 이다.

[예3.5]



G

그림 13

주어진 그래프 G을 색칠해보면 3-coloring이 가능하여 $\chi(G) \le 3$이고, 또한 $\alpha(G) = 2$이므로 $\chi(G) \ge \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$이 되어 $\chi(G) = 3$이 성립한다.

□

[정리3.6] 그래프 G가 무선그래프가 아닐 때, G의 색채수가 2일 필요충분조건은 G가 이분할그래프이라는 것이다.

<증명> 만약 $\chi(G) = 2$이면 그래프 G는 V_1과 V_2로 색분할이 가능하고 V_1과 V_2안의 정점들은 서로 인접하지 않는다. 따라서 G는 이분할그래프가 된다. 역으로, 만약 그래프 G가 이분할그래프이면 G의 정점 집합 V가 X와 Y로 분할되는데, 각각 X와 Y안의 정점들은 이분할그래프의 정의에 의해 서로 인접하지 않는다. 따라서 X와 Y 각각의 정점에는 같은 색깔로 색칠할 수 있어 $\chi(G) \le 2$이다. 그런데 G가 무선그래프가 아니므로 $\chi(G) = 2$이다.

■

다음은 그래프 G의 정점들에 순서를 부여함으로써 coloring을 얻는 한 방법이다.

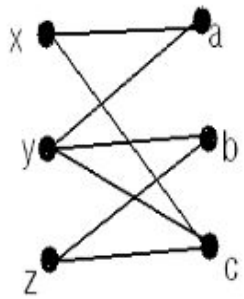
<Greedy algorithm for vertex-coloring>

그래프 G의 정점을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$순으로 나열하자.

(1) 정점 x_1에 색깔 1을 배정하라
(2) 정점 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$의 색깔 배정을 위해 나머지 색깔 중 가장 작은 색깔 p를 선택하여 x_i에 색깔 p을 배정하라.

그리디 알고리즘은 정점을 어떤 순서로 선택하느냐에 따라 다른 coloring을 제시하며 주어진 순서에서 최소한의 색깔로 색칠 할 수 있는 coloring을 제공한다. 따라서 이러한 그리디 알고리즘으로 얻을 수 있는 k-coloring중 최소수 k가 그래프 G의 색채수가 된다.

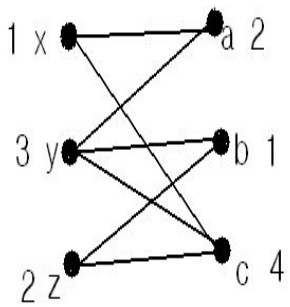
[예3.6] 그리디 알고리즘에 의해 다음 그래프의 coloring을 구하여라.



G

그림 14

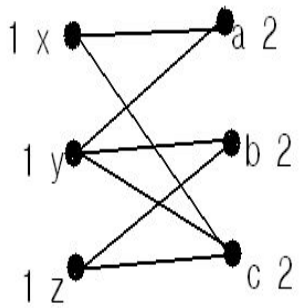
(1)



x, a, b, y, z, c 순서로 배정
① x에 색깔 1배정
② a에 색깔 1을 제외한 색깔 2배정
③ b에 색깔 1배정
④ y에 색깔 1, 2을 제외한 색깔 3배정
⑤ z에 색깔 1을 제외한 색깔 2배정
⑥ c에 색깔 1, 2, 3을 제외한 색깔 4배정

따라서, 그리디 알고리즘에 의해 x, a, b, y, z, c 순서로 색깔을 배정하면 G의 4-coloring을 얻을 수 있다.

(2)



x, a, y, b, z, c 순서로 배정

① x에 색깔 1배정

② a에 색깔 1을 제외한 색깔 2배정

③ y에 색깔 2을 제외한 색깔 1배정

④ b에 색깔 1을 제외한 색깔 2배정

⑤ z에 색깔 2을 제외한 색깔 1배정

⑥ c에 색깔 1을 제외한 색깔 2배정

따라서, 그리디 알고리즘에 의해 x, a, y, b, z, c 순서로 색깔을 배정하면 G의 2-coloring을 얻을 수 있다.

□

[정리3.7] 그래프 G의 정점의 차수 중 가장 큰 차수를 $\triangle$라 할 때, G는 그리디 알고리즘에 의해 $(\triangle+1)$-coloring을 가진다. 따라서 $\chi(G) \le \triangle+1$이다.

<증명> 그리디 알고리즘에 의해 G의 임의의 정점 x_i에 색깔을 배정한다고 하자. $1, 2, \cdots, \triangle, \triangle+1, \cdots$의 색깔 중 x_i와 인접한 정점들의 색깔을 제외한 나머지 색깔 중 최소수의 색깔 p가 그리디 알고리즘에 의하여 정점 x_i에 배정된다. 그런데 $\deg(x_i) \le \triangle$이므로 x_i는 기껏해야 $\triangle$개의 다른 정점들과 인접해있다. 따라서, $p \le \triangle+1$이고, G의 임의의 정점 x_i에 관해 이것이 성립하므로 G는 $(\triangle+1)$-coloring이 가능하여 $\chi(G) \le \triangle+1$이 성립한다.

■

완전그래프 K_p의 최대차수 $\triangle$는 $n-1$이므로 색채수 $\chi(K_n)=n=\triangle+1$이고, 정점의 수 n이 홀수인 사이클그래프 C_n의 최대차수 $\triangle$는 2이므로 색채수 $\chi(C_n)=3=\triangle+1$이다. 그런데 이 두 가지 종류의 그래프를 제외시키면 $\chi(G) \le \triangle$가 되어 색채수의 상계를 1만큼 줄일 수 있다.(Brooks [2])

[정리3.8] 최대차수가 $\triangle$인 그래프 G가 완전그래프도 아니고 정점의 수 n이 홀수인 사이클그래프도 아니면 $\chi(G) \leq \triangle$이다.

2. 색다항식

[정의3.2] 임의의 자연수 k에 관해, 그래프 G의 k-coloring의 방법 수를 나타내는 함수를 G의 **색다항식**(chromatic polynomial)이라 하고 기호로는 $P_G(k)$로 나타낸다.

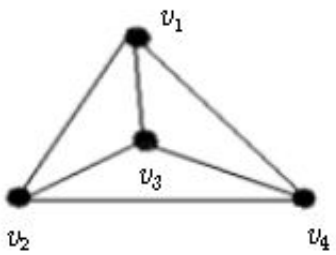
정의에 의해 색채수는 색다항식의 근이 아니라 색다항식의 값 $P_G(k)$가 0보다 큰 값이 되는 k중 가장 작은 값을 나타낸다.

[예3.7] (1) 임의의 자연수 k에 관해, $k < \chi(G)$이면 $P_G(k) = 0$이고 $k \geq \chi(G)$이면 $P_G(k) \geq 1$이다.

(2) 무선그래프 N_n의 경우, n개의 각 정점에 칠할 수 있는 색깔의 수는 모두 k가 되고 각 경우는 독립적이고 동시에 일어나므로 각 경우의 수를 곱하면 $\underbrace{k \times k \times \cdots \times k}_{n}$이다. 따라서 색다항식은 $P_{N_n}(k) = k^n$이다.

□

[예3.8]



K_4

그림 15

K_4의 색다항식을 구해보면, 정점 v_1에 들어올 수 있는 색깔의 수는 k개, 정점 v_2에 들어올 수 있는 색깔의 수는 $k-1$개(정점 v_1에 칠

해진 색깔 제외), 정점 v_3에 들어올 수 있는 색깔의 수는 $k-2$개(정점 v_1, v_2에 칠해진 색깔 제외), 정점 v_4에 들어올 수 있는 색깔의 수는 $k-3$개(정점 v_1, v_2, v_3에 칠해진 색깔 제외)가 되고 각 경우는 독립적이고 동시에 일어나므로 각 경우의 수를 곱하면 $k(k-1)(k-2)(k-3)$이다. 따라서, 색다항식은 $P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$이다.

□

앞의 예제와 같은 방법으로 우리는 완전그래프의 색다항식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

[정리3.9] 정점의 개수가 n개인 완전그래프 K_n의 색다항식은 $P_G(k) = k(k-1)\cdots(k-(n-1))$이다.

[정리3.10] 정점이 n개인 수형도 T의 색다항식은 $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$이다.

<증명> 정점의 수 n에 관한 귀납법에 의해 증명하자. 먼저 수형도 T의 정점이 1개이면 k개로 T를 색칠할 수 있는 방법의 수는 k이므로 $P_T(k) = k = k(k-1)^{1-1}$가 성립한다. 이제 정점의 수가 n개보다 적은 수형도에서는 정리가 성립한다고 가정하고 T를 n개의 정점을 갖는 그래프라 하자. T는 수형도이므로 차수가 1인 정점 v가 존재하고, T에서 v를 제거한 그래프 T'은 $(n-1)$개의 정점을 가지는 수형도이다. 따라서, 귀납법 가정에 의해 T'의 색다항식은 $P_{T'}(k) = k(k-1)^{n-2}$을 만족한다. 그런데 T의 임의의 k-coloring은 먼저 T'을 k-coloring한 후 v에 추가로 색깔을 배정하여 얻을 수 있는데, 이 때 v에 인접한 한 개의 정점($\deg(v) = 1$)이므로)의 색깔을 제외한 나머지 $k-1$개의 색깔을 v에 칠할 수 있다. 따라서 T의 색다항식은 $P_T(k) = P_{T'(k)} \cdot (k-1) = k(k-1)^{n-1}$이다.

■

인접하지 않은 두 정점을 한 정점으로 일치시키고 이 때, 원래의 두 정점과

동시에 인접한 정점이 있어 다중변이 생기면 그 다중변 또한 하나의 변으로 일치시켰을 때 이를 '두 정점을 동일시한다'라고 말한다.

[정의3.3] 그래프 G에서 변 $e=\{x,y\}$을 제거하고 변 e의 양끝 정점 x와 y를 동일시하여 얻어진 그래프를 G의 $e-$**수축**(contracting an edge e)이라 하고 수축된 두 정점을 기호로는 $\overline{xy}$로 나타낸다.

[정리3.11] 그래프 G의 두 정점 x와 y가 인접한다고 하자. G_1은 G에서 변 $e=\{x,y\}$를 제거하여 얻어진 그래프이고, G_2는 G에서 변 $e=\{x,y\}$를 수축하여 얻어진 그래프라 할 때,

$$P_G(k)=P_{G_1}(k)-P_{G_2(k)}$$

가 성립한다.

<증명> 그래프 G_1에서 두 정점 x와 y는 인접하지 않으므로 G_1의 k-coloring은 x와 y가 같은 색으로 색칠되는 경우와 다른 색으로 색칠되는 경우로 나뉘어 진다. 이 때, k_1을 x와 y를 다른 색깔로 색칠한 G_1의 k-coloring의 방법 수라 하고 k_2를 x와 y를 같 같은 색깔로 색칠한 G_1의 k-coloring의 방법 수라 하자. 그러면 $P_{G_1}(k)=k_1+k_2$이다. 여기서 G_1의 k-coloring중 x와 y를 다른 색깔로 색칠한 coloring은 변 $e=\{x,y\}$를 추가해도 여전히 잘 정의되는 coloring이 되어 G의 k-coloring을 얻을 수 있고, 역으로 k -coloring된 그래프 G에서 변 $e=\{x,y\}$를 제거하면, 이것은 x와 y를 다른 색깔로 색칠한 G_1의 k-coloring이 되어 $P_G(k)=k_1$이 성립한다. 한편, G_1의 k-coloring중 x,y를 같은 색깔로 색칠한 coloring은 G에서 변 $e=\{x,y\}$를 수축한 그래프 G_2의 k-coloring으로 호환 되고, 역으로 G_2의 k-coloring 또한 $\overline{xy}$를 인접하지 않은 두 정점 x,y로 분리시켜 얻어지는 그래프 G_1의 k-coloring(x,y에 같은 색깔로 색칠된)으로 호환되므로 $P_{G_2}(k)=k_2$가 된다. 따라서 $P_G(k)=P_{G_1}(k)-P_{G_2}(k)$가 성립한다.

■

[따름정리3.12] 그래프 G에서 서로 인접하지 않은 두 정점 x,y가 있을 때,

G에서 x, y를 변으로 연결하여 얻어진 그래프를 G_1, G에서 두 정점 x, y를 동일시하여 얻어진 그래프를 G_2라 하자. 그러면 $P_G(k) = P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k)$이다.

[예3.9] 정점이 5개인 사이클 그래프 C_5의 색채수를 색다항식을 이용하여 구하라.

<풀이> 정리 3.10을 이용하여 사이클그래프 C_5의 색다항식을 먼저 구하여 보자. 변 $\{x, y\}$를 C_5의 한 인접한 변이라 할 때, $\{x, y\}$를 제거하여 얻어진 그래프 G_1은 정점이 5개인 수형도이고, $\{x, y\}$를 수축하여 얻어진 그래프 G_2는 정점이 4개인 사이클그래프이다. G_1의 색다항식은 $P_{G_1}(k) = k(k-1)^4$이고, G_2의 색다항식은 정리 3.10을 다시 이용하여 구하면 정점이 3개인 트리와 정점이 3개인 사이클, 즉, 완전그래프로 나뉘어지므로, $P_{G_2}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2)$가 된다. 따라서 C_5의 색다항식은 $P_{C_5}(k) = P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k) = k(k-1)(k-2)(k^2-2k+2)$이다. 이제, 정점이 5개인 사이클 그래프 C_5의 색채수를 색다항식을 이용하여 구하여 보면 $P_{C_5}(0) = 0$, $P_{C_5}(1) = 0$, $P_{C_5}(2) = 0$, $P_{C_5}(3) = 30 > 0$이므로 C_5의 색채수는 $\chi(G) = 3$이다. □

[예3.10]

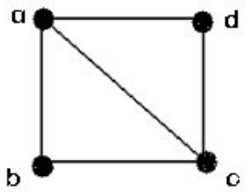


그림 16

그래프 G의 색다항식을 정리 3.10과 따름정리 3.11을 이용하여 각각 구하라.

<풀이> 먼저, 정리 3.10을 이용하여 그래프 G의 색다항식을 구하여 보자. G에서 인접한 두 정점 a, c에 대하여 G_1은 변 $\{a, c\}$를 제거하여 얻은 그래프이고, G_2는 변 $\{a, c\}$를 수축하여 얻은 그래프이다.

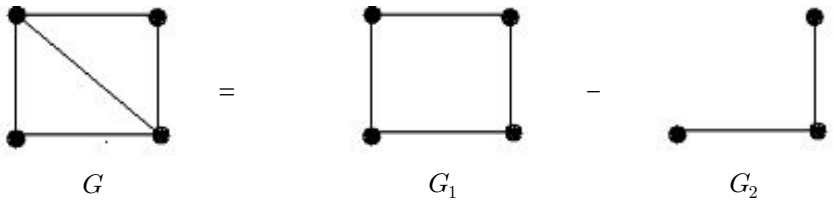


그림 17

그런데 G_2는 정점이 3개인 수형도이지만 G_1은 색다항식을 이미 알고 있는 특정그래프가 아니므로 다시 정리 3.10을 적용하면 정점이 4개인 수형도와 정점이 3개인 완전그래프가 생긴다.

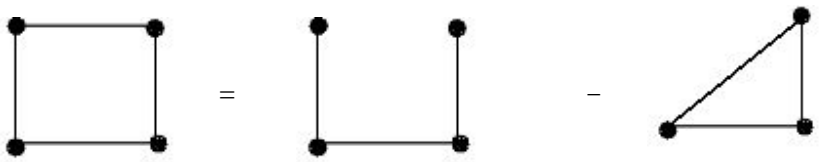
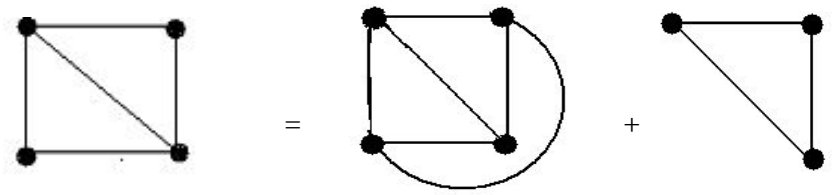


그림 18

따라서 G의 색다항식은 $P_G(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) - k(k-1)^2 = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k$이다.

다음은, 따름정리 3.11을 이용하여 그래프 G의 색다항식을 구하는 방법이다. G에서 인접하지 않은 두 정점 b, d에 대하여 G_1은 b, d를 변으로 연결하여 얻어진 그래프이고, G_2는 b, d을 동일시하여 얻은 그래프이다.



G G_1 G_2

그림 19

G_1은 정점이 4개인 완전그래프이고 G_2는 정점이 3개인 완전그래프이므로 정리 3.11에 의해 G의 색다항식은 $P_G(k)=k(k-1)(k-2)(k-3)+k(k-1)(k-2)=k^4-5k^3+8k^2-4k$이다.

□

정리 3.10을 반복 적용하면 주어진 그래프 G의 색다항식은 무선그래프의 색다항식으로 표현되고, 따름정리 3.11을 반복 적용하면 주어진 그래프 G의 색다항식은 완전그래프의 색다항식으로 표현된다.

다음알고리즘은 정리 3.10을 반복 적용하여 주어진 그래프의 색다항식을 무선그래프의 색다항식으로 표현하는 방법으로, 그래프 G에서 $e=\{x,y\}$를 G의 변이라 하면 $G_{\ominus e}$는 G에서 e를 제거한 그래프를 나타내고, $G_{\otimes e}$는 G에서 e를 수축한 그래프를 나타낸다. 또한 이 알고리즘에서 ϵ은 $+1$ 또는 -1을 나타낸다.

<Algorithm for computing the chromatic polynomial of a graph>

$G=(V,E)$는 그래프이다.

(1) $\zeta=\{(+1,G)\}$라 놓자
(2) ζ안에 무선그래프가 아닌 그래프가 있으면 아래로 진행
  (i) ζ안에 무선그래프가 아닌 signed graph (ϵ,H)을 선택하라.
  (ii) e를 H의 변이라 할 때, ζ로부터 (ϵ,H)를 제거하고 두 signed graph $(\epsilon,H_{\ominus e})$와 $(-\epsilon,H_{\otimes e})$를 ζ안에 넣자.

(3) ζ안에 있는 모든 그래프가 무선그래프가 될 때까지 진행 하면 G의 색다항식은 ζ안에 있는 모든 signed graph (ϵ, H)에 대한 합인 $P_G(k) = \sum \epsilon k^p$이며, 이 때 p는 무선그래프 H의 정점의 개수를 나타낸다.

정정의 개수가 n인 그래프 G의 색다항식을

$$P_G(k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k$$

라고 하면 다음이 성립한다.

① $P_G(k)$의 최고차 항 k^n의 계수는 $a_0 = 1$이다.
② $P_G(k)$의 최고차 항의 차수는 그래프의 정점의 개수 n이다.
③ $P_G(k)$은 상수 항을 가지지 않는다.
④ $P_G(k)$의 $n-1$차 항의 계수의 절대 값 $|a_1|$은 그래프의 변의 개수이다.
⑤ 만약 그래프 G가 무선그래프가 아니면 $P_G(k)$의 계수의 합은 0이다.
⑥ $P_G(k)$의 계수들의 부호는 $(+), (-)$가 교대로 나타난다.

Ⅳ. 사색문제

4색 문제는 거의 100년 동안 풀리지 않고 전해 내려온 수학문제 중의 하나로, 그 기원은 1852년 런던의 대학교수인 드모르간(De Morgan)의 한 학생인 구드리(Guthrie)가 '지도에서 서로 인접한 나라를 다른 색깔로 칠했을 때 필요한 색의 최소수가 얼마인가'를 질문하면서 부터이다. 그리고 이 문제가 잘 알려지게 된 것은 1878년 케일리(Cayley)가 런던 수학회의 모임에서 이 문제를 미해결문제로 재 제출한 이후부터이다. 그로부터 1년 후인 1879년 영국의 변호사였던 캠프(Kempe)가 4가지 색이면 충분하다고 주장하였지만 1890년 히우드(Heawood)가 캠프의 증명과정에 오류가 있다는 것을 지적하고 5가지 색이면 충분하다는 것을 증명하였다. 그 후 4색 문제는 여전히 미해결로 남아 있다가 약 100년 후인 1976년에 미국의 수학자인 아펠과 하켄(Appel&Haken)이 컴퓨터를 이용하여 문제를 해결하였다. 하지만 이들의 증명은 컴퓨터로 계산하는데 소요된 시간이 약 1,200시간이 될 정도로 복잡하고 컴퓨터 계산에 필요한 프로그램 또한 직접 손으로 증명하기가 여의치 않아 이후에도 여전히 4색 문제는 많은 수학자들의 도전적인 과제로 남아 있었다. 이러한 상황에서 1997년, Robertson, Sanders, Seymour 그리고 Thomas(이하 R.S.S.T)가 함께 4색 문제의 새로운 증명을 소개하였는데 전체적인 맥락은 아펠과 하켄의 증명 방법을 따랐으나 효율적인 면에서 큰 발전을 하였고 또한 컴퓨터 계산에 있어 모든 프로그램들이 수작업으로 검증 가능하도록 제시되었다. 하지만 여전히 컴퓨터의 이용이 불가피한 증명이고 컴퓨터 계산 또한 여전히 많은 분량인지라 4색 문제를 해결하려는 수학자들의 노력은 아직도 끊이지 않고 있다. 이러한 맥락에서 우리는 이 단원에서 R.S.S.T의 4색 문제의 증명을 간단히 요약하여 알아보고 특히 어떤 부분에서 컴퓨터 계산이 이루어졌는지 살펴보도록 하겠다.

1. 5색

사색문제가 출현한지 약 30년 후인 1879년에 캠프는 이 문제에 대한 증명을 발표하여 그 방법이 당시에는 너무나 새롭고 증명과정에서의 오류도 없어 보였기 때문에 4색 문제의 증명이 완성되었다고 믿었지만, 11년 후인 1890년 히우드란 수학자가 오류를 발견하였다. 비록 증명의 오류는 있었지만 이 증명에서 캠프에 의해 6색 정리가 증명되었고, 캠프의 증명에서 아이디어를 얻어 히우드가 5색 정리를 증명하였다. 여기서는 캠프의 6색 정리와 히우드의 5색 정리의 증명을 소개하겠다.

[정의4.1] 그래프 G에서 변으로 둘러싸인 부분을 **영역**(rigion)이라 하고 그 중 무한히 뻗어 나가는 영역을 **무한영역**(infinite rigion)이라 한다. 또한 영역 r을 둘러싸고 있는 변의 수를 f_r로 나타낸다.

오일러 공식에 의해 정점의 개수가 n, 변의 개수가 e, 영역의 개수가 r인 평면그래프는 $n-e+r=2$를 만족한다.

아래는 캠프의 6색 정리와 히우드의 5색 정리에서 필요한 그래프 이론에서의 기본적인 성질들이다.

[정리4.1] 정점의 개수가 n인 그래프 G에서 각 정점 v_i의 차수를 d_i $(i=1,2,\cdots,n)$라 하고, 변의 개수를 e라 할 때

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2e$$

가 성립한다.

<증명> 하나의 변은 두 정점과 인접하고 정점의 차수는 인접한 변의 수이므로 각각의 변은 정점의 차수로 두 번씩 세어진다. 따라서 모든 정점의 차수의 합은 변을 두 번 세는 것과 같다. 즉, $d_1+d_2+\cdots+d_n=2e$가 성립한다.

■

[정리4.2] 그래프 G가 연결된 단순평면그래프이면 차수가 5 이하인 정점이 존재한다.

<증명> 그래프 G는 단순그래프이므로 환과 다중변이 없어 $f_r = 1$과 $f_r = 2$인 영역이 없다. 따라서 모든 영역들의 둘러싸인 변의 수는 3 이상이 된다. 그런데 각 변은 두 영역의 경계이므로 모든 영역에서의 f_r의 합과 모든 변의 수 e와의 관계는 $f_1 + f_2 + \cdots + f_r = 2e$가 성립한다. 또한, r개의 각각 영역들의 변의 수는 최소 3이므로 $3r \le 2e$, 즉, $r \le \frac{2e}{3}$가 성립한다. 따라서 오일러 공식에 의해 G의 모든 정점의 수 n에 관해 $3n - 6 \ge e$가 성립하고 정리 4.1에 의하여 G의 정점의 평균차수는 $\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n} \le 6 - \frac{12}{n} < 6$가 성립한다. 따라서 차수가 5 이하인 정점이 적어도 하나 존재한다.

■

[정리4.3] 그래프 $G = (V, E)$에 k-coloring이 주어지고 r과 s를 k개의 색깔 중 서로 다른 두 색깔이라 하자. W는 G의 정점들 중 r 또는 s 두 가지 색으로만 칠해진 정점들의 집합이라 할 때, $H_{r,s}$를 W의 정점들로 이루어진 G의 유도된 부분그래프라 하고 $C_{r,s}$를 $H_{r,s}$의 한 연결성분이라 하자. 이 때 $C_{r,s}$의 r과 s를 서로 바꾸어 칠하면 G의 새로운 k-coloring을 얻을 수 있다.

<증명> 새로 주어진 색칠이 그래프 G의 k-coloring인 것을 보이기 위해서는 G에 같은 색으로 칠해진 인접한 정점들이 없음을 보이면 된다. 따라서 G에 같은 색으로 칠해진 인접한 두 정점 x와 y가 존재한다고 가정하자. $C_{r,s}$의 정점을 제외한 나머지 정점에서는 G의 원래 주어진 k-coloring으로 부터의 색깔을 그대로 유지하므로 인접한 정점들은 서로 다른 색깔이 배정되어 있다. 따라서 x 또는 y중 적어도 하나는 $C_{r,s}$의 정점이어야 한다. 그런데 x와 y가

모두 $C_{r,s}$의 정점이면 x와 y의 색깔이 모두 바뀌었으므로 원래 주어진 G의 k-coloring에서의 x와 y의 색깔 또한 같아야한다. 이것은 G의 k-coloring이라는 것에 모순이 되므로, x와 y중 한 정점만 $C_{r,s}$의 정점이 된다. 일반성을 잃지 않고 x가 r로 색칠된 $C_{r,s}$의 정점이라고 가정하자. 그러면 원래 주어진 G의 k-coloring으로 부터의 x와 y의 색깔은 각각 s와 r이다. 따라서 x와 y는 $H_{r,s}$의 정점이 되고 서로 인접한 정점들이므로 같은 연결성분에 속한다. 즉, y 또한 x를 포함하는 연결성분 $C_{r,s}$의 정점이 되어야 하므로 이는 모순이다. 따라서 G의 새로운 색칠에는 같은 색깔로 칠해진 인접한 정점들이 없으므로 G의 k-coloring이 된다.

■

1879년 오류가 있는 캠프의 4색 정리의 증명에서 다음과 같은 6색 정리의 증명을 얻을 수 있었다.

[정리4.4] 그래프 G가 평면그래프이면 $\chi(G) \le 6$이다.

<증명> $\chi(G) \ge 7$인 그래프가 있다면 그러한 그래프 중 정점의 수가 가장적은 것을 그래프 G라 하자. 정리 4.2에 의해 G에는 차수가 5 이하인 정점 x가 존재한다. G에서 x를 제거한 그래프를 G'라 하면 G는 $\chi(G) \ge 7$인 정점의 수가 가장 적은 그래프이므로 $\chi(G') \le 6$이 된다. 따라서 G'의 정점을 6가지 색으로 모두 색칠한 뒤 차수가 5 이하인 정점 x에 인접한 정점의 색을 제외한 색 중 하나를 칠하면 G는 6가지 색으로 색칠이 가능하다. 따라서 $\chi(G) \ge 7$이라는 사실에 모순이 된다.

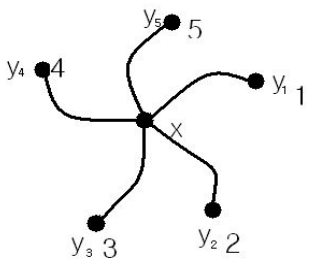
■

다음은 1890년 히우드에 의해 증명된 5색 정리이다.

[정리4.5] 그래프 G가 평면그래프이면 $\chi(G) \le 5$이다.

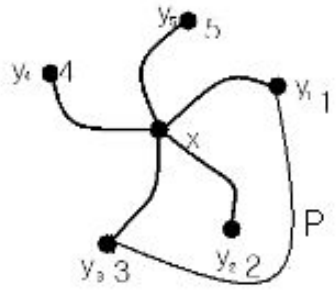
<증명> 정점의 수 n에 관한 귀납법에 의해 증명하자. 그래프 G의 정점의 수가 5 이하이면 $\chi(G) \le 5$이므로 정리가 성립한다. 정점의 수

가 n개 보다 적은 그래프에서는 정리가 성립한다고 가정하고 G를 n개의 정점을 갖는 평면그래프라 하자. G는 평면그래프이므로 정리 4.2에 의해 차수가 5 이하인 정점 x가 존재한다. 정점 x를 제거하여 얻어진 G의 유도된 부분그래프를 H라 하면, H는 $n-1$개의 정점을 가진다. 따라서 귀납법 가정에 의해 H는 5-coloring이 가능하다. H에 색깔 1, 2, 3, 4, 5로 칠해진 5-coloring이 하나 주어졌다고 하자. 먼저 x의 차수가 4 이하인 경우, x와 인접한 정점들이 기껏해야 4개이므로 다섯 색깔 중 이들 인접한 정점들에 칠해진 색깔을 제외한 나머지 색깔을 x에 칠하면 이것은 G의 5-coloring이 된다. 이제 정점 x의 차수가 5라고 가정하자. 정점 x에 인접한 정점들 중 두 정점의 색깔이 같은 경우 x에 인접하지 않은 색이 존재하여 그 색깔을 x에 칠하면 G의 5-coloring이 가능하므로, x에 인접한 모든 정점 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5가 모두 다른 색깔로 칠해졌다고 가정하자. 이 때, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5는 x를 중심으로 시계방향 순으로 주어졌다고 하고 각 정점에 색깔 1, 2, 3, 4, 5가 순서대로 배정 되었다고 하자.



그래프 H에서 색깔 1과 3으로 칠해진 정점들로 이루어진 H의 유도된 부분그래프를 $H_{1,3}$이라 하자. 만약 y_1과 y_3가 $H_{1,3}$의 다른 연결성분에 있다면 한 연결성분에서 색깔 1과 3을 바꾸더라도 y_1과 y_3중 한 정점은 색깔이 바뀌고 나머지 한 정점은 색깔이 바뀌지 않으므로 y_1과 y_3는 같은 색으로 칠해지며 앞의 경우와 마찬가지로 G는 5-coloring이 가능하다. 이제 y_1과 y_3가 $H_{1,3}$의 같은 연결성분에 있다고 가정하자. 그러면 y_1과 y_3는 색깔 1과 3이 교대로 색칠된 서로 다른 정점들로 이루어진 경로로 연결된다. y_1

과 y_3를 연결하는 경로를 P : $y_1 \to \cdots \to y_3$ 라고 하자.



이제, 그래프 H에서 색깔 2와 4로 칠해진 정점들로 이루어진 H의 유도된 부분그래프를 $H_{2,4}$라 하자. y_2와 y_4가 $H_{2,4}$의 같은 연결성분에 있으면 앞에서와 마찬가지로 y_2와 y_4를 연결하며 2와 4가 교대로 색칠된 정점들로 이루어진 경로 Q : $y_2 \to \cdots \to y_4$가 존재한다. 이 때, 경로 P와 Q는 교차점을 가져야 하고 G가 평면그래프이므로 P와 Q는 정점에서만 교점을 가진다. 하지만 경로 P의 정점들은 1 또는 3이 색칠되어 있고, 경로 Q의 정점들은 2 또는 4가 색칠되어 있으므로 서로 공통된 정점을 가질 수 없다. 따라서 y_2와 y_4는 서로 다른 연결성분에 있어야 하고 앞에서와 마찬가지로 한 성분에서 색깔 2와 4을 서로 바꾸어 y_2와 y_4가 같은 색깔로 칠해진 H의 새로운 5-coloring을 얻을 수 있다. 따라서, 정점 x에 인접하지 않은 색깔 2 또는 4를 x에 칠하면 G의 5-coloring을 얻을 수 있으므로 $\chi(G) \le 5$가 성립한다.

■

2. 4색

이 절에서는 4색 문제의 가장 최근 증명인 R.S.S.T의 증명을 살펴보도록 하겠다.

R.S.S.T의 증명은 크게 두 가지로 나뉜다. 소위 말해 'reducibility'와 'unavoidability'의 증명인데, 첫 번째, reducibility의 대략적인 의미는 한 그래프가 어느 특정한 모양을 부분그래프로 가지면 이 부분그래프를 이용하여 4-coloring이 가능한 더 작은 그래프를 찾아 이것을 원래 그래프의 4-coloring으로 확장시키는 것을 말한다. 그리고 unavoidability란 어떤 특징을 가지는 그래프가 reducibility에서 언급된 특정 모양의 부분그래프를 항상 가진다는 것이다. 다시 말해, 4색으로 칠할 수 없는 그래프가 있다면, 즉 4색 문제의 반례가 있다면 그러한 것들 중 최소반례는 unavoidability에 의해 특정 모양의 부분그래프, 소위 'good configuration'이란 것을 가져야 하고, 이러한 good configuration에서 reducibility가 발생해 4-coloring이 가능한 더 작은 평면 그래프의 coloring이 원래 주어진 그래프(4색 문제의 최소반례)의 4-coloring으로 전환되어 모순을 일으킨다.
한편, good configuration의 존재성을 보이는 unavoidability의 증명에서 중요하게 사용되는 방법이 'discharging'이란 것인데, 이는 Heesch에 의해 처음 소개되었으며, 그는 또한 reducibility와 unavoidability라는 두 가지 방법이 4색 문제의 해결책이 될 것이란 것을 일찍이 예측하였다. 바로 이를 입증한 것이 1977년의 아펠과 하켄의 증명이다. R.S.S.T의 증명 또한 이 두 가지 방법을 사용하였는데, 아펠과 하켄의 증명에 비해 reducibility의 대상인 good configuration의 수가 아펠과 하켄이 제시한 1476개에 비해 현저히 줄은 633개이고 discharging 방법에서 적용되는 규칙(discharging rule) 또한 아펠과 하켄의 487개에 비해 확연히 준 32개로 효율적인 면에서 크게 발전된 증명이다. 아펠,하켄과 마찬가지로 R.S.S.T의 증명에서도 reducibility와 unavoidability가 중요한 해결책이 되었다. 따라서 앞으로 이 논문에서 소개하는 R.S.S.T의 증명 방향은 세 가지 주안점인 'Configuration' , 'Unavoidability(discharging)' , 'Reducibility'에 초점을 맞추어 전개해 나가겠다.

1) Configuration

4색 정리의 최소반례는 모든 영역이 세 개의 변으로 둘러싸여 있는 다음과 같은 그래프에서 나타나다.

[정의4.2] 정확히 세 개의 변으로 둘러싸인 그래프 G의 영역을 삼각형이라 하고, 모든 영역이 삼각형인 그래프 G를 triangulation(삼각분할)이라 한다. 또한, 무한영역을 제외한 모든 영역이 삼각형인 그래프를 near triangulation이라고 한다.

4색 정리의 증명은 최소반례를 가정하여 그 그래프의 특정 부위를 축소시켜 얻어진 더 작은 그래프의 4-coloring을 원래 주어진 최소반례의 4-coloring으로 변형시킴으로써 모순을 일으키는데 이 때 이 특정 부위를 'good configuration'이라 한다. 여기서, 'configuration'이란 삼각분할 G의 작은 일부 구조로, 각 정점에 특수 정수 값이 다음과 같이 부여된다.

[정의4.3] G를 near triangulation이라 하고 γ를 G의 정점 집합에서 정수 집합으로의 함수 $\gamma : V(G) \rightarrow Z$라 하자. G와 γ가 다음 세가지 조건을 만족 할 때 그 순서쌍 (G, γ), 즉 γ에 의해 각 정점에 정수 값이 부여된 그래프 G을 configuration이라 한다.

조건 1 만약 정점이 무한영역에 속하지 않으면 $\gamma(v) = \deg(v)$이고, 만약 정점이 무한영역에 속하면 $\gamma(v) > \deg(v)$이다.

그래프 G에서 한 정점 v를 제거하여 얻어진 유도된 부분그래프를 G/v라고 하자.

조건 2 G의 모든 정점 v에 대하여 G/v는 기껏해야 두 개의 연결 성분을 갖고 G/v의 연결성분이 두 개이면 v의 차수는 $\gamma(v) - 2$이다.

조건 3 G/v가 연결인 G의 무한영역에 속하는 모든 정점 v에 대한 합 $\sum(\gamma(v) - \deg(v) - 1)$(ring-size)은 2 이상이다.

위 세 가지 조건을 만족하는 동형이 아닌 configuration은 모두 633개로 분류되고, R.S.S.T의 논문에서 제시된 633개의 configuration을 good config-

uration이라 한다. 따라서 나머지 모든 configuration은 이런 good configuration 중 하나와 동형이 된다. G를 삼각분할이라 하고 (H, γ)를 configuration이라 하자. 그러면 '(H, γ)가 G에 나타난다'는 것은 (H, γ)가 G의 유도된 부분그래프이고 (H, γ)의 무한영역을 제외한 모든 영역이 G의 영역이며 (H, γ)의 각 정점 v에 대해 $\gamma(v)$가 G에서의 v의 차수 $\deg(v)$와 같을 때를 나타낸다.

다음은 R.S.S.T의 633개의 good configuration 중 몇 개만 그림 20에서 제시해 보겠다. R.S.S.T의 논문에서 표현된 good configuration에서는 각 정점의 정수 값이 아래와 같은 기호로 나타내어진다.

$\gamma(v) = 5 \rightarrow$ ● $\gamma(v) = 5 \rightarrow$ dot $\gamma(v) = 5 \rightarrow$ ○ $\gamma(v) = 5 \rightarrow$ □ $\gamma(v) = 5 \rightarrow$ ▽

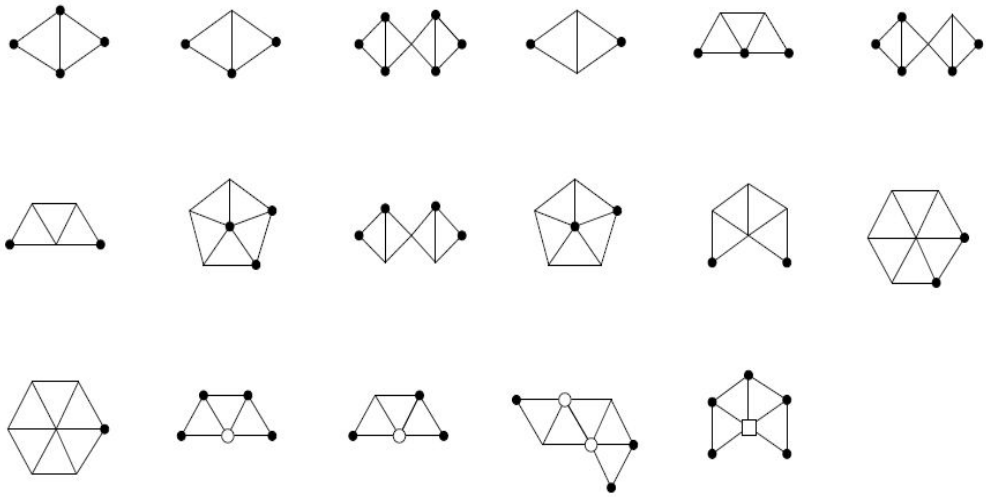


그림 20

2) Unavoidability(discharging)

Unavoidability란 어느 특정 그래프가 항상 good configuration을 가져야 한다는 것으로, good configuration을 피할 수 없는 이 특정그래프에 관해 먼저 알아 보도록 하자.

[정의4.4] 연결그래프 G에서 임의의 $k-1$개의 정점을 제거하여 여전히 연결그래프가 되면 그 그래프를 k-connected라 한다.

다음은 k-connected 성질을 약화시킨 것으로 $(k-1)$-connected와 k-connected의 중간단계를 표현한 성질이다.

[정의4.5] 그래프 G가 $k-1$-connected이고, 즉, 임의의 $k-2$개의 정점을 제거하여 여전히 연결그래프가 되고, 임의의 $k-1$개의 정점을 제거했을 때 연결그래프이거나 또는 하나의 정점이 한 성분을 이루는 두 개의 연결성분으로 나뉘어질 때 이 그래프를 internally k-connected라 한다.

1913년에 Birkhoff에 의해 아래 정리가 증명 되었다.

[정리4.6] 4색 정리의 모든 최소 반례인 그래프는 internally 6-connected인 triangulation이다.

위 정의 4.7에서 $k=6$일 때, 즉, 그래프 G가 internally 6-connected인 triangulation일 때, 우리가 원하는 good configuration을 찾을 수 있는데 이것은 discharging이란 방법으로 보여 질 수 있다. G을 internally 6-connect-ed인 triangulation이라 하자. G의 각 정점 v에 먼저 $10(6-\deg(v))$라는 charge를 배정 할 수 있고 이 charge를 재분배 시키는 과정을 discharging이라 하는데 이러한 discharging은 적당한 규칙에 따라서 이루어진다. R.S.S.T의 논문에서 이 규칙은 32개로 분류가 되는데 다음 그림 21이 이 규칙을 나타낸다.

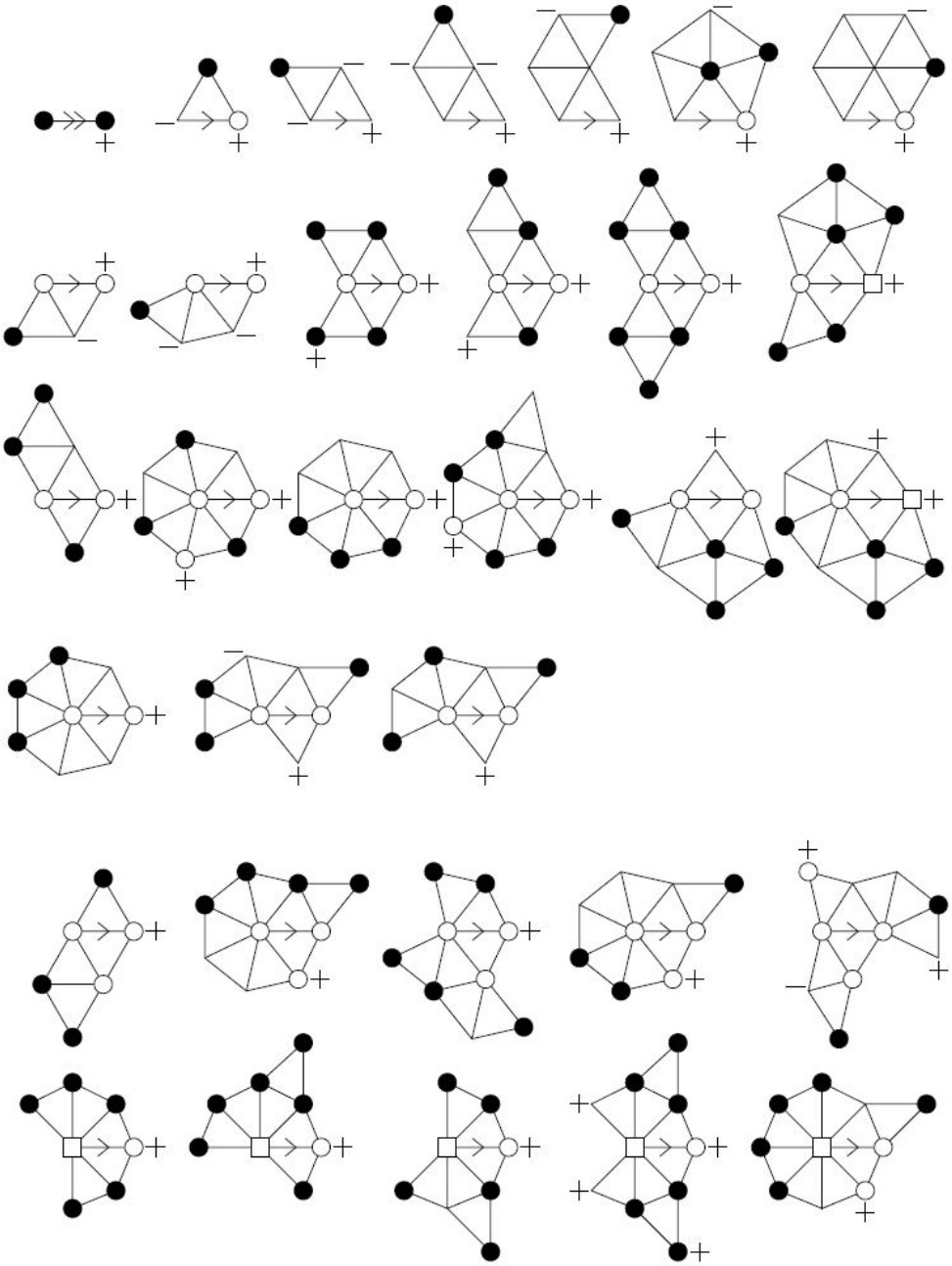


그림 21

그림 21에서 화살표는 charge의 이동을 나타내는데 이중 화살표는 charge 값 2가 이동하는 것이고 단 화살표는 charge값 1이 이동하는 것을 나타낸다. 또한 이러한 규칙이 그래프 G에 적용될 때 각각은 G의 유도된 부분그래프로 들어가야 되는데 음의 부호나 양의 부호를 가지는 정점에서는 G에서의 차수가 그 정점의 모양으로 정의되는 값보다 작거나 같아야 되고 부호가 없는 정점에서의 차수는 정확하게 그 정점의 모양에서 정의되는 값과 일치해야 한다. 한편 모든 정점에서의 charge의 초기 값 $10(6-\deg(v))$을 합하면 오일러의 공식에 의해 120이 되는데 discharging과정에서 이 합은 변하지 않는다. 따라서 항상 양의 charge 값을 갖는 정점이 존재하고 이러한 양의 charge값을 갖는 정점의 주변에서 good configuration이 나타난다. 정확히 말하면 이러한 정점들로부터 거리가 2 이하인 점들로 이루어진 유도된 부분그래프, 즉 이 정점의 second neighborhood에서 good configuration이 나타난다. 여기서 차수가 12 이상인 정점의 경우 discharging 방법으로 이 정점의 charge값은 양수로 재분배 될 수 없으므로 (discharging은 second neighborhood 안에서 만 charge 값을 교환하므로) 우리는 차수가 11 이하인 정점에서의 모든 가능한 discharging 방법만 고려하면 된다. 따라서 가능한 모든 경우의 수는 유한개로 분류되지만 과정이 너무 방대하고 복잡하여 이 부분에서 컴퓨터를 이용하였다.

[정리4.7] Internally 6-connected인 triangulation 안에는 항상 good configuration이 나타난다.

3) Reducibility

Reducibility란 주어진 그래프 G로부터 4-coloring이 가능한 더 작은 그래프를 찾아서 원래 그래프 G의 coloring을 얻는 것으로 C-reducibility와 D-reducibility인 두 가지 방법으로 나뉘어 진다. R.S.S.T의 증명에서 이러한 reducibility가 일어날 수 있는 지점으로 분류된 것이 바로 good configuration이라는 부분그래프이다. 먼저 C-reducibility는 G에 나타나는 good configuration (H, γ)의 경계부분(Ring)에서의 4-coloring 중, H의 무한영역에 속하는 G의 부분그래프와 H의 내부에 속하는 G의 부분그래프, 두 부분으로 동시에 확장 가능한 4-coloring을 찾는 것으로 이는 원래 주어진 그래프 G의 4-coloring을 제시한다. 다음으로 D-reducibility는 good configuration의 내부에 속하는 적당한 변을 제거하여 그래프를 수축시킴으로써 4-coloring이 가능한 더 작은 그래프를 찾는 것으로 제거하는 변은 4개 이하가 될 것이다. 이 때 이렇게 수축시켜 얻은 그래프의 4-coloring은 원래 그래프 G의 4-coloring으로 확장됨으로써 우리가 원하는 coloring을 얻을 수 있다. 두 방법 모두 체크해야 할 coloring의 수가 good configuration의 ring-size(경계부분(Ring)에 속하는 변의 수 $= \sum(\gamma(v) - \deg(v) - 1)$)에 의존하여 ring-size가 14인 Ring의 모든 가능한 4-coloring의 개수만 해도 약 200,000개로, 각 good configuration의 경계부분의 모든 4-coloring에 대해 G로 확장 가능한 coloring인지를 확인하는 작업에서 컴퓨터 계산이 수행되었다. 이러한 컴퓨터 작업으로 모든 configuration의 경계부분은 G의 4-coloring으로 확장 가능한 coloring을 가진다는 것을 확인하였다.

마지막으로 R.S.S.T의 증명을 다시 정리하면, 4-coloring이 가능하지 않은 그래프가 존재한다면 이러한 것들 중 최소 반례인 것은 정리 4.5에 의해 internally 6-connected인 triangulation이 되고, 따라서, 정리 4.6에 의해 good configuration을 부분그래프로 가지므로, 위의 reducibility의 과정에 의해 원래 그래프의 4-coloring을 얻음으로써 4-coloring의 반례라는 가정에 모순된 결과를 일으켜 다음과 같은 4색 정리를 증명하였다.

[정리4.8] 그래프 G가 평면그래프이면 $\chi(G) \leq 4$이다.

V.결론

우리는 ‘수학자가 종이와 연필로 증명하지 못해서 컴퓨터의 힘을 빌려 증명할 수밖에 없었던 최초의 수학문제는 무엇이었을까?’ 하는 생각을 할 수 있다. 이 물음의 답은 ‘4색 문제’이다. 이처럼 4색 문제는 증명되었지만 여전히 수학자들에게 있어 도전적인 문제로 남아있다. 하지만 비록 컴퓨터의 힘을 빌렸지만 4색 문제가 ’추측(Conjecture)'이 아닌 ‘정리(Theorem)'로써 자리매김 한 것 또한 큰 의미가 있고, 그리고 그 과정에서 얻게 된 소중한 결실인 그래프 이론 또한 오늘날 많은 학문분야에서 중요한 역할을 하고 있다. 따라서 이 논문에서는 4색 문제의 가장 최근 증명인 Robertson, Sanders, Seymour, Thomas의 증명 과정을 살펴보기 위해 먼저 그래프의 색칠에 관한 기본적인 개념들과 성질들을 정리해 보았고, 그리고 4색 문제의 증명에 앞서 Hewood의 5색 문제와 4색 문제와 관련된 정리들을 살펴보았다. 또한 마지막으로 Robertson, Sanders, Seymour, Thomas의 4색 문제의 증명을 간단히 요약하는 것으로 이 논문을 마무리 하였다. 이처럼 4색 문제와 관련된 정리들을 다시 소개하고 살펴봄으로써 여전히 수학자들의 숙제로 남아 있는 이 문제를 연구하는데 있어 조금이나마 도움이 되는 자료가 되었으면 하는 바램이다.

참 고 문 헌

[1] Richard A. Brualdi, Introductory Combinatorics. Pearson Education Inc (2004)

[2] R. L. Brooks: On coloring the nodes of a network, Proc. Cambridge Philos. Soc., 37(1941), 194-197

[3] L. R. Foulds, Graph Theory Applications. Springer-Verlag (1992)

[4] Jonathan L. Grocs Jay Yell Yellen, Handbook Graph Theory. CRC. Press (2004)

[5] Daniel A. Marcus, Graph Theory A Problem Oriented Approach. MAA TEXTBOOKS (2008)

[6] Daniel A. Marcus, Graph Theory. CRC. Press (2000)

[7] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, and R. Thomas, The four-colour theorem, J. Combin. Theory ser. B 70 (1997), 2-44

[8] R. Thomas, An Update on the Four-color Theorem (1998)

저작물 이용 허락서

학 과	수학교육	학 번	20088078	과 정	석사
성 명	한글: 정 가 영	한문: 鄭 賀 瑩	영문: Jung Ka-Young		
주 소	광주광역시 북구 일곡동 롯데 아파트 107동 103호				
연락처	010-5645-3098	E-MAIL: jungkayoung35@hanmail.net			
논문제목	한글 : 그래프의 색칠에 관한 연구 영문 : The study of graph coloring.				

본인이 저작한 위의 저작물에 대하여 다음과 같은 조건 아래 조선대학교가 저작물을 이용할 수 있도록 허락하고 동의합니다.

- 다 음 -

1. 저작물의 DB구축 및 인터넷을 포함한 정보통신망에의 공개를 위한 저작물의 복제, 기억장치에의 저장, 전송 등을 허락함
2. 위의 목적을 위하여 필요한 범위 내에서의 편집・형식상의 변경을 허락함. 다만, 저작물의 내용변경은 금지함.
3. 배포・전송된 저작물의 영리적 목적을 위한 복제, 저장, 전송 등은 금지함.
4. 저작물에 대한 이용기간은 5년으로 하고, 기간종료 3개월 이내에 별도의 의사표시가 없을 경우에는 저작물의 이용기간을 계속 연장함.
5. 해당 저작물의 저작권을 타인에게 양도하거나 또는 출판을 허락을 하였을 경우에는 1개월 이내에 대학에 이를 통보함.
6. 조선대학교는 저작물의 이용허락 이후 해당 저작물로 인하여 발생하는 타인에 의한 권리 침해에 대하여 일체의 법적 책임을 지지 않음
7. 소속대학의 협정기관에 저작물의 제공 및 인터넷 등 정보통신망을 이용한 저작물의 전송・출력을 허락함.

2010년 10월 22일

저작자: 정 가 영 (서명 또는 인)

조선대학교 총장 귀하